

**Курс Научно-образовательного центра при  
Математическом институте им. В.А.Стеклова РАН**

**”Алгебры Клиффорда и уравнения теории поля”.**

**Лектор: Д.С.Широков.**

**Осень 2014 г.**

Основное внимание в курсе будет уделено изучению классических уравнений теории поля: уравнения Дирака, систем уравнений Максвелла, Дирака-Максвелла, Янга-Миллса и Дирака-Янга-Миллса. При изучении уравнений (систем уравнений) предлагается использовать формализм алгебр Клиффорда, эквивалентный матричному формализму. Формализм алгебр Клиффорда в ряде случаев бывает более удобен, чем матричный формализм, например, при описании спинорных групп, при обобщении теории на произвольную размерность или при отыскании некоторых частных решений рассматриваемых уравнений.

Курс, с одной стороны, можно воспринимать как продолжение курса "Алгебры Клиффорда и спиноры" (см. конспект лекций [9]), прочитанного автором осенью 2011 года в рамках НОЦ при Математическом институте им. В.А.Стеклова. С другой стороны, курс может восприниматься как абсолютно независимый от предыдущего, т.к. все необходимые для изложения понятия будут введены и подробно изложены заново. Никаких предварительных знаний от слушателей не требуется. Курс будет полезен как студентам младших курсов для расширения своего кругозора, так и студентам старших курсов и аспирантам для возможного применения аппарата алгебр Клиффорда в различных приложениях.

Несколько слов об алгебрах Клиффорда. Алгебра Клиффорда была введена английским математиком В.Клиффордом в 1878 году как алгебра, объединяющая свойства алгебры Грассмана (внешней алгебры) и кватернионов Гамильтона. Теория алгебр Клиффорда развивалась усилиями многих математиков - Р.Липшицем, Э.Картаном, К.Т.Валеном, Э.Уиттом, К.Шевалле, М.Риссом, Я.Р.Портеусом и другими. Настоящий курс построен таким образом, что алгебра Клиффорда рассматривается не как абстрактная алгебра, а как математический аппарат, который активно применяется в математической физике. В настоящее время алгебра Клиффорда используется во многих разделах современной матема-

тики и физики - геометрии, теории поля, механике, робототехнике, обработке сигналов и изображений, химии, космической динамике, электродинамике и др. С 1985 года каждые три года проходит международная конференция ICSSA<sup>1</sup> по алгебрам Клиффорда и ее приложениям в математической физике. С 1990 года выходит журнал *Advances in Applied Clifford Algebras*<sup>2</sup> (ААСА, 4 выпуска в год).

### План курса:

- Определение алгебры Клиффорда. Алгебра матриц Дирака. Алгебра Грассмана. Матричные представления алгебр Клиффорда, периодичность Картана-Ботта. Эрмитовы идемпотенты и связанные с ними левые идеалы, реализация спиноров в алгебрах Клиффорда. Структура унитарного пространства на алгебре Клиффорда. Метод кватернионной типизации.
- Ортогональные и псевдоортогональные группы и их подгруппы (ортохронная, ортохорная и др.). Спинорные группы в формализме алгебр Клиффорда. Доказательство теоремы о двулистных накрытиях ортогональных групп спинорными в случае произвольной размерности и сигнатуры пространства. Теорема Паули (о связи двух наборов генераторов) и ее обобщения, связь с теорией представлений.
- Оператор Клейна-Гордона-Фока. Уравнение Дирака в формализме алгебры Клиффорда: частные решения (общее решение свободного уравнения, собственные функции для оператора Дирака в кулоновском поле), гамильтониан, действие, лагранжиан, инвариантность при ортогональных преобразованиях, калибровочная инвариантность, обобщение на произвольную размерность. Билинейные коварианты, закон сохранения заряда. Дираковское, Майорановское и зарядовое сопряжения. Обращение времени и четности. Спин, оператор спина. Киральный оператор, уравнение Вейля. Спиноры Паули, Дирака, Вейля, Майорана, Вейля-Майорана.

---

<sup>1</sup>International Conference on Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics. Последняя конференция (ICSSA10) прошла в 2014 году в Тарту (Эстония).

<sup>2</sup>Журнал ААСА издается издательством Birkhauser Verlag, индексируется Web of Science.

- Уравнения Максвелла. Уравнения Дирака-Максвелла. Калибровочная инвариантность. Инвариантность при ортогональных преобразованиях. Лагранжиан. Уравнения Янга-Миллса. Уравнения Дирака-Янга-Миллса. Тензоры со значениями в алгебре Клиффорда. Неабелев закон сохранения. Калибровочное преобразование, калибровочная группа. Некоторые классы частных решений уравнений Янга-Миллса, инстантонное решение. Алгебра Атьи-Кэлера, алгебра  $h$ -форм. Метод сверток (усреднений) и обобщенных сверток в алгебрах Клиффорда.

### Рекомендованный список литературы

1. Lounesto P., *Clifford Algebras and Spinors*, Cambridge Univ. Press (1997, 2001).
2. Benn I. M., Tucker R. W., *An introduction to Spinors and Geometry with Applications in Physics*, Publishing Ltd, (1987).
3. D.Hestenes, G.Sobczyk, *Clifford Algebra to Geometric Calculus - A Unified Language for Mathematical Physics*, Reidel P.C. (1984).
4. M.F. Atiyah, R. Bott, A.Shapiro, *Clifford modules*, Topology 3, pp. 3-38 (1964).
5. Chevalley C., *The algebraic theory of Spinors and Clifford algebras*, Springer, (1996).
6. Н.В. Lawson, Jr., М.-L. Michelsohn, *Spin geometry*, Princeton Math. Ser., 38, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1989.
7. T. Friedrich, *Dirac Operators in Riemannian Geometry*, Grad. Stud. Math., 25, Amer.Math.Soc., Providence, RI, 2000.
8. А.Мессия, Квантовая механика, Том 2, Москва, Наука, 1979.
9. Широков Д.С., Лекции по алгебрам Клиффорда и спинорам, Лекционные курсы НОЦ, Выпуск 19, МИАН, 2012, 180 с., <http://mi.mathnet.ru/book1373>.
10. Марчук Н.Г. Уравнения теории поля и алгебры Клиффорда, Ижевск, РХД, (2009), 302 стр.
11. Марчук Н.Г., Широков Д.С., Введение в теорию алгебр Клиффорда, Фазис, 2012, 590 с.