ВВЕДЕНИЕ В НЕКОММУТАТИВНУЮ ГЕОМЕТРИЮ

А.Г.Сергеев

18 июня 2016

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

Истоки некоммутативной геометрии следует искать в теории коммутативных банаховых алгебр и ее связях с топологией, установленных в работах И.М.Гельфанда, М.А.Наймарка, Г.Е.Шилова, Б.Мазура и других математиков в середине XX-го века. Главная идея этих работ состояла в том, что основные понятия топологии компактных топологических пространств могут быть переформулированы на языке коммутативных банаховых алгебр непрерывных функций на этих пространствах.

Одной из целей некоммутативной геометрии является установление подобного соответствия между топологией, анализом и дифференциальной геометрией, с одной стороны и банаховыми алгебрами, с другой. Иными словами, речь идет о переводе основных понятий топологии, анализа и геометрии на язык банаховых алгебр. В этом случае мы уже не сможем ограничиваться теорией коммутативных банаховых алгебр и будем вынуждены использовать также некоммутативные банаховы алгебры, более точно, C^*-алгебры операторов в гильбертовом пространстве.

При этом возникает естественный вопрос: а зачем нужен подобный перевод? Мы можем привести, по крайней мере, одно из соображений, оправдывающих указанную деятельность. Хорошо известно, что квантовая теория поля остается в большой степени физической теорией, не имеющей солидной математической базы. В отличие от квантовой механики, которую можно рассматривать с некоторой осторожностью как строгую математическую дисциплину, многие результаты квантовой теории поля (и теории струн, в особенности) установлены только на "физическом уровне строгости", и не имеют корректных математических доказательств. Одной из причин подобной ситуации является, по нашему мнению, отсутствие адекватного математического языка, пригодного для описания физических проблем, возникающих в этой теории.

Думаем, что такой язык должен включать в себя в качестве одного из необходимых ингредиентов дифференциальную геометрию гладких бесконечномерных многообразий. Однако, классические понятия дифференциальной геометрии, такие как связность, кривизна и т.д., не выдерживают переходя к бесконечному числу переменных. Например, различные эквивалентные определения связности, известные в конечномерном случае, приобретают разный смысл (или совсем его утрачивают) в случае бесконечномерных многообразий. Еще хуже обстоит дело с кривизной, которую вообще не удается корректно определить в бесконечномерии по аналогии с конечномерным случаем.

В подобной ситуации наиболее адекватным языком для описания понятий топологии, анализа и дифференциальной геометрии на бесконечномерных многообразиях представляется наиболее "грубый" из имеющихся математических языков, а именно, алгебраический. Нам кажется, что именно он имеет наивысшие шансы на "выживание" при переходе к бесконечномерию. Для того, чтобы использовать этот язык в бесконечномерном случае, необходимо иметь "словарь", транслирующий основные понятия топологии, анализа и дифференциальной геометрии на язык банаховых алгебр в обычной конечномерной ситуации. Разработка такого словаря и составляет основное содержание курса. Имея в виду указанную цель, мы сосредоточиваемся в большей степени на идеях, нежели на технических деталях. По той же причине мы опускаем некоторые доказательства, приводя в таких случаях точные ссылки на другие издания.

Предлагаемый вниманию читателя текст основан на курсе лекций, который читался автором в Научно-образовательном центре (НОЦ) Математического института им. В.А.Стеклова РАН в течение весенних семестров 2014-го и 2015-го годов.

Лекции сопровождались семинаром НОЦ, посвященным той же теме. Многие из вопросов, только затронутых в настоящем тексте, подробно разбирались на этом семинаре. Я глубоко благодарен Александру Комлову, Иннокентию Маресину и Роману Пальвелеву, взявшим на себя главный труд по организации семинара. Хочу также поблагодарить слушателей курса, вопросы и замечания которых помогли значительно улучшить исходный текст.

При его подготовке автор пользовался частичной финансовой поддержкой со стороны грантов РФФИ 16-01-00117, 13-02-91330 и программой Президиума РАН "Нелинейная динамика".

Москва А.Г.Сергеев

Глава 1

ТОПОЛОГИЯ

В этой главе дается интерпретация основных понятий топологии в терминах банаховых алгебр. В параграфе 1.1 доказывается теорема Гельфанда–Наймарка, устанавливающая посредством преобразования Гельфанда соответствие между коммутативными C^*-алгебрами и алгебрами непрерывных функций на их спектрах. Эта теорема позволяет интерпретировать топологические свойства компактов в терминах алгебр непрерывных функций на них.

Параграф 1.2 посвящен доказательство теоремы Серра–Суона об эквивалентности категории векторных расслоений над заданным компактным многообразием и категории конечно порожденных проективных модулей над алгеброй непрерывных функций на этом многообразии.

В параграфе 1.3 вводятся понятия из теории C^*-модулей над C^*-алгебрами, необходимые для дальнейшего. Определяются тензорные произведения таких модулей и стандартные классы действующих в них линейных операторов. Главным результатом этого параграфа является аналог теоремы Серра-Суона для C^*-алгебр A, устанавливающий взаимно-однозначное соответствие между A-компактными проекторами и конечно порожденными проективными C^*-модулями над A.

В параграфе 1.4 излагаются основы K-теории C^*-алгебр. Дается определение топологических и алгебраических K_0- и K_1-групп и формулируется теорема периодичности Ботта, выражающая высшие K-группы через уже введенные. Доказывается совпадение топологической и алгебраической K_0-групп.

Параграф 1.5 посвящен теории фредгольмовых операторов. Сначала излагаются основные сведения из стандартной теории фредгольмовых операторов в гильбертовом пространстве и формулируется теорема Атьи–Ениха, утверждающая, что множество гомотопических классов семейств фредгольмовых операторов, параметризуемых точками компактного топологического пространства X, можно отождествить с K_0-группой $K_0(X) := K(\mathrm{Vect}(X)$, совпадающей с группой Гротендика полугруппы $\mathrm{Vect}(X)$ виртуальных векторных расслоений над X. Затем указанная теория обобщается на случай A-фредгольмовых операторов, действующих в C^*-модулях над C^*-алгебрами A. Для регулярных A-фредгольмовых операторов удается определить понятие индекса, обладающего привычными свойства обычного индекса Фредгольма. Введенный индекс принимает значения в K_0-группе алгебры A и для него справедлив A-алгебраический аналог теоремы Атьи–Ениха.

Завершается глава параграфом 1.6, посвященным морита-эквивалентности C^*-алгебр. Важность указанного понятия объясняется, помимо прочего тем, что K_0-группы морита-эквивалентных C^*-алгебр изоморфны (теорема Экселя).

1.1 Коммутативные банаховы алгебры

В этом параграфе излагаются основы теории C^*-алгебр ы том виде, в каком они сформировались в трудах И.М.Гельфанда, М.А.Наймарка и их школы в середине XX-го века.

После первоначальных сведений из теории банаховых алгебр, излагаемых в пп.1.1.1,1.1.2, мы обращаемся затем к случаю коммутативных банаховых алгебр и доказываем в п.1.1.4 основную теорему Гельфанда–Наймарка, дающую интерпретацию коммутативной C^*-алгебры в терминах пространства непрерывных функций на ее спектре.

В п.1.1.6 приводится процедура, известная под именем ГНС-конструкции, позволяющая построить по произвольному состоянию на заданной C^*-алгебре представление этой алгебры в некотором гильбертовом пространстве. Указанная конструкция позволяет реализовать произвольную C^*-алгебру в виде алгебры линейных ограниченных операторов, действующих в гильбертовом пространстве (п.1.1.7).

Заключается параграф коротким "словарем" соответствия между топологическими свойствами компактов и эквивалентными им свойствами коммутативных банаховых алгебр с единицей.

1.1.1 C^*-алгебры

Определение 1. *Банаховой алгеброй* называется ассоциативная алгебра A над полем $\mathbb{C}$, являющаяся одновременно полным нормированным пространством, в котором выполняются соотношения

$$\|ab\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$$

для всех элементов $a, b \in A$. Если алгебра A *унитальна*, т.е. содержит единицу 1, то предполагается, что $\|1\| = 1$.

Определение 2. *Инволюцией* в алгебре A называется изометрическое антилинейное отображение $a \mapsto a^*$, обладающее свойствами:

$$a^{**} = a, \quad (ab)^* = b^* a^*$$

для любых $a, b \in A$. Банахова алгебра с инволюцией называется иначе *банаховой *-алгеброй. C^*-алгеброй* называется банахова *-алгебра A, обладающая дополнительным свойством

$$\|a^2\| = \|a^* a\|$$

для всех $a \in A$.

Стандартным примером такой алгебры является алгебра непрерывных функций на компакте.

Определение 3. Пусть X – компактное топологическое пространство, которое, как и другие топологические пространства, рассматриваемые ниже, предполагается хаусдорфовым. Обозначим через $C(X)$ алгебру непрерывных функций $f : X \to \mathbb{C}$, наделенную нормой

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Единицей в алгебре $C(X)$ служит функция $f \equiv 1$, а роль инволюции играет отображение: $f \mapsto f^*$, где $f^*(x) := \overline{f(x)}$.

Введенная норма обладает, очевидно, свойством

$$\|f\|^2 = \|f^* f\|$$

и потому является C^*-алгеброй. Тем самым, $C(X)$ есть коммутативная унитальная (т.е. обладающей единицей) C^*-алгебра.

Дополнение: (добавление единицы и компактификация).

Всякую неунитальную банахову алгебру A можно сделать унитальной, формально добавляя к ней единицу 1_A. Иначе говоря, можно расширить A до алгебры $A^+ := A \times \mathbb{C}$ с очевидными правилами сложения и умножения на комплексные числа, а также инволюцией. Произведение в A^+ вводится по правилу:

$$(a, \lambda) \cdot (b, \mu) = (ab + \mu a + \lambda b, \lambda\mu),$$

так что 1_A отождествляется с элементом $(0, 1)$. Норма элемента (a, λ) определяется как

$$\|(a, \lambda)\| := \sup_{\|b\| \le 1} \{\|ab + \lambda b\|\}.$$

Построенная алгебра A^+ является унитальной C^*-алгеброй, если A есть C^*-алгебра.

Посмотрим, что отвечает указанной процедуре *унитализации* в случае коммутативной банаховой алгебры, состоящей из непрерывных функций.

Пусть Y есть локально компактное топологическое пространство. Обозначим через $Y^+ := Y \cup \{\infty\}$ одноточечную компактификацию пространства Y и рассмотрим подалгебру $C_0(Y)$ в алгебре $C(Y^+)$, состоящую из функций, обращающихся в нуль на бесконечности. Сужения этих функций на Y образуют неунитальную C^*-алгебру функций, стремящихся к нулю на бесконечности, унитализация которой совпадает с алгеброй $C(Y^+)$.

Обратно, если удалить из компактного топологического пространства X неизолированную точку $x_0 \in X$, то полученное пространство $Y := X \setminus x_0\}$ будет локально компактно, причем $Y^+ = X$ и $C_0(Y) = \{f \in C(X) : \ f(x_0) = 0\}$.

Таким образом, процедура унитализации отвечает на языке топологических пространств одноточечной компактификации.

1.1.2 Характеры и спектр

Определение 4. *Характером* банаховой алгебры A называется гомоморфизм алгебр $\mu : A \to \mathbb{C}$. Иначе говоря, это ненулевой линейный функционал μ :

$A \to \mathbb{C}$ на алгебре A, обладающий свойством мультипликативности, т.е. $\mu(ab) = \mu(a)\mu(b)$ для всех $a, b \in A$. Если алгебра A унитальна, то $\mu(1_A) = 1$. Множество характеров алгебры A обозначается через $M(A)$ и называется иначе *спектром алгебры* A.

Пример 1. Примером характера алгебры $A = C(X)$ непрерывных функций на компактном топологическом пространстве может служить отображение *эвалюации* = "значение в точке" $x \in X$:

$$\varepsilon_x : f \longmapsto f(x), \quad f \in A.$$

Замечание 1. В случае, если A – неунитальная алгебра, любой характер $\mu \in M(A)$ можно продолжить на ее унитализацию A^+, полагая: $\mu(0,1) = 1$. При этом нулевой функционал на A продолжится до ненулевого характера на A^+, задаваемого формулой: $(a, \lambda) \mapsto \lambda$. Тем самым, пространство $M(A^+)$ можно отождествить с $M(A) \cup \{0\}$.

Определение 5. *Спектром* $\mathrm{sp}(a)$ элемента a унитальной банаховой алгебры A называется множество комплексных чисел λ таких, что элемент $a - \lambda 1_A$ не обратим в A. Если алгебра A не унитальна, то спектр a состоит из комплексных чисел λ таких, что элемент $a - \lambda 1_{A^+}$ не обратим в A^+.

Приведем два важных свойства спектра элементов унитальной банаховой алгебры A, доказательство которых проводится также, как доказательство аналогичных свойств спектра ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве.

- Спектр $\mathrm{sp}(a)$ произвольного элемента $a \in A$ замкнут. Кроме того, он ограничен, точнее, содержится в круге $\{\lambda \in \mathbb{C}\ |\lambda| \leq \|a\|\}$, откуда следует, что $\mathrm{sp}(a)$ компактен.

- Спектр $\mathrm{sp}(a)$ произвольного элемента $a \in A$ непуст.

Для унитальной алгебры A значение $\mu(a)$ любого характера $\mu \in M(A)$ в произвольной точке $a \in A$ принадлежит спектру: $\mu(a) \in \mathrm{sp}(a)$, так как иначе элемент $\mu(a - \mu(a)1_A) = 0$ оказался бы обратимым в $\mathbb{C}$. Так как $\mathrm{sp}(a) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} :\ |\lambda| \leq \|a\|\}$, отсюда следует, что $|\mu(a)| \leq \|a\|$, т.е. $\|\mu\| \leq 1$, где

$$\|\mu\| = \sup_{a \in A} \frac{|\mu(a)\|}{\|a\|}. \tag{1.1}$$

На самом деле, $\|\mu\| = 1$, поскольку $\mu(1_A) = 1$.

Определение 6. Элемент $a \in A$ банаховой *-алгебры A называется *самосопряженным* , если $a^* = a$.

Заметим, что произвольный элемент a банаховой алгебры A можно записать в виде суммы $a = \alpha + i\beta$ элементов алгебры A, равных

$$\alpha = \frac{a + a^*}{2}\,,\ \beta = \frac{a - a^*}{2i}\,, \tag{1.2}$$

являющихся самосопряженными элементами алгебры A. В этих терминах $a^* = \alpha - i\beta$.

Лемма 1. *Пусть a есть самосопряженный элемент C^*-алгебры A. Тогда значение $\mu(a)$ любого характера $\mu \in M(A)$ на этом элементе вещественно.*

Доказательство. Рассмотрим экспоненту $u := \exp(ia)$ от элемента ia. Она задается рядом

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ia)^k}{k!},$$

который сходится и удовлетворяет оценке: $\|u\| \leq e^{\|a\|}$. Кроме того, $u^* = \exp(-ia)$, так что $uu^* = u^*u = 1_A$. Отсюда следует, что элемент u обратим и $u^{-1} = u^*$. Из соотношения $\|u\|^2 = \|u^*u\| = 1$ вытекает, что $\|u\| = 1$ и, аналогично, $\|u^{-1}\| = 1$. Поскольку $\|\mu\| \leq 1$, то из последних равенств получаем, что $|\mu(u)| \leq 1$ и $|\mu(u)|^{-1} = |\mu(u^{-1})| \leq 1$, откуда $|\mu(u)| = 1$. Но

$$\mu(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu(ia)^k}{k!} = e^{i\mu(a)}.$$

Учитывая, что $|\mu(u)| = 1$, последнее возможно только при условии, что $\mu(a) \in \mathbb{R}$. □

Введем еще одно важное понятие, связанное со спектром.

Определение 7. *Спектральным радиусом* элемента $a \in A$ называется число $r(a)$, равное

$$r(a) = \max\{|\lambda| : \ \lambda \in \mathrm{sp}(a)\}.$$

Иными словами, $r(a)$ совпадает с радиусом наименьшего замкнутого круга с центром в нуле, содержащего $\mathrm{sp}(a)$ и, в частности, $r(a) \leq \|a\|$.

Спектральный радиус можно вычислить по *формуле Коши–Адамара*

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}.$$

Из нее следует, что для самосопряженного элемента $a = a^* \in A$ его спектральный радиус совпадает с нормой: $r(a) = \|a\|$ (почему?).

1.1.3 Спектр коммутативной банаховой алгебры. Преобразование Гельфанда

Обозначим через A^* банахово пространство непрерывных линейных функционалов $\varphi : A \to \mathbb{C}$ на алгебре A с нормой (1.1). Наделим его $*$-слабой топологией, т.е. топологией поточечной сходимости на элементах из A. В случае, когда $A = C(X)$ есть алгебра непрерывных функций на компакте X, пространство A^* состоит из комплексных мер на X с обычной топологией. По теореме Банаха–Алаоглу единичный шар A_1^* в пространстве A^* компактен в $*$-слабой топологии. Поскольку спектр $M(A)$ алгебры A содержится в A_1^*, мы можем наделить его индуцированной топологией.

Лемма 2. *Спектр коммутативной банаховой алгебры является локально компактным топологическим пространством.*

Доказательство. Покажем сначала, что пространство $M(A) \cup \{0\}$ замкнуто в $*$-слабой топологии, т.е. что $*$-слабый предел элементов из $M(A) \cup \{0\}$ принадлежит снова $M(A) \cup \{0\}$. Поскольку $*$-слабый предел непрерывных линейных функционалов из A' принадлежит A', нужно проверить только, что свойство мультипликативности сохраняется после перехода к указанному пределу. Действительно, для фиксированных элементов $a, b \in A$ отображение

$$M(A) \cup \{0\} \ni \mu \longmapsto \mu(a)\mu(b) - \mu(ab)$$

$*$-непрерывно и равно нулю на $M(A) \cup \{0\}$, поэтому оно равно нулю и на замыкании $M(A) \cup \{0\}$ в A'. Это доказывает, что пространство $M(A) \cup \{0\}$ замкнуто. Будучи замкнутым подмножеством компакта A'_1, оно также компактно. Следовательно, исходное пространство $M(A)$ локально компактно.

Если алгебра A унитальна, то отсюда следует, что уже само пространство $M(A)$ компактно, поскольку точка $\{0\}$ (отвечающая эвалюации в бесконечности) изолирована от $M(A)$ (заметим, что непрерывный функционал $\mu \in M(A) \mapsto \mu(1_A)$ отделяет ее от $M(A)$).

□

Определение 8. Пусть A – коммутативная банахова алгебра. Ее *преобразованием Гельфанда* называется отображение

$$\mathcal{G} : A \longrightarrow C_0(M(A)),$$

задаваемое формулой

$$A \ni a \longmapsto \hat{a} : M(A) \to \mathbb{C}, \quad \text{где } \hat{a}(\mu) := \mu(a).$$

Здесь через $C_0(M(A))$ обозначается пространство непрерывных функций на $M(A)$, стремящихся к нулю "на бесконечности". Оно состоит из функций f, непрерывных на X и обладающих следующим свойством: множество $\{x \in X : |f(x)| \geq \varepsilon\}$ компактно для любого $\varepsilon > 0$.

Заметим, что преобразование Гельфанда $A \to C_0(M(A))$ непрерывно.

Посмотрим, как оно действует на инволюцию в алгебре A. Если A есть C^*-алгебра и $\mu \in M(A)$, то в соответствии с разложением (1.2)

$$\mu(a^*) = \mu(\alpha - i\beta) = \mu(\alpha) - i\mu(\beta) = \overline{\mu(a)}.$$

Последнее равенство справедливо, поскольку по лемме 1 значения характера μ на самосопряженных элементах вещественны.

Следовательно, $\widehat{a^*}(\mu) = \overline{\hat{a}(\mu)}$, т.е.

$$\mathcal{G}(a^*) = \overline{\mathcal{G}(a)}.$$

Иными словами, преобразование Гельфанда коммутирует с инволюциями в A и $C_0(M(A))$, т.е. является *-*гомоморфизмом*.

Для характеров справедлив следующий вариант теоремы Хана-Банаха.

Лемма 3. *Пусть A есть унитальная коммутативная C^*-алгебра и $a \in A$. Если $\lambda \in sp(a)$, то найдется характер $\mu \in M(S)$ такой, что $\mu(a) = \lambda$.*

Доказательство. Мы покажем, что *ядро любого характера алгебры A является максимальным идеалом и, наоборот, любой максимальный идеал в алгебре A совпадает с ядром некоторого характера.*

Допустим, что этот факт уже установлен, выведем из него утверждение леммы. Рассмотрим идеал алгебры A вида $(a-\lambda 1_A)A$. Тогда этот идеал содержится в некотором максимальном идеале (указанное утверждение вытекает из леммы Цорна; почему?), который ввиду принятого нами факта совпадает с ядром $\operatorname{Ker}\mu$ некоторого характера μ. Иначе говоря, $\mu(a-\lambda 1_A)=0$, т.е. $\mu(a)=\lambda$.

Вернемся к доказательству сформулированного выше факта. Если μ – характер алгебры A, то его ядро $\operatorname{Ker}\mu$ является идеалом в алгебре A. Допустим, что этот идеал не является максимальным, т.е. найдется собственный идеал I алгебры A, содержащий ядро $\operatorname{Ker}\mu$ и не совпадающий с ним. Возьмем элемент $a_0\in I$, не принадлежащий $\operatorname{Ker}\mu$. Тогда характер μ на этом элементе отличен от нуля. Но элемент $a_0-\mu(a_0)1_A$ содержится в ядре μ, а значит и в идеале I. В этом случае элемент $a_0-(a_0-\mu(a_0)1_A)=\mu(a_0)1_A$ также содержится в идеале I, откуда следует, что идеал I содержит 1_A, т.е. $I=A$ вопреки предположению о его собственности.

Обратно, пусть задан собственный максимальный идеал I. Заметим, прежде всего, что I замкнут. Действительно, замыкание I является идеалом в A, который ввиду максимальности I должен совпадать либо с самим идеалом I, либо со всей алгеброй A. Но собственный идеал не может быть плотным в A, поскольку множество обратимых элементов алгебры A, очевидно, открыто, а идеал I не содержит ни одного из них (иначе он совпадал бы с A). Следовательно, замыкание I должно совпадать с I, т.е. I замкнут.

Так как I замкнут, фактор-алгебра A/I по этому идеалу является коммутативной банаховой алгеброй с единицей. Более того, эта алгебра является простой, т.е. не содержит никаких собственных идеалов. Действительно, если бы такой идеал существовал, то его прообраз при естественной проекции $A\to A/I$ был бы собственным идеалом в A, содержащим идеал I, что невозможно ввиду максимальности последнего. Это означает, что фактор-алгебра A/I является полем, т.е. любой ее ненулевой элемент обратим (так как главный идеал, порождаемый таким элементом, должен совпадать со всей алгеброй).

Это поле обязательно совпадает с $\mathbb{C}$. Действительно, возьмем произвольный элемент $x\in A/I$. Так как его спектр $\operatorname{sp}(x)$ непуст, найдется такое $\lambda\in\operatorname{sp}(x)$, что элемент $x-\lambda 1_A$ не обратим, т.е. по доказанному равен нулю, откуда $x=\lambda 1_A$. Тем самым, установлен изоморфизм между A/I и $\mathbb{C}$.

Но если $A/I=\mathbb{C}$, то естественная проекция $A\to A/I$ является характером алгебры A, ядро которого совпадает с I. $\square$

1.1.4 Теорема Гельфанда–Наймарка

Прежде, чем переходить к теореме теореме Гельфанда–Наймарка, приведем формулировку теоремы Стоуна–Вейерштрасса, на которой основано ее доказательство.

Теорема 1 (Стоун–Вейерштрасс)**.** *Пусть X – локально компактное топологическое пространство, B – замкнутая подалгебра в $C_0(X)$, которая разделяет* *точки X. Предположим, что алгебра B не обращается в нуль ни в одной точке X (напомним, что подалгебра B в алгебре $C_0(X)$ не обращается в нуль в точке $x \in X$, если найдется функция из B, не равная нулю в этой точке) и замкнута относительно комплексного сопряжения. Тогда $B = C_0(X)$.*

Теорема 2 (Гельфанд–Наймарк). *Пусть A – коммутативная C^*-алгебра. Тогда преобразование Гельфанда задает изометрический $*$-изоморфизм $\mathcal{G} : A \to C_0(M(A))$.*

Доказательство. Как мы уже показали, преобразование Гельфанда задает $*$-гомоморфизм. Его изометричность вытекает из следующей цепочки равенств:

$$\|\widehat{a}\|^2 = \|\hat{a}^*\hat{a}\| = \|\widehat{a^*a}\| = r(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2,$$

где равенство $\|\widehat{a^*a}\| = r(a^*a)$ (r – спектральный радиус) вытекает из Леммы 3 (почему?).

В частности, преобразование Гельфанда инъективно. Поэтому образ $\mathcal{G}(A)$ алгебры A в $C_0(M(A))$ является подалгеброй, которая полна (поскольку полна алгебра A, а $\mathcal{G}$ изометрично) и, следовательно, замкнута. Отображение эвалюации разделяет мультипликативные функционалы на A и алгебра $\mathcal{G}(A)$ не обращается в нуль ни в одной точке $M(A)$. Кроме того, алгебра $\mathcal{G}(A)$ замкнута относительно комплексного сопряжения. Следовательно, по теореме Стоуна–Вейерштрасса подалгебра $\mathcal{G}(A)$ совпадает с $C_0(M(A))$. □

1.1.5 Положительные элементы и состояния

Определение 9. Элемент $a \in A$, принадлежащий C^*-алгебре $\mathcal{A}$, называется *положительным*, если он самосопряжен и его спектр $\mathrm{sp}(a)$ неотрицателен, т.е. принадлежит $[0, \infty)$.

Нетрудно показать, что элемент $a \in \mathcal{A}$ является положительным тогда и только тогда, когда он представляется в виде $a = b^*b$ для некоторого элемента $b \in \mathcal{A}$. (Воспользуйтесь для этого тем, что любой положительный элемент обладает квадратным корнем, т.е. элементом $\sqrt{a} \in A$, таким, что $(\sqrt{a})^2 = a$.)

Пользуясь введенным определением, можно ввести на самосопряженных элементах C^*-алгебры A отношение частичного порядка.

Определение 10. Пусть a и b – самосопряженные элементы C^*-алгебры A. Будем говорить, что $a \leqslant b$, если элемент $b - a$ положителен.

Любой положительный элемент $a \in A$ удовлетворяет неравенству

$$0 \leq a \leq \|a\| \, 1_A,$$

поскольку $\mathrm{sp}(\|a\| \, 1_A - a) \subset [0, +\infty)$.

Определение 11. Линейный функционал $\varphi : A \to \mathbb{C}$ называется *положительным*, если $\varphi(a) \geqslant 0$ для любого положительного элемента $a \in A$ или, эквивалентно, $\varphi(b^*b) \geq 0$ для любого элемента $b \in A$.

Если алгебра A унитальна, то любой положительный функционал φ на ней является ограниченным, причем $\|\varphi\| = \varphi(1_A)$. Обратно, любой линейный ограниченный функционал на такой алгебре, обладающий свойством: $\|\varphi\| = \varphi(1_A)$, обязательно положителен.

Определение 12. Положительный линейный функционал φ на C^*-алгебре A называется *состоянием*, если его норма равна 1: $\|\varphi\| = 1$. Состояние называется *следом*, если $\varphi(ab) = \varphi(ba)$ для любых $a, b \in A$.

Множество состояний является выпуклым множеством, т.е. для любых состояний φ, ψ на алгебре A их выпуклая линейная комбинация $t\varphi + (1-t)\psi$ с $t \in [0, 1]$ также является состоянием.

Определение 13. Состояние φ называется *чистым*, если оно не представляется в виде выпуклой линейной комбинации других состояний, т.е. если φ не представляется в виде суммы $\varphi = t\psi_1 + (1-t)\psi_2$, где ψ_1, ψ_2 – состояния на A, $t \in (0, 1)$.

Пример 2 (И.В.Маресин)**.** Рассмотрим в качестве примера состояния на алгебре $\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$. Положительные элементы a в алгебре $\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$ имеют вид: $a = (a_1, a_2)$, где $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$. Поэтому состояния на алгебре $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ задаются функционалами вида
$$\varphi(a) = \varphi_1 a_1 + \varphi_2 a_2, \quad \text{где } \varphi_1 \geq 0,\ \varphi_2 \geq 0,\ \varphi_1 + \varphi_2 = 1.$$

Еще один пример — состояния на алгебре $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$. Положительные элементы a в алгебре $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ имеют вид:
$$a = \begin{pmatrix} a_1 & c \\ \bar{c} & a_2 \end{pmatrix}, \quad \text{где } a_1, a_2 \in \mathbb{R},\ a_1 + a_2 \geq 0,\ c \in \mathbb{C},\ a_1 a_2 - |c|^2 \geq 0$$
(выписанные неравенства означают, иными словами, что оба собственных значения матрицы a неотрицательны). Эти элементы составляют конус в пространстве $\mathbb{R}^4$. Линейные функционалы, неотрицательные на этом конусе, образуют двойственный конус, а состояния на рассматриваемой алгебре (с условием $\varphi(1) = 1$) образуют шар в $\mathbb{R}^3$. Из них чистыми являются состояния вида $\psi^* a \psi$, где $\psi \in \mathbb{C}^2$, $\|\psi\| = 1$. Вложение $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \hookrightarrow \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$, задаваемое формулой
$$(a_1, a_2) \longmapsto \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix},$$
индуцирует отображение состояний на $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ в состояния на $\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$. При этом чистому состоянию a_1 на $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ будет отвечать единственное состояние
$$(1\ 0) a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
и аналогично выглядит прообраз чистого состояния a_2. Каждое смешанное состояние на $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ имеет целый диск прообразов.

Докажите, что единственное состояние на алгебре $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$, являющееся следом, имеет вид $\mathrm{Tr}\, a/2$.

1.1.6 Конструкция Гельфанда–Наймарка–Сигала (ГНС-конструкция)

ГНС-конструкция позволяет построить по любому состоянию φ на C^*-алгебре A *-представление π_φ алгебры A в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_\varphi$. Указанное представление задается гомоморфизмом A в алгебру $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\varphi)$ ограниченных линейных операторов в $\mathcal{H}_\varphi$.

Перейдем к подробному описанию *ГНС-конструкции.*

Определим положительно полуопределенную (возможно, вырожденную) полуторалинейную форму на A вида

$$(a, b)_\varphi = \varphi(a^* b).$$

Она линейна по второму аргументу и антилинейна по первому. Кроме того, эта форма удовлетворяет неравенству Коши–Буняковского

$$|(a, b)_\varphi|^2 \leqslant (a, a)_\varphi (b, b)_\varphi.$$

Построенная форма вырождена на элементах левого идеала

$$N_\varphi := \{a \in A : \ (a, a)_\varphi = 0\} = \{b \in A : \ \varphi(a^* b) = 0 \text{ для всех } a \in A\}.$$

Рассмотрим фактор-пространство A/N_φ, элементами которого являются классы $[a] := a + N_\varphi$. Определим на нем скалярное произведение по формуле

$$([a], [b])_\varphi := (a, b)_\varphi.$$

Это скалярное произведение корректно определено на A/N_φ и невырождено (проверьте это!).

Введем теперь гильбертово пространство $\mathcal{H}_\varphi$ как пополнение пространства A/N_φ по норме, порождаемой указанным скалярным произведением.

Определим представление π_φ алгебры A в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_\varphi$ по формуле:

$$\pi_\varphi(a) : [b] \longmapsto [ab].$$

Построенный оператор $\pi_\varphi(a)$ ограничен на A/N_φ, при этом $\|\pi_\varphi(a)\| \leqslant \|a\|$. Более того, построенное представление является *-гомоморфизмом, т.е. $\pi_\varphi(a^*) = (\pi_\varphi(a))^*$, где $(\pi_\varphi(a))^*$ – оператор, эрмитово сопряженный к $\pi_\varphi(a)$.

Поскольку оператор $\pi_\varphi(a)$ ограничен на плотном в $\mathcal{H}_\varphi$ подпространстве A/N_φ, то он продолжается до ограниченного линейного оператора (обозначаемого той же буквой $\pi_\varphi(a)$), заданного на всем гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_\varphi$ и удовлетворяющего оценке: $\|\pi_\varphi(a)\| \leq \|a\|$.

Заметим, что если алгебра A унитальна, то вектор $\xi := [1_A]$ является *циклическим* для представления π_φ, т.е. множество элементов $\{\pi_\varphi(a)\xi : a \in A\}$ плотно в $\mathcal{H}_\varphi$. Более того, для любого $a \in A$ справедливо равенство

$$(\xi, \pi_\varphi(a)\xi)_\varphi = \varphi(a). \tag{1.3}$$

Можно показать, что построенное представление π_φ неприводимо тогда и только тогда, когда состояние φ является чистым.

1.1.7 Вложение C^*-алгебр в алгебру ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве

Произвольную C^*-алгебру можно вложить в алгебру $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ограниченных линейных операторов в некотором гильбертовом пространстве согласно следующей теореме Гельфанда–Наймарка.

Теорема 3 (Гельфанд–Наймарк). *Любая C^*-алгебра A изоморфна замкнутой подалгебре в алгебре $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ линейных ограниченных операторов, действующих в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.*

Идея доказательства. Пользуясь теоремой Хана–Банаха, можно показать, что для любого элемента $a \in A \setminus \{0\}$ существует состояние φ_a такое, что

$$\varphi_a(a^*a) = \|a\|^2.$$

Тогда из равенства (1.3) вытекает, что $\|\pi_\varphi(a)\xi\|_\varphi = \|a\|$. Отсюда следует, что $\pi_\varphi(a)$ может обращаться в нуль только при $a = 0$.

Теперь рассмотрим представление π, равное прямой сумме ГНС-представлений, отвечающих всевозможным φ_a:

$$\pi := \bigoplus_{\varphi_a : a \in A} \pi_{\varphi_a}.$$

Указанное представление действует в пространстве

$$\mathcal{H} := \bigoplus_{\varphi_a : a \in A} \mathcal{H}_{\varphi_a}.$$

Так как $\|\pi_{\varphi_a}\| = \|a\|$ для любого $a \in A$, то выполняется равенство $\|\pi(a)\| = \|a\|$, т.е. представление π – изометрическое, что доказывает теорему. $\square$

1.1.8 Соответствие: компактные пространства$\leftrightarrow$ унитальные коммутативные банаховы алгебры

Непрерывное отображение $f : X \to Y$ компактных топологических пространств порождает гомоморфизм их алгебр непрерывных функций $Cf : C(Y) \to C(X)$ по формуле $\varphi \mapsto \varphi \circ f$. Это унитальный (т.е. сохраняющий единицу) *-гомоморфизм, обладающий следующим функториальным свойством: если задано другое непрерывное отображение $g : Y \to Z$ компактных топологических пространств, то $C(g \circ f) = Cf \circ Cg$.

Следовательно, соответствие

$$F : X \longmapsto C(X), \quad f \longmapsto Cf$$

задает контравариантный функтор из категории компактных топологических пространств (с непрерывными отображениями в качестве морфизмов) в категорию унитальных коммутативных C^*-алгебр (с унитальными *-гомоморфизмами в качестве морфизмов).

Обратный к нему функтор Φ строится следующим образом. Напомним, что *-слабая топология на $M(A)$ является слабейшей из тех, для которых непрерывны все отображения эвалюации $\hat{a} : M(A) \to \mathbb{C}$, $a \in A$. В частности, отображение $f : X \to M(A)$ непрерывно тогда и только тогда, когда все отображения $\hat{a} \circ f : X \to \mathbb{C}$ непрерывны.

Пусть $\varphi : A \to B$ – унитальный *-гомоморфизм унитальных коммутативных C^*-алгебр. Обозначим через $M\varphi : M(B) \to M(A)$ отображение, задаваемое формулой $\mu \mapsto \mu \circ \varphi$. Оно непрерывно, поскольку все функции вида $\hat{a} \circ M\varphi = \widehat{\varphi(a)}$ непрерывны для $a \in A$, и обладает функториальным свойством: если $\psi : B \to C$ – другой унитальный *-гомоморфизм унитальных коммутативных C^*-алгебр, то $M(\psi \circ \varphi) = M\varphi \circ M\psi$.

Построенные функторы задают эквивалентность указанных выше категорий.

Следствие 1. *Две унитальные коммутативные C^*-алгебры изоморфны тогда и только тогда, когда их спектры гомеоморфны.*

Следствие 2. *Группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}\,A$ унитальной коммутативной C^*-алгебры A изоморфна группе гомеоморфизмов $\mathrm{Homeo}(M(A))$ ее спектра.*

Построенная эквивалентность категорий устанавливает словарь соответствия между топологией и алгеброй:

<u>топология</u>		<u>алгебра</u>
гомеоморфизм	$\longleftrightarrow$	автоморфизм
компактность	$\longleftrightarrow$	унитальность
компактификация	$\longleftrightarrow$	добавление единицы
открытое подмножество	$\longleftrightarrow$	идеал
замкнутое подмножество	$\longleftrightarrow$	фактор-алгебра
метризуемость	$\longleftrightarrow$	сепарабельность
связность	$\longleftrightarrow$	отсутствие нетривиальных идемпотентов

Поясним только два последних соотношения, проверку остальных оставляем в качестве упражнения.

Предложение 1. *Компактное топологическое пространство X метризуемо тогда и только тогда, когда алгебра $C(X)$ сепарабельна.*

Доказательство. Если пространство X метризуемо, то существует счетное семейство открытых шаров $\{U_n\}$, порождающих его топологию. Рассмотрим функции

$$f_n(x) := \mathrm{dist}(x, X \setminus U_n).$$

Эти функции принадлежат алгебре $C(X)$ и разделяют точки X. Поэтому подалгебра, порождаемая функциями f_n и константами, плотна в $C(X)$ по теореме Стоуна–Вейерштрасса. Отсюда следует, что алгебра $C(X)$ сепарабельна.

Обратно, если $C(X)$ сепарабельна, то она содержит счетное плотное семейство непрерывных функций $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$. Можно считать, что все они не превосходят по норме $C(X)$ единицу (если какая-либо функция f_n не удовлетворяет этому условию, ее можно заменить на функцию $f_n/(1+|f_n|)$). Последовательность $\{f_n\}$ должна разделять точки X, так как иначе она не могла бы аппроксимировать непрерывные функции, разделяющие различные точки X. Введем функцию

$$\operatorname{dist}(x,y) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{2^n}.$$

Она определяет метрику на X, шары которой являются открытыми подмножествами X. Поэтому тождественное отображение исходного пространства X на то же пространство, наделенное топологией, индуцированной метрикой *dist*, является гомеоморфизмом, что доказывает метризуемость X. □

Предложение 2. *Связность компактного топологического пространства X эквивалентна отсутствию нетривиальных идемпотентов в алгебре $C(X)$.*

Доказательство. Напомним, что *идемпотентом* в алгебре A называется ее элемент e такой, что $e^2 = e$. Если алгебра $A = C(X)$ обладает нетривиальным идемпотентом e, т.е. идемпотентом, отличным от 1_A и нуля, то такой идемпотент задается функцией $e \in C(X)$, которая может принимать только два значения, а именно 0 и 1. Нетривиальность идемпотента e означает, что e не может быть константой. Поэтому X распадается в несвязное объединение двух множеств $\{x : \ e(x) = 1\}$ и $\{x : \ e(x) = 0\}$. Следовательно, X несвязно. Для доказательства обратного утверждения достаточно обратить приведенное рассуждение. □

1.2 Векторные расслоения

Построенное в предыдущем параграфе соответствие между коммутативными банаховыми алгебрами и пространствами непрерывных функций на их спектре переносится в данном параграфе на векторные расслоения. В этом случае оно превращается во взаимно-однозначное соответствие между пространствами сечений векторных расслоений над компактными многообразиями и проективными модулями над алгебрами непрерывных функций на этих многообразиях. Установление указанного соответствия составляет содержание фундаментальной теоремы Серра–Суона, доказываемой в п.1.2.4. Необходимые сведения о проективных модулях сообщаются в п.1.2.3.

1.2.1 Комплексные векторные расслоения

Определение 14. *Комплексным векторным расслоением* ранга r над хаусдорфовым топологическим пространством M называется непрерывное сюръективное отображение $\pi : E \to M$ топологических пространств, каждый слой которого $E_x = \pi^{-1}(x)$, $x \in M$, является комплексным векторным пространством размерности r, и выполняется условие *локальной тривиальности*: для каждого $x \in M$ найдется его открытая окрестность U и послойный гомеоморфизм

$$\varphi_U : U \times \mathbb{C}^r \longrightarrow \pi^{-1}(U),$$

ограничение которого на слои является изоморфизмом векторных пространств. Если в качестве U из этого определения можно взять все пространство M, то такое расслоение называется *тривиальным*.

Комплексные векторные расслоения можно задавать с помощью функций перехода. Пусть E – комплексное векторное расслоение ранга r и $\{U_j\}$ – его *тривиализующее покрытие*, иными словами, $\{U_j\}$ – это открытое покрытие пространства M вместе с гомеоморфизмами

$$\varphi_j \equiv \varphi_{U_j} : U_j \times \mathbb{C}^r \longrightarrow \pi^{-1}(U_j),$$

обладающими свойствами, перечисленными в определении 14. Тогда функции $\varphi_{ij} := \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$, заданные на пересечениях $U_{ij} := U_i \cap U_j$, называются *функциями перехода* расслоения E. Они принимают значения в группе $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ невырожденных линейных отображений $\mathbb{C}^r \to \mathbb{C}^r$ и удовлетворяют *коциклическому условию*:

$$\varphi_{ii} = \mathrm{id}, \quad \varphi_{ij} \circ \varphi_{jk} = \varphi_{ik} \quad \text{на } U_{ijk} := U_i \cap U_j \cap U_k.$$

Обозначим через $\Gamma(U, E)$ множество *сечений* расслоения E над подмножеством $U \subset M$, т.е. непрерывных отображений $s : U \to E$, таких что $\pi \circ s = \mathrm{id}$.

Предложение 3. *Пусть E – комплексное векторное расслоение ранга r над компактным топологическим многообразием M. Тогда найдется другое комплексное векторное расслоение $E' \to M$ такое, что для некоторого n будет иметь место изоморфизм расслоений*

$$E \oplus E' \cong M \times \mathbb{C}^n.$$

Замечание 2. В вещественном случае для расслоения E, совпадающего с касательным расслоением многообразия M, вложенного в векторное пространство, в качестве E' можно взять нормальное расслоение этого многообразия.

Доказательство. Пользуясь компактностью M, мы можем выбрать конечное открытое тривиализующее покрытие $\{U_j\}_{j=1}^m$ многообразия M. На каждом множестве U_j из этого покрытия можно найти набор из r линейно независимых сечений $s_{j1}, \ldots, s_{jr} : U_j \to E$ расслоения E. Обозначим через $\{\psi_j\}_{j=1}^m$ непрерывное разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_j\}$, состоящее из непрерывных функций ψ_j с компактным носителем в U_j, для которых $\sum \psi_j \equiv 1$. Введем отображения

$$\sigma_{jk} : M \to E, \text{ равные } \begin{cases} \psi j s_{jk} & \text{на } U_j \\ 0 & \text{вне } U_j. \end{cases}$$

Векторы $\sigma_{j1}(x), \ldots, \sigma_{jr}(x)$ порождают слой E_x при любом $x \in M$.

Положим $n := mr$ и рассмотрим отображение $\beta : M \times \mathbb{C}^n \to E$, определяемое формулой

$$\beta(x, t) = \sum_{j,k} t_{jk} \sigma_{jk}(x).$$

Оно задает сюръективный морфизм расслоений (т.е. послойно-линейных отображений), который включается в точную последовательность морфизмов

$$0 \longrightarrow E' := \operatorname{Ker} \beta \xrightarrow{\alpha} M \times \mathbb{C}^n \xrightarrow{\beta} E \longrightarrow 0.$$

Покажем, что эта последовательность *расщепляется*, т.е. существует правый обратный морфизм к морфизму β. Отсюда будет следовать, что $E \oplus E' \cong M \times \mathbb{C}^n$.

Действительно, в каждой точке $x \in M$ точная последовательность линейных отображений векторных пространств

$$0 \longrightarrow E'_x \xrightarrow{\alpha_x} \mathbb{C}^n \xrightarrow{\beta_x} E_x \longrightarrow 0$$

расщепляется, поскольку $\dim \operatorname{Ker} \beta_x + \dim \operatorname{Im} \beta_x = n$. В некоторой окрестности U_x точки x морфизм β задается матричной функцией $b : U_x \to \operatorname{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^r)$, имеющей в точке x ранг $\operatorname{rk} b(x) = r$. Поэтому сужая, если необходимо, окрестность U_x до окрестности $V_x \subset U_x$, можно добиться, чтобы $\operatorname{rk} b(y) = r$ для всех $y \in V_x$. Над этой окрестностью V_x точная последовательность

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow M \times \mathbb{C}^n \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

также расщепляется. Выберем теперь из множеств $\{V_x\}_{x \in M}$ конечное подпокрытие $\{V_j\}$ многообразия M и обозначим через γ_j правый обратный к β морфизм над окрестностью V_j. Если $\{\psi_j\}$ – непрерывное разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{V_j\}$, то положим

$$\gamma := \sum_j \psi_j \gamma_j .$$

Тогда γ является правым обратным к β над M. $\square$

Замечание 3. Доказанное предложение остается верным и в случае, когда M является паракомпактным многообразием.

1.2.2 Функтор Γ

Пространство сечений $\Gamma(M, E) \equiv \Gamma(E)$ векторного расслоения $\pi : E \to M$ является модулем над коммутативной банаховой алгеброй $C(M)$, который мы для определенности считаем правым, так что

$$(sa)(x) := s(x)a(x) \quad \text{для } s \in \Gamma(E), a \in C(M).$$

Это ковариантный функтор из категории векторных расслоений над M в категорию правых модулей над алгеброй $C(M)$. Действительно, каждому морфизму расслоений $\tau : E \to E'$ можно сопоставить гомоморфизм $C(M)$-модулей

$$\Gamma\tau : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E'),$$

действующий по формуле: $(\Gamma\tau)s = \tau \circ s$. Этот гомоморфизм линеен, т.е. $(\Gamma\tau)(sa) = (\Gamma\tau)(s)a$ для $a \in C(M)$, поскольку линейны отображения $\tau_x : E_x \to E'_x$ для $x \in M$. Кроме того, функтор Γ переводит операции двойственности, прямой суммы и тензорного произведения над расслоениями в аналогичные операции над $C(M)$-модулями.

Помимо этого, указанный функтор обладает следующими важными свойствами:

1. Γ является *строгим*: это означает, что совпадение $\Gamma f = \Gamma g$ для двух морфизмов расслоений $f, g : E \to E'$ влечет за собой равенство $f = g$.

2. Γ является *полным*: это означает, что отображение

$$\tau \longmapsto \Gamma\tau : \mathrm{Hom}(E, E') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C(M)}(\Gamma(E), \Gamma(E'))$$

   сюръективно.

3. Γ сохраняет короткие точные последовательности и переводит расщепляющиеся короткие точные последовательности снова в расщепляющиеся короткие точные последовательности.

1.2.3 Проективные модули

В этом параграфе $\mathcal{A}$ обозначает унитальное кольцо.

Определение 15. Правый $\mathcal{A}$-модуль $\mathcal{E}$ над унитальным кольцом $\mathcal{A}$ называется *свободным*, если он обладает $\mathcal{A}$-*базисом*, т.е. множеством образующих T таким, что из каждого соотношения вида $t_1a_1 + \ldots + t_ra_r = 0$ с $t_j \in T$, $a_j \in \mathcal{A}$, вытекает, что $a_1 = \ldots = a_r = 0$. Модуль $\mathcal{E}$ называется *конечно порожденным*, если он обладает конечным множеством образующих или, иначе, конечным $\mathcal{A}$-базисом.

Пример 3. Стандартный свободный $\mathcal{A}$-модуль ранга r имеет вид $\mathcal{A}^r = \underbrace{\mathcal{A} \oplus \ldots \oplus \mathcal{A}}_{r}$ и состоит из вектор-столбцов с компонентами из $\mathcal{A}$. Он имеет стандартный базис, состоящий из элементов $e_j = {}^t(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (с 1 на j-м месте). Можно реализовать его также в виде модуля ${}^r\mathcal{A} = \underbrace{\mathcal{A} \oplus \ldots \oplus \mathcal{A}}_{r}$, состоящего из вектор-строк с компонентами из $\mathcal{A}$. Любой конечно порожденный свободный $\mathcal{A}$-модуль изоморфен $\mathcal{A}^r$ и ${}^r\mathcal{A}$ при некотором r.

Определение 16. Правый $\mathcal{A}$-модуль $\mathcal{P}$ называется *проективным*, если он обладает следующим универсальным свойством: для любого сюръективного $\mathcal{A}$-линейного отображения правых $\mathcal{A}$-модулей $f : \mathcal{E} \to \mathcal{G}$ и любого $\mathcal{A}$-линейного отображения правых $\mathcal{A}$-модулей $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{G}$ существует $\mathcal{A}$-линейное отображение $\psi : \mathcal{P} \to \mathcal{E}$ такое, что следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E} \arrow[r, "f"] & \mathcal{G} \arrow[r] & 0 \\
\mathcal{P} \arrow[u, dashed, "\psi"] \arrow[ur, "\varphi"'] & &
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Свойства проективных модулей:

1. Любой свободный правый $\mathcal{A}$-модуль проективен.

2. Прямая сумма правых $\mathcal{A}$-модулей проективна $\Longleftrightarrow$ каждое слагаемое в этой сумме проективно.

3. Правый $\mathcal{A}$-модуль $\mathcal{P}$ проективен $\Longleftrightarrow$ любая короткая точная последовательность $\mathcal{A}$-линейных отображений правых $\mathcal{A}$-модулей вида
$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{P} \longrightarrow 0 \tag{1.4}$$
расщепляется.

4. Правый $\mathcal{A}$-модуль $\mathcal{P}$ проективен $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{P}$ является прямым слагаемым в свободном $\mathcal{A}$-модуле.

5. Правый $\mathcal{A}$-модуль $\mathcal{P}$ проективен $\Longleftrightarrow$ он имеет вид $\mathcal{P} = e\mathcal{F}$, где $\mathcal{F}$ – свободный правый $\mathcal{A}$-модуль, а e – идемпотент в алгебре $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}\mathcal{F}$.

6. Если проективный $\mathcal{A}$-модуль *конечно порожден*, , т.е. обладает конечной системой образующих, то свободный модуль в свойствах 4 и 5 тоже можно выбрать конечно порожденным.

Доказательства свойств проективных модулей

Доказательство свойства (1). Пусть $\mathcal{F}$ есть свободный правый $\mathcal{A}$-модуль с системой образующих $\{t_\alpha\}_{\alpha\in I}$. Пусть $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ есть $\mathcal{A}$-линейное отображение правых $\mathcal{A}$-модулей и $f : \mathcal{E} \to \mathcal{G}$ – сюръективное $\mathcal{A}$-линейное отображение. В силу сюръективности этого отображения для любой образующей t_α модуля $\mathcal{F}$ найдется элемент $s_\alpha \in \mathcal{E}$ такой, что $f(s_\alpha) = \varphi(t_\alpha)$. Определим отображение $\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$, полагая его равным $\psi(t_\alpha) = s_\alpha$ на образующих и продолжая далее по $\mathcal{A}$-линейности. Построенная диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, "f"] & \mathcal{G} \arrow[r] & 0 \\ \mathcal{F} \arrow[u, dashed, "\psi"] \arrow[ur, "\varphi"'] & & \end{tikzcd}$$

коммутативна, поскольку на образующих $f(\psi(t_\alpha)) = f(s_\alpha) = \varphi(t_\alpha)$ и по $\mathcal{A}$-линейности равенство $f(\psi(t)) = \varphi(t)$ выполняется для всех $t \in \mathcal{F}$. □

Доказательство свойства (2). Предположим, что модуль $\mathcal{P} = \bigoplus_{\alpha\in I} \mathcal{P}_\alpha$, являющийся прямой суммой правых $\mathcal{A}$-модулей, проективен. Покажем, что в этом случае каждый $\mathcal{A}$-модуль $\mathcal{P}_\alpha$ также проективен. Допустим, что задано $\mathcal{A}$-линейное отображение правых $\mathcal{A}$-модулей $\varphi_\alpha : \mathcal{P}_\alpha \to \mathcal{G}$ и сюръективное $\mathcal{A}$-линейное отображение правых $\mathcal{A}$-модулей $f : \mathcal{E} \to \mathcal{G}$. Отображение φ_α можно продолжить до $\mathcal{A}$-линейного отображения $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{G}$, полагая его равным нулю на всех слагаемых $\mathcal{P}_\beta$ с $\beta \neq \alpha$. Поскольку модуль $\mathcal{P}$ проективен, найдется $\mathcal{A}$-линейное отображение $\psi : \mathcal{P} \to \mathcal{E}$ такое, что $f \circ \psi = \varphi$. Ограничивая отображение ψ на $\mathcal{P}_\alpha$, получим $\mathcal{A}$-линейное отображение $\psi_\alpha : \mathcal{P}_\alpha \to \mathcal{E}$ такое, что $f \circ \psi_\alpha = \varphi_\alpha$. Это доказывает, что модуль $\mathcal{P}_\alpha$ проективен.

Обратно, предположим, что каждый из $\mathcal{A}$-модулей $\mathcal{P}_\alpha$ проективен. Пусть $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{G}$ есть $\mathcal{A}$-линейное отображение правых $\mathcal{A}$-модулей и $f : \mathcal{E} \to \mathcal{G}$ – сюръективное $\mathcal{A}$-линейное отображение правых $\mathcal{A}$-модулей. Для каждого $\alpha \in I$ ограничение $\varphi_\alpha := \varphi|\mathcal{P}_\alpha$ есть $\mathcal{A}$-линейное отображение $\mathcal{P}_\alpha \to \mathcal{G}$, поэтому в силу проективности $\mathcal{A}$-модуля $\mathcal{P}_\alpha$ найдется $\mathcal{A}$-линейное отображение $\psi_\alpha : \mathcal{P}_\alpha \to \mathcal{E}$ такое, что $f \circ \psi_\alpha = \varphi_\alpha$. Тогда прямая сумма $\psi := \bigoplus_{\alpha \in I} \psi_\alpha$ отображений ψ_α будет задавать $\mathcal{A}$-линейное отображение $\psi : \mathcal{P} \to \mathcal{E}$, обладающее свойством: $f \circ \psi = \varphi$, откуда следует, что модуль $\mathcal{P}$ проективен. $\square$

Доказательство свойств (3) и (4). Докажем сначала, что если правый $\mathcal{A}$-модуль $\mathcal{P}$ проективен, то всякая короткая точная последовательность вида

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{P} \longrightarrow 0,$$

где $\mathcal{G}$ – правый $\mathcal{A}$-модуль, расщепляется. Действительно, вследствие проективности модуля $\mathcal{P}$ существует $\mathcal{A}$-линейное отображение $\psi : \mathcal{P} \to \mathcal{G}$, для которого диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \arrow[r, "g"] & \mathcal{P} \arrow[r] & 0 \\ \mathcal{P} \arrow[u, dashed, "\psi"] \arrow[ur, "\mathrm{id}_\mathcal{P}"'] & & \end{tikzcd}$$

коммутативна, т.е. $g \circ \psi = \mathrm{id}_\mathcal{P}$. Тем самым, отображение ψ является правым обратным к g, т.е. расщепляет рассматриваемую точную последовательность.

Докажем теперь, что для любого проективного правого $\mathcal{A}$-модуля $\mathcal{P}$ найдется точная последовательность вида (1.4), в которой $\mathcal{G} \equiv \mathcal{F}$ есть свободный правый $\mathcal{A}$-модуль. Выберем в $\mathcal{P}$ какую-нибудь систему образующих $\{t_\alpha\}_{\alpha \in I}$ и рассмотрим свободный правый $\mathcal{A}$-модуль $\mathcal{F}$ с $\mathcal{A}$-базисом $\{s_\alpha\}_{\alpha \in I}$, параметризованным тем же множеством индексов I. Иными словами, модуль $\mathcal{F}$ состоит из всевозможных конечных линейных комбинаций $\sum_{k=1}^n s_{\alpha_k} a_k$, где $a_k \in \mathcal{A}$, $k = 1, \dots, n$. Определим отображение $g : \mathcal{F} \to \mathcal{P}$ на образующих формулой: $g(s_\alpha) = t_\alpha$ и продолжим на весь модуль $\mathcal{F}$ по $\mathcal{A}$-линейности. Полагая $\mathcal{E} := \operatorname{Ker} g$ и обозначая через f вложение $\mathcal{E} \hookrightarrow \mathcal{F}$, получим короткую точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{f} \mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{P} \longrightarrow 0. \tag{1.5}$$

Если правый $\mathcal{A}$-модуль $\mathcal{P}$ обладает тем свойством, что для него любая точная последовательность вида (1.4) расщепляется, то это свойство выполняется и для выписанной последовательности (1.5), из которой следует, что модуль $\mathcal{P}$ является прямым слагаемым в свободном $\mathcal{A}$-модуле $\mathcal{F}$. По свойству (1) свободный модуль $\mathcal{F}$ проективен, а по свойству (2) $\mathcal{A}$-модуль $\mathcal{P}$, являющийся прямым слагаемым в модуле $\mathcal{F}$, также должен быть проективен.

Для окончания доказательства свойства (4) осталось заметить, что если $\mathcal{A}$-модуль $\mathcal{P}$ является прямым слагаемым в свободном $\mathcal{A}$-модуле $\mathcal{F}$, который проективен по свойству (1), то он проективен по свойству (2). $\square$

Доказательство свойства (5). Если правый $\mathcal{A}$-модуль $\mathcal{P}$ проективен, то по свойству (4) он является прямым слагаемым в свободном правом $\mathcal{A}$-модуле $\mathcal{F}$ и в качестве искомого идемпотента можно взять проектор $p : \mathcal{F} \to \mathcal{P}$.

Обратно, если $e \in \mathrm{End}_\mathcal{A}\mathcal{F}$ – идемпотент, т.е. $e^2 = e$, действующий в свободном правом $\mathcal{A}$-модуле $\mathcal{F}$, и правый $\mathcal{A}$-модуль $\mathcal{P}$ имеет вид $\mathcal{P} = e\mathcal{F}$, то

$$\mathcal{F} = e\mathcal{F} \oplus (\mathrm{id}_\mathcal{F} - e)\mathcal{F},$$

где отображение $\mathrm{id}_{\mathcal{F}} - e$ также является идемпотентом. Тем самым, модуль $\mathcal{P} = e\mathcal{F}$ является прямым слагаемым в свободном $\mathcal{A}$-модуле $\mathcal{F}$ и потому проективен. $\square$

Доказательство свойства (6). Если $\mathcal{P}$ – конечнопорожденный правый $\mathcal{A}$-модуль с системой образующих $\{t_\alpha\}_{\alpha=1}^r$, то в доказательстве свойства (4) $\mathcal{A}$-базис $\{s_\alpha\}_{\alpha=1}^r$ свободного $\mathcal{A}$-модуля $\mathcal{F}$ также будет конечным. Тем самым, $\mathcal{P}$ является прямым слагаемым в конечномерном свободном $\mathcal{A}$-модуле $\mathcal{F}$ и, соответственно, образом идемпотента e, действующего в $\mathcal{F}$. $\square$

1.2.4 Теорема Серра–Суона

Предложение 4. *Пусть M – компактное многообразие и $E \to M$ – комплексное векторное расслоение ранга r над ним. Тогда $C(M)$-модуль $\Gamma(E)$ конечно порожден и проективен.*

Доказательство. Согласно предложению 3 существует векторное расслоение $E' \to M$ такое, что $E \oplus E' \cong M \times \mathbb{C}^n$. Так как

$$\Gamma(E) \oplus \Gamma(E') = \Gamma(M \times \mathbb{C}^n) = C(M)^n,$$

то модуль $\Gamma(E)$ является прямым слагаемым в свободном модуле $C(M)^n$. Отсюда следует и конечная порожденность $\Gamma(E)$. $\square$

Теорема 4 (Серр–Суон)**.** *Функтор Γ устанавливает эквивалентность категории векторных расслоений над компактным многообразием M и категории конечно порожденных проективных модулей над алгеброй $C(M)$.*

Доказательство. Ввиду предложения 4 нужно доказать только, что каждый конечно порожденный проективный $C(M)$-модуль $\mathcal{E}$ совпадает с $\Gamma(M, E)$ для некоторого векторного расслоения $\pi : E \to M$. По свойству (5) проективных модулей (см. п.1.2.3) модуль $\mathcal{E}$ имеет вид $\mathcal{E} = eC(M)^n$ для некоторого идемпотента $e \in \mathrm{End}_{C(M)}(C(M)^n) \cong \mathrm{Mat}_n(C(M))$. Точная последовательность

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\, e \longrightarrow C(M)^n \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0$$

расщепляется по свойству (3) проективных модулей (см. п.1.2.3). Из полноты функтора Γ следует, что эндоморфизм $e \in \mathrm{Mat}_n(C(M))$ порождается некоторым морфизмом расслоений $\tau : M \times \mathbb{C}^n \to M \times \mathbb{C}^n$, так что $eC(M)^n$ совпадает с $\Gamma(M, E)$, где $E := \mathrm{Im}\, \tau$.

Остается только показать, что E есть подрасслоение в $M \times \mathbb{C}^n$. Для этого достаточно установить, что $\mathrm{rk}\, \tau_x$ является локально постоянной функцией от $x \in X$. Заметим, что ранг идемпотента τ_x, как и любого идемпотента в $\mathrm{Mat}_n(C(M))$, полунепрерывен сверху. С другой стороны, $\mathrm{id} - \tau$ также является идемпотентом в $\mathrm{Mat}_n(C(M))$, причем $\mathrm{rk}(\mathrm{id}_x - \tau_x) = n - \mathrm{rk}\, \tau_x$ для любого $x \in M$. Отсюда следует, что отображение $x \mapsto \mathrm{rk}\, \tau_x$ полунепрерывно не только сверху, но и снизу, а потому непрерывно и, следовательно, локально постоянно. $\square$

Замечание 4. Приведенное доказательство допускает следующую интерпретацию. Идемпотент $e \in \mathrm{Mat}_n(C(M))$ можно рассматривать как непрерывное отображение из M в пространство матричных идемпотентов. Обозначим через ε_x отображение эвалюоации в точке $x \in M$. Тогда отображение $\varepsilon(e) : x \mapsto \varepsilon_x(e)$ порождает отображение $M \to G_m(\mathbb{C}^n)$, где $m = \mathrm{rk}\, e < n$. Иначе говоря, пространство $E_x = \varepsilon_x(e)\mathbb{C}^n$ лежит в слое тавтологического расслоения $T \to G_m(\mathbb{C}^n)$ над точкой x. Нужное нам расслоение $E \to M$, отвечающее проективному модулю $\mathcal{E}$, совпадает с обратным образом тавтологического расслоения T при отображении $\varepsilon(e)$:

$$\begin{array}{ccc} E = \varepsilon(e)^*(T) & \longrightarrow & T \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ M & \xrightarrow[\varepsilon(e)]{} & G_m(\mathbb{C}^n) \end{array}$$

1.3 Функциональный анализ над C^*-алгебрами

В этом параграфе излагаются основные свойства C^*-модулей над C^*-алгебрами и вводятся стандартные классы операторов, действующих в таких модулях.

После исходных определений, относящихся к теории C^*-модулей, приведенным в п.1.3.1, мы переходим к одному из трудных вопросов в этой теории, а именно, к изучению тензорных произведений C^*-модулей (п.1.3.2). Сначала изучаются тензорные произведения C^*-алгебр и тесно связанные с ними перекрестные нормы. Исходя из этого, определяются тензорные произведения C^*-модулей.

Исследование линейных операторов, действующих в C^*-модулях над C^*-алгебрами A, начинается в п.1.3.3 с простейших операторов ранга 1, называемых следуя Дираку кетбра-операторами. Конечные суммы таких операторов образуют пространство операторов A-конечного ранга. А замыкание последнего пространства приводит к идеалу A-компактных операторов в алгебре всех линейных ограниченных операторов. Другой естественный класс операторов, действующих в C^*-модулях, образуют проекторы, изучаемые в п.1.3.4. Наконец, в п.1.3.5 рассматриваются унитарные операторы и операторы, допускающие сопряжение. Здесь доказывается важный факт, состоящий в том, что алгебра ограниченных линейных операторов в C^*-модуле над C^*-алгеброй A, допускающих сопряжение, является также C^*-алгеброй. Это свойство выделяет C^*-алгебры среди других классов банаховых алгебр.

Заключительная часть параграфа (п.1.3.6) посвящена доказательству аналога теоремы Серра–Суона для C^*-модулей над C^*-алгебрами A. А именно, устанавливается взаимно-однозначное соответствие между A-компактными проекторами и конечно порожденными проективными C^*-модулями над A (теоремы 5, 6). Отметим также доказываемую в замечании 5 формулу Капланского, позволяющую каноническим образом сопоставить заданному идемпотенту в алгебре A ассоциированный с ним проектор.

1.3.1 C^*-модули

Определение 17. (Правым) *C^*-предмодулем* над C^*-алгеброй A называется комплексное векторное пространство $\mathcal{E}$, являющееся одновременно правым A-модулем, наделенное полуторалинейным спариванием $(\cdot\,,\cdot) : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to A$, обладающим следующими свойствами:

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad (r, s+t) = (r,s) + (r,t);\\
&(2) \quad (r, sa) = (r,s)\,a;\\
&(3) \quad (r,s) = (s,r)^*;\\
&(4) \quad (s,s) > 0 \text{ для } s \neq 0,
\end{aligned}
$$

выполняющимися для любых $r, s, t \in \mathcal{E}$, $a \in A$.

Из этих свойств вытекает, что спаривание $(\cdot\,,\cdot)$ является A-линейным по второму аргументу, антилинейно по первому и положительно определено. В частности, $(ra, s) = a^*(r,s)$ для $a \in A$, $r, s \in \mathcal{E}$.

Пользуясь спариванием $(\cdot\,,\cdot)$, введем на C^*-предмодуле $\mathcal{E}$ *норму*, полагая

$$\|s\|_{\mathcal{E}} := \sqrt{\|(s,s)\|}$$

для $s \in \mathcal{E}$. Здесь, $\|\cdot\|$ обозначает норму в C^*-алгебре A. (В дальнейшем будем опускать нижний индекс $\mathcal{E}$ в обозначении для нормы $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ на C^*-предмодуле $\mathcal{E}$ там, где понятно, о какой норме идет речь.)

Приведем аналог неравенства Коши–Буняковского для введенной нормы.

Лемма 4. *Пусть $\mathcal{E}$ есть C^*-предмодуль над C^*-алгеброй A. Тогда для любых $r, s \in \mathcal{E}$ выполняется неравенство*

$$\|(r,s)\| \leq \sqrt{\|(r,r)\|}\sqrt{\|(s,s)\|},$$

где $\|\cdot\|$ – норма в $\mathcal{E}$.

Доказательство. Приведем доказательство в случае унитальной алгебры A, оставляя общий случай в качестве упражнения. Для произвольного элемента $a \in A$ справедливо следующее соотношение

$$0 \leq (ra+s, ra+s) = a^*(r,r)a + a^*(r,s) + (s,r)a + (s,s). \tag{1.6}$$

Так как (r,r) и (s,s) – положительные элементы алгебры A, то они удовлетворяют оценкам: $a^*(r,r)a \leq \|(r,r)\|a^*a$ и $(s,s) \leq \|(s,s)\| \cdot 1_A$. Поэтому из неравенства (1.6) получаем

$$0 \leq (ra+s, ra+s) = \|(r,r)\|a^*a + a^*(r,s) + (s,r)a + \|(s,s)\| \cdot 1_A.$$

Полагая в последнем соотношении $a = -\frac{(r,s)}{(r,r)}$, получим

$$0 \leq -\frac{(s,r)(s,r)^*}{\|(r,r)\|} + \|(s,s)\| \cdot 1_A.$$

Следовательно,

$$0 \leq (s,r)(s,r)^* \leq \|(r,r)\| \cdot \|(s,s)\| \cdot 1_A,$$

откуда и вытекает доказываемое неравенство. □

Пользуясь доказанной леммой, нетрудно показать, что $\|s\|_{\mathcal{E}} = \sqrt{\|(s,s)\|}$ действительно является нормой на $\mathcal{E}$, и в частности, удовлетворяет неравенству треугольника.

Определение 18. C^*-предмодуль $\mathcal{E}$ называется C^*-*модулем*, если он является полным по норме $\|s\|_{\mathcal{E}}$.

В частности, пополнение произвольного C^*-предмодуля по норме $\|s\|_{\mathcal{E}}$ является C^*-модулем.

Примеры C^*-модулей

1. Комплексное гильбертово пространство является C^*-модулем над алгеброй $\mathbb{C}$, в котором спаривание задается скалярным произведением.

2. Любая C^*-алгебра A является C^*-модулем над собой со спариванием, задаваемым формулой: $(a,b) := a^*b$.

3. Свободный A-модуль A^n, составленный из вектор-столбцов с компонентами из A, является C^*-модулем над A со спариванием элементов $a = {}^t(a_1,\ldots,a_n)$ и $b = {}^t(b_1,\ldots,b_n)$, задаваемым формулой: $(a,b) := (a_1^*,\ldots,a_n^*)\,{}^t(b_1,\ldots,b_n) = a_1^*b_1 + \ldots + a_n^*b_n$.

4. Свободный A-модуль ${}^nA$, составленный из вектор-строк с компонентами из A, является C^*-модулем над $\mathrm{Mat}_n(A)$ со спариванием элементов $a = (a_1,\ldots,a_n)$ и $b = (b_1,\ldots,b_n)$, задаваемым формулой: $(a,b) := {}^t(a_1^*,\ldots,a_n^*)(b_1,\ldots,b_n) = (a_i^*b_j)_{i,j=1}^n$.

Важный пример C^*-модуля над C^*-алгеброй A дается тензорным произведением $\mathcal{H} \otimes A$, где $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство. Прежде всего мы должны точно определить, что имеется в виду под тензорным произведением, используемым в этой формуле. Напомним, что *алгебраическим тензорным произведением* $\mathcal{H} \odot A$ гильбертова пространства $\mathcal{H}$ и C^*-алгебры A называется правый A-модуль, состоящий из конечных сумм простых тензоров вида $\sum_{k=1}^n \xi_k \otimes a_k$ с $\xi_k \in \mathcal{H}$, $a_k \in A$, и наделенный A-значным спариванием, задаваемым на простых тензорах формулой
$$(\xi \otimes a, \eta \otimes b) = (\xi, \eta)a^*b,$$
где $a, b \in A$, $\xi, \eta \in \mathcal{H}$. Можно показать, что это спаривание удовлетворяет всем свойствам, перечисленным в определении 17, и в частности, положительно определено. Тем самым, $\mathcal{H} \odot A$ есть C^*-предмодуль над A. Его пополнение по норме, индуцированной введенным спариванием, является C^*-модулем над A, который обозначается через $\mathcal{H} \otimes A$ и называется *тензорным произведением гильбертова пространства $\mathcal{H}$ на алгебруA* .

Нам понадобится также C^*-модуль $\mathcal{H}_A \equiv \ell_A^2$ над алгеброй A, состоящий из последовательностей $a = \{a_k\}$ элементов из A, для которых ряд
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^* a_k$$

сходится в A. Наделим его полуторалинейным спариванием вида

$$(a, b) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k^* b_k.$$

Примером операторов, действующих в $\mathcal{H}_A$, могут служить операторы P_n, задаваемые формулой

$$P_n(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots) = (a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots),$$

которые являются, очевидно, *проекторами* в $\mathcal{H}_A$, т.е. $P_n^2 = P_n$ и $P_n^* = P_n$. При этом $\|\xi - P_n\xi\| \to 0$ при $n \to \infty$ для любого $\xi \in \mathcal{H}$.

Мы вернемся к изучению операторов, действующих в C^*-модулях, в п.1.3.3, а сейчас рассмотрим более подробно понятие тензорного произведения, встретившееся нам в этом пункте.

1.3.2 Тензорные произведения

Функтор E_φ

Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ есть унитальные кольца (т.е. кольца с единицей) и $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ – унитальный (т.е. переводящий $1_{\mathcal{A}}$ в $1_{\mathcal{B}}$) гомоморфизм. По этому гомоморфизму мы можем построить функтор E_φ из категории правых $\mathcal{A}$-модулей в категорию правых $\mathcal{B}$-модулей, который определяется следующим образом.

Пусть $\mathcal{E}$ есть правый $\mathcal{A}$-модуль. Тогда кольцо $\mathcal{B}$ можно наделить структурой <u>левого</u> $\mathcal{A}$-модуля, полагая: $a \cdot b := \varphi(a)b$. Это позволяет нам построить тензорное произведение

$$E_\varphi(\mathcal{E}) = \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$$

правого $\mathcal{A}$-модуля $\mathcal{E}$ на кольцо $\mathcal{B}$ относительно гомоморфизма φ.

А именно, $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$ – это абелева группа, элементами которой являются конечные суммы вида $\sum_{k=1}^{n} s_k \otimes b_k$, где $s_k \in \mathcal{E}$, $b_k \in \mathcal{B}$, с единственным соотношением

$$(sa) \otimes b = s \otimes \varphi(a)b \quad \text{для любого } a \in \mathcal{A}.$$

Введем теперь правое действие $\mathcal{B}$ на $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$, полагая: $(s \otimes b)c := s \otimes (bc)$ для всех $s \in \mathcal{E}$, $b, c \in \mathcal{B}$.

Если $\mathcal{F}$ – другой правый $\mathcal{A}$-модуль и $\tau : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ – $\mathcal{A}$-линейное отображение, то $E_\varphi(\tau) := \tau \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ является $\mathcal{B}$-линейным отображением из $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$ в $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$. Тем самым, E_φ действительно определяет функтор из категории правых $\mathcal{A}$-модулей в категорию правых $\mathcal{B}$-модулей.

Тензорное произведение C^*-алгебр

Напомним сначала определение тензорного произведения гильбертовых пространств $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$. Рассмотрим алгебраическое тензорное произведение $\mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2$, элементами которого являются конечные суммы простых тензоров вида $\sum_{k=1}^{n} \xi_k \odot \eta_k$. На пространстве $\mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2$ можно ввести структуру предгильбертова пространства со спариванием, задаваемым на простых тензорах формулой

$$(\xi_1 \odot \eta_1, \xi_2 \odot \eta_2) := (\xi_1, \xi_2)(\eta_1, \eta_2),$$

где $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{H}_1$, $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{H}_2$.

Это спаривание положительно определено и мы называем *тензорным произведением* $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ пополнение $\mathcal{H}_1 \odot \mathcal{H}_2$ по норме, порождаемой указанным спариванием. Заметим, что введенная норма обладает *перекрестным свойством*, которое записывается для простых тензоров $\xi \otimes \eta \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ в виде

$$\|\xi \otimes \eta\| = \|\xi\| \cdot \|\eta\|.$$

Нормы, обладающие этим свойством, будем называть *перекрестными.*

В случае банаховых пространств E_1,E_2 алгебраическое тензорное произведение $E_1 \odot E_2$ может допускать несколько различных норм, обладающих перекрестным свойством, приводящих к различным пополнениям.

Перейдем к случаю C^*-алгебр A, B и рассмотрим на алгебраическом тензорном произведении $A \odot B$ перекрестные нормы, которые обладают к тому же C^*-свойством, т.е. $\|z^*z\| = \|z\|^2$ для всех $z \in A \odot B$.

Будем называть C^*-алгебру A *ядерной*, если алгебраическое тензорное произведение $A \odot B$ с любой C^*-алгеброй B обладает единственной перекрестной C^*-нормой. Пополнение по этой норме и называется *тензорным произведением* $A \otimes B$ C^*-алгебр A и B.

Примерами ядерных C^*-алгебр могут служить конечномерные C^*-алгебры $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, для которых $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}) \otimes B \cong \mathrm{Mat}_n(B)$, и коммутативные C^*-алгебры $C_0(Y)$, для которых $C_0(Y) \otimes B \cong C_0(Y, B)$. Алгебра $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ компактных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ дает еще один пример ядерной C^*-алгебры. Однако C^*-алгебра $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ уже не является ядерной.

Тензорное произведение C^*-модулей

Рассмотрим сначала конструкцию тензорного произведения C^*-модуля $\mathcal{E}$ над C^*-алгеброй A на другую C^*-алгебру B, обобщающую конструкцию введенного ранее функтора E_φ на случай C^*-модулей и C^*-алгебр.

Пусть задан морфизм C^*-алгебр $\varphi : A \to B$. Мы хотим определить тензорное произведение $E_\varphi(\mathcal{E}) = \mathcal{E} \otimes_A B$.

Рассмотрим алгебраическое тензорное произведение $\mathcal{E} \odot B$ над $\mathbb{C}$ и введем на нем B-значное спаривание, задаваемое на простых тензорах $s \odot b$ формулой

$$(s \odot b, t \odot c) := b^*(s, r)c, \tag{1.7}$$

где $s, t \in \mathcal{E}$, $b, c \in B$.

У такого спаривания, однако, есть ядро и для того, чтобы ввести норму на $\mathcal{E} \odot B$, необходимо вначале профакторизовать $\mathcal{E} \odot B$ по этому ядру. Можно показать (см. [3]), что указанное ядро $N := \{z \in \mathcal{E} \odot B : \ (z, z) = 0\}$ порождается элементами вида $sa \odot b - s \odot \varphi(a)b$. Переходя к фактор-пространству $(\mathcal{E} \odot B)/N$, получим на нем положительно определенное спаривание, которое на простых тензорах $s \otimes b \in (\mathcal{E} \odot B)/N$ задается формулой

$$(s \otimes b, t \otimes c) = b^*\varphi((s, t))c.$$

Тем самым, фактор $(\mathcal{E} \odot B)/N$ является C^*-предмодулем над алгеброй B, а его пополнение по норме, порождаемой введенным спариванием, является C^*-модулем, обозначаемым $E_\varphi(\mathcal{E}) = \mathcal{E} \otimes_A B$ и называемым *тензорным произведением C^*-модуля $\mathcal{E}$ на C^*-алгебру B.*

Тензорное произведение C^*-модулей определяется следуя этой же схеме. Пусть заданы C^*-алгебры A,B и правые C^*-модули $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ над алгебрами A и B соответственно. Пусть, кроме того, задан морфизм $\rho : A \to \mathrm{End}_B\mathcal{F}$.

Наделим алгебраическое тензорное произведение $\mathcal{E}\odot\mathcal{F}$, являющееся правым B-модулем, спариванием, задаваемым на простых тензорах формулой

$$(s_1 \odot t_1, s_2 \odot t_2) = (t_1, \rho\left((s_1, s_2)\right) t_2) = (\rho\left((s_2, s_1)\right) t_1, t_2), \tag{1.8}$$

где $s_1, s_2 \in \mathcal{E}$, $t_1, t_2 \in \mathcal{F}$. Рассмотрим вновь B-подмодуль в $\mathcal{E} \odot \mathcal{F}$, состоящий из элементов $z \in \mathcal{E} \odot \mathcal{F}$ таких, что $(z, z) = 0$. Этот подмодуль порожден, как и выше, элементами вида $sa \odot\ - s \odot \rho(a)t$.

Спаривание (1.8) определяет на факторе $(\mathcal{E} \odot \mathcal{F})/N$ положительно определенное скалярное произведение. Пополнение $(\mathcal{E} \odot \mathcal{F})/N$ по норме, порождаемой этим скалярным произведением, является C^*-модулем, обозначаемым через $\mathcal{E} \otimes_\rho \mathcal{F} = \mathcal{E} \otimes_A \mathcal{F}$ и называется *тензорным произведением C^*-модуля $\mathcal{E}$ на C^*-модуль $\mathcal{F}$*.

1.3.3 Операторы A-конечного ранга и A-компактные операторы

Изучение линейных операторов, действующих в C^*-модулях, начнем с самых простых операторов ранга 1, действующих из C^*-модуля $\mathcal{E}$ в C^*-модуль $\mathcal{F}$. Они называются иначе *кетбра-операторами* и обозначаются через $|r\rangle\langle s|$, где $s \in \mathcal{E}$, $r \in \mathcal{F}$. Оператор $|r\rangle\langle s|$ действует по формуле

$$|r\rangle\langle s| : \ t \longmapsto r(s, t),$$

где $t \in \mathcal{E}$. Он является A-линейным, поскольку $r(s, ta) = r(s, t)a$ для $a \in A$, и допускает сопряжение, причем $(|r\rangle\langle s|)^* = |s\rangle\langle r|$.

В случае, когда $\mathcal{E} = \mathcal{F}$, композиция двух кетбра-операторов

$$|r\rangle\langle s| \circ |t\rangle\langle u| = |r\rangle(s, t)\langle u| = |r\rangle\langle u(t, s)|$$

является снова кетбра-оператором, так что конечные суммы кетбра-операторов образуют алгебру операторов, действующих в $\mathcal{E}$. Эта алгебра является двусторонним идеалом в алгебре $\mathrm{End}_A\mathcal{E}$, который обозначается через $\mathrm{Fin}_A\mathcal{E}$, а его замыкание по операторной норме — через $\mathcal{K}_A(\mathcal{E})$.

Более общим образом, мы обозначаем через $\mathrm{Fin}_A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ пространство кетбра-операторов вида

$$\sum_{k=1}^{n} |r_k\rangle\langle s_k|,$$

называемых иначе операторами *A-конечного ранга*. Замыкание $\mathrm{Fin}_A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ по операторной норме обозначается через $\mathcal{K}_A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, а его элементы называются *A-компактными операторами*.

Заметим сразу же, что A-компактный оператор не обязан быть компактным в обычном смысле.

Пример 4. Для любой унитальной C^*-алгебры A имеет место изоморфизм

$$\mathcal{K}_A(A) \cong A.$$

Действительно, отображение $T \mapsto T(1_A)$ задает биекцию алгебры ограниченных линейных операторов на алгебру A. Далее, любое отображение вида $a \mapsto b^*a$, совпадающее на самом деле с кетбра-оператором $|1_A\rangle\langle b|$, допускает сопряжение и имеет конечный A-ранг. Поэтому $\mathcal{K}_A(A) \cong A$.

Аналогичным образом можно показать, что

$$\mathcal{K}_A(A^n) \cong \mathrm{Mat}_n(A).$$

Ниже мы покажем, что для алгебры $A = C(M)$, где M – компактное многообразие, имеет место изоморфизм

$$\mathcal{K}_A(\Gamma(M, E)) \cong \Gamma(M, \operatorname{End} E)$$

для любого эрмитова векторного расслоения $E \to M$.

Введем еще одну важную C^*-алгебру, ассоциированную с C^*-алгеброй A. А именно, рассмотрим алгебру, являющуюся тензорным произведением $\mathcal{K} \otimes A$ алгебры компактных операторов $\mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathcal{H})$, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, на C^*-алгебру A.

Напомним, что $\mathcal{K} \otimes A$ является пополнением алгебраического тензорного произведения $\mathcal{K} \odot A$ по единственной C^*-норме, обладающей *перекрестным свойством*:

$$\|\xi \otimes \eta\| = \|\xi\| \cdot \|\eta\|.$$

Определение 19. Тензорное произведение $A_S := \mathcal{K} \otimes A$ называется *стабилизацией* C^*-алгебры A. C^*-алгебра A называется *стабильной*, , если $A_S \cong A$. Две C^*-алгебры A и B называются *стабильно эквивалентными*, если $A_S \cong B_S$.

1.3.4 Проекторы в C^*-модулях

Перейдем к изучению проекторов в C^*-модулях. Пусть $\mathcal{F}$ есть замкнутый подмодуль в C^*-модуле $\mathcal{E}$. Как известно, не любой такой подмодуль допускает ортогональное дополнение. Допустим, однако, что у $\mathcal{F}$ такое дополнение $\mathcal{F}^\perp$ имеется, так что $\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}^\perp \cong \mathcal{E}$. Тогда любой элемент $s \in \mathcal{E}$ будет однозначно записываться в виде

$$s = t + u,$$

где $t \in \mathcal{F}$, $u \in \mathcal{F}^\perp$, а отображение $s \mapsto t$ будет задавать проектор $p \in \mathrm{End}_A\mathcal{E}$ с областью значений $\mathcal{F}$.

Обратно, если $p \in \mathrm{End}_A\mathcal{E}$ является проектором, то ортогональное дополнение к $\operatorname{Im} p$ существует и совпадает с

$$(\operatorname{Im} p)^\perp = \operatorname{Im}(1_\mathcal{E} - p) = \operatorname{Ker} p.$$

Тем самым, мы установили взаимно-однозначное соответствие между дополняемыми C^*-подмодулями в $\mathcal{E}$ и областями значений проекторов из $\mathrm{End}_A\mathcal{E}$.

Определение 20. Пусть A есть унитальная C^*-алгебра. Тогда A-компактные проекторы в $\mathcal{H}_A$ образуют подмножество в C^*-алгебре A_S, обозначаемое через $\mathcal{P}(A_S)$. Это замкнутое подмножество в единичном шаре алгебры A_S.

Примерами операторов из $\mathcal{P}(A_S)$ могут служить проекторы вида

$$P_n = \sum_{j=1}^{n} |e_j\rangle\langle e_j|,$$

где $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ (с 1 на j-м месте).

В заключение приведем описание A-компактных операторов в конечно порожденных проективных модулях над алгеброй A. Рассмотрим модули вида pA^n, где p – проектор в $\mathrm{Mat}_n(A)$.

Предложение 5. *Если p – проектор в $Mat_n(A)$, то pA^n является C^*-модулем над алгеброй A, причем*

$$\mathcal{K}_A(pA^n) \cong p\, Mat_n(A) p.$$

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$\mathrm{Fin}_A(pA^n) \longrightarrow p\,\mathrm{Mat}_n(A)p,$$

которое переводит кетбра-оператор вида $|pa\rangle\langle pb|$ в матрицу с (i,j)-компонентами, равными

$$\sum_{k,l} p_{ik} a_k b_l^* p_{lj}.$$

Это отображение является изометрическим $*$-изоморфизмом, который продолжается до изоморфизма $\mathcal{K}_A(pA^n)$ на $p\,\mathrm{Mat}_n(A)p$. □

1.3.5 Унитарные операторы. Сопряжение

Продолжим изучение линейных операторов, действующих в C^*-модулях над алгеброй A. Напомним определение сопряженного оператора.

Определение 21. Пусть $T : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ есть ограниченный A-линейный оператор, действующий из C^*-модуля $\mathcal{E}$ над C^*-алгеброй A в C^*-модуль $\mathcal{F}$ над той же алгеброй. Будем говорить, что T *допускает сопряжение*, если существует A-линейный оператор $T^* : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$, называемый *сопряженным* к T, такой что

$$(r, Ts) = (T^* r, s)$$

для всех $s \in \mathcal{E}$, $r \in \mathcal{F}$.

Как и в случае ограниченных линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве, сопряженный оператор определяется единственным образом и $T^{**} = T$. Однако в отличие от гильбертова случая ограниченные A-линейные операторы, действующие в C^*-модулях, не обязательно допускают сопряжение. Причина в том, что не любой замкнутый подмодуль $\mathcal{F}$ в C^*-модуле $\mathcal{E}$ над C^*-алгеброй A допускает ортогональное дополнение $\mathcal{G}$ такое, что $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G} = \mathcal{E}$. (Соответствующий пример читатель может придумать самостоятельно.)

Поэтому требование существования сопряженного оператора приходится накладывать дополнительно. Именно, будем обозначать через $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{E},\mathcal{F})$ векторное пространство A-линейных операторов $T:\mathcal{E}\to\mathcal{F}$, допускающих сопряжение. При $\mathcal{F}=\mathcal{E}$ мы обозначаем через $\mathrm{End}_A(\mathcal{E})$ алгебру A-линейных эндоморфизмов $\mathcal{E}$, допускающих сопряжение.

Введем еще один класс операторов, которые будут постоянно встречаться нам далее.

Определение 22. *Унитарным оператором* $U:\mathcal{E}\to\mathcal{F}$ из C^*-модуля $\mathcal{E}$ над C^*-алгеброй A в C^*-модуль $\mathcal{F}$ над той же алгеброй называется отображение $U\in\mathrm{Hom}_A(\mathcal{E},\mathcal{F})$ такое, что

$$U^*U=1_{\mathcal{E}},\ UU^*=1_{\mathcal{F}}.$$

Если такой оператор существует, то модули $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ называются *унитарно эквивалентными*.

Одним из наиболее важных свойств C^*-алгебр является то, что алгебры операторов над ними также являются C^*-алгебрами.

Предложение 6. *Пусть $\mathcal{E}$ – (правый) C^*-модуль над C^*-алгеброй A. Тогда алгебра $End_A\mathcal{E}$ ограниченных линейных операторов на $\mathcal{E}$, допускающих сопряжение, также является C^*-алгеброй.*

Доказательство. Норма в алгебре $\mathrm{End}_A\mathcal{E}$ определяется равенством

$$\|T\|=\sup_{\|s\|\le 1}\|Ts\|,$$

где $s\in\mathcal{E}$. По неравенству Коши-Буняковского

$$\|Ts\|^2=\|(s,T^*Ts)\|\le\|s\|\cdot\|T^*Ts\|\le\|T^*T\|\cdot\|s\|^2,$$

откуда

$$\|T\|^2\le\|T^*T\|\le\|T^*\|\cdot\|T\|,$$

т.е. $\|T\|\le\|T^*\|$ и, следовательно, $\|T\|=\|T^*\|$, поскольку $T^{**}=T$. Тем самым,

$$\|T\|^2\le\|T^*T\|\le\|T\|^2\Longrightarrow\|T^*T\|=\|T\|^2,$$

т.е. $\|\cdot\|$ является C^*-нормой.

Для доказательства полноты пространства $\mathrm{End}_A\mathcal{E}$ заметим, что если задана последовательность Коши $\{T_n\}$, состоящая из операторов, допускающих сопряжение, то она сходится к некоторому ограниченному линейному оператору T. По доказанному, последовательность сопряженных операторов $\{T_n^*\}$ также является последовательностью Коши и потому сходится к некоторому ограниченному линейному оператору S. Так как

$$(r,Ts)=\lim_n(r,T_ns)=\lim_n(T_n^*r,s)=(Sr,s)$$

для всех $r,s\in\mathcal{E}$, то оператор T допускает сопряжение и сопряженный к нему оператор совпадает с S. Это доказывает полноту пространства $\mathrm{End}_A\mathcal{E}$. $\square$

Следствие 3. *Алгебра $\mathcal{K}_A(\mathcal{E})$, состоящая из A-компактных операторов, действующих в C^*-модуле $\mathcal{E}$, является C^*-алгеброй и двусторонним идеалом в алгебре $End_A\mathcal{E}$.*

В частности, алгебра $\mathcal{K} \equiv \mathcal{K}(\mathcal{H})$, состоящая из компактных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, является двусторонним идеалом в алгебре $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ всех ограниченных линейных операторов в $\mathcal{H}$.

1.3.6 Проективные C^*-модули

В этом параграфе мы докажем аналог теоремы Серра-Суона для произвольных унитальных C^*-алгебр, точнее, будет установлено взаимно-однозначное соответствие между A-компактными проекторами и конечно порожденными проективными C^*-модулями над A.

Теорема 5. *Пусть A есть унитальная C^*-алгебра. Тогда правые C^*-модули вида $p\mathcal{H}_A$ с $p \in \mathcal{P}(A_S)$ являются конечно порожденными проективными модулями над A. Иными словами, каждый из них изоморфен прямому слагаемому в свободном модуле A^n для некоторого n.*

Идея доказательства: состоит в том, чтобы сопоставить модулю $p\mathcal{H}_A$ изоморфный ему модуль, вложенный в свободный модуль $P_n\mathcal{H}_A \cong A^n$, где P_n – стандартный проектор в $\mathcal{H}_A$, введенный в начале п.1.3.2. Чтобы исходный проектор p можно было сравнивать с P_n, его нужно сначала "повернуть" с помощью унитарного элемента $u_n \in \mathrm{End}_A\mathcal{H}_A$ так, чтобы обеспечить выполнение неравенства $u_n p u_n^* \leq P_n$.

Переходя к построению указанного оператора, заметим, что для заданного $\varepsilon > 0$ найдется n такое, что

$$\|p - P_n p P_n\| < \varepsilon/3.$$

Оператор $a_n := P_n p P_n$ положителен, поскольку

$$a_n \geq a_n^2 = a_n^* a_n \geq 0.$$

Действительно, неравенство $a_n \geq a_n^2$ записывается в виде соотношения $P_n p P_n \geq P_n p P_n p P_n$, которое вытекает из неравенства $p \geq p P_n p$, следующего в свою очередь из $I \geq P_n$.

Более того, $\|a_n - a_n^2\| < \varepsilon$, поскольку

$$\|a_n - a_n^2\| \leq \|a_n - p\| + \|p(p - a_n)\| + \|(p - a_n)a_n\| \leq \\ \leq \varepsilon/3 + \|p\|\varepsilon/3 + \|a_n\|\varepsilon/3 < \varepsilon,$$

так как $\|p\| \leq 1$ и $\|a_n\| \leq 1$.

Легко видеть, что спектр a_n содержится в отрезке $[0, 1]$ за вычетом точки $1/2$. Более того, можно показать, что этот спектр содержится в объединении отрезков $[0, 2\varepsilon] \cup [1 - 2\varepsilon, 1]$ (предполагая при этом, что $\varepsilon < 1/4$).

Применим теперь спектральную теорему для самосопряженных элементов банаховой алгебры (ее формулировка имеется, например, в учебнике Рудина по функциональному анализу [9]). Обозначим через p_n спектральный проектор, отвечающий отрезку $[1-2\varepsilon, 1]$. Этот проектор равен $f(a_n)$ для любой непрерывной функции f на отрезке $[0,1]$, такой что $0 \le f \le 1$ и

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \le t \le 2\varepsilon \\ 1 & \text{при } 1-2\varepsilon \le t \le 1. \end{cases}$$

Тогда $p_n \in \mathcal{P}(A_S)$ с $\|p_n - a_n\| < 2\varepsilon$, так что $\|p_n - p\| < 3\varepsilon < 3/4$.

Воспользуемся теперь следующей леммой, которая будет доказана на семинаре.

Лемма 5. *Если p, q – два проектора в унитальной C^*-алгебре B, удовлетворяющие соотношению $\|p-q\| < 1$, то существует унитарный элемент $u \in B$ такой, что $q = upu^*$.*

Доказательство леммы. Рассмотрим элементы $2p-1$ и $2q-1$ из алгебры B. Это унитарные самосопряженные элементы из B, спектры которых содержатся в множестве $\{-1, 1\}$. Положим

$$2r := (2p-1)(2q-1) + 1 \Longrightarrow r = 2qp - p - q + 1.$$

Тогда $qr = qp = rp$ и

$$r^*rp = r^*qr = (qr)^*r = (rp)^*r = pr^*r,$$

т.е. p коммутирует с $|r|^2$ и, следовательно, с $|r|$. Кроме того, элемент r обратим в B, поскольку

$$\|r - 1\| = \|2qp - q - p\| = \|(q-p)(2p-1)\| \le \|q - p\| < 1.$$

Положим $u = r|r|^{-1}$. Это унитарный элемент в B, удовлетворяющий условию

$$upu^* = rp|r|^{-2}r^* = q.$$

□

По доказанной лемме $p_n = u_n p u_n^*$ для некоторого унитарного элемента u_n из унитальной C^*-алгебры $\mathrm{End}_A \mathcal{H}_A$. Кроме того, $p_n \le P_n$. Действительно, из очевидного соотношения

$$P_n a_n = a_n P_n = a_n$$

следует (с помощью аппроксимации функции f полиномами), что

$$P_n p_n = p_n P_n = p_n.$$

Отсюда вытекает, что $P_n - p_n$ является проектором в $\mathcal{P}(A_S)$, поскольку

$$(P_n - p_n)^2 = P_n - p_n P_n - P_n p_n + p_n = P_n - p_n.$$

C^*-модуль $p_n \mathcal{H}_A$ конечно порожден и проективен, поскольку он является прямым слагаемым с свободном модуле $P_n \mathcal{H}_A \cong A^n$:

$$p_n \mathcal{H}_A \oplus (P_n - p_n)\mathcal{H}_A = P_n \mathcal{H}_A.$$

Отображение $s \mapsto u_n s$ устанавливает унитарную эквивалентность A-модулей $p\mathcal{H}_A$ и $p_n \mathcal{H}_A$. Поэтому и C^*-модуль $p\mathcal{H}_A$ изоморфен прямому слагаемому в A^n, т.е. является конечно порожденным и проективным. □

Справедлив и обратный результат.

Теорема 6. *Пусть $\mathcal{E}$ есть (правый) конечно порожденный проективный модуль над унитальной C^*-алгеброй A. Тогда его можно наделить структурой C^*-модуля над A таким образом, что он станет изоморфен $p\mathcal{H}_A$ для некоторого $p \in \mathcal{P}(A_S)$.*

Доказательство. Модуль $\mathcal{E}$ имеет вид $\mathcal{E} = eA^n$, где e – некоторый идемпотент в $\mathrm{Mat}_n(A)$. Так как область значений идемоптента замкнута, то структуру C^*-модуля на $\mathcal{E}$ можно задать, ограничивая стандартную структуру C^*-модуля из A^n на $\mathcal{E}$.

Заметим, что оператор e допускает сопряжение. Действительно, если $\{u_j\}_{j=1}^n$ – стандартный базис в A^n, так что

$$1_{A^n} = \sum_{j=1}^n |u_j\rangle\langle u_j|,$$

то в его терминах идемпотент e можно записать в виде

$$e = \sum_{j=1}^n |eu_j\rangle\langle u_j|,$$

откуда

$$e^* = \sum_{j=1}^n |u_j\rangle\langle eu_j|.$$

Как уже отмечалось ранее,

$$(\mathrm{Im}\, e)^\perp = \mathrm{Ker}\, e^*,$$

поскольку $e^*s = 0 \iff (er, s) = (r, e^*s) = 0$ для всех $r \in A^n$. Отсюда следует, что $(\mathrm{Ker}\, e^*)^\perp = \mathrm{Im}\, e$, и аналогичным образом $(\mathrm{Im}\, e^*)^\perp = \mathrm{Ker}\, e$, $(\mathrm{Ker}\, e)^\perp = \mathrm{Im}\, e^*$, поскольку e^* также является идемпотентом.

Далее,

$$\mathrm{Ker}\, e = \mathrm{Ker}(e^*e),$$

так как из $(e^*e)s = 0$ вытекает, что $(es, es) = (s, (e^*e)s) = 0 \Longrightarrow es = 0$. Переходя к ортогональным дополнениям, получим

$$\mathrm{Im}\, e^* = \mathrm{Im}(e^*e).$$

Поэтому если элемент $s \in A^n$, то $e^*s = (e^*e)t$ для некоторого $t \in A^n$ и мы можем представить его в виде суммы

$$s = et + (s - et) \in \mathrm{Im}\, e \oplus \mathrm{Ker}\, e^* = \mathrm{Im}\, e \oplus (\mathrm{Im}\, e)^\perp.$$

Тем самым, мы показали, что $A^n = \mathcal{E} \oplus \mathcal{E}^\perp$, т.е. $\mathcal{E}$ допускает ортогональное дополнение. Поэтому существует проектор $p \in \mathrm{Mat}_n(A)$ такой, что $\mathcal{E} = pA^n$. Так как $A^n \cong P_n(\mathcal{H}_A)$ и $p \le P_n$ при таком отождествлении, то $\mathcal{E} = p\mathcal{H}_A$. $\square$

Замечание 5 (формула Капланского). Имеется явная формула, выражающая проектор p через идемпотент e. Именно, рассмотрим оператор

$$r = ee^* = (1 - e^*)(1 - e) = 1 + (e - e^*)(e^* - e) = 1 - e^* - e + ee^* + e^*e.$$

Это положительный и обратимый элемент в $\mathrm{Mat}_n(A)$ (поскольку этими свойствами обладают все элементы вида $1 + a^*a$). Более того, r коммутирует как с e, так и с e^*. Действительно,

$$re = er = ee^*e \quad \text{и} \quad re^* = e^*r = e^*ee^*.$$

Поэтому и r^{-1} коммутирует с e и e^*. Теперь положим $p := ee^*r^{-1}$. Тогда $p = p^*$ и

$$p^2 = ee^*ee^*r^{-2} = ere^*r^{-2} = p,$$

т.е. p является проектором. Далее, $ep = p$ и $pe = e$, поскольку

$$per = ee^*e = er,$$

так что область значений p совпадает с областью значений e.

Из Теоремы 6 вытекает

Следствие 4. *Для произвольного эрмитова векторного расслоения $E \to M$ над компактным многообразием M справедливо равенство*

$$\mathcal{K}(\Gamma(M, E)) = End_A(\Gamma(M, E)) \cong \Gamma(M, End\, E).$$

1.4 K-теория

В этом параграфе излагаются основы K-теории, необходимые для дальнейшего.

Вначале в п.1.4.1 вводятся топологическая и алгебраическая K_0-группы и доказывается теорема об их совпадении для произвольной C^*-алгебры A с единицей.

Затем в п.1.4.2 определяются высшие K-группы C^*-алгебры A и формулируется теорема периодичности Ботта, утверждающая что все такие группы изоморфны с периодом 2, т.е. $K_{2n}(A) \cong K_0(A)$ и $K_{2n+1}(A) \cong K_1(A)$.

Для топологической группы $K_1(A)$ дается также другое определение как группы компонент связности унитарной группы стабилизации A_S алгебры A. Имеется также иное определение алгебраической группы $K_1(A)$ в терминах группы $\mathrm{GL}_\infty(A)$. Заметим однако, что топологическая и алгебраическая K_1-группы, в отличие от K_0-группы, не всегда изоморфны.

1.4.1 K_0-группа

Введем на множестве проекторов C^*-алгебры A следующее отношение эквивалентности.

Определение 23. Два проектора $p, q \in \mathcal{P}(A_S)$ *эквивалентны*, если $q = upu^* = upu^{-1}$ для некоторого унитарного элемента $u \in \mathrm{End}_A \mathcal{H}_A$.

Обозначим через

$$V^{\mathrm{top}}(A) := \mathcal{P}(A_S)/\sim$$

фактор пространства $\mathcal{P}(A_S)$ по введенному отношению эквивалентности.

Предложение 7. *Множество $V^{top}(A)$ является унитальной коммутативной полугруппой.*

Доказательство. Определим прямую сумму проекторов $p, q \in \mathcal{P}(A_S)$ по формуле

$$p \oplus q = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}.$$

С учетом этого сложение в $V^{\mathrm{top}}(A)$ будет задаваться как

$$[p] + [q] = [p \oplus q].$$

Оно корректно определено, поскольку

$$upu^{-1} \oplus vqv^{-1} = (u \oplus v)(p \oplus q)(u^{-1} \oplus v^{-1})$$

для унитарных $u, v \in \mathrm{End}_A \mathcal{H}_A$. Далее,

$$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix},$$

т.е. указанная полугруппа коммутативна. Роль единицы (или, скорее, нуля) в этой полугруппе играет нулевой класс $[0]$. $\square$

Конструкция Гротендика. По любой унитальной коммутативной полугруппе S можно каноническим образом построить группу K, называемую *группой Гротендика* полугруппы S. Это коммутативная группа, заданная вместе с унитальным полугрупповым гомоморфизмом $\vartheta : S \to K$, обладающая следующим универсальным свойством: если G – другая группа, заданная вместе с унитальным полугрупповым гомоморфизмом $\gamma : S \to G$, то существует единственный групповой гомоморфизм $\kappa : K \to G$ такой, что следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, dashed, "\kappa"] & G \\ S \arrow[u, "\vartheta"] \arrow[ur, "\gamma"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна, т.е. $\gamma = \kappa \circ \vartheta$.

Группа K определяется однозначно с точностью до изоморфизма. Построить ее можно следующим образом. Рассмотрим на множестве $S \times S$ следующее отношение эквивалентности:

$$(x, y) \sim (x', y') \Longleftrightarrow \text{существует } z \in S \text{ такое, что } x + y' + z = x' + y + z.$$

Тогда группа K определяется как $K = S \times S/\sim$, а гомоморфизм ϑ задается формулой: $\vartheta(x) := [x, 0]$, так что $[x, y] = \vartheta(x) - \vartheta(y)$ в группе K.

Определение 24. *Топологической K_0-группой* унитальной C^*-алгебры A называется группа Гротендика $K_0^{\mathrm{top}}(A)$ полугруппы $V^{\mathrm{top}}(A)$.

Перейдем теперь к построению алгебраической K_0-группы. Для этого докажем сначала следующую лемму.

Лемма 6. *Пусть $e \in Mat_n(\mathcal{A})$ и $f \in Mat_m(\mathcal{A})$ – два матричных идемпотента над унитальным кольцом $\mathcal{A}$. Отвечающие им конечно порожденные модули $e\mathcal{A}^n$ и $f\mathcal{A}^m$ изоморфны тогда и только тогда, когда существует обратимая матрица $a \in Mat_N(\mathcal{A})$ с $N > m, n$ такая, что*

$$a\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0_{N-n} \end{pmatrix} a^{-1} = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 0_{N-m} \end{pmatrix} .$$

Доказательство. Необходимость. Предположим, что имеется изоморфизм $\varphi : e\mathcal{A}^n \to f\mathcal{A}^m$. Продолжим φ нулем на $(1-e)\mathcal{A}^n$ до морфизма $\psi : \mathcal{A}^n \to \mathcal{A}^m$ и, аналогично, продолжим φ^{-1} нулем на $(1-f)\mathcal{A}^m$ до морфизма $\eta : \mathcal{A}^m \to \mathcal{A}^n$. Эти морфизмы можно записать в виде

$$\psi(s) = gs \quad \text{и} \quad \eta(t) = ht$$

для подходящих матриц $g \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathcal{A})$ и $h \in \mathrm{Mat}_{n,m}(\mathcal{A})$. Указанные матрицы удовлетворяют следующим легко проверяемым соотношениям

$$gh = f,\ hg = e \quad \text{и} \quad g = ge = fg,\ h = eh = hf.$$

Положим теперь $N = m + n$ и заметим, что

$$\begin{pmatrix} g & 1-f \\ 1-e & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h & 1-e \\ 1-f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

причем

$$\begin{pmatrix} g & 1-f \\ 1-e & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h & 1-e \\ 1-f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Это доказывает необходимость условий леммы.

Достаточность. Если $a(e \oplus 0)a^{-1} = f \oplus 0$, то $ae\mathcal{A}^N = fa\mathcal{A}^N$. Подставляя $\mathcal{A}^N = \mathcal{A}^n \oplus \mathcal{A}^m$ в это соотношение, получаем явный изоморфизм модулей $\varphi : e\mathcal{A}^n \to f\mathcal{A}^m$. □

Обозначим через $Q_n(\mathcal{A})$ множество идемпотентов в алгебре $\mathrm{Mat}_n(\mathcal{A})$ и через $\mathrm{GL}_n(\mathcal{A})$ группу обратимых элементов в $\mathrm{Mat}_n(\mathcal{A})$. Имеются естественные вложения

$$\mathrm{Mat}_n(\mathcal{A}) \hookrightarrow \mathrm{Mat}_{n+1}(\mathcal{A}), \quad m \longmapsto \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и

$$\mathrm{GL}_n(\mathcal{A}) \hookrightarrow \mathrm{GL}_{n+1}(\mathcal{A}), \quad a \longmapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Первое из них порождает также вложение $Q_n(\mathcal{A}) \hookrightarrow Q_{n+1}(\mathcal{A})$. Пользуясь указанными вложениями, мы можем определить индуктивные пределы

$$\mathrm{Mat}_\infty(\mathcal{A}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Mat}_n(\mathcal{A}),\ Q_\infty(\mathcal{A}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n(\mathcal{A}),\ \mathrm{GL}_\infty(\mathcal{A}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{GL}_n(\mathcal{A}).$$

Определение 25. Два идемпотента $e, f \in Q_m(\mathcal{A})$ *эквивалентны*, если они сопряжены с помощью $\mathrm{GL}_\infty(\mathcal{A})$, т.е. если для некоторого n найдется элемент $a \in \mathrm{GL}_{n+m}(\mathcal{A})$ такой, что

$$a \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0_n \end{pmatrix} a^{-1} = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 0_n \end{pmatrix} .$$

Рассмотрим множество

$$V^{\mathrm{alg}}(\mathcal{A}) = Q_\infty(\mathcal{A})/\sim,$$

являющееся фактором $Q_\infty(\mathcal{A})$ по введенному отношению эквивалентности. Определим сложение в $V^{\mathrm{alg}}(\mathcal{A})$ по правилу

$$[e] + [f] = \left[\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} \right] .$$

Эта операция корректно определена благодаря соотношению $e \oplus f \sim f \oplus e$. Тем самым, $V^{\mathrm{alg}}(\mathcal{A})$ является коммутативной полугруппой и мы можем определить *алгебраическую K_0-группу* $K_0^{\mathrm{alg}}(\mathcal{A})$ как группу Гротендика полугруппы $V^{\mathrm{alg}}(\mathcal{A})$.

Теорема 7. *Для произвольной унитальной C^*-алгебры A обе K_0-группы совпадают, т.е.*

$$K_0^{top}(A) = K_0^{alg}(A).$$

Доказательство. Допустим сначала, что идемпотенты $e, f \in Q_\infty(A)$ эквивалентны. По лемме 6 найдется такое достаточно большое n, для которого правые A-модули eA^n и fA^n изоморфны. Тогда по теореме 6 найдутся проекторы $p, q \in \mathrm{Mat}_n(A)$ такие, что

$$eA^n = p\mathcal{H}_A \quad \text{и} \quad fA^n = q\mathcal{H}_A.$$

Отсюда следует, что $p \sim e \sim f \sim q$ в $Q_\infty(A)$, т.е. существует элемент $z \in \mathrm{GL}_\infty(A)$ такой, что

$$q = zpz^{-1}.$$

Чтобы доказать эквивалентность проекторов p и q в пространстве $\mathcal{P}(A_S)$, нужно найти унитарный оператор u в $\mathcal{H}_A$ такой, что $q = upu^{-1}$. Для этого представим z в полярной форме $z = u|z|$, где u – унитарный оператор в пространстве $\mathrm{End}_A\mathcal{H}_A$. Тогда

$$|z|p|z|^{-1} = u^*qu = (u^*qu)^* = |z|^{-1}p|z|,$$

т.е. p коммутирует с $|z|^2$, а потому и с $|z|$ (почему?). Следовательно, $q = upu^*$.

Обратно, пусть проекторы $p, q \in \mathcal{P}(A_S)$ эквивалентны друг другу, т.е. существует унитарный оператор $u \in \mathrm{End}_A\mathcal{H}_A$ такой, что $q = upu^*$. Тогда, также как в доказательстве теоремы 5, можно найти для некоторого достаточно большого n проекторы $p_n, q_n \in \mathrm{Mat}_n(A)$ такие, что $p_n \sim p \sim q \sim q_n$ с помощью унитарных сопряжений, откуда следует, что

$$q_n = vp_nv^* \tag{1.9}$$

для некоторого унитарного оператора $v \in \mathrm{End}_A \mathcal{H}_A$. Если $v \in \mathrm{GL}_m(A)$ с некоторым $m \geq n$, то это означает, что проекторы p_n и q_n принадлежат одному классу в $Q_\infty(A)$, т.е. модули $p_n\mathcal{H}_A$ и $q_n\mathcal{H}_A$ изоморфны. Но тогда изоморфны и модули $p\mathcal{H}_A$ и $q\mathcal{H}_A$, т.е. по лемме 6 они принадлежат одному классу в $K_0^{\mathrm{alg}}(A)$.

Если же v – общий унитарный оператор в $\mathcal{H}_A$, то мы можем, тем не менее считать, что $v \in A_S^+$, где A_S^+ обозначает унитализацию алгебры A_S. Действительно, также как в лемме 5, мы можем построить унитарные операторы u_n и v_n, принадлежащие группе $\mathrm{GL}_n(A) \subset A_S^+$, такие что

$$p_n = u_n p u_n^* \quad \text{и} \quad q_n = v_n q v_n^*.$$

В их терминах оператор v записывается в виде $v = v_n u u_n^*$ (в чем можно убедиться, подставляя указанное выражение для v в формулу (1.9)). Из этой формулы вытекает, что $v \in A_S^+$.

Пользуясь им, мы можем найти для достаточно большого $m \geq n$ унитарный оператор $w \in \mathrm{Mat}_m(A)$, приближающий v на $\mathrm{Mat}_m(A)$ с заданной точностью ε. Обозначим через $\hat{q}_n \in \mathrm{Mat}_m(A)$ проектор вида $\hat{q}_n = wp_n w^*$. Тогда

$$\begin{aligned}
q_n - \hat{q}_n = P_m(q_n - \hat{q}_n)P_m = \\
= P_m(v-w)p_n(v-w)^*P_m + P_m w p_n (v-w)^* P_m + P_m(v-w)p_n w^* P_m = \\
= P_m(v-w)P_m p_n P_m (v-w)^* P_m + P_m w P_m p_n P_m (v-w)^* P_m + \\
+ P_m(v-w)P_m p_n P_m w^* P_m,
\end{aligned}$$

где последнее равенство вытекает из очевидного соотношения $p_n = P_m p_n P_m$. Отсюда следует, что оператор $q_n - \hat{q}_n$ допускает оценку

$$\begin{aligned}
\|q_n - \hat{q}_n\| = \|P_m(v-w)P_m p_n P_m (v-w)^* P_m + \\
+ P_m w P_m p_n P_m (v-w)^* P_m + P_m(v-w)P_m p_n P_m w^* P_m\| < \\
< \varepsilon^2 + 2\varepsilon < 1.
\end{aligned}$$

Поэтому по лемме 5 существует унитарный оператор $w_m \in \mathrm{Mat}_m(A)$ такой, что $q_n = w_m \hat{q}_n w_m^*$. Тогда оператор $z_m := w_m w \in \mathrm{GL}_m(A)$ будет удовлетворять соотношению $q_n = z_m p_n z_m^{-1}$, из которого вытекает, что проекторы p_n и q_n принадлежат одному классу в $Q_\infty(A)$, т.е. модули $p_n\mathcal{H}_A$ и $q_n\mathcal{H}_A$ изоморфны. Но тогда изоморфны также модули $p\mathcal{H}_A$ и $q\mathcal{H}_A$ и по лемме 6 принадлежат одному классу в $K_0^{\mathrm{alg}}(A)$. $\square$

С учетом доказанной теоремы мы будем далее опускать индексы “top” и “alg” в обозначениях $V(A)$ и $K_0(A)$.

Любой элемент из $K_0(A)$ представим в виде $[p] - [q]$, где проекторы $p, q \in \mathcal{P}(A_S)$. Пусть $\varphi : A \to B$ есть унитальный морфизм C^*-алгебр. Обозначим через $K_0\varphi : K_0(A) \to K_0(B)$ отображение, задаваемое формулой

$$K_0\varphi : [p] - [q] \longrightarrow [\varphi(p)] - [\varphi(q)].$$

Предложение 8. *Соответствие*

$$(A, \varphi) \longmapsto (K_0(A), K_0\varphi)$$

задает ковариантный функтор из категории унитальных C^*-алгебр в категорию абелевых групп.

Пример 5. $K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$.

Действительно, $V(\mathbb{C}) = \mathbb{N}$, поскольку все проекторы в $\mathcal{P}(\mathbb{C}_S)$ имеют конечный ранг, который является их единственным инвариантом.

Пример 6. Аналогично, $K_0(\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}$.

Пример 7. Покажите, что K_0-группа $K_0(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ алгебры ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве равна нулю.

Свойства K_0-функтора

1. *стабильность*: $K_0(A_S) = K_0(A)$.

2. *полуточность*: K_0 переводит короткие точные последовательности вида $0 \to J \to A \to B \to 0$ в последовательности

$$K_0(J) \to K_0(A) \to K_0(B),$$

точные в среднем члене.

3. *K_0 коммутирует с индуктивными пределами.*

1.4.2 Высшие K-группы

Для того, чтобы определить высшие K-группы, введем понятие *надстройки* (суспензии) C^*-алгебры A. Это C^*-алгебра вида

$$\Sigma A := A \otimes C_0(\mathbb{R}) \cong C_0(\mathbb{R}, A),$$

где $C_0(X)$ (соотв. $C_0(X, A)$) обозначает пространство непрерывных функций (соотв. со значениями в A) на локально компактном топологическом пространстве X, обращающихся в нуль "на бесконечности". С учетом этого определим *K-группу порядка n* для C^*-алгебры A как

$$K_n(A) := K_0(\Sigma^n A).$$

Теорема 8 (теорема периодичности Ботта)**.** *Для любой C^*-алгебры A и любого натурального n имеют место изоморфизмы*

$$K_{2n}(A) \cong K_0(A), \quad K_{2n+1}(A) \cong K_1(A).$$

В силу этой теоремы имеет смысл изучать, помимо группы $K_0(A)$, только группу $K_1(A)$, для которой мы приведем другое, эквивалентное определение.

А именно, введем группу

$$K_1^{\mathrm{top}}(A) = [C_0(\mathbb{R}), A_S],$$

отождествляемую с множеством гомотопических классов гомоморфизмов $C_0(\mathbb{R}) \to A_S$. Это определение можно переписать в виде

$$[C_0(\mathbb{R}), A_S] \cong [C(\mathbb{T}), A_S^+]_+,$$

где A_S^+ обозначает унитализацию алгебры A_S, а индекс "+" в обозначении $[X,Y]_+$ указывает на то, что рассматривается множество гомотопических классов непрерывных отображений $X \to Y$ топологических пространств X, Y с отмеченными точками.

Заметим далее, что C^*-алгебра $C(\mathbb{T})$ порождается единственным унитарным элементом $t \mapsto e^{it}$. Поэтому гомоморфизм из $K_1^{\mathrm{top}}(A) \cong [C(\mathbb{T}), A_S^+]_+$ определяется выбором унитарного элемента в $A_S^+ = (\mathcal{K} \otimes A)^+$. Таким образом, мы можем отождествить $K_1^{\mathrm{top}}(A)$ с группой $\pi_0(\mathrm{U}(A_S^+))$ компонент связности унитарной группы $\mathrm{U}(A_S^+)$.

Пользуясь тем, что $\mathcal{K}(\mathcal{H}) = \varinjlim \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, мы можем переписать последнее определение $K_1^{\mathrm{top}}(A)$ в виде

$$K_1^{\mathrm{top}}(A) = \varinjlim \mathrm{U}_n(A)/\mathrm{U}_n(A)^0 = \varinjlim \mathrm{GL}_n(A)/\mathrm{GL}_n(A)^0,$$

где $\mathrm{U}_n(A)$ обозначает подгруппу в $\mathrm{Mat}_n(A)$, состоящую из унитарных элементов, а $\mathrm{U}_n(A)^0$ – связную подгруппу единицы в $\mathrm{U}_n(A)$.

Пример 8. $K_1^{\mathrm{top}}(\mathbb{C}) = 0$.

Этот факт вытекает из связности группы $\mathrm{U}(\mathcal{K}^+)$ (где $\mathcal{K} - \mathcal{K}(\mathcal{H})$, которую мы предлагаем проверить самостоятельно.

Пример 9. Аналогично, $K_1^{\mathrm{top}}(\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})) = 0$.

Умножение в группе $K_1^{\mathrm{top}}(A)$ задается формулой:

$$[u] \cdot [v] = [uv] = \left[\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}\right],$$

где второе равенство и коммутативность умножения вытекают из цепочки гомотопий

$$\begin{pmatrix} uv & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} vu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

проверку которых мы оставляем читателю.

Перейдем к определению алгебраической K_1-группы. Напомним сначала, что *коммутантом* произвольной группы G называется ее нормальная подгруппа $G' := [G,G]$, порождаемая элементами вида $[g,h] := ghg^{-1}h^{-1}$. Фактор

$$G_{\mathrm{ab}} := G/G'$$

является абелевой группой и называется *абелианизацией* группы G.

Пользуясь этим понятием, мы можем определить K_1-*группу* произвольного кольца $\mathcal{A}$ как

$$K_1^{\mathrm{alg}}(\mathcal{A}) = \mathrm{GL}_\infty(\mathcal{A})_{\mathrm{ab}} = \mathrm{GL}_\infty(\mathcal{A})/\mathrm{GL}_\infty(\mathcal{A})'.$$

Пример 10. Если $\mathcal{A} = \mathbb{Z}$, то $K_1^{\mathrm{alg}}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$.

Пример 11. Если $\mathcal{A} = F$ есть поле, то $K_1^{\mathrm{alg}}(F) = F^\times$ (группа обратимых элементов в F).

В частности, если кольцо $\mathcal{A}$ есть унитальная C^*-алгебра A, то

$$K_1^{\mathrm{alg}}(A) = \mathrm{GL}_\infty(A)_{\mathrm{ab}} = \mathrm{GL}_\infty(A)/\mathrm{GL}_\infty(A)'.$$

В то же время

$$K_1^{\mathrm{top}}(A) = \mathrm{GL}_\infty(A)/\mathrm{GL}_\infty(A)^0.$$

Так как коммутант содержится в связной подгруппе единицы (почему?), имеется естественное сюръективное отображение

$$K_1^{\mathrm{alg}}(A) \longrightarrow K_1^{\mathrm{top}}(A) \tag{1.10}$$

которое однако, в отличие от случая K_0-групп, не всегда является инъективным. Действительно, в случае C^*-алгебры $A = \mathbb{C}$ имеем:

$$K_1^{\mathrm{alg}}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times, \text{ а } K_1^{\mathrm{top}}(\mathbb{C}) = 0.$$

(Отображение (1.10) является биективным для т.н. *стабильных* C^*-алгебр.)

В дальнейшем мы обозначаем через $K_1(A)$ группу $K_1^{\mathrm{top}}(A)$.

1.5 Фредгольмовы операторы

Параграф начинается с изложения стандартной теории фредгольмовых операторов в гильбертовом пространстве в п.1.5.1. В частности вводится индекс Фредгольма таких операторов и перечисляются его основные свойства. Главным результатом здесь является теорема Атьи–Ениха, формулировка которой приводится в конце п.1.5.1. Эта теорема утверждает, что множество гомотопических классов семейств фредгольмовых операторов, параметризуемых точками компактного топологического пространства X, можно отождествить с K_0-группой этого пространства, совпадающей с группой Гротендика полугруппы $\mathrm{Vect}(X)$ виртуальных векторных расслоений над X.

В следующем п.1.5.2 мы переходим к изучению A-фредгольмовых операторов в C^*-модулях над C^*-алгебрами A. Вводится понятие регулярного A-фредгольмова оператора, для которого удается определить индекс (п.1.5.3), принимающий значения в K_0-группе алгебры A. Указанное определение существенно использует теорему Каспарова о поглощении, позволяющую погрузить произвольный счетно-порожденный C^*-модуль над C^*-алгеброй A в стандартный гильбертов C^*-модуль $\mathcal{H}_A$ над A. Индекс произвольного A-фредгольмова оператора можно определить, расширяя его до регулярного A-фредгольмова оператора с помощью леммы 10, приведенной в п.1.5.3.

Завершается параграф формулировкой некоммутативной версии теорема Атьи–Ениха, утверждающей, что группа компонент связности пространства A-фредгольмовых операторов изоморфна K_0-группе C^*-алгебры A.

1.5.1 Топологическая теория

Обратимся к алгебре $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ограниченных линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Идеал $\mathcal{K} \equiv \mathcal{K}(\mathcal{H})$ компактных операторов в алгебре $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ будет в дальнейшем играть роль множества инфинитезимальных элементов в этой алгебре. Поэтому представляет интерес изучение т.н. *алгебры Калкина*

$$Q(\mathcal{H}) = \mathcal{L}(\mathcal{H})/\mathcal{K}(\mathcal{H}).$$

Заметим, что два оператора $S, T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ имеют один и тот же образ в алгебре $Q(\mathcal{H})$ тогда и только тогда, когда $S = T + K$ для некоторого компактного оператора K.

Предложение 9. *Ограниченный линейный оператор $F \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ имеет обратимый образ в алгебре $Q(\mathcal{H})$ тогда и только тогда, когда существует оператор $G \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ такой, что операторы $1 - GF$ и $1 - FG$ компактны. Последнее условие эквивалентно тому, что образ $\operatorname{Im} F$ замкнут, а ядро $\operatorname{Ker} F$ и коядро $\operatorname{Coker} F$ оператора F конечномерны.*

Доказательство. Первая эквивалентность очевидна. Для доказательство второй предположим, что существует оператор $G \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ такой, что операторы $1 - GF$ и $1 - FG$ компактны. Допустим, что мы уже доказали замкнутость $\operatorname{Im} F$ и покажем, что ядро $\operatorname{Ker} F$ конечномерно. Заметим, что $\operatorname{Ker} F$ инвариантно относительно оператора $1 - GF$, поскольку

$$(1 - GF)\xi = \xi - GF\xi = \xi$$

для $\xi \in \operatorname{Ker} F$. То же самое верно и для единичного шара в пространстве $\operatorname{Ker} F$, совпадающего, тем самым, с образом компактного оператора $1 - GF$. Из компактности этого шара вытекает конечномерность $\operatorname{Ker} F$.

Докажем теперь замкнутость $\operatorname{Im} F$. Для этого выберем оператор R конечного ранга, такой что

$$\|(1 - GF) - R\| < 1/2.$$

Для $\xi \in \operatorname{Ker} R$ будем иметь

$$\|\xi\| - \|\xi - GF\xi\| \leq \|GF\xi\| \leq \|G\| \cdot \|F\xi\|.$$

С другой стороны,

$$\|\xi\| - \|\xi - GF\xi\| \geq \|\xi\| - \frac{1}{2}\|\xi\| = \frac{1}{2}\|\xi\|,$$

т.е.

$$\frac{1}{2}\|\xi\| \leq \|G\| \cdot \|F\xi\|.$$

Отсюда

$$\|F\xi\| \geq \frac{\|\xi\|}{2\|G\|}$$

и, следовательно, сужение оператора F на $\operatorname{Ker} R$ имеет замкнутый образ. Но подпространство $(\operatorname{Ker} R)^\perp = \operatorname{Im} R^*$ конечномерно, поскольку оператор R имеет конечный ранг. Поэтому пространство

$$\operatorname{Im} F = F(\operatorname{Ker} R) + F((\operatorname{Ker} R)^\perp)$$

замкнуто.

Для доказательства конечномерности коядра $\operatorname{Coker} F$ заметим, также как и выше, что пространство $\operatorname{Ker} F^*$ инвариантно относительно оператора $(1 - FG)^* = 1 - G^*F^*$, откуда вытекает его конечномерность. Но

$$\operatorname{Coker} F = \mathcal{H}/\operatorname{Im} F \cong \operatorname{Ker} F^*,$$

поэтому оно также конечномерно.

Обратно, если образ $\operatorname{Im} F$ замкнут, а подпространства $\operatorname{Ker} F$ и $\operatorname{Coker} F$ конечномерны, то мы можем построить искомый оператор G, полагая

$$\begin{cases} G(F\xi) = \xi & \text{для } \xi \in (\operatorname{Ker} F)^\perp, \\ G(\eta) = 0 & \text{для } \xi \in (\operatorname{Im} F)^\perp \cong \operatorname{Ker} F^*. \end{cases}$$

Действительно, этот оператор корректно определен, поскольку отображение $F : (\operatorname{Ker} F)^\perp \to \operatorname{Im} F$ биективно. Кроме того, операторы $1 - GF$ и $1 - FG$ имеют конечный ранг и потому компактны. □

Определение 26. Ограниченный линейный оператор $F : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ из гильбертова пространства $\mathcal{H}_1$ в гильбертово пространство $\mathcal{H}_2$ называется *фредгольмовым*, если его образ $\operatorname{Im} F$ замкнут, а пространства $\operatorname{Ker} F$ и $\operatorname{Coker} F$ конечномерны. *Индекс фредгольмова оператора* F по определению равен

$$\operatorname{ind} F = \dim \operatorname{Ker} F - \dim \operatorname{Coker} F.$$

При $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$ пространство фредгольмовых операторов $F : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ обозначается через $\mathrm{Fred} = \mathrm{Fred}(\mathcal{H})$ и наделяется топологией равномерной сходимости из $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Оно является мульпликативной полугруппой (см. свойство 2 ниже).

Свойства индекса:

1. Отображение $\operatorname{ind} : \mathrm{Fred} \to \mathbb{Z}$ непрерывно.

2. Отображение ind является полугрупповым гомоморфизмом, т.е.

$$\operatorname{ind}(F_1F_2) = \operatorname{ind} F_1 + \operatorname{ind} F_2.$$

3. Значение индекса не меняется при компактных возмущениях, т.е.

$$\operatorname{ind}(F + K) = \operatorname{ind} F$$

для любого $K \in \mathcal{K}$.

4. $\operatorname{ind} F = 0 \iff F$ является компактным возмущением обратимого оператора.

5. Стандартный оператор правого сдвига в пространстве ℓ^2 фредгольмов и его индекс равен -1.

6. $\operatorname{ind} F = \dim \operatorname{Ker}(F^*F) - \dim \operatorname{Ker}(FF^*)$.

7. $\operatorname{ind} F^* = -\operatorname{ind} F$.

Теорема 9 (теорема Атьи–Eниха)**.** *Для любого компактного хаусдорфова топологического пространства X имеется групповой изоморфизм*

$$ind : [X, Fred] \longrightarrow K^0(X),$$

где $K^0(X)$ есть группа Гротендика $K(Vect(X))$ полугруппы $Vect(X)$ виртуальных векторных расслоений над X. Указанный изоморфизм функториален в том смысле, что для любого непрерывного отображения $\varphi : Y \to X$ компактных топологических пространств справедливо соотношение

$$ind \circ \varphi^* = K^0\varphi \circ ind,$$

где $\varphi^* : [X, Fred] \to [Y, Fred]$ – гомоморфизм, порождаемый отображением $F \mapsto F \circ \varphi$ из пространства $C(X, Fred)$ в пространство $C(Y, Fred)$, а $K^0\varphi : K^0(X) \to K^0(Y)$.

Замечание 6. Поясним идею доказательства этой теоремы. Пусть $F : X \to \mathrm{Fred}$, $x \mapsto F_x$, есть непрерывное отображение из пространства X в пространство фредгольмовых операторов. Нам нужно сопоставить ему элемент из $K^0(X)$. Первое, что приходит в голову, это задать искомый элемент полем виртуальных векторных пространств вида $x \mapsto [\operatorname{Ker} F_x] - [\operatorname{Coker} F_x]$. Однако такое отображение в общем случае не определено, поскольку размерности пространств $\operatorname{Ker} F_x$ и $\operatorname{Coker} F_x$ могут изменяться от точки к точке.

Для того, чтобы обойти эту трудность, используется следующий прием. Поле пространств $x \mapsto \operatorname{Ker} F_x$ заменяется тривиальным расслоением над X со слоем $\mathcal{H}/V$, где V – замкнутое подпространство в $\mathcal{H}$ конечной коразмерности такое, что

$$V \cap \operatorname{Ker} F_x = \{0\}$$

для всех $x \in X$. Такое V выбирается с использованием компактности X в виде пересечения

$$V = \bigcap_{i=1}^{m} (\operatorname{Ker} F_{x_i})^\perp$$

по некоторому подходящему набору точек $x_1, \ldots, x_m \in X$. Класс $[\mathcal{H}/V]$ тривиального векторного расслоения со слоем $\mathcal{H}/V$ в $K^0(X)$ и служит заменой поля $x \mapsto \operatorname{Ker} F_x$. Далее показывается, что объединение

$$\bigcup_{x \in X} \mathcal{H}/F_x(V)$$

является тотальным пространством некоторого локально тривиального векторного расслоения $W \to X$ над X и класс $[W]$ этого расслоения в $K^0(X)$ служит заменой поля $x \mapsto \operatorname{Coker} F_x$. После этого доказывается, что

$$\operatorname{ind} F = [\mathcal{H}/V] - [W] \in K^0(X).$$

1.5.2 Фредгольмовы операторы в C^*-модулях

Определение 27. Пусть $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ есть правые C^*-модули над C^*-алгеброй A и $F \in \mathrm{Hom}_A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ – ограниченный A-линейный оператор. Оператор F называется A-*фредгольмовым*, если существует оператор $G \in \mathrm{Hom}_A(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ такой, что $1_{\mathcal{F}} - FG \in \mathcal{K}_A(\mathcal{F})$ и $1_{\mathcal{E}} - GF \in \mathcal{K}_A(\mathcal{E})$. В случае $\mathcal{E} = \mathcal{F}$ это условие эквивалентно обратимости образа F в фактор-алгебре $\mathrm{End}_A(\mathcal{E})/\mathcal{K}_A(\mathcal{E})$. Множество A-фредгольмовых операторов обозначается через $\mathrm{Fred}_A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$.

В этом определении можно заменить A-компактные операторы на операторы A-конечного ранга благодаря следующей лемме.

Лемма 7. *Пусть A – унитальная C^*-алгебра и J – идеал в A, замыкание которого обозначается через $\bar{J}$. Тогда любой элемент $a \in A$, обратимый по модулю $\bar{J}$, обратим также по модулю J.*

Доказательство. Обозначим через b элемент алгебры A такой, что $1 - ab \in \bar{J}$. Тогда существует элемент $c \in J$, для которого $\|1 - ab - c\| < 1$, и, следовательно, $ab + c$ обратим. Обозначим через b_1 элемент $b_1 := b(ab + c)^{-1}$. Тогда

$$1 - ab_1 = 1 - ab(ab + c)^{-1} = c(ab + c)^{-1},$$

т.е. принадлежит J. Аналогичное рассуждение показывает, что существует элемент b_2 такой, что $1 - b_2 a \in J$. Иными словами, элемент $[a] := a + J$ фактор-алгебры A/J обратим как справа, так и слева, и потому обратим в A/J. □

Выбирая в качестве $J = \mathrm{Fin}_A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, получим, что для A-фредгольмова оператора $F : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ всегда существуют оператор $G \in \mathrm{Hom}_A(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ такой, что $1_{\mathcal{F}} - FG \in \mathrm{Fin}_A(\mathcal{F})$ и $1_{\mathcal{E}} - GF \in \mathrm{Fin}_A(\mathcal{E})$.

Замечание 7. Заметим, что образ $\mathrm{Im}\, F$ A-фредгольмова оператора F не обязательно замкнут. Возьмем, например, в качестве A алгебру $C(I)$ функций, непрерывных на единичном отрезке $I = [0, 1]$, и в качестве $\mathcal{E}$ саму алгебру A. Определим оператор F по формуле: $Fa(t) := ta(t)$ при $t \in I$. Так как алгебра A унитальна, то $\mathcal{K}_A(A) \cong A$, так что любой оператор из $\mathrm{End}_A A$ является A-компактным и A-фредгольмовым. В то же время образ $\mathrm{Im}\, F$ не замкнут, поскольку функция $b(t) = \sqrt{t}$, очевидно, не принадлежит образу $\mathrm{Im}\, F$, хотя принадлежит его замыканию, поскольку может быть равномерно аппроксимирована полиномами, равными нулю при $t = 0$, и потому принадлежащими $\mathrm{Im}\, F$. (Например, в качестве таких полиномов можно взять полиномы Бернштейна $\sum_{k=1}^{n} C_n^k \sqrt{k/n} t^k (n - t)^{n-k}$.)

Регулярные фредгольмовы операторы

Для того, чтобы обойти указанную трудность, введем понятие псевдообратного оператора. При доказательстве предложения 9 мы построили оператор G такой, что операторы $1 - FG$ и $1 - GF$ являются проекторами на $\mathrm{Ker}\, F$ и $\mathrm{Ker}\, F^*$ соответственно. Операторы F и G удовлетворяют соотношениям: $FGF = F$ и $GFG = G$.

Это наблюдение мотивирует следующее определение.

Определение 28. Для заданного оператора $T \in \mathrm{Hom}_A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ его *псевдообратным* называется оператор $S \in \mathrm{Hom}_A(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ такой, что

$$TST = T \quad \text{и} \quad STS = S.$$

В этом случае операторы TS и ST являются идемпотентами и имеют замкнутые образы. Кроме того, они обладают следующими свойствами:

1. $\mathrm{Ker}\, ST = \mathrm{Ker}\, T$;
2. $\mathrm{Im}(1 - ST) = \mathrm{Ker}\, T$;
3. $\mathrm{Im}(TS) = \mathrm{Im}\, T$.

Так как отношение псевдообратности симметрично по S и T, то справедливы и аналогичные свойства, получаемые заменой T на S:

4. $\mathrm{Ker}\, TS = \mathrm{Ker}\, S$;
5. $\mathrm{Im}(1 - TS) = \mathrm{Ker}\, S$;
6. $\mathrm{Im}(ST) = \mathrm{Im}\, S$.

Доказательство этих свойств оставляем в виде упражнения. Поясним, например, как доказывается первое из них. Имеем, с одной стороны, $\mathrm{Ker}\, T \subset \mathrm{Ker}\, ST$, а с другой стороны, $STu = 0 \Longrightarrow TSTu = Tu = 0$.

Будем называть операторы, обладающие псевдообратными, *регулярными*. Ясно, что обычные фредгольмовы операторы регулярны.

Предположим, что F есть регулярный A-фредгольмов оператор с псевдообратным S и обозначим через G оператор, существующий по определению 27. Заметим, что

$$(1 - GF)(1 - SF) = 1 - SF,$$

поскольку $\mathrm{Im}(1 - SF) = \mathrm{Ker}\, F$. Следовательно, оператор $1 - SF \in \mathcal{K}_A(\mathcal{E})$. Аналогично, $1 - FS \in \mathcal{K}_A(\mathcal{F})$. Поэтому в качестве оператора G из определения 27 для регулярного A-фредгольмова оператора F можно брать его псевдообратный.

Более того, операторы $1 - FS$ и $1 - SF$ имеют замкнутые образы. Действительно, обозначим идемпотент $1 - SF$ через e. Воспользуемся теперь следующей леммой.

Лемма 8. *Пусть $p \in \mathcal{K}_A(\mathcal{E})$ – A-компактный проектор в C^*-модуле $\mathcal{E}$ над унитальной C^*-алгеброй A. Тогда $p \in \mathit{Fin}_A\mathcal{E}$. Более того, любой идемпотент $e \in \mathcal{K}_A(\mathcal{E})$ является на самом деле оператором A-конечного ранга.*

Доказательство. Алгебра $p\mathcal{K}_A(\mathcal{E})p$ является унитальной C^*-алгеброй, в которой роль единицы играет сам проектор p. Эта алгебра содержит $p\mathrm{Fin}_A\mathcal{E}p$ в качестве плотного идеала. Поскольку такой идеал, будучи плотным, не может быть собственным, то он содержит единицу $1_{\mathcal{E}}$, которую можно, тем самым, представить в виде

$$1_{\mathcal{E}} = \sum_{k=1}^{n} |r_k\rangle\langle s_k|$$

для некоторых элементов $r_k, s_k \in \mathcal{E}$. Тогда проектор p будет записываться в виде

$$p = \sum_{k=1}^{n} p|r_k\rangle\langle s_k|p = \sum_{k=1}^{n} |pr_k\rangle\langle ps_k|,$$

откуда следует, что p имеет A-конечный ранг. Более общим образом, если e – A-компактный идемпотент, то формула Капланского (см. замечание 5) будет давать A-компактный проектор p, такой что $pe = p$. Отсюда следует по доказанному, что $e \in \mathrm{Fin}_A\mathcal{E}$. □

Вернемся к оператору $1 - SF$, который мы отождествили с идемпотентом e. Если p – проектор, отвечающий e по формуле Капланского, то $p \in \mathrm{Fin}_A\mathcal{E}$, также как и e. Отсюда следует замкнутость образа оператора $e = 1 - SF$, совпадающего с образом проектора p. Аналогичным образом доказывается замкнутость образа оператора $1 - FS$.

1.5.3 Индекс A-фредгольмовых операторов

Для того, чтобы ввести индекс регулярных фредгольмовых операторов, нам придется воспользоваться следующей важной теоремой.

Теорема 10 (теорема Каспарова о поглощении)**.** *Если $\mathcal{E}$ – произвольный счетно порожденный C^*-модуль над алгеброй A, то*

$$\mathcal{E} \oplus \mathcal{H}_A \cong \mathcal{H}_A$$

как A-модули.

Доказательство. Мы построим сплетающий оператор T между $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}_A$, для которого как сам оператор T, так и сопряженный к нему T^*, имеют плотные образы. Предположим для простоты, что алгебра A унитальна (случай неунитальной алгебры разобран в [3]). Пусть $\{u_k\}$ есть счетное семейство единичных векторов, порождающих $\mathcal{E}$. Обозначим через (s_k) последовательность, полученную "размножением" последовательности (u_k), в которой каждое u_k повторяется бесконечное число раз. Кроме того, обозначим через $\{\xi_k\}$ каноническую системы образующих A-модуля $\mathcal{H}_A$. Определим оператор T по формуле

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}|s_n\rangle\langle\xi_n| \ \oplus \ 4^{-n}|\xi_n\rangle\langle\xi_n|.$$

Каждый раз, когда s_n совпадает с u_k, будем иметь $T(2^n\xi_n) = (u_k \oplus 2^{-n}\xi_n)$. Так как такое совпадание встречается для бесконечного числа значений n, то отсюда следует, что каждый элемент $(u_k \oplus 0)$ принадлежит замыканию образа T. Отсюда следует, что и каждый эелемент $(0 \oplus \xi_n)$ принадлежит этому замыканию. Так как $T^*(0 \oplus \xi_n) = 4^{-n}$, то образ сопряженного оператора T^* плотен в $\mathcal{H}_A$.

Для окончания доказательства теоремы нам понадобится следующая лемма.

Лемма 9. *Пусть $T \in Hom_A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ есть A-линейный оператор, действующий из C^*-модуля $\mathcal{E}$ над C^*-алгеброй A в C^*-модуль $\mathcal{E}$ над той же алгеброй A. Предположим, что как сам оператор T, так и сопряженный к нему оператора T^*, имеют замкнутые образы. Тогда C^*-модули $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ унитарно эквивалентны.*

Доказательство. Заметим, прежде всего, что в этом случае образ $\mathrm{Im}(T^*T)$ также плотен в $\mathcal{E}$ (почему?). Отсюда следует, что и образ оператора $|T| := \sqrt{T^*T}$ плотен в $\mathcal{E}$.

Определим A-линейное отображение

$$U: \ \mathrm{Im}\, T \longrightarrow \mathrm{Im}\, |T|,$$

полагая $U(Ts) := |T|s$ для $s \in \mathcal{E}$. Построенный оператор изометричен, поскольку

$$\|Ts\|^2 = (T^*Ts, s) = \||T|s\|^2.$$

Так как подпространства $\mathrm{Im}\, T$ и $\mathrm{Im}\, |T|$ плотны в $\mathcal{E}$, то построенный изометрический оператор однозначно продолжается до унитарного оператора в $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. □

Теперь утверждение теоремы вытекает из доказанной леммы. □

Индекс A-фредгольмовых операторов

Покажем теперь, как с помощью приведенной теоремы можно определить индекс регулярных фредгольмовых операторов. Из теоремы о поглощении следует, что любой C^*-модуль $\mathcal{E}$ A-конечного ранга можно рассматривать как подмодуль в $\mathcal{H}_A$ вида $p\mathcal{H}_A$ с $p \in \mathcal{P}(A_S)$. Этот проектор определяет класс $[p]$ в $K_0(A)$, который сопоставляется C^*-модулю $\mathcal{E}$ и обозначается через $[\mathcal{E}]$.

Пусть теперь F есть регулярный фредгольмов оператор. Тогда C^*-модули $\mathrm{Ker}\, F = \mathrm{Im}(1 - SF)$ и $\mathrm{Ker}\, F^* = \mathrm{Im}(1 - FS)$ имеют, как отмечено выше, A-конечный ранг и потому определяют элементы $[\mathrm{Ker}\, F]$ и $[\mathrm{Ker}\, F^*]$ группы $K_0(A)$. С учетом этого мы можем дать следующее определение.

Определение 29. Пусть $F \in \mathrm{Fred}_A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ – регулярный A-фредгольмов оператор. Определим *индекс* оператора F формулой

$$\mathrm{ind}\, F := [\mathrm{Ker}\, F] - [\mathrm{Ker}\, F^*] \in K_0(A).$$

Индекс регулярного A-фредгольмова оператора обладает следующими свойствами, проверку которых мы оставляем читателю.

1. Если $F \in \mathrm{Fred}_A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ – регулярный оператор с псевдообратным S, то S также является регулярным A-фредгольмовым оператором, причем $\mathrm{ind}\, S = -\mathrm{ind}\, F$.

2. Если $F \in \mathrm{Fred}_A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ – регулярный оператор с псевдообратным S, то сопряженный оператор F^* также является регулярным A-фредгольмовым оператором, причем $\mathrm{ind}\, F^* = -\mathrm{ind}\, F$.

3. Если $F_1 \in \mathrm{Fred}_A(\mathcal{E}_1, \mathcal{F}_1)$ и $F_2 \in \mathrm{Fred}_A(\mathcal{E}_2, \mathcal{F}_2)$– регулярные операторы, то их прямая сумма $F_1 \oplus F_2$ является регулярным оператором в $\mathrm{Fred}_A(\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2, \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2)$, причем $\mathrm{ind}\,(F_1 \oplus F_2) = \mathrm{ind}\, F_1 + \mathrm{ind}\, F_2$.

4. Если $F \in \mathrm{Fred}_A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ – регулярный оператор, а операторы $U \in \mathrm{End}_A(\mathcal{E})$ и $V \in \mathrm{End}_A(\mathcal{F})$ обратимы, то операторы FU и VF являются регулярными A-фредгольмовыми операторами, причем $\mathrm{ind}\, FU = \mathrm{ind}\, VF = \mathrm{ind}\, F$.

5. Если $F_1, F_2 \in \mathrm{Fred}_A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ – регулярные операторы и $F_1 - F_2 \in \mathcal{K}_A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, то $\mathrm{ind}\, F_1 = \mathrm{ind}\, F_2$.

Спрашивается, можно ли определить индекс произвольного, возможно нерегулярного A-фредгольмова оператора? Утвердительный ответ на этот вопрос дан ниже, мы также кратко поясним, каким образом в этом случае определяется индекс.

Условимся представлять операторы $T \in \mathrm{Hom}_A(\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2, \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2)$ в блочном виде, так что

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix},$$

где $T_{ij} \in \mathrm{Hom}_A(\mathcal{E}_i, \mathcal{F}_j)$, $i, j = 1, 2$.

Для определения индекса общих A-фредгольмовых операторов воспользуемся следующей леммой.

Лемма 10. *Пусть $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ есть C^*-модули над унитальной C^*-алгеброй A и $F \in \mathrm{Fred}_A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. Тогда существуют натуральное число $n \in \mathbb{N}$ и регулярный оператор $\tilde{F} \in \mathrm{Fred}_A(\mathcal{E} \oplus A^n, \mathcal{F} \oplus A^n)$ такой, что $\tilde{F}_{11} = F$.*

Ее доказательство можно найти в [3], лемма 4.10.

Теперь мы можем ввести *индекс* произвольного *A-фредгольмова оператора* F, полагая по определению

$$\mathrm{ind}\, F = \mathrm{ind}\, \tilde{F}.$$

Нужно только проверить корректность этого определения, зависящего от выбора регулярного расширения $\tilde{F}$, в свою очередь определяемого с помощью оператора G. Однако, любой другой выбор оператора G', для которого операторы $1 - G'F$ и $1 - FG'$ являются операторами A-конечного ранга, будет приводить к оператору $\widetilde{F'}$, отличающемуся от $\tilde{F}$ на оператор A-конечного ранга. Поэтому оператор $\widetilde{F'}$ будет иметь тот же индекс, что и $\tilde{F}$, ввиду свойства 5 выше.

Определенный таким образом индекс общих A-фредгольмовых операторов обладает свойствами, аналогичными индексу регулярных A-фредгольмовых операторов.

Свойства индекса A-фредгольмовых операторов:

1. Если $F_1, F_2 \in \mathrm{Fred}_A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ и $F_1 - F_2 \in \mathcal{K}_A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, то $\mathrm{ind}\, F_1 = \mathrm{ind}\, F_2$, т.е. индекс не меняется при A-компактных возмущениях.

2. Множество $\mathrm{Fred}_A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ открыто в $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, а отображение индекса $\mathrm{ind} : \mathrm{Fred}_A(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \to K_0(A)$ локально постоянно.

3. Если $F \in \mathrm{Fred}_A(\mathcal{E},\mathcal{F})$ и $G \in \mathrm{Fred}_A(\mathcal{F},\mathcal{G})$, то $GF \in \mathrm{Fred}_A(\mathcal{E},\mathcal{G})$ и
$$\mathrm{ind}\,(GF) = \mathrm{ind}\,G + \mathrm{ind}\,F.$$

Теорема 11 (некоммутативная теорема Атьи–Ениха)**.** *Если A есть унитальная C^*-алгебра, то отображение*
$$ind : \pi_0(Fred_A) \longrightarrow K_0(A),$$
где $Fred_A := Fred_A(\mathcal{H}_A)$, является групповым изоморфизмом.

Доказательство этой теоремы можно найти в [3], теорема 4.19.

Замечание 8. Теорема 11 является обобщением теоремы Атьи–Ениха 9, которой отвечает случай $A = C(X)$, где X – компактное топологическое пространство, поскольку в этом случае имеется групповой изоморфизм
$$\pi_0(\mathrm{Fred}_{C(X)}) \cong [X, \mathrm{Fred}_{\mathbb{C}}].$$

1.6 Морита-эквивалентность

В начале параграфа (п.1.6.1) определяется морита-эквивалентность двух алгебр и приводится теорема Морита, характеризующая бимодули, реализующие указанную эквивалентность.

Затем в п.1.6.2 понятие морита-эквивалентности распространяется на C^*-алгебры. В основе его определения лежит то же понятие бимодуля эквивалентности, что и в случае обычных алгебр. Здесь также формулируется теорема Экселя, утверждающая, что у морита-эквивалентных C^*-алгебр должны совпадать их K_0-группы.

1.6.1 Морита-эквивалентность алгебр

Разберем сначала понятие морита-эквивалентности в случае алгебр. Пусть заданы две алгебры A и B.Обозначим через $\mathcal{M}_A$, ${}_A\mathcal{M}$ и ${}_A\mathcal{M}_B$ категории соответственно правых A-модулей, левых A-модулей и (AB)-бимодулей, т.е. бимодулей над алгебрами (A, B).

Определение 30. Алгебры A и B называются *морита-эквивалентными*, если категории $\mathcal{M}_A$ и $\mathcal{M}_B$ эквивалентны. Последнее означает, что существуют (AB)-бимодуль $\mathcal{E}$ и (BA)-бимодуль $\mathcal{F}$, которые задают следующие изоморфизмы бимодулей
$$\mathcal{E} \otimes_B \mathcal{F} \cong A, \quad \mathcal{F} \otimes_A \mathcal{E} \cong B, \tag{1.11}$$
где структура (AA)-бимодуля на A определяется равенством: $a(b)c := abc$ для любых элементов $a, b, c \in A$, аналогично определяется структура (BB)-бимодуля на B. Бимодули $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ называются *бимодулями эквивалентности*.

Замечание 9. Если алгебры A и B морита-эквиалентны, то категории ${}_A\mathcal{M}$ и ${}_B\mathcal{M}$, а также категории ${}_A\mathcal{M}_A$ и ${}_B\mathcal{M}_B$ также эквивалентны.

Пример 12. Любая унитальная алгебра A морита-эквивалентна алгебре матриц $B := \mathrm{Mat}_n(A)$. При этом бимодули эквивалентности задаются бимодулями строк и столбцов. Действительно, обозначим через $\mathcal{E} = {}^nA$ пространство строк с n компонентами, наделенное левым $\mathrm{Mat}_n(A)$-действием и правым A-умножением. Далее, обозначим через $\mathcal{F} = A^n$ пространство столбцов с n компонентами, наделенное левым A-умножением и правым $\mathrm{Mat}_n(A)$-действием. Тогда изоморфизмы из формулы (1.11) будут задаваться следующими формулами:

$$(a_1, \dots, a_n) \otimes {}^t(b_1, \dots, b_n) \longmapsto \sum_{k=1}^{n} a_k b_k,$$
$${}^t(b_1, \dots, b_n) \otimes (a_1, \dots, a_n) \longmapsto (b_i a_j)_{i,j=1}^n.$$

Для того, чтобы дать другое определение бимодулей эквивалентности, рассмотрим следующие гомоморфизмы алгебр, порождаемые произвольным (AB)-бимодулем $\mathcal{E}$:

$$A \longrightarrow \mathrm{End}_B\mathcal{E}, \quad a \longmapsto L_a,$$
$$B^o \longrightarrow \mathrm{End}_A\mathcal{E}, \quad b \longmapsto R_b,$$

где L_a – оператор левого умножения на a, R_b – оператор правого умножения на b. В этой формуле через B^o обозначена алгебра, *противоположная* алгебре B. Она определяется как алгебра

$$B^o = \{b^o : \ b \in B\}$$

с умножением $b^o c^o := (cb)^o$ для $b, c \in B$.

Теорема 12 (теорема Морита). *(AB)-бимодуль $\mathcal{E}$ является бимодулем эквивалентности тогда и только тогда, когда этот бимодуль является конечно порожденным и проективным одновременно как левый A-модуль и правый B-модуль, а определенные выше гомоморфизмы*

$$A \longrightarrow End_B\mathcal{E}, \quad B^o \longrightarrow End_A\mathcal{E},$$

являются изоморфизмами.

Доказательство теоремы можно найти в [1].

Пример 13. Пусть $\mathcal{E}$ – конечно порожденный проективный левый A-модуль и $B = (\mathrm{End}_A\mathcal{E})^o$. Тогда алгебры A и B морита-эквивалентны, причем (AB)-бимодуль эквивалентности совпадает с $\mathcal{E}$. Отсюда, в частности, следует, что если E есть комплексное векторное расслоение над многообразием M, то алгебры $A = C(M)$ и $B = \Gamma(\mathrm{End}\, E)$ морита-эквивалентны. Этот случай сводится к только что рассмотренному, если положить $\mathcal{E} = \Gamma(E)$.

Перед тем, как перейти к морита-эквивалентности C^*-алгебр, рассмотрим в качестве промежуточного шага конструкцию бимодулей эквивалентности для инволютивных алгебр.

Напомним, что *инволютивной* или $*$-*алгеброй* называется алгебра A, наделенная анти-линейным отображением $* : A \to A$ таким, что

$$(ab)^* = b^* a^*, \quad (a^*)^* = a$$

для всех $a, b \in A$.

Пусть A – унитальная $*$-алгебра и $\mathcal{E}$ – произвольный унитальный (т.е. умножение на 1_A является тождественным преобразованием $\mathcal{E}$) правый A-модуль. Предположим, что на $\mathcal{E}$ задано A-*значное скалярное произведение* $(\cdot\,,\cdot)_A$, которое является *плотным*, т.е. для любого $a \in A$ найдутся элементы $s_k, t_k \in \mathcal{E}$, $k = 1, \ldots, n$, такие, что

$$a = \sum_{k=1}^{n} (s_k, t_k)_A.$$

Допустим, что заданы унитальные $*$-алгебры A и B и $\mathcal{E}$ есть (AB)-бимодуль, наделенный плотным A-значным скалярным произведением ${}_A(\cdot\,,\cdot)$ и плотным B-значным скалярным произведением $(\cdot\,,\cdot)_B$. Предположим, что эти скалярные произведения связаны следующим *условием ассоциативности*: для любых $s, t, u \in \mathcal{E}$

$$ {}_A(s,t)u = s(t,u)_B. \tag{1.12}$$

Утверждается, что такой бимодуль обязательно является конечно порожденным проективным модулем одновременно как левый A-модуль и правый B-модуль. Действительно, из плотности $\mathcal{E}$ как правого B-модуля следует, что найдутся элементы $s_k, t_k \in \mathcal{E}$, $k = 1, \ldots, n$, такие, что

$$1_B = \sum_{k=1}^{n} (s_k, t_k)_B.$$

Обозначим через $\{e_k\}_{k=1}^n$ базис модуля столбцов A^n и рассмотрим отображение $P : A^n \to \mathcal{E}$, переводящее $e_k \mapsto t_k$, $k = 1, \ldots, n$. Утверждается, что это отображение обладает правым обратным, откуда и будет следовать, что $\mathcal{E}$ является конечно порожденным проективным левым A-модулем. Действительно, рассмотрим A-линейное отображение $Q : \mathcal{E} \to A^n$, задаваемое формулой: $Q(s) = \sum_{k=1}^n {}_A(s, s_k)e_k$. Тогда

$$PQ(s) = \sum_{k=1}^{n} {}_A(s, s_k)t_k = \sum_{k=1}^{n} s(s_k, t_k)_B = s.$$

Аналогичное доказательство показывает, что $\mathcal{E}$ является конечно порожденным проективным правым B-модулем.

На самом деле, можно утверждать больше. А именно, что $\mathcal{E}$ есть бимодуль эквивалентности. Чтобы доказать это, обозначим через $\overline{\mathcal{E}}$ комплексное векторное пространство, комплексно сопряженное к $\mathcal{E}$, элементы которого обозначаются через $\bar{s}$, где $s \in \mathcal{E}$. Тогда $\overline{\mathcal{E}}$ есть (BA)-бимодуль, умножение в котором задается равенством: $b\bar{s}a := \overline{a^*sb^*}$ для $s \in \mathcal{E}$, $a \in A$, $b \in B$. Этот бимодуль можно наделить также A-значным и B-значным скалярными произведениями по формуле

$$ {}_B(\bar{s}, \bar{t}) := (s,t)_B, \quad (\bar{s}, \bar{t})_A := {}_A(s,t)$$

для $s, t \in \mathcal{E}$.

Рассмотрим бимодульные отображения

$$\begin{aligned} f &: \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}^* \longrightarrow A, \quad s \otimes \bar{t} \longmapsto {}_A(s,t), \\ g &: \mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E} \longrightarrow B, \quad \bar{s} \otimes t \longmapsto (s,t)_B. \end{aligned}$$

Оба отображения сюръективны ввиду плотности скалярных произведений. Можно также показать, что они являются изоморфизмами (см. [1], предложение 4.4). Тем самым, $\mathcal{E}$ есть бимодуль эквивалентности и алгебры A и B морита-эквивалентны.

1.6.2 Морита-эквивалентность C^*-алгебр

Пусть заданы C^*-алгебры A и B, а также правый C^*-модуль $\mathcal{E}$ над алгеброй A и правый C^*-модуль $\mathcal{F}$ над алгеброй B. Будем также предполагать, что задано представление C^*-алгебры A в модуле $\mathcal{F}$, т.е. гомоморфизм $\rho : A \to \mathrm{End}_B\mathcal{F}$. В п. 1.3.5 показано, что в этом случае можно определить C^*-модуль над B, являющийся тензорным произведением $\mathcal{E} \otimes_\rho \mathcal{F} = \mathcal{E} \otimes_A \mathcal{F}$ C^*-модулей $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$.

Определение 31. C^*-модуль $\mathcal{E}$ над C^*-алгеброй A называется *плотным* (что соответствует английскому термину "full"), если идеал

$$I =: (\mathcal{E}, \mathcal{E}) = \mathrm{span}\{(s,t) : \ s,t,\in \mathcal{E}\}$$

плотен в A.

С учетом этого определения мы можем ввести понятие бимодуля эквивалентности для C^*-алгебр.

Определение 32. Пусть A и B есть C^*-алгебры. Тогда (AB)-*бимодулем эквивалентности* называется (AB)-бимодуль $\mathcal{E}$, обладающий следующими свойствами:

1. $\mathcal{E}$ есть левый плотный C^*-модуль над алгеброй A и одновременно правый плотный C^*-модуль над алгеброй B;

2. для всех $s, t, u \in \mathcal{E}$ выполняется следующее условие *ассоциативности* :

   $${}_A(s,t)u = s(t,u)_B,$$

   где ${}_A(\cdot\,,\cdot)$ и $(\cdot\,,\cdot)_B$ – спаривания в $\mathcal{E}$, рассматриваемом как левый C^*-модуль над A и правый C^*-модуль над B соответственно.

Имея понятие бимодуля эквивалентности, мы можем определить морита-эквивалентность C^*-алгебр.

Определение 33. Будем называть две C^*-алгебры A и B *морита-эквивалентными* , если для них существует (AB)-бимодуль эквивалентности $\mathcal{E}$.

Из условий ассоциативности и плотности вытекает, что в этом случае операторы L_a левого умножения на элементы $a \in A$ и R_b правого умножения на элементы $b \in B$, заданные на C^*-модуле $\mathcal{E}$, допускают сопряжение. Действительно, проверим это для оператора L_a. Для всех $s, t, u \in \mathcal{E}$, $a \in A$, $b \in B$ имеем:

$$u(as,t)_B = {}_A(u,as)t = {}_A(u,s)a^*t = u(s,a^*t)_B,$$

откуда следует, ввиду плотности $\mathcal{E}$, что $(as,t)_B = (s,a^*t)_B$. Следовательно, оператор L_a допускает сопряжение, причем $L_a^* = L_{a^*}$. Аналогично показывается, что $R_b^* = R_{b^*}$.

Тем самым, корректно определены представления C^*-алгебр, задаваемые операторами L_a и R_b:

$$L : A \longrightarrow \mathrm{End}_B\mathcal{E}, \quad R : B^o \longrightarrow \mathrm{End}_A\mathcal{E}.$$

Возьмем указанное свойство за основу следующего понятия, обобщающего понятие бимодуля эквивалентности.

Определение 34. Пусть A и B есть C^*-алгебры. Тогда (AB)-*соответствием* между алгебрами A и B называется гомоморфизм $\varphi : A \to \mathrm{End}_B\mathcal{E}$ для некоторого правого C^*-модуля $\mathcal{E}$ над B.

Каждый (AB)-бимодуль эквивалентности согласно приведенным выше соображениям задает также (AB)-соответствие между C^*-алгебрами A и B.

Если $\mathcal{E}$ есть правый C^*-модуль над алгеброй A, $\mathcal{F}$ – правый C^*-модуль над алгеброй B и $\varphi : A \to \mathrm{End}_B\mathcal{E}$ – произвольный $*$-гомоморфизм, то $\mathcal{F}$ приобретает структуру (AB)-бимодуля и мы можем определить тензорное произведение $\mathcal{E} \otimes_\varphi \mathcal{F} = \mathcal{E} \otimes_A \mathcal{F}$, являющееся C^*-модулем над B. Указанная операция тензорного произведения ассоциативна. На самом деле, можно ввести аддитивную категорию, объектами которой являются C^*-алгебры, а морфизмами — соответствия между ними, определенные с точностью до изоморфизма.

Пользуясь понятием соответствия, можно дать эквивалентное определение морита-эквивалентности, близкое к тому, которое использовалось в алгебраическом случае.

Заметим, прежде всего, что любая C^*-алгебра A морита-эквивалентна самой себе, поскольку в этом случае в качестве (AA)-бимодуля эквивалентности можно взять саму алгебру A, рассматриваемую как бимодуль и наделенную спариваниями

$${}_A(a,b) := ab^*, \quad (a,b)_A := a^*b$$

для $a, b \in A$.

С учетом этого, можно показать, что две C^*-алгебры A и B морита-эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют (AB)-соответствие $\mathcal{E}$ и (BA)-соответствие $\mathcal{F}$ такие, что

$$\mathcal{E} \otimes_B \mathcal{F} \cong A, \quad \mathcal{F} \otimes_A \mathcal{E} \cong B.$$

Замечание 10. Если $\mathcal{E}$ есть (AB)-бимодуль эквивалентности, то в качестве $\mathcal{F}$ можно взять *сопряженный бимодуль* $\overline{\mathcal{E}}$, состоящий из элементов $\bar{s}$, где $s \in \mathcal{E}$. Тогда, как было отмечено выше, $\overline{\mathcal{E}}$ является (BA)-бимодулем с умножением, задаваемым равенством: $b\bar{s}a := \overline{a^*sb^*}$ для любых $\bar{s} \in \mathcal{E}^*$, $a \in A$, $b \in B$. Наделим его спариваниями

$${}_B(\bar{s},\bar{t}) := (t,s)_B, \quad (\bar{s}\bar{t})_A := {}_A(s,t).$$

Тогда $\mathcal{E}^*$ становится (BA)-бимодулем эквивалентности, причем

$$\mathcal{E} \otimes_B \mathcal{E}^* \cong A, \quad \mathcal{E}^* \otimes_A \mathcal{E} \cong B.$$

Замечание 11. Морита-эквивалентность есть отношение эквивалентности. Доказательство этого утверждения оставляем в качестве упражнения.

Замечание 12. Если две C^*-алгебры A и B морита-эквивалентны и $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ – их бимодули эквивалентности, то мы можем отождествить категорию $\mathcal{M}_A$ правых C^*-модулей над A с категорией $\mathcal{M}_B$ правых C^*-модулей над B. Действительно, отображение $\mathcal{S} \mapsto \mathcal{S} \otimes_A \mathcal{F}$ сопоставляет правому A-модулю $\mathcal{S}$ правый B-модуль $\mathcal{S} \otimes_A \mathcal{F}$ и, обратно, отображение $\mathcal{T} \mapsto \mathcal{T} \otimes_B \mathcal{E}$ сопоставляет правому B-модулю $\mathcal{T}$ правый A-модуль $\mathcal{T} \otimes_B \mathcal{E}$.

Приведем без доказательства еще несколько критериев морита-эквивалентности (их доказательства можно найти в книге [3]).

Предложение 10. *Две C^*-алгебры A и B морита-эквивалентны тогда и только тогда, когда существует плотный справа правый C^*-модуль $\mathcal{E}$ над A такой, что $\mathcal{K}_A(\mathcal{E}) \cong B$.*

Предложение 11. *Любая C^*-алгебра A морита-эквивалентна своей стабилизации, т.е. $A_S \cong \mathcal{K} \otimes A$ морита-эквивалентна A.*

Следствие 5. *Если A и B – две стабильно эквивалентные C^*-алгебры, то алгебра A морита-эквивалентна алгебре B.*

Теорема 13 (Эксель)**.** *Если C^*-алгебры A и B морита-эквивалентны, то $K_0(A) \cong K_0(B)$.*

Замечание 13. Если C^*-алгебры A и B морита-эквивалентны, то с помощью ГНС-конструкции можно установить биективное соответствие между неприводимыми представлениями алгебр A и B.

Глава 2

АНАЛИЗ

Целью этой главы является интерпретация основных понятий анализа в терминах банаховых алгебр.

Параграф 2.1 посвящен некоммутативному интегралу на C^*-алгебрах, роль которого играет след. В случае алгебры $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ компактных операторов в гильбертовом пространстве имеется обычное понятие следа, принимающего конечные значения на ядерных операторах. Однако с точки зрения приложений более важное значение имеет другой след, введенный Диксмье. Он определен на более широком идеале $\mathcal{L}^{1,\infty}$ в алгебре $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ и на ядерных операторах равен нулю. Теорема Конна устанавливает связь этого следа с вычетом Водзицки классических псевдодифференциальных операторов.

В параграфе 2.2 строится некоммутативное дифференциальное исчисление на C^*-алгебрах. Здесь вводится целый ряд новых понятий, играющих ключевую роль в некоммутативной дифференциальной геометрии. По каждой алгебре с единицей можно построить универсальную дифференциальную алгебру над ней, являющуюся универсальным объектом в категории дифференциальных градуированных алгебр (коротко: DG-алгебр). Наиболее интересный класс DG-алгебр образуют циклы, иначе говоря, DG-алгебры с интегралом. Цикл можно построить по любому фредгольмову модулю над C^*-алгеброй A. Имея понятие универсальной DG-алгебры, можно ввести основные объекты дифференциальной геометрии над A, такие как связность, кривизна, характер Черна и т.д. Некоторые из них допускают естественную интерпретацию в терминах гомологий и когомологий Хохшильда. В частности, характер Черна цикла над алгеброй A трактуется как циклический коцикл Хохшильда над этой алгеброй.

2.1 Некоммутативный интеграл

Параграф открывается п.2.1.1, в котором приводятся основные сведения об идеалах в алгебре компактных операторов, действующих в гильбертовом пространстве. В терминах сингулярных чисел компактного оператора T строится функция $\sigma_N(T)$ и вводится идеал $\mathcal{L}^{1,\infty}$, играющие важную роль в определении следа Диксмье. Это определение дается в п.2.1.2, где также изучаются свойства указанного следа и, в частности, вводится понятие измеримого оператора.

Следующий п.2.1.3 содержит краткое введение в теорию псевдодифференциальных операторов, подробное изложение которой можно найти в книгах

[4],[11]. В п.2.1.5 определяются вычет и плотность Водзицки для псевдодифференциальных операторов на компактном римановом многообразии. Связь указанного вычета со следом Диксмье устанавливается теоремой Конна о следе, формулируемой в п.2.1.5.

2.1.1 Идеалы в алгебре компактных операторов

Для построения некоммутативной версии анализа на C^*-алгебрах мы должны прежде всего ввести понятие "бесконечно малых" элементов. В алгебре ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве их роль играют компактные операторы, порядок "малости" которых определяется скоростью убывания их сингулярных чисел. Остановимся более подробно на этих понятиях.

Пусть T есть компактный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и $|T| = \sqrt{T^*T}$. Обозначим через $\{\mu_n(T)\}$ последовательность *сингулярных чисел* (s-чисел) оператора T, задаваемых собственными числами оператора $|T|$, упорядоченными по убыванию:

$$\mu_0(T) \geq \mu_1(T) \geq \dots ,$$

так что $\mu_n(T) \to 0$ при $n \to \infty$.

Сингулярные числа оператора T находятся по *принципу минимакса*, а именно, по формуле

$$\mu_n(T) = \inf_E \{\|T|E^\perp\| : \ \dim E = n\},$$

так что $\mu_n(T)$ совпадает с нижней гранью норм сужений оператора T на ортогональные дополнения к различным n-мерным подпространствам $E \subset \mathcal{H}$. На самом деле, эта нижняя грань достигается на подпространстве E_n, порожденном первыми n собственными векторами оператора $|T|$, отвечающими собственным значениям $\mu_0, \dots, \mu_{n-1}$.

По-другому, можно определить $\mu_n(T)$ как расстояние от оператора T до подпространства Fin_n операторов ранга$\leq n$. А именно,

$$\mu_n(T) = \inf_R \{\|T - R\| : \ R \in \mathrm{Fin}_n\}.$$

Сингулярные числа оператора T обладают следующими свойствами (см. [10]).

Свойства s-чисел:

1. $|\mu_n(T_1) - \mu_n(T_2)| \leq \|T_1 - T_2\|$, т.е. функционал $\mu_n(T)$ непрерывен по T в равномерной топологии при любом n.

2. $\mu_{n+m}(T_1 + T_2) \leq \mu_n(T_1) + \mu_m(T_2)$, где мы пользуемся вложением $\mathrm{Fin}_n + \mathrm{Fin}_m \subset \mathrm{Fin}_{n+m}$.

3. $\mu_{n+m}(T_1 T_2) \leq \mu_n(T_1) + \mu_m(T_2)$.

4. Так как $\mu_0(T) = \|T\|$, то

$$\mu_n(T_1 T_2) \leq \mu_n(T_1)\|T_2\|, \quad \mu_n(T_1 T_2) \leq \|T_1\|\mu_n(T_2).$$

Определение 35. Пусть T есть компактный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Будем говорить, что T принадлежит пространству $\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(\mathcal{H})$, $1 \le p < \infty$, если

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(T)^p < \infty.$$

Пространство $\mathcal{L}^p$ является идеалом в алгебре $\mathcal{K}$ компактных операторов и в алгебре $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ограниченных линейных операторов в $\mathcal{H}$. Нас будет особенно интересовать класс $\mathcal{L}^1$ *ядерных операторов*, наделенный нормой

$$\|T\|_1 := \mathrm{Tr}|T| = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(T) = \sum_{n=0}^{\infty} (u_n, Tu_n),$$

где $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ – ортонормированный базис в $\mathcal{H}$. (Заметим, что это определение не зависит от выбора ортонормированного базиса в $\mathcal{H}$.)

Введем величину, которая играет важную роль в последующем:

$$\sigma_N(T) := \sum_{n=0}^{N-1} \mu_n(T).$$

По-другому, ее можно определить как

$$\sigma_N(T) = \sup_E \{\|TP_E\|_1 : \ \dim E = N\},$$

где P_E – ортогональный проектор на подпространство E, а верхняя грань достигается снова на подпространстве E_N, порожденном первыми N собственными векторами оператора T.

Из последнего определения вытекает, что σ_N удовлетворяет неравенству треугольника

$$\sigma_N(T_1 + T_2) \le \sigma_N(T_1) + \sigma_N(T_2)$$

и, следовательно, является нормой на $\mathcal{K}$.

Приведем еще одно определение этой величины, которое будет использовано впоследствии.

$$\sigma_N(T) = \inf\{\|R\|_1 + N\|S\| : \ R, S \in \mathcal{K}, R + S = T\}.$$

Это позволяет распространить определение функцию σ_N как функции натурального параметра N на произвольные неотрицательные значения $\lambda \in [0, \infty)$, полагая

$$\sigma_\lambda(T) = \inf\{\|R\|_1 + \lambda\|S\| : \ R, S \in \mathcal{K}, R + S = T\}.$$

Можно показать, что функция $\sigma_\lambda(T)$ обладает следующими свойствами:

1. $\sigma_\lambda(T)$ кусочно линейна и выпукла; более того, если $\lambda = N + t$ с $0 \le t < 1$, так что $N = [\lambda]$, то

   $$\sigma_\lambda(T) = (1 - t)\sigma_N(T) + t\sigma_{N+1}(T);$$

2. $\sigma_\lambda(S + T) \le \sigma_\lambda(S) + \sigma_\lambda(T)$;

3. $\sigma_{\lambda+\mu}(S+T) \geq \sigma_\lambda(S) + \sigma_\mu(T)$.

Из двух последних свойств вытекает, что имеет место неравенство, выполняющееся для произвольных компактных положительных операторов S, T:

$$\sigma_\lambda(S+T) \leq \sigma_\lambda(S) + \sigma_\lambda(T) \leq \sigma_{2\lambda}(S+T). \tag{2.1}$$

Это свойство субаддитивности функионала $\sigma_\lambda(T)$ на конусе положительных компактных операторов сыграет важную роль при определении следа Диксмье в следующем пункте.

Помимо идеалов $\mathcal{L}^p$ введем еще интерполяционные идеалы $\mathcal{L}^{p,q}$.

Определение 36. Определим $\mathcal{L}^{p,q} = \mathcal{L}^{p,q}(\mathcal{H})$ при $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, как интерполирующее пространство между $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}^1$. А именно, будем говорить, что оператор $T \in \mathcal{L}^{p,q}$, если

$$\sum_{N=1}^{\infty} N^{(\alpha-1)q-1} \sigma_N(T)^q < \infty\,,$$

где $\alpha = 1/p$. Дополним это определение при $q = \infty$, полагая, что $T \in \mathcal{L}^{p,\infty}$, если последовательность чисел $\{N^{\alpha-1}\sigma_N(T)\}_{N=1}^\infty$ ограничена.

Предложение 12. *Каждое из введенных пространств $\mathcal{L}^{p,q}$ является двусторонним идеалом в алгебре $\mathcal{K}$ компактных операторов. При $p_1 < p_2$ и при $p_1 = p_2$, $q_1 < q_2$ имеются включения*

$$\mathcal{L}^{p_1,q_1} \subset \mathcal{L}^{p_2,q_2}.$$

Доказательство оставляем в качестве упражнения.

Остановимся более подробно на некоторых конкретных примерах пространств $\mathcal{L}^{p,q}$.

Пространство $\mathcal{L}^{p,p}$, $1 \leq p < \infty$, совпадает с введенным ранее пространством $\mathcal{L}^p$, норма на котором задается формулой

$$\|T\|_p = (\mathrm{Tr}|T|^p)^{1/p} = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \mu_n(T)^p\right]^{1/p}.$$

Пространство $\mathcal{L}^{p,\infty}$, $1 < p < \infty$, состоит из компактных операторов T, для которых $\sigma_N(T) = O(N^{1-\alpha})$, т.е. $\mu_n(T) = O(n^{-\alpha})$. На этом пространстве имеется естественная норма

$$\|T\|_{p,\infty} = \sup_N \frac{1}{N^{1-\alpha}} \sigma_N(T).$$

Пространство $\mathcal{L}^{p,1}$ состоит из компактных операторов T, для которых сходится ряд

$$\sum_{N=1}^{\infty} N^{\alpha-2} \sigma_N(T),$$

что эквивалентно сходимости ряда $\sum_{n=1}^\infty n^{\alpha-1}\mu_{n-1}(T)$.

Между этими пространствами имеются следующие вложения:

$$\mathcal{L}^{p-} \equiv \mathcal{L}^{p,1} \subset \mathcal{L}^{p} \equiv \mathcal{L}^{p,p} \subset \mathcal{L}^{p,\infty} \equiv \mathcal{L}^{p+}.$$

До сих пор мы определили пространства $\mathcal{L}^{p,q}$ для $1 < p < \infty$, $1 \le q < \infty$. Дополним их определение при $p = 1$, $q = \infty$, полагая

$$\mathcal{L}^{1,\infty} = \{T \in \mathcal{K} : \ \sigma_N(T) = O(\log N)\}$$

и наделяя это пространство нормой

$$\|T\|_{1,\infty} = \sup_{N\ge 2} \frac{\sigma_N(T)}{\log N}.$$

Конечность этой нормы влечет соотношение на s-числа оператора T вида $\mu_n = O(1/n)$. Пространство $\mathcal{L}^{1,\infty}$ является идеалом, двойственным к идеалу

$$\mathcal{L}^{\infty,1} = \{T \in \mathcal{K} : \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n(T)}{n} < \infty\}.$$

Как мы уже отмечали, именно след будет играть роль некоммутативного интеграла. Выше мы определили понятие следа для ядерного оператора $T \in \mathcal{L}^1$, задаваемого суммой s-чисел этого оператора. Однако с точки зрения приложений класс ядерных операторов недостаточно широк, поскольку нам хотелось бы иметь след, определенный на более широком классе операторов $T \in \mathcal{L}^{1,\infty}$. Такой след, называемый следом Диксмье, вводится в следующем пункте.

2.1.2 След Диксмье

Пусть T – положительный оператор, принадлежащий идеалу $\mathcal{L}^{1,\infty}$. Нам хотелось бы определить его след по формуле

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=0}^{N-1} \mu_n(T) = \lim_{N\to\infty} \frac{\sigma_N(T)}{\log N}. \tag{2.2}$$

При этом возникают два вопроса:

1. Существует ли предел в формуле (2.2) для всех операторов $T \in \mathcal{L}^{1,\infty}$?
2. Является ли функционал, задаваемый формулой (2.2), линейным?

Заметим, что решение вопроса о линейности указанного функционала тесно связано с ответом на вопрос о существовании предела в формуле (2.2). Действительно, для установления линейности нам необходимо сравнить величину

$$\gamma_N = \frac{\sigma_N(T_1 + T_2)}{\log N}$$

с суммой величин

$$\alpha_N = \frac{\sigma_N(T_1)}{\log N} \quad \text{и} \quad \beta_N = \frac{\sigma_N(T_2)}{\log N}.$$

Из неравенства треугольника для $\sigma_N(T)$ вытекает, что $\gamma_N \le \alpha_N + \beta_N$, а из отмеченного в п.2.1.1 неравенства $\sigma_N(T_1) + \sigma_N(T_2) \le \sigma_{2N}(T_1 + T_2)$ вытекает, что

$$\alpha_N + \beta_N \le \frac{\log(2N)}{\log N}\gamma_N.$$

Так как $\log(2N)/\log N \to 1$ при $N \to \infty$, то мы видим, что существование предела в (2.2) обеспечит нам линейность функционала (2.2).

Переходя к вопросу о существовании указанного предела, заметим, что для любого $T \in \mathcal{L}^{1,\infty}$ последовательность чисел

$$\left\{\frac{\sigma_N(T)}{\log N}\right\}$$

ограничена.

Это позволяет нам рассмотреть вопрос о существовании предела в формуле (2.2) в следующей, более общей постановке. А именно, будем искать на пространстве $\ell^\infty(\mathbb{N})$ ограниченных последовательностей $a = \{a_n\}_{n=1}^\infty$ линейную форму

$$\ell \equiv \mathrm{Lim}_\omega,$$

удовлетворяющую следующим условиям:

1. $\mathrm{Lim}_\omega a \ge 0$, если все $a_n \ge 0$;
2. $\mathrm{Lim}_\omega a = \lim_{n\to\infty} a_n$, если предел справа существует;
3. $\mathrm{Lim}_\omega(a_1, a_1, a_2, a_2, a_3, a_3, \ldots) = \mathrm{Lim}_\omega\{a_n\}$.

Единственным нетривиальным условием является последнее, которое трактуется как *асимптотическая масштабная инвариантность*. Для того, чтобы пояснить происхождение данного названия, перейдем от последовательностей $\{a_n\}$ к функциям вещественного параметра, как мы уже делали это в случае функции σ_N. А именно, построим по последовательности $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ ограниченную функцию $f_a(\lambda)$ на положительной вещественной полуоси, задаваемую следующим образом: если $\lambda = N + t$ с $0 \le t < 1$, т.е. $[\lambda] = N$, то положим $f_a(\lambda) = (1-t)a_N + ta_{N+1}$. Тем самым, введенная функция $f_a(\lambda)$ является кусочно линейной.

Заменим теперь функцию $f(\lambda) \equiv f_a(\lambda)$ ее *чезаровским средним*

$$(Mf)(\lambda) = \frac{1}{\log\lambda}\int_3^\lambda \frac{f(t)}{t}\,dt.$$

Это среднее на ограниченных функциях f обладает следующим свойством асимптотической масштабной инвариантности:

$$|M(S_\mu f)(\lambda) - MF(\lambda| \longrightarrow 0 \quad \text{при } \lambda \to +\infty,$$

где $(S_\mu f)(\lambda) := f(\lambda\mu)$ для любого $\mu > 0$. Возвращаясь к свойству (3) масштабной инвариантности, заметим, что последовательности $\tilde{a} = (a_1, a_1, a_2, a_2, a_3, a_3, \ldots)$ отвечает функция $f_{\tilde{a}} = S_{1/2}(f_a)$.

Попытаемся теперь сформулировать более точно, какого рода предел мы хотели бы получить на пространстве $C_b(R_+)$ ограниченных непрерывных функций на полуоси $R_+ := [1, \infty)$. Поскольку нас интересуют только пределы указанных функций на бесконечности, рассмотрим вместо пространства $C_b(R_+)$ его фактор $B_\infty := C_b(R_+)/C_0(R_+)$ по подпространству $C_0(R_+)$ функций, обращающихся в нуль на бесконечности.

Фиксируем положительную линейную форму ω на пространстве $C_b(R_+)$ такую, что $\omega = 0$ на подпространстве $C_0(R_+)$ и $\omega(1) = 1$. Иными словами, ω есть состояние на C^*-алгебре B_∞. Мы можем рассматривать $\omega(f)$ как "обобщенный предел" функции $f \in C_b(R_+)$ на бесконечности. Определим предел $\mathrm{Lim}_\omega(a)$ последовательности $a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, задаваемый формой ω как

$$\mathrm{Lim}_\omega(a) := \omega(Mf_a).$$

Теперь мы готовы ввести след Диксмье оператора.

Определение 37. Для любого состояния ω на C^*-алгебре $B_\infty = C_b(R_+)/C_0(R_+)$ определим *след Диксмье* положительного оператора $T \in \mathcal{L}^{1,\infty}$ по формуле

$$\mathrm{Tr}_\omega(T) = \mathrm{Lim}_\omega \frac{\sigma_\lambda(T)}{\log \lambda}.$$

Свойства следа Диксмье:

1. *Аддитивность:* $\mathrm{Tr}_\omega(T_1 + T_2) = \mathrm{Tr}_\omega(T_1) + \mathrm{Tr}_\omega(T_2)$.

2. *Положительность:* след Диксмье можно продолжить на весь идеал $\mathcal{L}^{1,\infty}$ так, чтобы выполнялось свойство $\mathrm{Tr}_\omega(T) \geq 0$ на положительных операторах $T \in \mathcal{L}^{1,\infty}$.

3. *Унитарная инвариантность:* $\mathrm{Tr}_\omega(UTU^*) = \mathrm{Tr}_\omega(T)$ для любого унитарного оператора U.

4. *Коммутативность:* для любого ограниченного оператора $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ и любого $T \in \mathcal{L}^{1,\infty}$ справедливо равенство: $\mathrm{Tr}_\omega(ST) = \mathrm{Tr}_\omega(TS)$.

5. След $\mathrm{Tr}_\omega(T)$ равен нулю на подпространстве $\mathcal{L}_0^{1,\infty}$, совпадающем с замыканием по норме $\|\cdot\|_{1,\infty}$ пространства Fin операторов конечного ранга. В частности, этот след зануляется на всех ядерных операторах из пространства $\mathcal{L}^1$.

Мы уже пояснили, почему введенный след должен быть аддитивным (строгое доказательство этого факта см. в [3], лемма 7.14). Проверку остальных свойств оставляем читателю в качестве упражнения.

В общем случае, след Tr_ω зависит от выбора состояния ω, однако справедливо следующее

Предложение 13. *Подпространство*

$$\mathcal{N} = \{T \in \mathcal{L}^{1,\infty} : \ Tr_\omega(T) \text{ не зависит от } \omega\}$$

является замкнутым линейным подпространством в $\mathcal{L}^{1,\infty}$. Это подпространство содержит подпространство $\mathcal{L}_0^{1,\infty}$ и замкнуто относительно сопряжения обратимыми операторами из $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Определение 38. Будем называть оператор $T \in \mathcal{L}^{1,\infty}$ *измеримым*, если существует предел

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\sigma_\lambda(T)}{\log\lambda} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_n(T)}{\log n}.$$

В этом случае след Диксмье $\mathrm{Tr}_\omega(T)$, конечно, не зависит от ω, поэтому будем обозначать его через

$$\mathrm{Tr}^+ T = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{\sigma_\lambda(T)}{\log\lambda}.$$

Пример 14. Приведем в качестве примера формулу для следа оператора Лапласа на сфере S^n, наделенной стандартной метрикой. Собственные числа этого оператора равны $l(l+n-1)$, где l – целое неотрицательное число, и имеют кратность $m_l = \binom{l+n}{n} - \binom{l+n-2}{n}$. Тогда оператор $\Delta^{-n/2}$ измерим и его след Диксмье равен

$$\mathrm{Tr}^+ \Delta^{-n/2} = \frac{2}{n!}\,.$$

2.1.3 Псевдодифференциальные операторы

Прежде, чем перейти к вычислению следа Диксмье конкретных псевдодифференциальных операторов, коротко напомним их основные свойства (подробнее о псевдодифференциальных операторах см. книги [4],[11]).

Псевдодифференциальные операторы являются обобщением обычных дифференциальных операторов. Напомним, что *дифференциальный оператор* порядка d в области $U \subset \mathbb{R}^n$ задается дифференциальным выражением вида

$$P(x,D) = \sum_{|\alpha|\le d} a_\alpha(x) D^\alpha$$

с коэффициентами $a_\alpha(x)$, являющимися гладкими функциями в области U. Здесь $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ – мультииндекс $\alpha \in \mathbb{Z}_+$ с неотрицательными целыми компонентами, а $D^\alpha = D_1^{\alpha_1}\dots D_n^{\alpha_n}$, где $D_j = -i\partial/\partial x_j$. Пользуясь преобразованием Фурье, этот оператор можно переписать в виде

$$P(x,D) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int e^{i(x-y)\cdot\xi} p(x,\xi) f(y)\, dy\, d\xi, \tag{2.3}$$

где

$$p(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\le d} a_\alpha(x)\xi^\alpha$$

есть *символ* оператора $P(x,D)$.

Для того, чтобы перенести последнее определение на псевдодифференциальные операторы, расширим предварительно класс допустимых символов. А именно, введем класс *символов* $S^d(U)$ порядка d , который состоит из функций $p(x,\xi) \in C^\infty(U\times\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих на любом компакте $K \subset U$ следующей оценке: для любых мультииндексов $\alpha,\beta \in \mathbb{Z}_+$

$$\left|D_x^\beta D_\xi^\alpha p(x,\xi)\right| \le C\left(1+|\xi|^2\right)^{\frac{d-|\alpha|}{2}}$$

для всех $x \in K$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ с константой C, зависящей от α,β и K.

Определение 39. *Псевдодифференциальным оператором* порядка d в области $U \subset \mathbb{R}^n$ называется оператор P, задаваемый формулой (2.3) с символом $p \in S^d(U)$. Пространство всех таких операторов обозначается через $\Psi^d(U)$.

Непосредственно из определения следует, что оператор P корректно определен как линейный оператор, действующий непрерывно из пространства $\mathcal{D}(U)$ C^∞-гладких функций с компактными носителями в U в пространство $\mathcal{E}(U) \equiv C^\infty(U)$ C^∞-гладких функций в области U. По двойственности он продолжается до непрерывного линейного оператора $P : \mathcal{E}'(U) \to \mathcal{D}'(U)$, действующего на обобщенных функциях с компактными носителями в области U. Если, в частности, $U = \mathbb{R}^n$, то такой оператор продолжается до непрерывного линейного оператора, действующего в пространстве Шварца $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ медленно растущих обобщенных функций.

Ядром оператора P является обобщенная функция $k \in \mathcal{D}'(U \times U)$, задаваемая интегралом

$$k(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i(x-y)\cdot\xi} p(x,\xi) f(y)\, d\xi,$$

понимаемым в смысле обобщенных функций. Если $k \in C^\infty(U \times U)$, то определяемый им псевдодифференциальный оператор называется *сглаживающим*, а его порядок полагается равным $-\infty$.

Символы псевдодифференциальных операторов удобно задавать разложениями в асимптотические ряды. А именно, какова бы ни была последовательность символов $\{p_k\}_{k=0}^\infty$, $p_k \in S^{d_k}(U)$, где $\{d_k\}$ – убывающая последовательность вещественных чисел с $d_k \to -\infty$ при $k \to \infty$, существует символ $p \in S^{d_0}(U)$ такой, что

$$p - \sum_{k=0}^{n} p_{d_k} \in S^{d_n}(U) \quad \text{для всех } n = 0, 1, \dots,$$

причем этот символ определен однозначно по модулю пространства $S^{-\infty}(U)$ сглаживающих символов. В этом случае принято писать, что $p \sim \sum_{k=0}^\infty p_{d_k}$.

Стандартным примером являются т.н. *классические символы*, для которых показатели $d_k = d-k$, а $p_k(x,\xi)$ являются однородными функциями по ξ порядка d_k. Асимптотическое разложение символа принимает в этом случае вид

$$p(x,\xi) \sim \sum_{k=0}^{\infty} p_{d-k}(x,\xi).$$

Главный член $p_d(x,\xi)$ в этом разложении называется *главным символом*.

Псевдодифференциальные операторы образуют алгебру, о свойствах которой можно прочесть в книгах [4],[11]. Для нас наибольший интерес представляют эллиптические операторы, которые определяются следующим образом.

Определение 40. Псевдодифференциальный оператор $P \in \Psi^d(U)$ называется *эллиптическим*, если найдутся положительные непрерывные функции c и C в области U, для которых символ оператора P удовлетворяет оценке

$$|p(x,\xi)| \geq c(x)|\xi|^d \quad \text{при } |\xi| \geq C(x), x \in U.$$

Эллиптические псевдодифференциальные операторы обратимы по модулю сглаживающих, точнее, имеет место следующее

Предложение 14. *Псевдодифференциальный оператор $P \in \Psi^d(U)$ является эллиптическим тогда и только тогда, когда существует символ $q \in S^{-d}(U)$ такой, что отвечающий ему оператор $Q \in \Psi^{-d}(U)$ удовлетворяет соотношению*

$$P \circ Q = Q \circ P \equiv 1 \ mod \ \Psi^{-\infty}(U).$$

Для того, чтобы перенести определение псевдодифференциальных операторов на многообразия, необходимо изучить их поведение относительно замен, порождаемых гладкими диффеоморфизмами. Пусть $\varphi : U \to V$ есть диффеоморфизм области $U \subset \mathbb{R}^n$ на другую область $V \subset \mathbb{R}^n$. Если $P \in \Psi^d(U)$ – псевдодифференциальный оператор порядка d в области U, то формула

$$\varphi_* P(f) := P(\varphi^* f) \circ \varphi^{-1}$$

определяет псевдодифференциальный оператор в области V. На самом деле, справедливо следующее

Предложение 15. *Пусть оператор $P \in \Psi^d(U)$ обладает следующим свойством псевдолокальности: как сам оператор P, так и сопряженный к нему оператор P^*, отображают пространство $\mathcal{D}(U)$ в себя. Тогда для заданного диффеоморфизма $\varphi : U \to V$ оператор $P_\varphi := \varphi_* P$ принадлежит $\Psi^d(V)$ и обладает тем же свойством псевдолокальности. Кроме того, ядро p_φ этого оператора имеет асимптотическое разложение вида*

$$p_\varphi(x,\xi) \sim \sum_{|\alpha|\geq 0} \frac{1}{\alpha!} q_\alpha(x,\xi) D_\xi^\alpha(\psi(x), {}^t(\psi'(x)^{-1})\xi),$$

где $\psi := \varphi^{-1}$, $q_0(x,\xi) = 1$, а $q_\alpha(x,\xi)$ – полином по ξ степени$\leq \frac{1}{2}|\alpha|$.

Явные выражения для коэффициентов $q_\alpha(x,\xi)$ можно найти в [4], том III, теорема 18.1.17, отметим только, что для главного символа $p_{\varphi,d}(x,\xi)$ формула замены переменных имеет вид

$$p_{\varphi,d}(\varphi(x),\xi) = p_d(x, {}^t\varphi'(x)\xi).$$

С учетом этого предложения мы можем определить псевдодифференциальные операторы на компактном многообразии так, что они будут автоматически удовлетворять условию псевдолокальности из предыдущего предложения.

Определение 41. Пусть M есть компактное многообразие. Линейный оператор $P : \mathcal{D}(M) \to C^\infty(M)$ называется *псевдодифференциальным оператором* порядка d, если его ядро является гладким вне диагонали в $M \times M$ и для любой координатной карты (U,φ) оператор $\varphi_* P$, действующий из $\mathcal{D}(\varphi(U))$ в $C^\infty(\varphi(U))$, является псевдодифференциальным оператором из пространства $\Psi^d(\varphi(U))$. Такой оператор называется *классическим*, если все его локальные выражения являются псевдодифференциальными операторами с классическими символами.

Из приведенной выше формулы замены переменных в главном символе следует, что он инвариантно определен как функция на кокасательном расслоении $T^*M \to M$. Эллиптические псевдодифференциальные операторы определяются как операторы, локальные выражения которых являются эллиптическими операторами.

2.1.4 Вычет Водзицки

Прежде, чем перейти к определению вычета Водзицки, приведем несколько вспомогательных фактов об однородных функциях и формах на кокасательном расслоении гладкого многообразия.

Пусть M есть гладкое компактное многообразие размерности $n > 1$ и T^*M – его кокасательное расслоение с локальными координатами (x, ξ), где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ – локальные координаты на M, а $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ – координаты в слое $T^*_x M$. Обозначим через σ_ξ дмфференциальную $(n-1)$-форму на $\mathbb{R}^n \setminus 0$ вида

$$\sigma_\xi := \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \xi_j d\xi_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{d\xi_j} \wedge \ldots \wedge d\xi_n,$$

где "шляпка" над $d\xi_j$ означает, что этот член должен быть пропущен. Форма σ_ξ совпадает с внутренним произведением формы объема $d^n\xi = d\xi_1 \wedge \ldots \wedge d\xi_n$ и эйлерова векторного поля $E = \sum_{j=1}^n \xi_j \partial/\partial\xi_j$: $\sigma_\xi = E \lrcorner\, d^n\xi$.

Лемма 11. *Для любой однородной функции $p_{-n}(\xi)$ порядка однородности $-n$ форма $p_{-n}\sigma_\xi$ на пространстве $\mathbb{R}^n \setminus 0$ замкнута.*

Доказательство. Действительно,

$$dp_{-n} \wedge \sigma_\xi = dp_{-n} \wedge (E \lrcorner\, d^n\xi) = E \lrcorner\, dp_{-n} \wedge d^n\xi = -np_{-n} d^n\xi,$$

откуда

$$d(p_{-n}\sigma_\xi) = dp_{-n} \wedge \sigma_\xi + p_{-n} d\sigma_\xi = -np_{-n} d^n\xi + np_{-n} d^n\xi = 0.$$

□

Доказанная лемма нужна нам для того, чтобы вычислять интегралы вида $\int_{S^{n-1}} p_{-n}|\sigma_\xi|$. Благодаря ей, интегрирование по единичной сфере S^{n-1} в указанном интеграле можно заменить интегралом по любому сечению расслоения $\mathbb{R}^n \setminus 0 \to S^{n-1}$.

Напомним, что по теореме Эйлера для однородных функций f степени однородности λ место тождество

$$\frac{1}{n+\lambda} \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\xi_j f)}{\partial\xi_j} = \frac{1}{n+\lambda}(nf + Ef) = f.$$

При $\lambda = -n$ это тождество теряет смысл, однако справедливо следующее утверждение.

Лемма 12. *Интеграл*

$$\int_{S^{n-1}} p_{-n}|\sigma_\xi| = 0$$

тогда и только тогда, когда функция p_{-n} является суммой производных.

Доказательство. Как известно, ядро оператора Лапласа, заданного на гладких функциях на компактном многообразии, состоит из одних констант. Если рассматриваемый интеграл равен нулю, то правая часть уравнения

$$\Delta_{S^{n-1}} f = p_{-n}|S^{n-1}$$

ортогональна ядру $\Delta_{S^{n-1}}$ и потому выписанное уравнение должно иметь решение. Продолжим это решение f до функции $\hat{f}$, заданной на всем пространстве $\mathbb{R}^n \setminus 0$, полагая: $\hat{f}(\xi) := |\xi|^{-(n-2)} f(\xi/|\xi|)$. Уравнение Лапласа для этой функции перепишется в виде

$$\Delta_{\mathbb{R}^n} \hat{f} = |\xi|^{-n} p_{-n}(\xi/|\xi|) = p_{-n}(\xi).$$

Обратно, допустим сначала, что p_{-n} является производной некоторой функции, скажем, $p_{-n} = \partial q_{1-n}/\partial \xi_1$, где q_{1-n} – некоторая однородная функция степени $1-n$. Цикл S^{n-1} можно заменить циклом вида $S^{n-2} \times \mathbb{R}$, поскольку функция q_{1-n}, учитывая ее степень однородности, должна стремится к нулю при $|\xi_1| \to \infty$. Обозначая $(\xi_2, \dots, \xi_n)$ через η, получим

$$\int_{S^{n-1}} p_{-n}|\sigma_\xi| = \pm \int_{S^{n-2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial q_{1-n}}{\partial \xi_1} |d\xi_1||\sigma_\eta| = 0.$$

То же самое рассуждение проходит, если функция p_{-n} есть сумма производных по разным переменным. □

Нам понадобится еще понятие плотности на многообразии. Начнем со случая вещественного векторного пространства V размерности n.

Определение 42. *Плотностью* на векторном пространстве V называется непрерывное отображение $\lambda : V^n \to \mathbb{R}$, обладающее свойством:

$$\lambda(Av_1, \dots, Av_n) = |\det A| \lambda(v_1, \dots, v_n)$$

для всех $v_1, \dots, v_n \in V$, $A \in \operatorname{End} V$.

Если ω – форма объема на V, то она определяет плотность $|\omega|$ на V по формуле: $|\omega|(v_1, \dots, v_n) := |\omega(v_1, \dots, v_n)|$.

Определение плотностей легко переносится на произвольные римановы многообразия, поскольку имеет место следующая

Лемма 13. *Пусть (M, g) – риманово многообразие с римановой метрикой g. Тогда на M существует единственная плотность $|\nu_g|$, которая принимает значение 1 на всех ортонормированных базисах касательных пространств T_xM, $x \in M$. Если векторы $v_1, \dots, v_n \in T_xM$, то*

$$|\nu_g|(v_1, \dots, v_n) = |\det(g_x(v_i, v_j))|^{1/2}.$$

Указанную плотность естественно называть римановой.

Утверждение леммы вытекает из того, что расслоение плотностей на любом гладком многообразии M (функции перехода которого задаются модулями якобианов) тривиально, поскольку нет препятствий к построению его ненулевого сечения (в отличие от расслоения форм объема, которое тривиально только в случае ориентируемых многообразий). В римановом случае наличие римановой плотности позволяет отождествить пространство всех плотностей на многообразии M с прямым произведением $M\times\mathbb{R}$. Локальное выражение для римановой плотности записывается в виде

$$\sqrt{\det g}|dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n| = \sqrt{\det g}|d^n x|.$$

Из формулы замены переменных на M следует, что на пространстве сечений расслоения плотностей имеется линейная форма $\int_M$, определенная единственным образом, которая инвариантна относительно диффеоморфизмов и совпадает с интегралом Лебега на локальных картах.

Перейдем теперь к определению вычета Водзицки. Напомним, что классическим псевдодифференциальным оператором на компактном многообразии M называется линейный оператор P, символ которого имеет локальные выражения вида

$$p(x,\xi)\sim\sum_{k=0}^{\infty}p_{d-k}(x,\xi),$$

где функция $p_{d-k}(x,\xi)$ однородна по ξ степени $d-k$.

Теорема 14 (Водзицки)**.** *Пусть на гладком компактном многообразии M размерности n задан классический псевдодифференциальный оператор P. Тогда на M существует плотность $res_x P$, локальные выражения которой имеют вид*

$$res_x P = \left(\int_{|\xi|=1}p_{-n}(x,\xi)|\sigma_\xi|\right)|d^n x|. \tag{2.4}$$

Интеграл от этой плотности называется вычетом Водзицки оператора P:

$$Res\, P := \int_M res_x P. \tag{2.5}$$

Доказательство. Из формулы замены переменных в псевдодифференциальных операторах мы знаем, что под действием диффеоморфизма $\varphi: U\to V$ из области $U\subset\mathbb{R}^n$ на область $V\subset\mathbb{R}^n$ псевдодифференциальный оператор $P\in\Psi^d(U)$ преобразуется в псевдодифференциальный оператор $\varphi_* P\in\Psi^d(V)$. При этом символ $p(x,\xi)$ оператора P переходит в символ $p_\varphi(x,\xi) =: \tilde p(x,\xi)$ оператора $\varphi_* P$, задаваемый формулой, в которой мы положили $\xi = {}^t\psi'(x)\eta$:

$$\tilde p(x,{}^t\psi'(x)\eta) = \sum_\alpha c_\alpha(x,\eta)\partial_\eta^\alpha p(\psi(x),\eta),$$

где $c_0(x,\eta)=1$, а другие коэффициенты $c_\alpha(x,\eta)$ являются полиномами по η. Это означает, в частности, что коэффициент $\tilde p_{-n}(x,{}^t\psi'(x)\eta)$ отличается от коэффициента $p_{-n}(\psi(x),\eta)$ суммой членов, являющихся производными по ξ.

Посмотрим теперь, как изменяется интеграл $\int_{|\xi|=1} p_{-n}(x,\xi)|\sigma_\xi|$ под действием невырожденных линейных замен по переменной ξ и фиксированном x. Пусть такая замена задается отображением h. Нетрудно видеть, что $h^*\sigma_\xi = (\det h)\sigma_{h\xi}$.

Заметим, что интеграл по сфере $S = \{\xi : \ |\xi| = 1\}$ от формы $p_{-n}|\sigma_\xi|$ совпадает (с точностью до знака) с интегралом от этой формы по образу $h(S)$:

$$\int_{|\xi|=1} p_{-n}(x,\xi)|\sigma_\xi| = \pm \int_{h(S)} p_{-n}(x,\xi),$$

поскольку $h(S)$ гомологично S (знак "плюс" отвечает случаю, когда h сохраняет ориентацию, знак "минус" ставится в противоположном случае). Поэтому

$$\int_S p_{-n}(x,\xi)|\sigma_\xi| = \pm \int_S h^*\left(p_{-n}(x,\xi)|\sigma_\xi|\right) = |\det h| \int_S p_{-n}(x,h\xi)|\sigma_{h\xi}|.$$

Полагая $y := \psi(x)$, $\xi = {}^t\psi'(x)\eta$, получим следующую формулу для преобразованного вычета:

$$\int_{|\xi|=1} \tilde{p}(x,\xi)|\sigma_\xi||d^nx| = |\det\psi'(x)| \int_{|\eta|=1} \tilde{p}_{-n}(x,{}^t\psi'(x)\eta)|\sigma_\eta||d^nx| =$$
$$\int_{|\eta|=1} \tilde{p}_{-n}(x,{}^t\psi'(x)\eta)|\sigma_\eta||d^ny| = \int_{|\eta|=1} p_{-n}(y,\eta)|\sigma_\eta||d^ny|,$$

где мы воспользовались тем, что циклы $|\xi| = 1$ и $|\eta| = 1$ гомологичны друг другу при фиксированном x и члены, состоящие из производных, не дают вклада в последний интеграл. Из последней выкладки следует, что плотность $\mathrm{res}_x P$ корректно определена, так что интеграл от нее не зависит от выбора локальных координат. □

Обозначим через $\mathcal{P}(M)$ фактор-алгебру классических псевдодифференциальных операторов на многообразии M по идеалу сглаживающих классических операторов. Вычет Водзицки задает след на алгебре $\mathcal{P}(M)$, причем (при $n > 1$) на этой алгебре существует единственный след (с точностью до умножения на ненулевую константу). Это утверждение вытекает из теоремы Водзицки, доказательство которой можно найти, например, в [3], теорема 7.6. Она наталкивает на мысль о том, что вычет Водзицки должен быть связан с определенным ранее следом Диксмье. К этому вопросу мы вернемся в следующем пункте.

Приведем пример вычисления вычета Водзицки для оператора Лапласа на компактном римановом многообразии.

Пример 15. Пусть $P = \Delta$ есть лапласиан на компактном римановом n-мерном многообразии (M,g). Тогда

$$\mathrm{Res}\,\Delta^{-n/2} = \Omega_n,$$

где $\Omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ – площадь поверхности сферы S^{n-1}.

Действительно, так как Δ есть оператор второго порядка, то $\Delta^{-n/2}$ имеет порядок $-n$, а его главный символ имеет вид $(g^{ij}(x)\xi_i\xi_j)^{-n/2}$, где (g_{ij}) – метрический тензор многообразия M, (g^{ij}) – матрица, обратная к (g_{ij}). После замены

$y = \psi(x)$, $\xi = {}^t\psi'(x)\eta$, для которой $\psi'(x) = (\det g)^{1/2}$, главный символ превратится в $|\eta|^{-n}$, а плотность вычета будет равна

$$\mathrm{res}_x P = \Omega_n |d^n y| = \Omega_n \det \psi'(x) |d^n x| = \Omega_n |\nu_g|,$$

где $|\nu_g|$ – риманова плотность. Отсюда следует, что $\mathrm{Res}\,\Delta^{-n/2} = \Omega_n$.

2.1.5 Теорема Конна о следе

Мы уже указывали выше, что вычет Водзицки и след Диксмье псевдодифференциальных операторов должны быть связаны друг с другом. Конкретное выражение для этой связи дается *теоремой Конна о следе.*

Теорема 15 (Конн)**.** *Пусть P – эллиптический псевдодифференциальный оператор порядка $-n$ на компактном римановом многообразии (M, g). Тогда оператор P принадлежит пространству $\mathcal{L}^{1,\infty}$ и измерим, а его след Диксмье связан с вычетом Водзицки формулой:*

$$Tr^+ P = \frac{1}{n(2\pi)^n} Res\, P.$$

Доказательство этой теоремы, которое мы опускаем, можно найти в оригинальной книге Конна [2] и книге [3], теорема 7.18.

Из теоремы Конна вытекает следующее

Следствие 6. *Для произвольной гладкой функции $a \in C^\infty(M)$ имеет место равенство*

$$\int_M a(x)|\nu_g| = \frac{n(2\pi)^n}{\Omega_n} Tr^+(a\Delta_g^{-n/2}).$$

Доказательство. Оператор $a\Delta^{-n/2}$ есть псевдодифференциальный оператор порядка $-n$ с главным символом $a_{-n}(x,\xi) := a(x)(g^{ij}\xi_i\xi_j)^{-n/2}$, поэтому (см. пример 15) плотность вычета Водзицки для него имеет вид

$$\mathrm{res}_x(a\Delta^{-n/2}) = \Omega_n a(x)|\nu_g|.$$

Следовательно, левая часть доказываемого равенства совпадает с $\Omega_n^{-1}\mathrm{Res}(a\Delta^{-n/2})$. Теперь утверждение вытекает из теоремы о следе. □

2.2 Некоммутативное дифференциальное исчисление

В п.2.2.1 для произвольной алгебры A с единицей строится универсальная дифференциальная алгебра $\Omega^\bullet A$. Это понятие тесно связано с другим важным объектом некоммутативного дифференциального исчисления — циклом, т.е. дифференциальной градуированной алгеброй с интегралом, введенным в п.2.2.2. Цикл можно построить по любому фредгольмову модулю над C^*-алгеброй A, соответствующая конструкция приводится в п.2.2.2.

П.2.2.3 посвящен связностям в модулях над алгебрами. Для существования связности необходимо, чтобы указанный модуль был проективным. Приводятся примеры различных связностей, в том числе вводится связность Леви-Чивита. Дается определение кривизны связности и формулы для ее вычисления. В п.2.2.4 вводится характер Черна проектора в матричной алгебре над коммутативной алгеброй и доказываются его основные свойства.

Заключительный п.2.2.5 посвящен гомологиям и когомологиям Хохшильда алгебр. Главный результат — интерпретация характера Черна цикла над алгеброй A как циклического коцикла Хохшильда над A.

2.2.1 Универсальная дифференциальная алгебра

Пусть $\mathcal{E}$ есть бимодуль над унитальной алгеброй A.

Определение 43. *Дифференцированием* алгебры A со значениями в бимодуле $\mathcal{E}$ называется линейное отображение $D : A \to \mathcal{E}$, удовлетворяющее правилу Лейбница

$$D(ab) = (Da)b + a(Db).$$

Из этого определения сразу следует, что $D(1_A) = 0$, поскольку $D(1_A) = 2D(1_A)$.

Обозначим множество всех дифференцирований алгебры A со значениями в $\mathcal{E}$ через $\operatorname{Der}(A, \mathcal{E})$. Любой элемент $s \in \mathcal{E}$ определяет дифференцирование из $\operatorname{Der}(A, \mathcal{E})$ по формуле

$$(\operatorname{ad} s)a := sa - as.$$

Такое дифференцирование называется *внутренним*.

Пространство $\operatorname{Der}(A) \equiv \operatorname{Der}(A, A)$ дифференцирований алгебры A является алгеброй Ли, поскольку коммутатор двух дифференцирований снова является дифференцированием.

Нашей ближайшей целью является построение бимодуля $\Omega^1 A$, задаваемого вместе с дифференцированием $d : A \to \Omega^1 A$, который обладает следующим универсальным свойством: для любого дифференцирования D алгебры A со значениями в бимодуле $\mathcal{E}$ найдется единственный морфизм бимодулей $i : \Omega^1 A \to \mathcal{E}$, делающий следующую диаграмму коммутативной:

$$\begin{tikzcd} & \Omega^1 A \arrow[d, dashed, "i"] \\ A \arrow[ur, "d"] \arrow[r, "D"'] & \mathcal{E}. \end{tikzcd}$$

Иначе говоря, линейное отображение $\operatorname{Hom}_A(\Omega^1 A, \mathcal{E}) \to \operatorname{Der}(A, \mathcal{E})$, задаваемое формулой $\varphi \longmapsto \varphi \circ d$, должно быть изоморфизмом.

Конструкция бимодуля $\Omega^1 A$

Пусть $A \otimes A$ есть тензорное произведение алгебры A на себя, рассматриваемое как A-бимодуль с действием элементов из A, задаваемым на простых тензорах формулами:

$$a(b \otimes c) \equiv (a \otimes 1_A)(b \otimes c) = (ab) \otimes c,$$
$$(a \otimes b)c \equiv (a \otimes b)(1_A \otimes c) = a \otimes (bc).$$

Определим дифференцирование $d : A \to A \otimes A$ алгебры A со значениями в $A \otimes A$ по формуле:

$$da := 1_A \otimes a - a \otimes 1_A$$

(далее мы опускаем нижний индекс A в обозначении 1_A там, где это не приводит к недоразумению). Тогда

$$d(ab) = 1 \otimes (ab) - (ab) \otimes 1 = a \otimes b - (ab) \otimes 1 + 1 \otimes (ab) - a \otimes b = adb + (da)b,$$

поскольку

$$adb = a(1 \otimes b) - a(b \otimes 1) = (a \otimes 1)(1 \otimes b) - (a \otimes 1)(b \otimes 1) = a \otimes b - (ab) \otimes 1,$$
$$(da)b = (1 \otimes a)b - (a \otimes 1)b = (1 \otimes a)(1 \otimes b) - (a \otimes 1)(1 \otimes b) = 1 \otimes (ab) - a \otimes b.$$

Поэтому d действительно является дифференцированием алгебры A со значениями в $A \otimes A$.

Обозначим через $\Omega^1 A$ подмодуль в $A \otimes A$, порожденный элементами вида adb. Он совпадает с ядром отображения

$$m : A \otimes A \longrightarrow A, \quad a \otimes b \longmapsto ab.$$

Действительно, если элемент $\sum_k a_k \otimes b_k \in A \otimes A$ принадлежит $\operatorname{Ker} m$, то есть $\sum_k a_k b_k = 0$, то

$$\sum_k a_k \otimes b_k = \sum_k a_k(1 \otimes b_k - b_k \otimes 1) = \sum_k a_k db_k,$$

откуда и следует указанное утверждение.

Введем на $\Omega^1 A$ структуру A-бимодуля, полагая

$$a(bdc) := (ab)dc, \quad (adb)c := ad(bc) - (ab)dc.$$

Построенный бимодуль называется *бимодулем универсальных 1-форм над алгеброй A*.

Предположим теперь, что $\mathcal{E}$ – произвольный бимодуль над алгеброй A и $D : A \to \mathcal{E}$ – дифференцирование алгебры A со значениями в $\mathcal{E}$. Определим отображение $i : \Omega^1 A \to \mathcal{E}$, полагая его равным на простых тензорах из $A \otimes A$

$$i(a \otimes b) := a(Db)$$

и сужая затем на $\Omega^1 A \subset A \otimes A$. Указанное отображение является морфизмом A-бимодулей, откуда следует, что бимодуль $\Omega^1 A$ действительно обладает универсальным свойством, отмеченным в начале этого пункта.

Дифференциальная градуированная алгебра

Определение 44. *Градуированная дифференциальная алгебра* (кратко: *DG-алгебра*) $(R^\bullet, \delta)$ есть ассоциативная алгебра

$$R^\bullet = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R^n,$$

которая наделена *градуированным произведением*, т.е. произведением, обладающим свойством $R^m \cdot R^n \subseteq R^{m+n}$, и *дифференциалом* δ, т.е. линейным отображением, удовлетворяющим условиям:

1. δ является отображением степени $+1$, т.е. переводит $R^n \to R^{n+1}$,

2. $\delta^2 = 0$,

3. δ является *нечетным дифференцированием*, т.е. удовлетворяет правилу Лейбница вида
$$\delta(\omega^n \eta) = (\delta\omega^n)\eta + (-1)^n \omega^n \delta\eta,$$
где $\omega^n \in R^n$.

Наша цель состоит в том, чтобы построить DG-алгебру
$$\Omega^\bullet A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Omega^n A,$$
с дифференциалом d, первые два слагаемых которой имеют вид: $\Omega^0 A = A$, $\Omega^1 A$ определено выше, а дифференциал d продолжает построенное выше дифференцирование из алгебры A в $\Omega^1 A$. Кроме того, мы хотим, чтобы указанная DG-алгебра обладала следующим универсальным свойством: если $(R^\bullet, \delta)$ – другая DG-алгебра, то любой гомоморфизм алгебр $\psi : A \to R^0$ должен продолжаться до гомоморфизма алгебр $\psi : \Omega^\bullet A \to R^\bullet$ степени нуль, сплетающего дифференциалы d и δ.

Обозначим через $\bar{A}$ факторалгебру $\bar{A} := A/\mathbb{C}$ и через $\bar{a}$ образ элемента $a \in A$ при проекции в $\bar{A}$. Введенный ранее бимодуль $\Omega^1 A$ можно отождествить с
$$\Omega^1 A \cong A \otimes \bar{A}$$
посредством отображения: $a \otimes \bar{b} \mapsto adb$. Это отождествление определено корректно, поскольку $d(1_A) = 0$. Если ввести в $A \otimes \bar{A}$ левое и правое умножение на элементы $c \in A$ по формулам
$$c(a_0 \otimes \bar{a}_1) = (ca_0) \otimes \bar{a}_1,$$
$$(a_0 \otimes \bar{a}_1)c = a_0 \otimes \bar{a}_1 c - (a_0 a_1) \otimes \bar{c},$$
то отображение $A \otimes \bar{A} \to \Omega^1 A$ станет изоморфизмом бимодулей, поскольку
$$c(a_0 \otimes \bar{a}_1) = (ca_0) \otimes \bar{a}_1 \longmapsto (ca_0) \otimes da_1,$$
$$(a_0 \otimes \bar{a}_1)c = a_0 \otimes \bar{a}_1 c - (a_0 a_1) \otimes \bar{c} \longmapsto a_0 \otimes da_1 c - (a_0 a_1) \otimes dc = (a_0 s a_1)c.$$

Положим теперь по определению
$$\Omega^2 A := \Omega^1 A \otimes_A \Omega^1 A = (A \otimes \bar{A}) \otimes_A (A \otimes \bar{A}) = A \otimes \bar{A} \otimes \bar{A}.$$

Более общим образом, определим
$$\Omega^n A := \Omega^1 A \otimes_A \ldots \otimes_A \Omega^1 A \ (n \text{ раз}),$$
так что
$$\Omega^n A = A \otimes \bar{A}^{\otimes n}.$$

Дифференциал $d : A \otimes \bar{A}^{\otimes n} \to A \otimes \bar{A}^{\otimes (n+1)}$ задается сдвигом
$$d(a_0 \otimes \bar{a}_1 \otimes \ldots \otimes \bar{a}_n) := 1_A \otimes \bar{a}_0 \otimes \bar{a}_1 \otimes \ldots \otimes \bar{a}_n.$$

Тогда $d^2 = 0$, поскольку $\bar{1}_A = 0$ в алгебре $\bar{A}$.

Отождествляя, как и выше, $A \otimes \bar{A}^{\otimes n}$ с $(\Omega^1 A)^{\otimes n}$ будем иметь

$$a_0 \otimes \bar{a}_1 \otimes \ldots \otimes \bar{a}_n = a_0 da_1 \ldots da_n.$$

Введем на $\Omega^\bullet A$ структуру A-бимодуля. Умножение слева задается очевидным образом:

$$c(a_0 da_1 \ldots da_n) = (ca_0) da_1 \ldots da_n.$$

Чтобы определить умножение справа, воспользуемся правилом Лейбница: $da \cdot b = d(ab) - adb$. Тогда

$$\begin{aligned}(a_0 da_1 \ldots da_n)c &= a_0 da_1 \ldots da_{n-1} d(a_n c) - a_0 da_1 \ldots da_{n-1} a_n dc = \ldots \\ &= (-1)^n (a_0 a_1) da_2 \ldots da_n c + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n-j} a_0 a_1 \ldots d(a_i a_{j+1}) \ldots da_n dc + \\ &\qquad + a_0 da_1 \ldots da_{n-1} d(a_n c).\end{aligned}$$

Наконец, определим произведение в $\Omega^\bullet A$, полагая:

$$(a_0 da_1 \ldots da_n)(b_0 db_1 \ldots db_m) := (a_0 da_1 \ldots da_n \cdot b_0)\, db_1 \ldots db_m.$$

Тем самым, $\Omega^\bullet A$ становится DG-алгеброй, называемой *универсальной DG-алгеброй* над алгеброй A.

Отметим следующие полезные формулы:

$$d(a_0 da_1 \ldots da_n) = 1_A da_0 da_1 \ldots da_n = da_0 da_1 \ldots da_n$$

и

$$a_0 [d, a_1] \ldots [d, a_n] \cdot 1_A = a_0 da_1 \ldots da_n.$$

Первая из них перефразирует определение дифференциала с учетом отождествления $A \otimes \bar{A}^{\otimes n}$ с $(\Omega^1 A)^{\otimes n}$, а для доказательства второй заметим, что

$$\begin{aligned}[d, a_n] \cdot 1_A &= da_n - a_n d1_A = da_n, \\ [d, a_{n-1}] da_n &= d(a_{n-1} da_n) = da_{n-1} da_n\end{aligned}$$

и т.д. по индукции.

Проверим свойство универсальности построенной DG-алгебры $\Omega^\bullet A$. Пусть задана другая DG-алгебра $(R^\bullet, \delta)$ и гомоморфизм алгебр $\psi : A \to R^0$. Тогда его продолжение до морфизма $\psi : \Omega^\bullet A \to R^\bullet$ задается формулой

$$\psi(a_0 da_1 \ldots da_n) := \psi(a_0) \delta\left(\psi(a_1)\right) \ldots \delta\left(\psi(a_n)\right).$$

2.2.2 Циклы и фредгольмовы модули

Определение 45. *Циклом* размерности n называется DG-алгебра

$$\Omega^\bullet = \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega^k,$$

заданная вместе с *интегралом* $\int$, т.е. линейным отображением $\int : \Omega^\bullet \to \mathbb{C}$ таким, что:

1. $\int \omega^k = 0 \quad$ при $k < n$;
2. $\int d\omega^{n-1} = 0$;
3. $\int \omega^k \omega^l = (-1)^{kl} \int \omega^l \omega^k$.

Циклом над алгеброй A называется цикл $(\Omega^\bullet, d, \int)$ вместе с гомоморфизмом $A \to \Omega^0$.

Стандартными примерами циклов размерности n могут служить комплекс де Рама над n-мерным гладким компактным многообразием и алгебра гладких матричных функций на $\mathbb{R}^n$ с подходящим условием роста на бесконечности, интеграл в которой равен $\int \omega^n := \int \operatorname{tr} \omega^n$. Менее тривиальные примеры строятся с помощью фредгольмовых модулей, к определению которых мы переходим.

Циклы, определяемые фредгольмовыми модулями

Определение 46. *Нечетным фредгольмовым модулем* над C^*-алгеброй A называется инволютивное представление σ алгебры A в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, наделенное *оператором симметрии*, т.е. линейным оператором S таким, что $S = S^*$ и $S^2 = I$, удовлетворяющим условию

$$[S, \sigma(a)] \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) \quad \text{для всех } a \in A.$$

Четный фредгольмов модуль задается представлением $\sigma = \sigma^0 \oplus \sigma^1$ алгебры A в $\mathbb{Z}_2$-градуированном гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{H}^0 \oplus \mathcal{H}^1$ с нечетным оператором симметрии S, удовлетворяющим тем же условиям, что и в нечетном случае.

Фредгольмов модуль $(A, \mathcal{H}, S)$ порождает цикл над алгеброй A с $\Omega^0 = A$, а оператор S задает $\mathbb{Z}_2$-градуировку на алгебре ограниченных линейных операторов $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Действительно, мы можем записать произвольный линейный оператор T в виде

$$T = T_+ + T_-, \quad \text{где } T_\pm = \frac{T \pm STS}{2}.$$

Тогда

$$(TR)_+ = T_+R_+ + T_-R_- \quad \text{и} \quad (TR)_- = T_+R_- + T_-R_+.$$

Кроме того,

$$T = T_+ \iff T = STS \quad \text{и} \quad T = T_- \iff T + STS = 0.$$

Для того, чтобы определить интеграл, нам придется наложить на рассматриваемые фредгольмовы модули дополнительное условие *суммируемости* порядка n:

$$[S, \sigma(a)] \in \mathcal{L}^{n+1}(\mathcal{H}),$$

при этом число n будет предполагаться нечетным для нечетных фредгольмовых модулей и четным для четных фредгольмовых модулей.

Дифференциалы

Предполагая условие суммируемости выполненным, определим *дифференциал*, полагая:

$$da = i[S, \sigma(a)] = 2iS\sigma(a)_-$$

для $a \in A$. Мы будем опускать далее знак σ, так что последняя формула будет записываться в виде

$$da = i[S, a] = 2iSa_-.$$

Иначе говоря, дифференциал d выбирает S-нечетную часть элемента a и условие суммируемости можно теперь переписать в виде $da \in \mathcal{L}^{n+1}$.

Множитель i введен для того, чтобы дифференциал d коммутировал с инволюцией:

$$d(a^*) = (da)^*,$$

где справа стоит эрмитово сопряжение.

Имея дифференциал d, можно ввести и *дифференциалы высших порядков*. Для этого рассмотрим пространство 1-форм на алгебре ограниченных линейных операторов $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Таковыми будем называть операторы вида $a_0 da_1$, где $a_0, a_1 \in A$, и их линейные комбинации. Дифференциал второго порядка на 1-формах определяется формулой

$$d(a_0 da_1) = i[S, a_0 da_1] = i[S, a_0]i[S, a_1] = da_0 da_1$$

(проверьте, что второе равенство действительно имеет место). Заметим, что в этой формуле, также как и в последующих, под коммутатором всегда подразумевается суперкоммутатор, так что коммутатор $[S, a_0 da_1]$ на самом деле является анти-коммутатором, поскольку $a_0 da_1$ есть 1-форма.

Из приведенного определения следует, что

$$d(a_0 da_1) = 2iS(a_0 da_1)_+,$$

т.е. дифференциал 2-го порядка, в отличие от дифференциала 1-го порядка, выбирает S-четную часть формы $a_0 da_1$, принадлежащую $\mathcal{L}^{n+1} \cdot \mathcal{L}^{n+1} \subset \mathcal{L}^{(n+1)/2}$, в то время как S-нечетная часть формы $a_0 da_1$, равная $(a_0)_+(da_1)_- = (a_0)_+ da_1$ принадлежит $\mathcal{L}^{n+1}$. (В дальнейшем мы будем опускать приставку S, говоря о четности или нечетности форм.)

Рассмотрим далее пространство 2-форм, порождаемое элементами вида $a_0 da_1 da_2$, где $a_0, a_1, a_2 \in A$. Дифференциал третьего порядка будет выбирать нечетную часть $a_0 da_1 da_2$, принадлежащую $\mathcal{L}^{(n+1)/3}$, тогда как четная часть $a_0 da_1 da_2$ будет принадлежать $\mathcal{L}^{(n+1)/2}$.

Более общим образом, рассмотрим пространство k-форм Ω^k, порождаемое операторами вида

$$a = a_0 da_1 \dots da_k \quad \text{с } a_0, a_1, \dots, a_k \in A.$$

Если $k = 2r$, т.е. $a \in \Omega^{2r}$, то $a_+ \in \mathcal{L}^{(n+1)/2r}$, $a_- \in \mathcal{L}^{(n+1)/(2r+1)}$. В случае, если $k = 2r-1$, т.е. $a \in \Omega^{2r-1}$, будем иметь: $a_+ \in \mathcal{L}^{(n+1)/2r}$, $a_- \in \mathcal{L}^{(n+1)/(2r-1)}$.

Произведение форм совпадает с их композицией, а дифференциал задается формулой

$$d(a_0 da_1 \dots da_k) = i[S, a_0 da_1] = i[S, a_0] i[S, a_1] \dots i[S, a_k] = da_0 da_1 \dots da_k.$$

Отсюда вытекает общая формула

$$d\omega = i[S, \omega] \quad \text{для } \omega \in \Omega^\bullet.$$

Воспользуемся теперь *поляризацией* гильбертова пространства $\mathcal{H}$, порождаемой оператором симметрии S:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-,$$

где $\mathcal{H}_\pm$ есть (± 1)-собственное подпространство оператора S. Будем записывать линейные операторы на $\mathcal{H}$ в блочном виде, так что

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad a = \begin{pmatrix} a_{++} & a_{+-} \\ a_{-+} & a_{--} \end{pmatrix}.$$

Введем также следующие обозначения:

$$a_+ = \begin{pmatrix} a_{++} & 0 \\ 0 & a_{--} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad a_- = \begin{pmatrix} 0 & a_{+-} \\ a_{-+} & 0 \end{pmatrix}.$$

Формулу для дифференциала 1-го порядка можно переписать в виде

$$da = i[S, a] = 2i \begin{pmatrix} 0 & a_{+-} \\ -a_{-+} & 0 \end{pmatrix}.$$

Интеграл

Перейдем теперь к определению интеграла. Введем прежде всего *условный след* оператора $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, полагая

$$\mathrm{Tr}' T := \mathrm{Tr}\, T_+.$$

Заметим, что $\mathrm{Tr}' T = \mathrm{Tr}\, T$, если $T \in \mathcal{L}^1$, благодаря цикличности обычного следа.

Предположим сначала, что n нечетно. Тогда $(\omega^n)_+ \in \mathcal{L}^{1+1/n} \subset \mathcal{L}^1$, поэтому определен интеграл

$$\int \omega^n := \mathrm{Tr}' \omega^n = -\frac{i}{2} \mathrm{Tr}(S d\omega^n).$$

Второе равенство в этой формуле вытекает из следующей цепочки равенств

$$S d\omega^n = iS[S, \omega^n] = iS(S\omega^n + \omega^n S) = i(\omega^n + S\omega^n S) = 2i(\omega^n)_+.$$

Для форм ω^k с $k < n$ положим по определению $\int \omega^k = 0$.

Покажем, что построенный интеграл обладает свойствами, перечисленными в определении 45. Во-первых,

$$\int d\omega^{n-1} = -\frac{i}{2}\mathrm{Tr}(Sd^2\omega^{n-1}) = 0.$$

Во-вторых, рассмотрим формы ω^k, ω^l с $k + l = n$. Допустим для определенности, что k нечетное, а l – четное. Тогда

$$\begin{aligned}\int \omega^k\omega^l = -\frac{i}{2}\mathrm{Tr}(Sd(\omega^k\omega^l)) = \\ = -\frac{i}{2}\mathrm{Tr}(Sd\omega^k\omega^l - S\omega^k d\omega^l) = -\frac{i}{2}\mathrm{Tr}(-d\omega^l S\omega^k - \omega^l Sd\omega^k) = \\ = -\frac{i}{2}\mathrm{Tr}(Sd\omega^l\omega^k + S\omega^l d\omega^k) = -\frac{i}{2}\mathrm{Tr}(Sd(\omega^l\omega^k) = \int \omega^l\omega^k.\end{aligned}$$

В третьем равенстве мы воспользовались свойством цикличности: $\mathrm{Tr}(TR) = \mathrm{Tr}(RT)$ для операторов $T \in \mathcal{L}^p$, $R \in \mathcal{L}^q$ с $1/p + 1/q = 1$. В нашем случае $p = k/(n+1)$, $q = (l+1)/(n+1)$.

Пусть теперь n четно и снова $k + l = n$. Тогда $(\omega^n)_- \in \mathcal{L}^1$. Обозначим через χ оператор градуировки на $\mathcal{H}$, собственные (± 1)-подпространства которого совпадают соответственно с $\mathcal{H}^0$ и $\mathcal{H}^1$. Определим интеграл в этом случае как

$$\int \omega^n := \mathrm{Tr}'(\chi\omega^n) = -\frac{i}{2}\mathrm{Tr}(\chi Sd\omega^n)$$

и положим: $\int \omega^k = 0$ для форм ω^k с $k < n$. Свойство замкнутости снова очевидно:

$$\int d\omega^{n-1} = -\frac{i}{2}\mathrm{Tr}(\chi Sd^2\omega^{n-1}) = 0,$$

а свойство перестановочности

$$\int \omega^k\omega^l = (-1)^{kl}\int \omega^l\omega^k$$

проверяется также, как и выше, с учетом равенства: $\chi\omega^k = (-1)^k\omega^k\chi$.

Примеры операторов симметрии

Пример 16 (преобразование Гильберта)**.** *Преобразованием Гильберта* функции $h \in L^2(\mathbb{R})$, заданной на вещественной оси, называется интеграл вида

$$Sh(x) := \frac{i}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{|t|>\varepsilon}\frac{h(x-t)}{t}\,dt =: \frac{i}{\pi}P.V.\int_{\mathbb{R}}\frac{h(x-t)}{t}\,dt.$$

Преобразование Фурье этой функции совпадает с

$$\mathcal{F}(Sh)(\xi) = (\operatorname{sgn}\xi)\mathcal{F}h(\xi).$$

Преобразование Гильберта является единственным линейным ограниченным оператором в $L^2(\mathbb{R})$, коммутирующим со сдвигами и растяжениями.

Пример 17 (операторы Рисса)**.** Операторы Рисса являются многомерными аналогами преобразования Гильберта. *Операторы Рисса* R_j, $1 \le j \le n$, действуют в $L^2(\mathbb{R}^n)$ по формуле

$$R_j h(x) := \frac{2i}{\Omega_{n+1}} P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{t_j h(x-t)}{|t|^{n+1}}\, dt,$$

где Ω_{n+1} – объем единичной сферы S^n, равный

$$\Omega_{n+1} = \frac{2\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma(\frac{n+1}{2})}\,.$$

Преобразование Фурье этой функции равно

$$\mathcal{F}(R_j h)(\xi) = \frac{\xi_j}{|\xi|}\mathcal{F}h(\xi).$$

Операторы Рисса также коммутируют со сдвигами и растяжениями, причем

$$\sum_{j=1}^{n} R_j^2 = 1.$$

Фредгольмов модуль, ассоциированный с операторами Рисса, строится по набору $(N \times N)$-матриц $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ таких, что

$$\gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = 2\delta_{ij}.$$

Указанные матрицы γ_j являются матрицами Дирака, порождающими спинорное представление алгебры Клиффорда $\mathrm{Cl}^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ в пространстве $\mathbb{C}^N$, где $N = 2^{[n/2]}$. Имея указанный набор матриц γ_j, мы можем определить оператор симметрии по формуле

$$S := \sum_{j=1}^{n} \gamma_j R_j.$$

Например, если в случае $n = 1$ мы положим $\gamma_1^{(1)} = 1$, то для всех нечетных n мы можем определить наборы функций $\gamma_j^{(n)}$ по индукции, полагая:

$$\gamma_j^{(n)} := \begin{pmatrix} 0 & \gamma_j^{(n-2)} \\ \gamma_j^{(n-2)} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{при } j = 1, \dots, n-2,$$

и

$$\gamma_{n-1}^{(n)} := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_n^{(n)} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

В частности, при $n = 3$ получаем матрицы Паули. При четных n полагаем: $\gamma_j^{(n)} := \gamma_j^{(n+1)}$, $j = 1, \dots, n$.

2.2.3 Связности

Определение и существование связностей

Определение 47. Пусть $\mathcal{E}$ есть правый A-модуль над алгеброй A. Рассмотрим правый A-модуль $\mathcal{E}\otimes_A\Omega^1 A$. *Связностью* на $\mathcal{E}$ называется линейное отображение

$$\nabla : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \otimes_A \Omega^1 A,$$

удовлетворяющее правилу Лейбница:

$$\nabla(sa) = (\nabla s)a + s \otimes da,$$

где $s \in \mathcal{E}$, $a \in A$.

Оператор, задаваемый связностью ∇, однозначно продолжается до оператора степени $+1$ на всей градуированной алгебре $\mathcal{E} \otimes_A \Omega^\bullet A$ по формуле:

$$\nabla(s \otimes \omega) = \nabla s \otimes \omega + s \otimes d\omega,$$

где $s \in \mathcal{E}$, $\omega \in \Omega^\bullet A$ и мы отождествляем $(\mathcal{E} \otimes_A \Omega^1 A) \otimes_A \Omega^n A$ с $\mathcal{E} \otimes_A \Omega^{n+1} A$.

Рассматривая $\mathcal{E}\otimes_A\Omega^\bullet A$ как правый $\Omega^\bullet A$-модуль, придем к правилу Лейбница вида

$$\nabla(\sigma\omega) = (\nabla\sigma)\omega + (-1)^k \sigma d\omega,$$

где $\sigma \in \mathcal{E} \otimes_A \Omega^k A$, $\omega \in \Omega^\bullet A$.

Предложение 16. *Правый A-модуль допускает связность только в том случае, если он является проективным.*

Доказательство. Рассмотрим точную последовательность правых A-модулей

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \otimes_A \Omega^1 A \xrightarrow{j} \mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} A \xrightarrow{m} \mathcal{E} \longrightarrow 0,$$

где $j(s \otimes da) = s \otimes a - sa \otimes 1_A$ и $m(s \otimes a) = sa$, а $\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} A$ рассматривается как свободный A-модуль с базисом, задаваемым базисом $\mathcal{E}$. По любому линейному отображению $\nabla : \mathcal{E} \to \mathcal{E} \otimes_A \Omega^1 A$ можно построить линейное отображение f, являющееся правым обратным к отображению m по формуле

$$f(s) := a \otimes 1_A + j(\nabla s).$$

Найдем условие, при котором указанное отображение является гомоморфизмом A-модулей. Справедлива следующая формула

$$f(sa) - f(s)a = j\left(\nabla(sa) - \nabla s \cdot a - s \otimes da\right).$$

Действительно,

$$f(sa) = sa \otimes 1_A + j\left(\nabla(sa)\right),$$
$$f(s)a = (s \otimes 1_A)a + j(\nabla s)a = sa \otimes 1_A + j(\nabla s)a.$$

Но $(\nabla s)a = \nabla s \cdot a + s \otimes da$, откуда следует, что

$$f(sa) - f(s)a = j\left(\nabla(sa) - \nabla s \cdot a - s \otimes da\right).$$

Итак, отображение f является гомоморфизмом A-модулей, если ∇ удовлетворяет правилу Лейбница. Если это правило выполнено, то отображение f расщепляет выписанную выше точную последовательность, откуда следует, что модуль $\mathcal{E}$ является прямым слагаемым в свободном A-модуле $\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{C}} A$ и, тем самым, проективен. $\square$

Примеры связностей

Заметим, прежде всего, что на тензорном произведении двух A-модулей $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ над коммутативной алгеброй A, наделенных соответственно связностями $\nabla^{\mathcal{E}}$ и $\nabla^{\mathcal{F}}$, можно определить связность, являющуюся тензорным произведением связностей $\nabla^{\mathcal{E}}$ и $\nabla^{\mathcal{F}}$. Эта связность определяется формулой

$$\nabla^{\mathcal{E}\otimes_A\mathcal{F}} := \nabla^{\mathcal{E}} \otimes 1_{\mathcal{F}} + 1_{\mathcal{E}} \otimes \nabla^{\mathcal{F}}.$$

Пример 18 (связность в A^n)**.** Напомним, что через A^n мы обозначаем свободный A-модуль, состоящий из столбцов с компонентами из A. Тогда $A^n \otimes_A \Omega^1 A$ отождествляется с $(\Omega^1 A)^n$, при этом

$$d\,{}^t(a_1 \dots a_n) := {}^t(da_1 \dots da_n).$$

Если ∇ – связность на A^n, то $\nabla - d$ является A-линейным отображением из A^n в $(\Omega^1 A)^n$, поэтому ∇ можно записать в виде

$$\nabla = d + \alpha,$$

где α есть $(n \times n)$-матрица с компонентами из $\Omega^1 A$. Если $\{u_j\}_{j=1}^n$ – стандартный базис в A^n, то $du_j = 0$, поэтому $\nabla u_j = \sum_{j=1}^n u_j \alpha_{ij}$. Замена базиса $\{u_j\}_{j=1}^n \mapsto \{\tilde{u}_j\}_{j=1}^n$, задаваемая матрицей $b = (b_{ij})$ по формуле $\tilde{u}_j = \sum_{j=1}^n u_i b_{ij}$, приводит к замене матрицы α матрицей $\tilde{\alpha}$, равной

$$\tilde{\alpha} = b^{-1}\alpha b + b^{-1}db.$$

Пример 19 (связность Леви-Чивита)**.** Пусть $\mathcal{E} = eA^n$ есть конечно порожденный проективный A-модуль и связность ∇ задается композицией

$$\mathcal{E} \xrightarrow{i} A^n \xrightarrow{d} A^n \otimes_A \Omega^1 A \xrightarrow{e} \mathcal{E} \otimes_A \Omega^1 A,$$

где $i : \mathcal{E} \hookrightarrow A^n$. Отождествляя $\mathcal{E}$ с подмодулем в A^n, будем записывать введенную связность в виде

$$\nabla s = e\,ds.$$

Построенная связность называется *связностью Леви-Чивита*.

Пример 20 (эрмитовы связности)**.** Работая с C^*-модулями, естественно использовать связности ∇, совместимые со скалярным произведением $(\cdot\,,\cdot)$, т.е. удовлетворяющие соотношению

$$(\nabla s, t) + (s, \nabla t) = d(s, t)$$

для всех $s, t \in \mathcal{E}$. При этом предполагается, что скалярное произведение $(\cdot\,,\cdot)$ продолжено на $\mathcal{E} \otimes_A \Omega^1 A$ как полуторалинейное спаривание со значениями в $\Omega^1 A$ по формуле:

$$(s, t \otimes adb) := (s, t)adb.$$

В случае связности Леви-Чивита это означает, что соответствующий идемпотент e должен быть самосопряженным, т.е. проектором.

Разность $\nabla = \nabla_1 - \nabla_2$ двух эрмитовых связностей на $\mathcal{E}$ принадлежит пространству гомоморфизмов $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{E}, \mathcal{E} \otimes_A \Omega^1 A)$ и является косоэрмитовым отображением, т.е.

$$(\nabla s, t) + (s, \nabla t) = 0.$$

Если $\mathcal{E} \cong pA^m$, где p – проектор в $\mathrm{Mat}_m(A)$, то

$$pA^m \otimes_A \Omega^1 A \otimes_A {}^m Ap = p\mathrm{Mat}_m(\Omega^1 A)p.$$

Инволюция на $\Omega^1 A$ задается формулой $(adb)^* := d(b^*)a^* = d(b^*a^*) - b^*da^*$. Поэтому косоэрмитов оператор $\alpha \in \mathrm{Hom}_A(\mathcal{E}, \mathcal{E} \otimes_A \Omega^1 A)$ можно отождествить с матрицей $\alpha \in \mathrm{Mat}_m(\Omega^1 A)$, составленной из 1-форм, так что

$$\alpha = p\alpha = \alpha p = p\alpha p,$$

где $\alpha^* = -\alpha$. Эрмитова связность ∇ будет при этом записываться в виде $\nabla = pd + \alpha$, где α удовлетворяет выписанным выше условиям.

Кривизна связности

Рассмотрим линейное отображение

$$\nabla^2 : \mathcal{E} \otimes_A \Omega^\bullet A \longrightarrow \mathcal{E} \otimes_A \Omega^{\bullet+2} A.$$

Оно удовлетворяет соотношению

$$\nabla^2(s\omega) = \nabla(\nabla s\,\omega + sd\omega) = (\nabla^2 s)\omega - \nabla s\, d\omega + \nabla s\, d\omega + sd^2\omega = (\nabla^2 s)\omega,$$

которое означает, что ∇^2 является гомоморфизмом $(\Omega^\bullet A)$-модулей и полностью определяется своим сужением на $\mathcal{E}$. Указанный гомоморфизм называется *кривизной* связности ∇ и обозначается через K_∇.

Вычислим кривизну связности $d + \alpha$ в свободном модуле A^n. Имеем

$$\begin{aligned} K_\nabla s = \nabla(ds + \alpha s) = d^2 s + d(\alpha s) + \alpha ds + \alpha^2 s = \\ = d\alpha\, s - \alpha ds + \alpha ds + \alpha^2 s = (d\alpha + \alpha^2)s. \end{aligned}$$

Лемма 14. *Пусть $\mathcal{E}_0$ и $\mathcal{E}_1$ – проективные модули над коммутативной алгеброй A, наделенные связностями ∇_0 и ∇_1 соответственно с кривизнами K_0 и K_1. Тогда на A-модуле $Hom_A(\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1)$ имеется ассоциированная связность ∇, задаваемая формулой*

$$(\nabla T)s := \nabla_1(Ts) - T(\nabla_0 s)$$

с кривизной

$$\nabla^2 T = K_1 T - -TK_0.$$

Доказательство. Перепишем формулу, определяющую ∇, в виде

$$\nabla_1(Ts) = (\nabla T)s + T(\nabla_0 s).$$

Пользуясь этой формулой, легко убедиться в том, что ∇ удовлетворяет правилу Лейбница. Кроме того, из этой же формулы следует, что

$$\nabla_1\left((\nabla T)s\right) = (\nabla^2 T)s - \nabla T(\nabla_0 s).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}(\nabla^2 T)s = \nabla_1\left((\nabla T)s\right) + \nabla T(\nabla_0 s) = \\ = \nabla_1\left(\nabla_1(Ts) - T(\nabla_0 s)\right) + \nabla_1\left(T(\nabla_0 s)\right) - T(\nabla_0 s) = \\ = \nabla_1^2 Ts - T\nabla_0^2 s = (K_1 T - TK_0)s.\end{aligned}$$

□

В частности, любая связность ∇ на $\mathcal{E}$ в случае коммутативной алгебры A порождает связность в $\mathrm{End}_A\mathcal{E}$, задаваемую формулой

$$\nabla T := \nabla \circ T - T \circ \nabla.$$

2.2.4 Характер Черна

Пусть M – гладкое компактное многообразие и $E \to M$ – векторное расслоение над M. Обозначим через $\Gamma^\infty(M,E) \equiv \Gamma^\infty(E)$ модуль гладких сечений этого расслоения. Поскольку это расслоение можно вложить в качестве прямого слагаемого в тривиальное векторное расслоение ранга N над M, то указанный модуль можно представить в виде $p\left[C^\infty(M)\right]^N$, где p – проектор в свободном модуле $\left[C^\infty(M)\right]^N$.

Наделим M римановой метрикой g и обозначим через R кривизну этой метрики. Если $s \in \Gamma^\infty(E)$ – гладкое сечение расслоения $E \to M$, т.е. $ps = s$, то

$$Rs = (\nabla_g)^2 s = (pd)(pd)s = pdpds.$$

Дифференцируя соотношение $p^2 = p$, получим: $pdp + dp\,p = dp$, откуда

$$pdp = dp(1-p) \quad \text{и} \quad dp\,p = (1-p)dp,$$

так что $pdp\,p = 0$. Если $s = ps$, то $ds = dp\,s + pds$, откуда $dp\,s = (1-p)ds$.

Из этих соотношений получаем

$$Rs = pdpds = dp(1-p)ds = dpdp\,s = dpdp\,ps.$$

Следовательно,

$$R = dpdp\,p = dp(1-p)dp = pdpdp.$$

Определение 48. *Характером Черна* проектора $p \in \mathrm{Mat}_m(A)$ над коммутативной алгеброй A называется величина

$$\mathrm{ch}\,p := \mathrm{tr}(\exp R) = \sum_{k=0}^\infty \mathrm{ch}_{2k}(p) := \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}\mathrm{tr}\,p(dp)^{2k}.$$

В случае, когда алгебра A совпадает с $C^\infty(M)$, мы можем рассматривать dp как матрицу, составленную из 1-форм, т.е. $dp \in \mathrm{Mat}_N(\Omega^1(M))$, так что каждый член $\mathrm{ch}_{2k}(p) \in \Omega^{2k}(M)$ и, в частности, сумма в определении характера является конечной.

Предложение 17. *Характер Черна в случае алгебры $A = C^\infty(M)$ является классом когомологий де Рама.*

Доказательство. Для доказательства предложения нужно проверить, что все формы $\mathrm{ch}_{2k}(p)$ замкнуты. Действительно,

$$d\left(\mathrm{tr}\, p(dp)^{2k}\right) = \mathrm{tr}\,(dp)^{2k+1} = \mathrm{tr}\, \left(p(dp)^{2k+1}\right) + \mathrm{tr}\, \left((1-p)(dp)^{2k+1}\right).$$

Оба члена в правой части равны нулю. Например,

$$\mathrm{tr}\, \left(p(dp)^{2k+1}\right) = \mathrm{tr}\, \left(p^2(dp)^{2k+1}\right) = \mathrm{tr}\, \left(p(dp)^{2k+1}p\right) = \mathrm{tr}\, \left(p(1-p)(dp)^{2k+1}\right) = 0.$$

□

Предложение 18. *Класс Черна $[ch_{2k}(p)]$ зависит только от класса $[p]$ в группе $K_0(A)$.*

Доказательство. Достаточно показать, что отображение $p \mapsto \mathrm{ch}_{2k}(p)$ гомотопически инвариантно. Действительно, пусть $\{p_t\}$, $0 \le t \le 1$, есть гладкое семейство проекторов. Обозначим: $\dot p_t := \frac{dp_t}{dt}$. Нужно показать, что форма

$$\frac{d}{dt}\mathrm{tr}\left(p_t(dp_t)^{2k}\right) = \mathrm{tr}\left(\dot p_t(dp_t)^{2k}\right) + \mathrm{tr}\left(p_t\frac{d}{dt}(dp_t)^{2k}\right)$$

является точной.

Покажем, что первое слагаемое в правой части зануляется. Действительно, также, как в формулах в начале этого пункта имеем: $p_t\dot p_t = \dot p_t(1-p_t)$ и $p_t\dot p_t p_t = 0$. Поэтому выражения в правой части следующей формулы

$$\mathrm{tr}\left(\dot p_t(dp_t)^{2k}\right) = \mathrm{tr}\left(p_t\dot p_t(dp_t)^{2k}\right) + \mathrm{tr}\left((1-p_t)\dot p_t(dp_t)^{2k}\right)$$

зануляются. Например,

$$\mathrm{tr}\left(p_t\dot p_t(dp_t)^{2k}\right) = \mathrm{tr}\left(p_t\dot p_t(dp_t)^{2k}p_t\right) = \mathrm{tr}\left((1-p_t)p_t\dot p_t(dp_t)^{2k}\right) = 0.$$

С другой стороны,

$$\mathrm{tr}\left(p_t\frac{d}{dt}(dp_t)^{2k}\right) = \sum_{j=0}^{2k-1}\mathrm{tr}\left(p_t(dp_t)^j\frac{d}{dt}(dp_t)(dp_t)^{2k-j-1}\right) =$$
$$= \sum_{\text{чет.}j}\mathrm{tr}\left((dp_t)^{2k-1}p_t\frac{d}{dt}(dp_t)\right) + \sum_{\text{нечет.}j}\mathrm{tr}\left((dp_t)^{2k-1}(1-p_t)\frac{d}{dt}(dp_t)\right) =$$
$$2k\mathrm{tr}\left((dp_t)^{2k-1}\frac{d}{dt}(dp_t)\right) = \frac{d}{dt}\mathrm{tr}(dp_t)^{2k},$$

т.е. справа стоит точная форма, откуда и следует доказываемое утверждение.

□

Предложение 19. *Характер Черна является кольцевым гомоморфизмом из $K_0(C^\infty(M))$ в $H^{ev}_{dR}(M)$.*

Доказательство. Нужно проверить, что для произвольных векторных расслоений E, F над M выполняются свойства

$$\operatorname{ch}(E \oplus F) = \operatorname{ch} E + \operatorname{ch} F, \quad \operatorname{ch}(E \otimes F) = (\operatorname{ch} E))(\operatorname{ch} F).$$

Первое равенство вытекает из того, что

$$\operatorname{ch}_{2k}(p \oplus q) = \frac{1}{k!}\operatorname{tr}\left(p(dp)^{2k} \oplus q(dq)^{2k}\right) = \operatorname{ch}_{2k}(p) + \operatorname{ch}_{2k}(q).$$

Для доказательства второго равенства воспользуемся очевидным соотношением

$$\Gamma^{\infty}(E \otimes F) \cong (p \otimes q)A^{mn},$$

где $A = C^{\infty}(M)$. Заметим, что кривизна тензорного произведения $\nabla^{E \otimes F} = \nabla^E \otimes 1 + 1 \otimes \nabla^F$ связностей ∇^E на E и ∇^F на F равна $K_{\nabla^E} \otimes 1 + 1 \otimes K_{\nabla^F}$. Поэтому

$$\operatorname{ch}(p \otimes q) = \operatorname{tr}\left(\exp(pdpdp \otimes 1 + 1 \otimes qdqdq)\right) = (\operatorname{ch} p)(\operatorname{ch} q).$$

□

2.2.5 Гомологии и когомологии Хохшильда

Цепные комплексы

Пусть $(C_\bullet, d)$ есть цепной комплекс абелевых групп.

Определение 49. Цепным отображением $f : (C_\bullet, d) \to (C'_\bullet, d')$ из цепного комплекса $(C_\bullet, d)$ в цепной комплекс $(C'_\bullet, d')$ называется набор отображений $f_n : C_n \to C'_n$, делающих следующую диаграмму коммутативной

$$\begin{array}{ccc}
C_n & \xrightarrow{d_n} & C_{n-1} \\
{\scriptstyle f_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_{n-1}} \\
C'_n & \xrightarrow[d'_{n-1}]{} & C'_{n-1}\,.
\end{array}$$

Указанные отображения f_n переводят циклы в циклы и границы в границы и потому индуцируют гомоморфизмы $H_n f : H_n(C) \to H_n(C')$.

Определение 50. *Цепной гомотопией* двух цепных отображений $f, g : (C_\bullet, d) \to (C'_\bullet, d')$ называется последовательность отображений $h_n : C_n \to C'_{n+1}$, удовлетворяющих соотношениям

$$h_{n-1}d_n + d'_{n+1}h_n = f_n - g_n,$$

которые коротко можно записать в виде: $hd + d'h = f - g$.

Если f, g цепно гомотопны, то $H_n f = H_n g$, поскольку замкнутость $dc = 0$ цепи c влечет равенство: $f(c) - g(c) = d'h(c)$.

Определение 51. Цепной комплекс $(C_\bullet, d)$ называется *ациклическим*, если

$$H_n(C) = 0 \quad \text{при } n > 0.$$

Пусть теперь $(C_\bullet(A), b)$ есть цепной комплекс алгебр $C_n(A) = A^{\otimes(n+1)}$, где A – унитальная алгебра, с граничным отображением b, задаваемым на $C_n(A)$ формулой

$$b_n(a_0 \otimes \ldots \otimes a_n) = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j a_0 \otimes \ldots \otimes a_j a_{j+1} \otimes \ldots \otimes a_n + \\ (-1)^n a_n a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n-1} \quad (2.6)$$

и $b_0 = 0$ на $C_0(A) = A$. Например, $b_1(a_0 \otimes a_1) = a_0 a_1 - a_1 a_0$ и

$$b_2(a_0 \otimes a_1 \otimes a_2) = a_0 a_1 \otimes a_2 - a_0 \otimes a_1 a_2 + a_2 a_0 \otimes a_1.$$

Нетрудно показать, что $b_n b_{n-1} = 0$ для любого n.

Гомологии Хохшильда

Определение 52. *Гомологиями Хохшильда* алгебры A называются гомологии комплекса $(C_\bullet(A), b)$, которые обозначаются через $H_\bullet(A, A)$ или $HH_\bullet(A)$.

Лемма 15. *$HH_0(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$, $HH_n(\mathbb{C}) = 0$ при $n > 0$.*

Доказательство. Для алгебры $A = \mathbb{C}$ имеем: $C_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{\otimes(n+1)} \cong \mathbb{C}$ и $a_0 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n$ совпадает с обычным произведением $a_0 a_1 \ldots a_n$. Граничное отображение определяется формулой

$$b_n(1) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j = \begin{cases} 1 & \text{для четного } n \\ 0 & \text{для нечетного } n. \end{cases}$$

Тем самым, в этом случае комплекс Хохшильда сводится к точной последовательности

$$\ldots \xrightarrow{1} \mathbb{C} \xrightarrow{0} \mathbb{C} \xrightarrow{1} \mathbb{C} \xrightarrow{0} \mathbb{C}$$

и потому имеет тривиальные гомологии во всех размерностях, кроме $n = 0$. $\square$

Аналогичным образом можно определить гомологии Хохшильда алгебры A со значениями в произвольном A-бимодуле $\mathcal{E}$. Для этого достаточно положить $C_n(A, \mathcal{E}) := \mathcal{E} \otimes_A A^n$. Гомологии полученного комплекса обозначаются через $H_\bullet(A, \mathcal{E})$.

Любой гомоморфизм алгебр $f : A \to A'$ порождает цепное отображение и гомоморфизм $HH_\bullet f : HH_\bullet(A) \to HH_\bullet(A')$ нулевой степени. Иными словами, HH_n является функтором из категории унитальных алгебр в категорию векторных пространств.

Цепи вида $a = a_0 \otimes \ldots \otimes 1_A \otimes \ldots \otimes a_n$ с $a_k = 1_A$ для некоторого k порождают подкомплекс $D_\bullet A$, поскольку из $a \in D_n A$ следует, что $b_n a \in D_{n-1} A$ (почему?). Введем граничные отображения b'_n, задаваемые формулой

$$b'_n(a_0 \otimes \ldots \otimes a_n) = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j a_0 \otimes \ldots \otimes a_j a_{j+1} \otimes \ldots \otimes a_n,$$

получающейся из формулы (2.6) для граничного отображения b_n отбрасыванием последнего члена. Взяв композицию b'_{n+1} с отображением $s_0 : a_0 \otimes \ldots \otimes a_n \mapsto 1_A \otimes a_0 \otimes \ldots \otimes a_n$, получим формулу

$$b'_{n+1} s_0(a_0 \otimes \ldots \otimes a_n) = a_0 \otimes \ldots \otimes a_n + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{j+1} 1_A \otimes a_0 \otimes \ldots \otimes a_j a_{j+1} \otimes \ldots \otimes a_n = \\ = (1 - s_0 b'_n)(a_0 \otimes \ldots \otimes a_n).$$

В частности, отсюда следует, что $(b_{n+1}s_0 + s_0 b_n)a = a$ для любого $a \in D_n A$ с $a_n = 1$. Применяя аналогичным образом отображение s_j, вставляющее единицу 1_A на j-м месте в $a_0 \otimes \ldots \otimes a_n$, получим, что $(b_{n+1}s_j + s_j b_n)a = a$ для любого $a \in D_n A$ с $a_j = 1$. Тем самым, семейство отображений $\{s_j\}$ задает цепную гомотопию между нулевым и тождественным отображениями на $D_n(A)$. Следовательно, комплекс $D_\bullet(A)$ является ациклическим, т.е. $H_n(D_\bullet(A), b) = 0$ при $n > 0$.

Пользуясь этим, можно определить фактор-комплекс $C_\bullet(A)/D_\bullet(A)$, совпадающий на самом деле с $\Omega^\bullet(A)$. Граничный оператор b на $\Omega^\bullet(A)$ приобретает вид

$$b_n(a_0 da_1 \ldots da_n) = a_0 a_1 da_2 \ldots da_n + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j a_0 da_1 \ldots d(a_j a_{j+1}) \ldots da_n + \\ (-1)^n a_n a_0 da_1 \ldots a_{n-1}.$$

По-другому, его можно записать как

$$b_k(\omega^k da) = (-1)^k [\omega^k, a] \tag{2.7}$$

для $\omega^k \in \Omega^k A$, $a \in A$.

Пример 21 (гомологии H_0)**.** $H_0(A, \mathcal{E}) = \mathcal{E}/[\mathcal{E}, A]$, поскольку граничное отображение $b : \mathcal{E} \otimes A \to \mathcal{E}$ задается формулой: $b(a \otimes a) = sa - as$. В частности, $HH_0(A) = A/[A, A]$, что совпадает с A, если алгебра A коммутативна. Если $\mathcal{E}$ – симметричный бимодуль над коммутативной алгеброй A, то $H_0(A, \mathcal{E}) = \mathcal{E}$.

Когомологии Хохшильда

Определение 53. *n-Коцепь Хохшильда* на алгебре A — это $(n+1)$-линейный функционал на алгебре A или n-линейная форма на A со значениями в двойственном пространстве A^*. Заметим, что A^* является A-бимодулем относительно операции

$$\varphi \in A^* \longmapsto (b\varphi c)(a) := \varphi(cab).$$

Кограничный оператор b является двойственным к граничному оператору на гомологиях:

$$b_n \varphi(a_0, \ldots, a_{n+1}) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \varphi(a_0, \ldots, a_j a_{j+1}, \ldots, a_{n+1}) + \\ + (-1)^{n+1} \varphi(a_{n+1} a_0, \ldots, a_n).$$

Когомологии полученного коцепного комплекса называются *когомологиями Хохшильда* алгебры A и обозначаются через $HH^\bullet(A)$ или $H^\bullet(A, A^*)$.

В частности, 0-коцикл τ на алгебре A совпадает со следом, поскольку $\tau \in A^* = \mathrm{Hom}(A, \mathbb{C})$ и

$$\tau(a_0a_1) - \tau(a_1a_0) =: b_1\tau(a_0, a_1) = 0.$$

Более общим образом, можно определить когомологии Хохшильда алгебры A со значениями в произвольном A-бимодуле $\mathcal{E}$. Для этого обозначим через $C^n(A, \mathcal{E})$ векторное пространство n-линейных отображений $\varphi : A^n \to \mathcal{E}$, рассматриваемое как A-бимодуль относительно операции: $(b\varphi c)(a_1, \dots, a_n) := b\varphi(a_1, \dots, a_n)c$, где $b, c \in A$. Кограничное отображение в этом случае задается формулой

$$b_n\varphi(a_1, \dots, a_{n+1}) = a_1\varphi(a_2, \dots, a_{n+1}) + \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\varphi(a_1, \dots, a_ja_{j+1}, \dots, a_{n+1}) + \\ + (-1)^{n+1}\varphi(a_1, \dots, a_n)a_{n+1}.$$

Определение 54. n-Коцепь φ на алгебре A называется *циклической*, если $\lambda\varphi = \varphi$, где

$$\lambda\varphi(a_0, \dots, a_n) := (-1)^n\varphi(a_n, a_0, \dots, a_{n-1}).$$

Например, циклический 1-коцикл φ удовлетворяет соотношениям: $\varphi(a_0, a_1) = -\varphi(a_1, a_0)$ и

$$\varphi(a_0a_1, a_2) - \varphi(a_0, a_1a_2) + \varphi(a_2a_0, a_1) = 0,$$

а циклическая 1-кограница $\varphi = b\psi$ определяется равенством

$$\varphi(a_0, a_1) = b\psi(a_0, a_1) = \psi([a_0, a_1]),$$

т.е. является линейной функцией от коммутатора.

Характер Черна

Определение 55. Предположим, что нам задан n-мерный цикл $(\Omega^\bullet, d, \int)$ над алгеброй A. Его *характером Черна* называется $(n+1)$-линейный функционал на A, задаваемый формулой

$$\tau(a_0, \dots, a_n) := \int a_0da_1 \dots da_n.$$

Заметим прежде всего, что τ является коциклом, т.е. $b\tau = 0$. Действительно,

$$\int \sum_{j=0}^{n}(-1)^j a_0da_1 \dots d(a_ja_{j+1}) \dots da_{n+1}) + (-1)^{n+1}\int a_{n+1}a_0da_1 \dots da_n = \\ = (-1)^n\int(a_0da_1 \dots da_n)a_{n+1} + (-1)^{n+1}\int(a_{n+1}a_0da_1 \dots da_n) = 0,$$

поскольку $\int a\omega^n = \int \omega^n a$ для любых $a \in A$, $\omega^n \in \Omega^n$.

Далее заметим, что коцикл τ является циклическим, поскольку

$$\tau(a_0, a_1, \dots, a_n) = (-1)^{n-1}\int da_na_0da_1 \dots da_{n-1} = \\ = (-1)^n\int a_nda_0da_1 \dots da_{n-1} = (-1)^n\tau(a_n, a_0, \dots, a_{n-1}).$$

Кроме того, $\tau(1, a_1, \dots, a_n) = \int da_1 \dots da_n = 0$.

Предложение 20. *$(n+1)$-линейный функционал $\tau : A^{n+1} \to \mathbb{C}$, зануляющийся на $\mathbb{C} \oplus A^n$, является циклическим n-коциклом тогда и только тогда, когда он совпадает с характером Черна некоторого n-мерного цикла над A.*

Доказательство. Мы уже показали, что характер Черна n-мерного цикла над A обладает указанными свойствами. Обратно, если $(n+1)$-линейный функционал $\tau : A^{n+1} \to \mathbb{C}$ является циклическим коциклом, зануляющимся на $\mathbb{C} \oplus A^n$, то мы можем построить n-мерный цикл над A, для которого указанный коцикл будет характером Черна, следующим образом.

Пусть $\Omega^\bullet = \bigoplus_{k=0}^n \Omega^k A$ с универсальным дифференциалом d на $\Omega^k A$ при $k < n$. Дополним это определение при $k = n$, полагая: $d|\Omega^n A = 0$. Определим далее интеграл $\int : \Omega^n A \to \mathbb{C}$ посредством

$$\int a_0 da_1 \dots da_n := \tau(a_0, a_1, \dots, a_n).$$

Мы докажем, что этот интеграл действительно задает характер Черна, если убедимся в том, что $(\Omega^\bullet, d, \int)$ является n-мерным циклом над A.

Имеем: $\Omega^n A = A \otimes \bar{A}^{\otimes n}$, откуда следует, что форма $a_0 da_1 \dots da_n$ не изменится, если заменить какой-либо из элементов a_j с $1 \le j \le n$ на $a_j + \lambda_j 1_A$ с $\lambda_j \in \mathbb{C}$. Для того, чтобы показать, что введенный нами интеграл корректно определен, нужно проверить, что $\tau(a_0, a_1, \dots, a_n) = 0$, если один из элементов $a_j = 1$. Но это вытекает из соотношения $\tau(1, a_1, \dots, a_n) = 0$, выполненного по условию, и цикличности τ. Это же соотношение показывает, что $\int da_1 \dots da_n = 0$ (замкнутость $\int$).

Остается проверить свойство перестановочности:

$$\int \omega^k \omega^{n-k} = (-1)^{k(n-k)} \int \omega^{n-k} \omega^k.$$

Рассмотрим сначала случай, когда $k = n$, при этом $\omega^0 =: a \in A$. Имеем по формуле (2.7):

$$\omega^n a - a\omega^n = [\omega^n, a] = (-1)^n b(\omega^n da).$$

Так как $b\tau = 0$, то отсюда следует, что $\int \omega^n a = \int a\omega^n$.

Далее, если $\omega^{n-1} \in \Omega^{n-1} A$ и $da \in \Omega^1 A$, то

$$\begin{aligned} &\omega^{n-1} da - (-1)^{n-1} da\omega^{n-1} = [\omega^{n-1}, da] = \\ &\qquad = (-1)^{n-1} \left(d[\omega^{n-1}, a] - [d\omega^{n-1}, a] \right) = (-1)^{n-1} d[\omega^{n-1}, a] + b(d\omega^{n-1} da). \end{aligned}$$

Так как $b\tau = 0$ и интеграл $\int$ замкнут, то

$$\int \omega^{n-1} da = (-1)^{n-1} \int da\omega^{n-1}.$$

Пользуясь последовательно двумя разобранными случаями, покажем, что и в общем случае

$$\begin{aligned} &\int \omega^{n-k} a_0 da_1 \dots da_k = (-1)^{n-1} \int da_k \omega^{n-k} da_1 \dots da_{k-1} = \dots \\ &\qquad (-1)^{k(n-1)} \int a_0 da_1 \dots da_k \omega^{n-k} = (-1)^{k(n-k)} \int a_0 da_1 \dots da_k \omega^{n-k}. \end{aligned}$$

$\square$

Глава 3

СПИНОРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

В этой главе дается интерпретация основных объектов спинорной дифференциальной геометрии в терминах банаховых алгебр.

Параграф 3.1 посвящен теории клиффордовых алгебр и спинорных групп. Здесь приводятся основные определения из этой теории и строятся клиффордовы спинорные представления.

Собственно спинорная геометрия изучается в параграфе 3.2. Вводится ключевое понятие спинорной структуры и определяются спинорные и клиффордовы расслоения. Такие расслоения можно наделить спинорными связностями и вычислить их кривизну. С помощью спинорной связности вводится главный объект спинорной геометрии — оператор Дирака. В заключение определяется понятие Spin^c-структуры, важность которого объясняется тем, что такая структура существует на любом 4-мерном римановом многообразии.

3.1 Спинорная алгебра

Параграф открывается изложением теории клиффордовых алгебр (п.3.1.1). Приводятся их основные свойства и, в частности, универсальное свойство, характеризующее клиффордовы алгебры среди других ассоциативных алгебр.

В п.3.1.3 устанавливается связь клиффордовой алгебры с внешней алгеброй и определяются основные операции на клиффордовых алгебрах. В пп.3.1.2,3.1.4 вводятся спинорные группы $\mathrm{Spin}(V)$ и $\mathrm{Spin}^c(V)$.

Клиффордовы и спинорные представления изучаются в п.3.1.5, в частности, дается описание неприводимых представлений указанного типа.

3.1.1 Клиффордовы алгебры

Определение

Пусть V есть n-мерное евклидово пространство, наделенное ортонормированным базисом $\{e_i\}_{i=1}^n$.

Определение 56. *Клиффордовой алгеброй* называется ассоциативная алгебра $\mathrm{Cl}(V)$ над полем $\mathbb{R}$, порождаемая образующими $1, e_1, \ldots, e_n$, удовлетворяющими соотношениям

$$e_i^2 = -1, \quad e_ie_j + e_je_i = 0 \quad \text{при } i \neq j.$$

Мы будем обозначать ее также через $\mathrm{Cl}(n)$.

Из приведенного определения немедленно следует, что $V \subset \mathrm{Cl}(V)$ и

$$uv + vu = -2(u,v) \quad \text{для } u,v \in V.$$

Как вещественное векторное пространство, $\mathrm{Cl}(V)$ имеет размерность 2^n и обладает базисом, задаваемым 1 и элементами вида

$$e_I := e_{i_1} \cdot e_{i_2} \cdot \ldots \cdot e_{i_k},$$

где $I = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ – строго возрастающее множество индексов из $|I| := k$ элементов отрезка $\{1, 2, , \ldots, n\}$ натурального ряда, т.е. $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$. В частности, любой элемент $x \in \mathrm{Cl}(V)$ можно записать в виде

$$x = \sum_I x_I e_I,$$

где мы добавляем к набору $\{I\}$ индексных множеств множество $I = 0$ и полагаем $e_0 := 1$.

Пользуясь этим представлением, можно ввести на $\mathrm{Cl}(V)$ естественное *скалярное произведение*, задаваемое формулой

$$(x,y) := \sum_I x_I y_I$$

(и не зависящее от выбора ортонормированного базиса $\{e_i\}_{i=1}^n$).

Обозначим через $\mathrm{Cl}_k(V)$ подпространство $\mathrm{Cl}(V)$ состоящее из элементов *степени* k, являющихся линейными комбинациями базисных элементов e_I с $|I| = k$ (считая, что $I = 0$ при $k = 0$). Кроме того, введем подпространства $\mathrm{Cl}(V)$ вида

$$\mathrm{Cl}^{\mathrm{ev}}(V) := \bigoplus_{k \text{ чет.}} \mathrm{Cl}_k(V), \quad \mathrm{Cl}^{\mathrm{od}}(V) := \bigoplus_{k \text{ неч.}} \mathrm{Cl}_k(V).$$

Тогда $\mathrm{Cl}^{\mathrm{ev}}(V)$ является унитальной подалгеброй в $\mathrm{Cl}(V)$ и

$$\mathrm{Cl}(V) = \mathrm{Cl}^{\mathrm{ev}}(V) \oplus \mathrm{Cl}^{\mathrm{od}}(V),$$

что наделяет $\mathrm{Cl}(V)$ структурой *супералгебры.*

Универсальное свойство

Понятие клиффордовой алгебры $\mathrm{Cl}(V)$ на самом деле не зависит от выбора ортонормированного базиса $\{e_i\}_{i=1}^n$ благодаря наличию следующего универсального свойства этой алгебры, которое может быть взято за ее определение.

Предложение 21. *Клиффордова алгебра $Cl(V)$ является единственной ассоциативной $\mathbb{R}$-алгеброй с единицей, которая содержит евклидово пространство V и обладает следующим свойством: для любой ассоциативной $\mathbb{R}$-алгебры A с единицей 1_A и произвольного линейного отображения $f : V \to A$, удовлетворяющего условию*

$$f(v) \cdot f(v) = -|v|^2\, 1_A,$$

существует единственное продолжение f до гомоморфизма алгебр $\tilde{f} : Cl(V) \to A$ такого, что следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & A \\ Cl(V) \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Доказательство. Для доказательства указанного универсального свойства клиффордовой алгебры воспользуемся следующим эквивалентным определением этой алгебры. Обозначим через

$$\mathcal{T}(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} V^{\otimes k}$$

тензорную алгебру пространства V и рассмотрим идеал $\mathcal{J}(V)$ этой алгебры, порождаемый элементами вида

$$v \otimes v + |v|^2 \cdot 1.$$

Клиффордова алгебра $\mathrm{Cl}(V)$ совпадает с фактором тензорной алгебры $\mathcal{T}(V)$ по этому идеалу:

$$\mathrm{Cl}(V) \cong \mathcal{T}(V)/\mathcal{J}(V)$$

(проверьте это утверждение самостоятельно).

Вернемся к доказательству универсального свойства алгебры $\mathrm{Cl}(V)$. Любое линейное отображение $f : V \to A$ продолжается единственным образом до гомоморфизма алгебр

$$\tilde{f} : \mathcal{T}(V) \longrightarrow A.$$

По условию, этот гомоморфизм равен нулю на идеале $\mathcal{J}(V)$, поэтому $\tilde{f}$ спускается до гомоморфизма алгебр $\tilde{f} : \mathrm{Cl}(V) \to A$. $\square$

Примеры клиффордовых алгебр

1. $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}) = \mathbb{C}$ с $e_1 = i$.

2. $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{H}$ с $e_1 = i, e_2 = j, e_1e_2 = k$.

3. $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^4) = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{H})$ – пространство кватернионных 2×2-матриц.

Мультипликативная группа

Обозначим через $\mathrm{Cl}^{\times}(V)$ *группу обратимых элементов* клиффордовой алгебры $\mathrm{Cl}(V)$. Это группа Ли, которая содержит $V\setminus\{0\}$, поскольку для любого элемента $v \in V \setminus \{0\}$ обратный к нему элемент v^{-1} задается формулой

$$v^{-1} = -\frac{v}{|v|^2}\,.$$

Алгеброй Ли группы $\mathrm{Cl}^\times(V)$ является алгебра $\mathrm{cl}(V)$, совпадающая как множество с $\mathrm{Cl}(V)$ и наделенная скобкой Ли вида

$$[x, y] := xy - yx.$$

Группа $\mathrm{Cl}^\times(V)$ действует на алгебре $\mathrm{Cl}(V)$ посредством *присоединенного представления*

$$w \longmapsto \mathrm{Ad}_w x := wxw^{-1}, \quad w \in \mathrm{Cl}^\times(V).$$

Дифференциал этого действия является гомоморфизмом алгебр Ли

$$\mathrm{ad} : \mathrm{cl}(V) \longrightarrow \mathrm{Der}\,\mathrm{Cl}(V)$$

из алгебры $\mathrm{cl}(V)$ в алгебру $\mathrm{Der}\,\mathrm{Cl}(V)$ дифференцирований $\mathrm{Cl}(V)$, задаваемым формулой

$$\mathrm{ad}_y x := [y, x], \quad \text{где } y \in \mathrm{cl}(V),\ x \in \mathrm{Cl}(V).$$

Для любого $u \in V \setminus \{0\}$ отображение

$$-\mathrm{Ad}_u v = v - 2\frac{(u, v)}{|u|^2}u\,, \quad v \in V,$$

является отражением относительно гиперплоскости $u^\perp$, ортогональной u. Для того, чтобы избавиться от знака минус в левой части последнего равенства, принято использовать вместо присоединенного представления Ad действие группы $\mathrm{Cl}^\times(V)$ на алгебре $\mathrm{Cl}(V)$, задаваемое *подкрученным присоединенным представлением* вида

$$w \longmapsto \pi_w(x) := \chi(w)xw^{-1}, \quad x \in \mathrm{Cl}(V),\ w \in \mathrm{Cl}^\times(V),$$

где χ – *отображение градуировки*, задаваемое на однородных элементах степени k из группы $\mathrm{Cl}^\times(V)$ формулой

$$\chi(w) := (-1)^{\deg w} w = (-1)^k w.$$

Тогда отображение $\pi_u : V \to V$, определяемое элементом $u \in V \setminus \{0\}$, будет задавать *отражение* относительно гиперплоскости $u^\perp$.

Введем следующую подгруппу мультипликативной группы $\mathrm{Cl}^\times(V)$.

Определение 57. *Группой Клиффорда* $\Gamma(V) \equiv \Gamma(n)$ называется подгруппа мультипликативной группы $\mathrm{Cl}^\times(V)$, порожденная элементами $v \in V \setminus \{0\}$.

Согласно сделанным выше замечаниям, эта группа состоит из элементов $x \in \mathrm{Cl}^\times(V)$, обладающих свойством: $\pi_x(V) = V$. Тем самым, имеется гомоморфизм

$$\pi : \Gamma(V) \longrightarrow \mathrm{GL}(V).$$

Этот гомоморфизм принимает значения в ортогональной группе $\mathrm{O}(V)$. Действительно, поскольку любой элемент $x \in \Gamma(V)$ представляется произведением вида $x = v_1 \cdot \ldots v_k$, где $v_i \in V \setminus \{0\}$, то отвечающее ему преобразование π_x является композицией отражений, отвечающих элементам v_i, т.е. принадлежит $\mathrm{O}(V)$.

Кроме того, гомоморфизм $\pi : \Gamma(V) \to \mathrm{O}(V)$ является эпиморфизмом, поскольку любое ортогональное преобразование является композицией отражений.

Гомоморфизм $\pi : \Gamma(V) \to \mathrm{O}(V)$ можно включить в точную последовательность гомоморфизмов групп вида

$$1 \longrightarrow \mathbb{R}^\times \longrightarrow \Gamma(V) \xrightarrow{\pi} \mathrm{O}(V) \longrightarrow 1.$$

Положим также

$$S\Gamma(V) := \Gamma(V) \cap \mathrm{Cl}^{\mathrm{ev}}(V).$$

Обобщение конструкции Клиффорда на другие поля и квадратичные формы

Приведенное определение алгебр Клиффорда немедленно переносится на случай векторных пространств V над произвольным полем K (мы ограничиваемся в дальнейшем полями $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$), наделенных невырожденной симметричной билинейной формой B.

В этом случае алгебра Клиффорда $\mathrm{Cl}(V, B)$ определяется снова как

$$\mathrm{Cl}(V, B) = \mathcal{T}(V)/\mathcal{J}(V, B),$$

где идеал $\mathcal{J}(V, B)$ порождается элементами вида

$$u \otimes v + v \otimes u + 2B(u, v) \cdot 1, \quad \text{где } u, v \in V.$$

Иначе, можно определить $\mathrm{Cl}(V, B)$ как ассоциативную алгебру с единицей, порожденную элементами $u \in V$, удовлетворяющими соотношениям

$$uv + vu + 2B(u, v) \cdot 1 = 0.$$

Указанная алгебра снова обладает универсальным свойством: если A – другая ассоциативная алгебра с единицей 1_A и $f : V \to A$ – произвольное линейное отображение, обладающее свойством:

$$f(u)f(v) + f(v)f(u) = -2B(u, v) \cdot 1_A$$

для всех $u, v \in V$, то это отображение продолжается единственным образом до гомоморфизма алгебр $\tilde{f} : \mathrm{Cl}(V, B) \to A$.

Комплексифицированная алгебра Клиффорда

Изложенная в предыдущем пункте конструкция интересует нас в первую очередь в случае, когда $K = \mathbb{C}$, а комплексное векторное пространство наделено невырожденной симметричной билинейной формой (определенной однозначно с точностью до умножения на ненулевое комплексное число).

Введем также *комплексифицированную алгебру Клиффорда* $\mathbb{C}\mathrm{l}(V)$ n-мерного вещественного векторного пространства V, полагая

$$\mathbb{C}\mathrm{l}(V) := \mathrm{Cl}(V) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

Эта алгебра изоморфна алгебре Клиффорда $\mathrm{Cl}(V^{\mathbb{C}})$ комплексифицированного векторного пространства $V^{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, наделенного комплексифицированной квадратичной формой.

3.1.2 Спинорные группы

Группа Pin

Определение 58. *Группа* $\mathrm{Pin}(V)$ определяется как подгруппа группы Клиффорда $\Gamma(V)$, порожденная единичными векторами из V, т.е. векторами $v \in V$ с $|v| = 1$.

Также, как в случае группы Клиффорда, имеется гомоморфизм

$$\pi : \mathrm{Pin}(V) \longrightarrow \mathrm{O}(V),$$

который включается в точную последовательность гомоморфизмов групп

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathrm{Pin}(V) \xrightarrow{\pi} \mathrm{O}(V) \longrightarrow 1.$$

Группа Spin

Определение 59. *Группа* $\mathrm{Spin}(V)$ есть связная компонента единицы в группе $\mathrm{Pin}(V)$. По-другому, ее можно определить как

$$\mathrm{Spin}(V) = \mathrm{Pin}(V) \cap \mathrm{Cl}^{\mathrm{ev}}(V).$$

Как и в случае группы $\mathrm{Pin}(V)$, имеется точная последовательность гомоморфизмов групп

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathrm{Spin}(V) \xrightarrow{\pi} \mathrm{SO}(V) \longrightarrow 1.$$

При $n > 2$ группа $\mathrm{Spin}(n)$ является односвязной накрывающей группы $\mathrm{SO}(V)$.

Примеры Spin-групп

1. $\mathrm{Spin}(2) = \mathrm{U}(1) = \mathrm{SO}(2)$.

2. $\mathrm{Spin}(3) = \mathrm{SU}(2)$.

3. $\mathrm{Spin}(4) = \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$.

3.1.3 Связь с внешней алгеброй

Определение

Внешнюю алгебру

$$\Lambda(V) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^k(V)$$

n-мерного вещественного векторного пространства V можно определить также как фактор тензорной алгебры $\mathcal{T}(V)$ по идеалу $I(V)$, порожденному элементами вида

$$u \otimes v + v \otimes u.$$

По-другому, $\Lambda(V)$ есть ассоциативная унитальная алгебра, содержащая V, с умножением $\wedge$, удовлетворяющим соотношениям вида

$$u \wedge v + v \wedge u = 0 \quad \text{для всех } u, v \in V.$$

Подпространство $\Lambda^k(V)$ элементов порядка k имеет размерность $\binom{n}{k}$, откуда следует, что размерность $\Lambda(V)$ равна 2^n, т.е. совпадает с размерностью клиффордовой алгебры $\mathrm{Cl}(n)$. Поэтому можно ожидать, что для n-мерного евклидова пространства V должна существовать тесная связь между $\Lambda(V)$ и $\mathrm{Cl}(V)$, которая и будет установлена ниже.

Внешнюю алгебру можно также определить как градуированную супералгебру, обладающую следующим универсальным свойством. Если A – другая градуированная супералгебра и $f : V \to A^1$ – произвольное линейное отображение, обладающее свойством:

$$f(u)f(v) + f(v)f(u) = 0 \quad \text{для всех } u, v \in V,$$

то f продолжается единственным образом до гомоморфизма градуированных супералгебр $\tilde{f} : \Lambda(V) \to A$.

Дифференцирования и транспозиция

Рассмотрим теперь дифференцирования алгебры $\Lambda(V)$, обращая особое внимание на внутреннее и внешнее дифференцирования.

Определим сначала *внутреннее произведение* формы на элементы двойственного пространства $\xi \in V'$, полагая $\iota(\xi)1 = 0$ и

$$\iota(\xi)(v_1 \wedge \ldots \wedge v_k) = \sum_{j=1}^{k} \xi(v_j) v_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{v_j} \wedge \ldots \wedge v_k,$$

где $v_1, \ldots, v_k \in V$, а “шляпка” над символом v_j означает, что этот символ должен быть опущен. Тогда для любых $\xi, \eta \in V'$ будем иметь

$$\iota(\xi)\iota(\eta) + \iota(\eta)\iota(\xi) = 0.$$

Пользуясь теперь универсальным свойством алгебры $\Lambda(V')$, можно продолжить построенное отображение $\iota : V' \to \operatorname{End}\Lambda(V)$ на всю внешнюю алгебру $\Lambda(V')$ до отображения $\iota : \Lambda(V') \to \operatorname{End}\Lambda(V)$.

С другой стороны, на $\Lambda(V)$ имеется операция *внешнего умножения*, задающая гомоморфизм $\epsilon : \Lambda(V) \to \operatorname{End}\Lambda(V)$.

Указанные операции связаны между собой коммутационными соотношениями:

$$\begin{aligned}
[\epsilon(u), \epsilon(v)] &= \epsilon(u)\epsilon(v) + \epsilon(v)\epsilon(u) = 0, \\
[\iota(\xi), \iota(\eta)] &= \iota(\xi)\iota(\eta) + \iota(\eta)\iota(\xi) = 0, \\
[\iota(\xi), \epsilon(v)] &= \iota(\xi)\epsilon(v) + \epsilon(v)\iota(\xi) = \xi(v)
\end{aligned}$$

выполненными для всех $u, v \in V$, $\xi, \eta \in V'$.

Тензорная алгебра $\mathcal{T}(V)$ обладает специальным инволютивным анти-автоморфизмом, задающим на V тождественное отображение. Этот автоморфизм называется *транспозицией* и однозначно определяется формулой

$$(v_1 \otimes \ldots \otimes v_k)^T := v_k \otimes \ldots \otimes v_1.$$

Поскольку указанная операция сохраняет идеал $I(V)$, то она спускается на внешнюю алгебру $\Lambda(V)$. При этом

$$\eta^T = (-1)^{k(k-1)/2}\eta$$

на формах $\eta \in \Lambda^k(V)$.

В комплексном случае, если обозначить через $V^{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ комплексификацию пространства V, то на $V^{\mathbb{C}}$ имеется операция комплексного сопряжения: $v \mapsto \bar{v}$, продолжающаяся естественным образом на всю внешнюю алгебру $\Lambda(V^{\mathbb{C}})$. Определим *инволюцию* на $\Lambda(V^{\mathbb{C}})$, полагая

$$\eta \longmapsto \eta^* := (\bar{\eta})^T.$$

Это отображение задает сопряженно-линейный анти-автоморфизм алгебры $\Lambda(V^{\mathbb{C}})$.

Связь внешней алгебры с алгеброй Клиффорда

Рассмотрим отображение $s : V \to \operatorname{End}\Lambda(V)$, задаваемое формулой

$$s(v) = \epsilon(v) + \iota(v'), \quad v \in V,$$

где $v' \in V'$ –функционал, двойственный к v, который определяется как

$$v' : u \in V \longmapsto (v, u).$$

Отображение s продолжается до гомоморфизма всей тензорной алгебры $s : \mathcal{T}(V) \to \operatorname{End}\Lambda(V)$. Из коммутационных соотношений для внутреннего и внешнего дифференцирований следует, что

$$s(u)s(v) + s(v)s(u) = -2(u, v)1.$$

Поэтому s зануляется на идеале $\mathcal{J}(V)$ и, следовательно, спускается до гомоморфизма

$$s : \mathrm{Cl}(V) \longrightarrow \operatorname{End}\Lambda(V).$$

Рассмотрим далее отображение $\sigma : \mathrm{Cl}(V) \to \Lambda(V)$, называемое *символом* и задаваемое формулой

$$\sigma(x) := s(x)1,$$

где 1 рассматривается как элемент $\Lambda^0(V)$. В малых степенях это отображение нетрудно вычислить явно:

$$\begin{aligned}
&\sigma(1) = 1,\\
&\sigma(v) = v,\\
&\sigma(v_1 v_2) = v_1 \wedge v_2 + (v_1, v_2),\\
&\sigma(v_1 v_2 v_3) = v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 + (v_2, v_3)v_1 - (v_1, v_3)v_2 + (v_1, v_2)v_3.
\end{aligned}$$

Обратное к σ отображение

$$\mathrm{Alt} : \Lambda(V) \longrightarrow \mathrm{Cl}(V)$$

называется *альтернированием* и определяется формулой

$$\mathrm{Alt}(v_1 \wedge \ldots \wedge v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{p \in S_k} (-1)^{\operatorname{sgn} p} v_{p(1)} \cdot \ldots \cdot v_{p(k)},$$

где суммирование ведется по всем перестановкам $p \in S_k$ множества $\{1, \ldots, k\}$, а $\operatorname{sgn} p$ обозначает четность перестановки p.

Инволюция и элемент объема

Отображение транспозиции на тензорной алгебре $\mathcal{T}(V)$, введенное в п.3.1.3, сохраняет идеал $\mathcal{J}(V)$ и потому спускается до анти-автоморфизма клиффордовой алгебры $\mathrm{Cl}(V)$, обладающего свойством:

$$(v_1 \cdot \ldots \cdot v_k)^T = v_k \cdot \ldots \cdot v_1.$$

Заметим, что отображение альтернирования Alt сплетает транспозиции в $\Lambda(V)$ и $\mathrm{Cl}(V)$.

В комплексном случае можно определить *инволюцию* на клиффордовой алгебре $\mathbb{C}\mathrm{l}(V)$ по формуле:

$$x \longmapsto x^* := (\bar{x})^T,$$

где $x \mapsto \bar{x}$ – комплексное сопряжение на $\mathbb{C}\mathrm{l}(V)$. Снова отображение альтернирования Alt сплетает инволюции в $\Lambda(V)$ и $\mathbb{C}\mathrm{l}(V)$.

Пользуясь транспозицией, можно ввести еще одно полезное отображение

$$\mathrm{N} : x \longmapsto x^T x,$$

определенное на элементах x из группы Клиффорда $\Gamma(V)$. Так как любой элемент $x \in \Gamma(V)$ представим в виде $x = v_1 \cdot \ldots \cdot v_k$, то N принимает значения в $\mathbb{R}^\times$. Указанное отображение задает гомоморфизм групп

$$\mathrm{N} : \Gamma(V) \longrightarrow \mathbb{R}^\times, \quad x \longmapsto x^T x,$$

называемый *нормой*, и обладающий свойством: $\mathrm{N}(\lambda x) = \lambda^2 \mathrm{N}(x)$ для $\lambda \in \mathbb{R}^\times$.

Альтернирование элемента объема $\omega \in \Lambda^n(V)$ n-мерного векторного пространства V дает нам элемент $\omega \in \mathrm{Cl}(V)$ (обозначаемый той же буквой ω), который называется *элементом объема* клиффордовой алгебры или ее *киральным элементом*.

Квадрат ω является скаляром, в чем нетрудно убедиться, если выбрать ортонормированный базис $\{e_i\}_{i=1}^n$ евклидова пространства V и положить $\omega = e_1 \cdot \ldots \cdot e_n$. Тогда

$$\omega^2 = (-1)^{n(n+1)/2}.$$

Кроме того, при нечетном n элемент ω является центральным, а при четном n: $x\omega = \omega\chi(x)$ для любого $x \in \mathrm{Cl}(n)$.

3.1.4 Группа Spin^c

Определение

Рассмотрим комплексифицированную алгебру Клиффорда $\mathbb{C}\mathrm{l}(V) = \mathrm{Cl}(V^{\mathbb{C}})$, где $V^{\mathbb{C}}$ – комплексификация пространства V, и наделим ее *эрмитовым скалярным произведением*, полагая его равным

$$\langle z, w\rangle := (\bar{z}, w)$$

на элементах $z, w \in V^{\mathbb{C}}$ и распространяя затем на всю алгебру $\mathrm{Cl}(V^{\mathbb{C}})$. Напомним, что эта алгебра наделена инволюцией, определяемой равенством: $z^* = (\bar{z})^T$ на элементах $z \in \mathbb{C}\mathrm{l}(V)$.

Пусть $\Gamma(V^{\mathbb{C}})$ есть группа Клиффорда пространства $V^{\mathbb{C}}$. Ее элементы $z \in \mathrm{Cl}^\times(V^{\mathbb{C}})$ удовлетворяют условию: $\pi_z(V^{\mathbb{C}}) = V^{\mathbb{C}}$, так что $\pi_z \in \mathrm{O}(V^{\mathbb{C}})$.

Определение 60. Введем следующие группы:

$$\Gamma^c(V) = \{z \in \Gamma(V^{\mathbb{C}}) : \ z^* z \in \mathbb{R}_+\},$$
$$\mathrm{Pin}^c(V) = \{z \in \Gamma(V^{\mathbb{C}}) : \ z^* z = 1\},$$
$$\mathrm{Spin}^c(V) = \mathrm{Pin}^c(V) \cap \mathrm{S}\Gamma(V^{\mathbb{C}}).$$

Можно показать, что элемент $z \in \Gamma(V^{\mathbb{C}})$ принадлежит подгруппе $\Gamma^c(V)$ тогда и только тогда, когда преобразование $\pi_z \in \mathrm{O}(V^{\mathbb{C}})$ сохраняет вещественное подпространство V. Иначе говоря, $\Gamma^c(V)$ совпадает с обратным образом (относительно отображения π) подгруппы $\mathrm{O}(V) \subset \mathrm{O}(V^{\mathbb{C}})$.

Точная последовательность для группы $\Gamma(V^{\mathbb{C}})$ превращается в точную последовательность гомоморфизмов групп

$$1 \longrightarrow \mathbb{C}^\times \longrightarrow \Gamma^c(V) \longrightarrow \mathrm{O}(V) \longrightarrow 1,$$

индуцирующую точные последовательности

$$1 \longrightarrow \mathrm{U}(1) \longrightarrow \mathrm{Pin}^c(V) \longrightarrow \mathrm{O}(V) \longrightarrow 1,$$
$$1 \longrightarrow \mathrm{U}(1) \longrightarrow \mathrm{Spin}^c(V) \longrightarrow \mathrm{SO}(V) \longrightarrow 1,$$

поскольку $\mathbb{C}^\times \cap \mathrm{Pin}^c(V) = \mathbb{C}^\times \cap \mathrm{Spin}^c(V) = \mathrm{U}(1)$. Из этих последовательностей вытекает, что группы $\mathrm{Pin}^c(V)$ и $\mathrm{Spin}^c(V)$ являются центральными расширениями групп $\mathrm{O}(V)$ и $\mathrm{SO}(V)$ соответственно с помощью $\mathrm{U}(1)$.

Точные последовательности для группы $\mathbf{Spin}^c(V)$

По-другому, группу $\mathrm{Spin}^c(V)$ можно определить как подгруппу $\Gamma^c(V)$ вида

$$\mathrm{Spin}^c(V) = \{z = xe^{i\theta} : \ x \in \mathrm{Spin}(V),\, \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Иначе говоря, группа $\mathrm{Spin}^c(V)$ есть фактор группы $\mathrm{Spin}(V) \times \mathrm{U}(1)$ по отношению эквивалентности: $(x, e^{i\theta}) \sim (-x, -e^{i\theta})$. Последнее утверждение можно записать в виде точной последовательности

$$1 \longrightarrow \mathrm{Spin}(V) \longrightarrow \mathrm{Spin}^c(V) \xrightarrow{\delta} \mathrm{U}(1) \longrightarrow 1,$$

где $\delta : xe^{i\theta} \mapsto e^{2i\theta}$. Иными словами,

$$\mathrm{Spin}^c(V) = \mathrm{Spin}(V) \times_{\mathbb{Z}_2} \mathrm{U}(1).$$

Гомоморфизм нормы

$$\mathrm{N} : \Gamma^c(V) \longrightarrow \mathbb{C}^\times, \quad z \longmapsto z^T z,$$

определенный на группе Клифворда $\Gamma(V^{\mathbb{C}})$, на элементах из $\mathrm{Pin}^c(V)$ принимает значения в $\mathrm{U}(1)$. Комбинация этого гомоморфизма с выписанными ранее точными последовательностями дает:

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \Gamma^c(V) \xrightarrow{(\pi,\mathrm{N})} \mathrm{O}(V) \times \mathbb{C}^\times \longrightarrow 1,$$
$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathrm{Pin}^c(V) \xrightarrow{(\pi,\mathrm{N})} \mathrm{O}(V) \times \mathrm{U}(1) \longrightarrow 1,$$
$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathrm{Spin}^c(V) \xrightarrow{(\pi,\mathrm{N})} \mathrm{SO}(V) \times \mathrm{U}(1) \longrightarrow 1,$$

где гомоморфизм π задается отображением $z \mapsto \pi_z(v) = \chi(z)vz^{-1}$.

Алгебра Ли группы $\mathrm{Spin}^c(V)$ совпадает с

$$\mathrm{spin}^c(V) = \mathrm{cl}_2(V) \oplus i\mathbb{R},$$

где $\mathrm{cl}_2(V)$ есть квадратичная компонента (совпадающая как множество с $\mathrm{Cl}_2(V)$) алгебры Клиффорда $\mathrm{Cl}(V)$, наделенная коммутатором в качестве скобки Ли.

Примеры Spin^c-групп

1. $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$, группа $\mathrm{Spin}^c(\mathbb{R})$ совпадает с группой $\mathrm{U}(1)$, вложенной в $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ с помощью диагонального отображения.

2. $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^2) = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$, группа $\mathrm{Spin}^c(\mathbb{R}^2)$ совпадает с группой $\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(1)$, состоящей из унитарных диагональных матриц в $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$.

3.1.5 Спинорное представление

Клиффордовы модули

Определение 61. *Клиффордовым представлением* называется гомоморфизм

$$\rho : \mathrm{Cl}(V) \longrightarrow \mathrm{End}\, S$$

из алгебры Клиффорда $\mathrm{Cl}(V)$ в алгебру линейных операторов, действующих в комплексном векторном пространстве S, называемом *клиффордовым модулем* над $\mathrm{Cl}(V)$ или *пространством спиноров* для алгебры $\mathrm{Cl}(V)$. Мы будем предполагать, что пространство S наделено эрмитовым скалярным произведением.

По-другому, клиффордово представление можно определить как линейное отображение $\rho : V \to \mathrm{End}\, S$, обладающее свойством:

$$\rho(u)\rho(v) + \rho(v)\rho(u) + 2(u, v)1 = 0$$

для всех $u, v \in V$. Тогда благодаря универсальному свойству такое отображение продолжается до представления $\rho : \mathrm{Cl}(V) \to \mathrm{End}\, S$.

На клиффордовы представления распространяются стандартные определения и свойства из теории представлений ассоциативных алгебр.

Действие представления ρ на пространстве S часто обозначается через

$$\rho(x)s := x \cdot s$$

для $x \in \mathrm{Cl}(V)$, $s \in S$, и называется *клиффордовым умножением.*

Полуспинорные пространства

Клиффордова алгебра $\mathrm{Cl}(n)$ n-мерного евклидова векторного пространства V, наделенного ортонормированным базисом $\{e_i\}_{i=1}^n$, обладает элементом объема $\omega = e_1 \cdot \ldots \cdot e_n$. В комплексном случае мы можем ввести, наряду с элементом ω, еще и *комплексный элемент объема* ω^c, задаваемый формулой

$$\omega^c := i^{[(n+1)/2]}\omega,$$

где $[\cdot]$ обозначает целую часть числа.

При нечетном n элементы ω и ω^c принадлежат центру алгебры Клиффорда. Кроме того,

$$\omega^2 = 1 \quad \text{при } n \equiv 3, 4 \bmod 4,$$
$$(\omega^c)^2 = 1 \quad \text{для всех } n.$$

Рассмотрим сначала вещественный элемент объема и предположим, что $n \equiv 3, 4 \bmod 4$, так что $\omega^2 = 1$. Тогда элементы $\pi_\pm := \frac{1\pm\omega}{2}$ являются взаимно-ортогональными идемпотентами, причем $\pi_+ + \pi_- = 1$. Поэтому клиффордова алгебра $\mathrm{Cl}(V)$ допускает разложение вида

$$\mathrm{Cl}(V) = \mathrm{Cl}^+(V) \oplus \mathrm{Cl}^-(V),$$

где $\mathrm{Cl}^\pm(V) := \pi_\pm \mathrm{Cl}(V)$.

Точно также любой клиффордов модуль S над $\mathrm{Cl}(V)$ представляется в виде

$$S = S^+ \oplus S^-,$$

где $S^\pm$ являются собственными подпространствами оператора $\rho(\omega)$ с собственными значениями ±1, так что $S^\pm = \pi_\pm S$. Подпространства $S^\pm$ называются *полуспинорными*.

В комплексном случае при любом нечетном n будем иметь аналогичное разложение комплексифицированной алгебры Клиффорда

$$\mathbb{C}\mathrm{l}(V) = \mathbb{C}\mathrm{l}^+(V) \oplus \mathbb{C}\mathrm{l}^-(V),$$

где $\mathbb{C}\mathrm{l}^\pm(V) := (1 \pm \omega^c)\mathbb{C}\mathrm{l}(V)$.

Описание неприводимых клиффордовых модулей

Предложение 22. *Пусть $\rho : Cl(n) \to End\, S$ есть неприводимое представление клиффордовой алгебры, причем $n = 4m + 3$. Тогда*

$$\rho(\omega) = \pm Id,$$

причем обе возможности реализуются и получаемые при этом клиффордовы представления не эквивалентны. Аналогичное утверждение выполняется для комплексифицированной алгебры Клиффорда $\mathbb{C}l(n)$ при любом нечетном n.

Доказательство. Представим пространство спиноров S в виде прямой суммы

$$S = S^+ \oplus S^-$$

собственных (±1)-подпространств оператора $\rho(\omega)$. Эти подпространства инвариантны относительно клиффордова умножения, поскольку элемент $\rho(\omega)$ является центральным. Так как представление S неприводимо, то либо $S = S^+$, либо $S = S^-$, что доказывает первое утверждение предложения.

Указанные неприводимые представления не эквивалентны друг другу, поскольку если $\rho(\omega) = \pm\mathrm{Id}$, т.е. кратно Id, то это свойство выполняется и для любого эквивалентного ему представления ρ_1, причем $\rho_1(\omega)$ будет кратно Id с тем же коэффициентом пропорциональности, что и $\rho(\omega)$.

Для того, чтобы убедиться в том, что обе возможности реализуются, достаточно рассмотреть действие алгебры Клиффорда $\mathrm{Cl}(V)$ на $\mathrm{Cl}^{\pm}(V)$ посредством левого умножения.

Доказательство предложения в комплексном случае оставляем в качестве упражнения. □

Прежде, чем переходить к изучению неприводимых представлений клиффордовой алгебры в случае $n = 4m$, докажем следующую лемму, связывающую клиффордову алгебру $\mathrm{Cl}(n-1)$ с четной частью клиффордовой алгебры $\mathrm{Cl}(n)$.

Лемма 16. *Для любого $n > 1$ имеет место изоморфизм алгебр*

$$Cl(n-1) \longrightarrow Cl^{ev}(n).$$

Доказательство. Выберем в пространстве $\mathbb{R}^n$ ортонормированный базис $e_1, \dots, e_{n-1}, e_n$ и обозначим через $\mathbb{R}^{n-1}$ подпространство, натянутое на первые $n-1$ векторов этого базиса.

Рассмотрим отображение $f : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathrm{Cl}^{\mathrm{ev}}(n)$, задаваемое на элементах базиса формулой:

$$f(e_i) = e_n \cdot e_i,\ i = 1, \dots, n-1.$$

Вычислим значение $f(x)^2$ на произвольном элементе $x = \sum_{i=1}^{n-1} x_i e_i$ из пространства $\mathbb{R}^{n-1}$. Имеем

$$f(x)^2 = \left(\sum_i x_i e_n e_i\right) \cdot \left(\sum_j x_j e_n e_j\right) = \sum_{i,j} x_i x_j e_n e_i e_n e_j =$$

$$\sum_{i,j} x_i x_j e_i e_j \text{ (поскольку } e_n e_i = -e_i e_n \text{ и } e_n^2 = -1)$$

$$= x \cdot x = -\|x\|^2 \cdot 1.$$

Поэтому, благодаря универсальному свойству, построенное отображение продолжается до гомоморфизма алгебр

$$f : \mathrm{Cl}(n-1) \longrightarrow \mathrm{Cl}^{\mathrm{ev}}(n).$$

Рассматривая его на элементах базиса, нетрудно убедиться в том, что это отображение является изоморфизмом. □

Предложение 23. *Пусть $\rho : Cl(n) \to End\, S$ есть неприводимое представление клиффордовой алгебры, причем $n = 4m$. Рассмотрим разложение пространства S в прямую сумму полуспинорных подпространств*

$$S = S^+ \oplus S^-.$$

Тогда каждое из подпространств $S^{\pm}$ инвариантно относительно четной части $Cl^{ev}(n)$ клиффордовой алгебры $Cl(n)$. Эти подпространства отвечают двум различным представлениям алгебры $Cl(n-1) \cong Cl^{ev}(n)$.

Аналогичное утверждение выполняется для комплексифицированной алгебры Клиффорда $\mathbb{C}l(n)$ при любом четном n.

Доказательство. Подпространства $S^{\pm}$ инвариантны относительно $\mathrm{Cl}^{\mathrm{ev}}(n)$, поскольку при четном n элемент объема ω коммутирует с любым элементом из $\mathrm{Cl}^{\mathrm{ev}}(n)$. Под действием изоморфизма $\mathrm{Cl}(n-1) \cong \mathrm{Cl}^{\mathrm{ev}}(n)$ из доказанной леммы 16 элемент объема ω' алгебры $\mathrm{Cl}(n-1)$ переходит в элемент объема $\omega \in \mathrm{Cl}^{\mathrm{ev}}(n)$ алгебры $\mathrm{Cl}(n)$. Следовательно, $\rho(\omega') = \mathrm{Id}$ на S^+ и $\rho(\omega') = -\mathrm{Id}$ на S^-. По предыдущему предложению эти представления не эквивалентны друг другу.

Доказательство предложения в комплексном случае оставляем в качестве упражнения. $\square$

Спинорное представление

Определение 62. *Вещественным спинорным представлением* группы $\mathrm{Spin}(n)$ называется гомоморфизм групп

$$\Delta_n : \mathrm{Spin}(n) \longrightarrow \mathrm{GL}(S),$$

полученный сужением неприводимого представления $\rho : \mathrm{Cl}(n) \to \mathrm{End}\, S$ клиффордовой алгебры $\mathrm{Cl}(n)$ на группу $\mathrm{Spin}(n) \subset \mathrm{Cl}^{\mathrm{ev}}(n) \subset \mathrm{Cl}(n)$.

Предложение 24. *При $n = 4m+3$ представление Δ_n неприводимо и не зависит от того, сужением которого из двух неприводимых представлений алгебры $Cl(n)$ оно является.*

При $n = 4m$ представление Δ_{4m} допускает разложение

$$\Delta_{4m} = \Delta_{4m}^{+} \oplus \Delta_{4m}^{-}$$

в прямую сумму двух неэквивалентных неприводимых представлений группы $Spin(n)$.

Доказательство. Если $n = 4m+3$, то автоморфизм градуировки χ меняет слагаемые $\mathrm{Cl}^{+}(n)$ и $\mathrm{Cl}^{-}(n)$ в разложении

$$\mathrm{Cl}(n) = \mathrm{Cl}^{+}(n) \oplus \mathrm{Cl}^{-}(n)$$

местами, поскольку $\chi(\omega) = -\omega$. Следовательно, элементы подалгебры $\mathrm{Cl}^{\mathrm{ev}}(n)$, по определению инвариантные относительно χ, должны иметь вид $(x, \chi(x)) \in \mathrm{Cl}^{+}(n) \oplus \mathrm{Cl}^{-}(n)$, т.е. подалгебра $\mathrm{Cl}^{\mathrm{ev}}(n)$ вложена диагональным образом в $\mathrm{Cl}^{+}(n) \oplus \mathrm{Cl}^{-}(n)$. Так как два неприводимых представления алгебры $\mathrm{Cl}(n)$ отличаются друг от друга на автоморфизм χ, то они становятся эквивалентными при сужении на $\mathrm{Cl}^{\mathrm{ev}}(n)$. Это доказывает первое утверждение предложения.

Если $n = 4m$, то сужение представления алгебры $\mathrm{Cl}(n)$ на четную часть $\mathrm{Cl}^{\mathrm{ev}}(n)$ разлагается в прямую сумму двух неэквивалентных неприводимых представлений. Каждое из этих представлений в свою очередь сужается на группу $\mathrm{Spin}(n)$ как неприводимое из-за того, что $\mathrm{Spin}(n)$ содержит базис алгебры $\mathrm{Cl}^{\mathrm{ev}}(n)$, рассматриваемой как векторное пространство. $\square$

Определение 63. *Комплексным спинорным представлением* группы $\mathrm{Spin}(n)$ называется гомоморфизм групп

$$\Delta_n^c : \mathrm{Spin}(n) \longrightarrow \mathrm{GL}(S, \mathbb{C}),$$

полученный сужением неприводимого представления $\rho : \mathbb{C}\mathrm{l}(n) \to \mathrm{End}\, S$ комплексифицированной клиффордовой алгебры $\mathbb{C}\mathrm{l}(n)$ на группу $\mathrm{Spin}(n) \subset \mathbb{C}\mathrm{l}^{\mathrm{ev}}(n) \subset \mathbb{C}\mathrm{l}(n)$.

Предложение 25. *При нечетном n представление Δ_n^c неприводимо и не зависит от того, сужением которого из неприводимых представлений алгебры $\mathbb{C}l(n)$ оно является.*

При четном $n = 2m$ представление Δ_{2m}^c допускает разложение

$$\Delta_{2m}^c = (\Delta_{2m}^c)^+ \oplus (\Delta_{2m}^c)^-$$

в прямую сумму неэквивалентных неприводимых представлений группы $Spin(n)$.

Доказательство этого предложения аналогично доказательству предыдущего предложения.

Примеры спинорных представлений

1. Представление Δ_3 имеет размерность 2, что дает гомоморфизм (зависящий от выбора ортонормированного базиса)

   $$\mathrm{Spin}(3) \longrightarrow \mathrm{SU}(2),$$

   который является изоморфизмом по соображениям размерности, т.е. $\mathrm{Spin}(3) \cong \mathrm{SU}(2)$.

2. Оба представления $\Delta_4^\pm$ являются 2-мерными. Как и в предыдущем случае, представление $\Delta_4^+ \oplus \Delta_4^-$ задает изоморфизм

   $$\mathrm{Spin}(4) \cong \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2).$$

Спинорное представление в комплексном случае

Пусть V есть $(n = 2m)$-мерное евклидово векторное пространство, отождествляемое с m-мерным комплексным векторным пространством. Будем предполагать, что это пространство является кэлеровым, т.е. на нем также задано эрмитово скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$, совместимое с евклидовым. Обозначим через V^* пространство, эрмитово двойственное к V. Его комплексификация $V_{\mathbb{C}}^* = V^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ представляется в виде: $V_{\mathbb{C}}^* = V^{1,0} \oplus V^{0,1}$. Поэтому для каждого вектора $v \in V$ двойственный к нему ковектор v^* допускает разложение вида

$$v^* = v^{1,0} + v^{0,1}.$$

Построим каноническое представление клиффордовой алгебры $\mathrm{Cl}(n)$ в пространстве

$$S_{\mathrm{can}} := \Lambda^{0,*} V^* = \bigoplus_{q=0}^{m} \Lambda^{0,q}(V^*).$$

Представление $\rho_{\mathrm{can}} : V \to \mathrm{End}\, S_{\mathrm{can}}$ в этом пространстве определяется формулой

$$\rho_{\mathrm{can}}(v)\eta = v^{0,1} \wedge \eta - v^{0,1} \lrcorner\, \eta,$$

где $v \in V, \eta \in \Lambda^{0,q}(V^*)$. Можно проверить, что

$$\rho_{\mathrm{can}}(v) \circ \rho_{\mathrm{can}}(v)\eta = -\|v\|^2 \eta,$$

поэтому по универсальному свойству отображение $\rho_{\text{can}} : V \to \operatorname{End} S_{\text{can}}$ продолжается до представления клиффордовой алгебры

$$\rho_{\text{can}} : \mathrm{Cl}(n) \longrightarrow \operatorname{End} S_{\text{can}}.$$

Полуспинорные пространства при этом совпадают с

$$S^+_{\text{can}} = \Lambda^{0,\text{ev}}(V^*), \quad S^-_{\text{can}} = \Lambda^{0,\text{od}}(V^*).$$

3.2 Спинорная геометрия

В п.3.2.1 вводится ключевое понятие спинорной структуры на векторном расслоении. Его частным случаем является понятие спин-многообразия в случае, когда в качестве векторного расслоения берется касательное расслоение риманова многообразия. Глобализуя соответствующие определения из спинорной алгебры, мы приходим к понятиям спинорных и клиффордовых расслоений.

Следующий важный объект спинорной геометрии — спинорные связности, определяемые в п.3.2.2, частным случаем которых являются римановы связности. Наиболее важным примером римановых связностей является связность Леви-Чивита. Приводятся формулы для вычисления кривизны введенных связностей.

Главный объект спинорной дифференциальной геометрии — это оператор Дирака. Его определение и основные свойства собраны в п.3.2.3. В частноти, доказывается самосопряженность этого оператора и приводятся классические примеры.

Заключительный п.3.2.4 посвящен Spin^c-структурам на ориентированных римановых расслоениях. В частном случае, когда такое расслоение совпадает с касательным расслоением ориентированного риманова многообразия, говорят о Spin^c-структуре этого многообразия. Важность понятия Spin^c-структуры заключается в том, что эту структуру (в отличие от спинорной) можно ввести на любом 4-мерном ориентированном многообразии.

3.2.1 Спинорные структуры

Спинорные структуры на векторных расслоениях

Пусть $p : E \to M$ есть вещественное векторное расслоение ранга n над гладким компактным ориентируемым римановым многообразием M. Мы будем предполагать, что это расслоение *риманово*, т.е. в каждом его слое E_x, $x \in M$, задано положительно определенное скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$, гладко зависящее от точки $x \in M$.

Кроме того, предположим, что E *ориентируемо* , т.е. в каждом его слое E_x задана ориентация, гладко зависящая от точки $x \in M$. В отличие от римановой структуры, существующей на любом гладком векторном расслоении, для ориентируемости E необходимо выполнение следующего топологического условия.

Предложение 26. *Расслоение $p : E \to M$ ориентируемо тогда и только тогда, когда его 1-й класс Штифеля–Уитни $w_1(E) = 0$.*

Доказательство см. в [7], II.1, теорема 1.2. Основные сведения о характеристических классах можно найти в книге [8].

Итак, пусть $p : E \to M$ есть ориентируемое риманово векторное расслоение ранга $n \geq 2$ и $P_{\mathrm{SO}}(E)$ – расслоение ориентированных ортонормированных базисов (кратко: реперов) в слоях E.

Определение 64. *Спинорной структурой* на векторном расслоении $p : E \to M$ называется главное $\mathrm{Spin}(n)$-расслоение $P_{\mathrm{Spin}}(E)$ вместе с двукратным накрывающим отображением расслоений

$$\Pi : P_{\mathrm{Spin}}(E) \longrightarrow P_{\mathrm{SO}}(E),$$

которое Spin-*эквивариантно* в том смысле, что

$$\Pi(sg) = \Pi(s)\pi(g)$$

для любых $s \in P_{\mathrm{Spin}}(E), g \in \mathrm{Spin}(n)$. При этом действие группы $\mathrm{Spin}(n)$ на $P_{\mathrm{SO}}(E)$ задается гомоморфизмом $\pi : \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{SO}(n)$.

Приведенное определение можно переписать в виде следующей коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} P_{\mathrm{Spin}}(E) \arrow[rr, "\Pi"] \arrow[dr] & & P_{\mathrm{SO}}(E) \arrow[dl] \\ & M & \end{tikzcd}$$

в которой ограничение отображения Π на слои совпадает с гомоморфизмом π.

Предложение 27. *Спинорная структура на векторном расслоении $p : E \to M$ существует тогда и только тогда, когда 2-й класс Штифеля–Уитни $w_2(E) = 0$. При выполнении этого условия различные спинорные структуры на E нумеруются элементами группы когомологий $H^1(M, \mathbb{Z}_2)$.*

Доказательство предложения см. в [7], II.1, теорема 1.7.

Определение 65. Ориентируемое риманово многообразие M называется *спинорным* или, короче, *спин-многообразием*, если его касательное расслоение TM допускает спинорную структуру.

Примеры спин-многообразий

1. Комплексное многообразие M является спинорным тогда и только тогда, когда его 1-й класс Черна является четным, т.е. $c_1(M) \equiv 0 \bmod 2$. Этот факт вытекает из соотношения $w_2(M) \equiv c_1(M) \bmod 2$.

2. Комплексное проективное пространство $\mathbb{CP}^n$ является спинорным тогда и только тогда, когда n нечетно.

3. Пусть Σ_g есть компактная риманова поверхность рода g. Тогда на ней существует 2^{2g} различных спинорных структур.

Спинорные и клиффордовы расслоения

Напомним, прежде всего, общую конструкцию *ассоциированного расслоения*. Пусть $\pi : P \to M$ есть (правое) главное G-расслоение над многообразием M и F – другое гладкое многообразие, на котором имеется гладкое (левое) действие группы G, т.е. гомоморфизм $\rho : G \to \mathrm{Diff}(F)$. Тогда можно построить новое расслоение $P \times_\rho F$ со слоем F и структурной группой G.

Для этого рассмотрим левое действие группы G на произведении $P \times F$, задаваемое формулой:
$$g(s,f) := (sg^{-1}, \rho(g)f),$$
где $s \in P, f \in F, g \in G$. Фактор $P \times F$ по этому действию обозначается через $P \times_\rho F$, его элементами являются орбиты $[s,f]$ элементов $(s,f) \in P \times F$ относительно указанного действия группы G. Проекция $\pi_\rho : P \times_\rho F \to M$ определяется формулой: $\pi_\rho([s,f]) := \pi(s)$.

Если $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ – линейное представление группы G в векторном пространстве V, то ассоциированное расслоение $P \times_\rho F$ является векторным расслоением над M.

Пример 22. Пусть M есть ориентируемое риманово многообразие размерности n и $P = P_{\mathrm{SO}}(M)$ – главное $\mathrm{SO}(n)$-расслоение реперов на M. Обозначим через ρ стандартное действие группы $\mathrm{SO}(n)$ на пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда
$$TM = P_{\mathrm{SO}}(M) \times_\rho \mathbb{R}^n.$$
Более общим образом, если $E \to M$ есть ориентируемое риманово векторное расслоение над M, то
$$E = P_{\mathrm{SO}}(E) \times_\rho \mathbb{R}^n.$$

Вернемся к клиффордовым алгебрам. Каждое ортогональное преобразование пространства $V = \mathbb{R}^n$ порождает автоморфизм алгебры Клиффорда $\mathrm{Cl}(n)$. Действительно, такое преобразование отображает тензорную алгебру $\mathcal{T}(V)$ в себя и сохраняет идеал $\mathcal{J}(V)$, определяющий клиффордову алгебру, а потому спускается на клиффордову алгебру $\mathrm{Cl}(n)$. Тем самым, у нас имеется представление
$$\mathrm{cl} : \mathrm{SO}(n) \longrightarrow \mathrm{Aut}\,\mathrm{Cl}(n).$$

Определение 66. Пусть $E \to M$ есть ориентируемое риманово векторное расслоение. Его *клиффордовым расслоением* называется расслоение вида
$$\mathrm{Cl}(E) := P_{\mathrm{SO}}(E) \times_{\mathrm{cl}} \mathrm{Cl}(n).$$

Иными словами, $\mathrm{Cl}(E)$ есть расслоение клиффордовых алгебр, построенных по расслоению E евклидовых пространств. Поэтому все конструкции, построенные нами для клиффордовых алгебр, переносятся и на клиффордовы расслоения. В частности, на $\mathrm{Cl}(V)$ можно ввести естественное скалярное произведение.

Определение 67. Пусть E – ориентируемое риманово векторное расслоение, наделенное спинорной структурой $\Pi : P_{\mathrm{Spin}}(E) \to P_{\mathrm{SO}}(E)$, а $\Delta_n : \mathrm{Spin}(n) \to$

$\mathrm{GL}(S)$ – вещественное спинорное представление. *Вещественным спинорным расслоением* над E называется расслоение вида

$$S(E) := P_{\mathrm{Spin}}(E) \times_{\Delta_n} S.$$

Если же $\Delta_n^c : \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{GL}(S^c, \mathbb{C})$ есть комплексное спинорное представление, то расслоение

$$S^c(E) := P_{\mathrm{Spin}}(E) \times_{\Delta_n^c} S^c$$

называется *комплексным спинорным расслоением*.

В дальнейшем мы будем предполагать, что S и S^c наделены эрмитовой структурой.

Имея определение спинорных расслоений, мы можем ввести полуспинорные расслоения. Для этого рассмотрим сечение ω^c расслоения $\mathbb{C}\mathrm{l}(E)$ ранга $n = 2m$, задаваемое в точке $x \in M$ формулой

$$\omega^c = i^m e_1 \cdot \ldots \cdot e_{2m}$$

в терминах ортонормированного базиса $\{e_j\}$ пространства E_x. Тогда $(\omega^c)^2 = 1$ и мы можем определить *полуспинорные расслоения* $S^c_\pm(E)$ как собственные (± 1)-подрасслоения оператора клиффордова умножения на ω^c. Тем самым,

$$S^c_\pm(E) = P_{\mathrm{Spin}}(E) \times_{(\Delta^c_{2m})^\pm} S^c.$$

При $n = 4m$ аналогичная конструкция имеется и в вещественном случае. А именно, пусть ω есть сечение расслоения $\mathrm{Cl}(E)$, задаваемое формулой

$$\omega = e_1 \cdot \ldots \cdot e_{4m}$$

в терминах ортонормированного базиса $\{e_j\}$ пространства E_x. Тогда $\omega^2 = 1$ и имеется разложение

$$S(E) = S_+(E) \oplus S_-(E)$$

в прямую сумму собственных (± 1)-подрасслоений оператора клиффордова умножения на ω.

3.2.2 Спинорные связности

В этом параграфе мы приводим краткое изложение теории связностей, более подробное изложение и доказательства приведенных результатов можно найти в книге [7].

Связности в главных расслоениях

Пусть $\pi : P \to M$ есть главное G-расслоение над гладким многообразием M размерности n. Обозначим через V распределение в касательном расслоении TP, образованное касательными пространствами V_p к слоям расслоения P в точках $p \in P$: $V_p = \{v \in P_p : \ \pi_*(v) = 0\}$. Подпространство V_p называется *вертикальным подпространством* в точке p.

Заметим, что для любого главного расслоения $\pi : P \to M$ имеется гомоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G в алгебру Ли $\mathrm{Vect}(P)$ гладких векторных полей на P, задаваемый правым действием группы G на P. Именно, элементу ξ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ отвечает векторное поле X, задаваемое в точке $p \in P$ формулой

$$X_p = p_*(\xi) := \frac{d}{dt}\left(p \cdot \exp(t\xi)\right)|_{t=0}.$$

Получаемые таким образом векторные поля X вертикальны и, более того, для любого $v \in V_p$ найдется векторное поле X указанного типа такое, что $X_p = v$. Иными словами, сопоставление $\mathfrak{g} \ni \xi \mapsto X_p \in V_p$ позволяет отождествить вертикальное подпространство V_p с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$.

Определение 68. *Связностью* в главном расслоении $\pi : P \to M$ называется гладкое распределение $H : P \ni p \to H_p$ подпространств $H_p \subset T_pP$, называемых *горизонтальными*, обладающее следующими свойствами:

1) касательное отображение $\pi_* : H_p \to T_{\pi(p)}M$ является изоморфизмом векторных пространств для любого $p \in P$;

2) распределение H является G-инвариантным, т.е. $g_*H_p = H_{pg}$ для любых $p \in P$, $g \in G$, где через g_* обозначено отображение, касательное к правому действию g на P.

Иными словами, касательное пространство T_pP в каждой точке $p \in P$ допускает разложение $T_pP = V_p \oplus H_p$ в прямую сумму вертикального и горизонтального подпространств, т.е. связность представляет собой G-инвариантный способ выбора распределения H, дополнительного к вертикальному распределению V.

В каждой точке $p \in P$ горизонтальное подпространство H_p задает проекцию $T_pP \to V_p$ параллельно H_p. Пользуясь построенным выше изоморфизмом $V_p \cong \mathfrak{g}$, построим линейное отображение $\omega_p : T_pP \to \mathfrak{g}$. Оно определяет 1-форму ω на P со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Указанная 1-форма ω называется *формой связности* на P и обладает следующими свойствами:

1) форма ω *вертикальна*, т.е. обращается в нуль на горизонтальных векторах;

2) для любого элемента $\xi \in \mathfrak{g}$ справедливо равенство:

$$\omega(X_p) = \xi$$

для любого $p \in P$, где $X_p = p_*(\xi)$;

3) форма ω *эквивариантна* в том смысле, что $g_*(\omega) = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\omega$.

По любой гладкой 1-форме ω, обладающей указанными свойствами, можно восстановить связность H, полагая:

$$H_p := \mathrm{Ker}\, \omega_p\,.$$

Определение 69. *Кривизной* связности H в главном расслоении $\pi : P \to M$ называется гладкая 2-форма Ω на P со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, определяемая равенством:

$$\Omega = d\omega + [\omega, \omega].$$

Эта форма горизонтальна, т.е. зануляется на любой паре векторов, из которых хотя бы один вертикален, и эквивариантна, т.е. под действием элементов $g \in G$ она преобразуется по формуле:

$$g_*\Omega = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\Omega.$$

Римановы связности

Пусть $P_{\mathrm{SO}}(E)$ – главное $\mathrm{SO}(n)$-расслоение реперов (ориентированных ортонормированных базисов) ориентированного риманова векторного расслоения E ранга n над ориентированным римановым многообразием M. Алгебра Ли $\mathrm{so}(n)$ группы Ли $\mathrm{SO}(n)$ совпадает с пространством вещественных кососимметрических $(n \times n)$-матриц, поэтому форму связности ω на этом расслоении можно рассматривать как $(n \times n)$-матрицу $\omega = (\omega_{ij})$, составленную из 1-форм ω_{ij}, удовлетворяющих соотношению: $\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0$.

Кривизна Ω в этом случае будет задаваться матрицей $\Omega = (\Omega_{ij})$, составленной из 2-форм вида

$$\Omega_{ij} = d\omega_{ij} + \sum_{k=1}^{n} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj},$$

а отображение Ad действует по формуле: $\mathrm{Ad}_g\omega = g\omega g^{-1}$.

Определение 70. *Ковариантной производной* на E называется линейное отображение

$$\nabla : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(T^*M \otimes E),$$

удовлетворяющее правилу Лейбница:

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s$$

для любых $f \in C^\infty(M)$, $s \in \Gamma(E)$.

Если X – гладкое касательное векторное поле на M, то спаривание с X порождает линейное отображение

$$\nabla_X : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E),$$

называемое *ковариантной производной вдоль* X.

Пусть ω есть форма связности на $P_{\mathrm{SO}}(E)$ и $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ – локальный ортонормированный базис сечений расслоения E в окрестности U точки $x^0 \in M$. Тогда e задает локальное сечение

$$e : U \longrightarrow P_{\mathrm{SO}}(E)$$

расслоения $P_{\mathrm{SO}}(E)$ над окрестностью U. Двойственное касательное отображение

$$e^* : T^*(P_{\mathrm{SO}}(E)) \longrightarrow T^*U$$

позволяет перенести форму связности $\omega = (\omega_{ij})$ на U, полагая:

$$\tilde{\omega} := e^*\omega.$$

С учетом этого замечания справедливо следующее

Предложение 28. *Пусть ω есть форма связности на расслоении $P_{SO}(E)$. Тогда она определяет единственным образом ковариантную производную ∇ на расслоении E, задаваемую в терминах локального ортонормированного базиса сечений расслоения E формулой*

$$\nabla e_i = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\omega}_{ij} \otimes e_j, \tag{3.1}$$

в которой $\tilde{\omega} = e^*\omega$.

Эта ковариантная производная согласована с римановой структурой на E в том смысле, что

$$X\langle s, s'\rangle = \langle \nabla_X s, s'\rangle + \langle s, \nabla_X s'\rangle$$

для любых гладких касательных векторных полей X и любых гладких сечений $s, s' \in \Gamma(E)$, где $\langle \cdot\,, \cdot\rangle$ обозначает скалярное произведение на E.

Указанная ковариантная производная называется римановой.

Обратно, любая ковариантная производная ∇ на E, согласованная с римановой структурой, задает единственную связность с формой связности ω на $P_{SO}(E)$, определяемой формулой (3.1).

Доказательство см. в [7], II.4, предложение 4.4.

Пусть ∇ есть ковариантная производная на расслоении E. Рассмотрим композицию

$$\Gamma(E) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(T^*M \otimes E) \xrightarrow{\tilde{\nabla}} \Gamma(\Lambda^2(T^*M) \otimes E),$$

где $\tilde{\nabla}$ есть естественное продолжение ковариантной производной ∇ на сечения расслоения $T^*M \otimes E$ вида $\eta \otimes s$, где η – 1-форма на M, а s – сечение E. Это продолжение определяется формулой

$$\tilde{\nabla}(\eta \otimes s) := d\eta \otimes s - \eta \wedge \nabla s.$$

Композиция $R := \tilde{\nabla} \circ \nabla$ называется *римановой кривизной.*

Предложение 29. *В обозначениях из предложения 28 обозначим через $\Omega = (\Omega_{ij})$ кривизну формы связности ω. Тогда в терминах локального ортонормированного базиса сечений расслоения E риманова кривизна будет задаваться формулой*

$$Re_i = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\Omega}_{ij} \otimes e_j,$$

где $\tilde{\Omega} = (\tilde{\Omega}_{ij})$ и $\tilde{\Omega} = e^*\Omega$. Для любых гладких касательных векторных полей X, Y на M будем иметь

$$R_{X,Y}s = (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]})s.$$

Отображение $R_{X,Y} : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$, называемое преобразованием кривизны, обладает следующим свойством симметрии:

$$\langle R_{X,Y}s, s'\rangle + \langle s, R_{X,Y}s'\rangle = 0.$$

Доказательство см. в [7], II.4, предложения 4.5, 4.6.

Связности в клиффордовых и спинорных расслоениях

Построение связностей в клиффордовых расслоениях основано на следующей конструкции.

Пусть $\pi : P = P_G \to M$ есть главное G-расслоение над многообразием M. Предположим, что задано точное представление $\rho : G \to \mathrm{SO}(n)$ группы G в пространстве $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $E = E_\rho$ риманово векторное расслоение над M, ассоциированное с P. Иными словами:

$$E = E_\rho = P \times_\rho \mathbb{R}^n.$$

Тогда по заданной связности H на расслоении P можно построить индуцированную каноническую связность H_ρ на главном расслоении

$$P(E) = P(E_\rho) = P \times_\rho \mathrm{SO}(n),$$

где группа G действует слева на $\mathrm{SO}(n)$ посредством гомоморфизма ρ.

Чтобы построить искомую связность H_ρ на $P(E)$, продолжим заданную связность H на расслоении P тривиальным образом на прямое произведение $P \times \mathrm{SO}(n)$, а затем спустим полученную связность на $P \times_\rho \mathrm{SO}(n)$, пользуясь инвариантностью связности H. Это определяет связность H_ρ на расслоении $P(E_\rho)$.

Заметим далее, что имеется каноническое G-эквивариантное отображение $i : P \to P(E)$, задаваемое формулой $i : P \ni p \longmapsto [p, \mathrm{Id}]$, где $[p, h]$ обозначает класс пары $(p, h) \in P \times \mathrm{SO}(n)$ в факторе $P \times_\rho \mathrm{SO}(n)$. Это отображение является вложением ввиду точности представления ρ.

Предложение 30. *Пусть ω есть форма связности H на расслоении P_G с кривизной Ω. Обозначим через ω_ρ форму индуцированной связности H_ρ на расслоении $P(E_\rho)$ с кривизной Ω_ρ. Тогда*

$$\omega_\rho|_P = \rho_* \omega, \quad \Omega_\rho|_P = \rho_* \Omega,$$

где $\rho_* : \mathfrak{g} \to so(n)$ есть гомоморфизм алгебр Ли, касательный к представлению $\rho : G \to SO(n)$.

Доказательство см. в [7], II.4, предложение 4.7.

Применим приведенную конструкцию к клиффордовым расслоениям. Пусть $E \to M$ есть ориентируемое риманово расслоение ранга n, наделенное римановой связностью. Напомним, что клиффордово расслоение $\mathrm{Cl}(E)$ есть расслоение, ассоциированное с главным $\mathrm{SO}(n)$-расслоением $P_{\mathrm{SO}}(E)$ посредством гомоморфизма $\mathrm{cl} : \mathrm{SO}(n) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Cl}(n))$, т.е.

$$\mathrm{Cl}(E) = P_{\mathrm{SO}}(E) \times_{\mathrm{cl}} \mathrm{Cl}(n).$$

Поэтому, в соответствии с изложенной выше конструкцией, заданная риманова связность на E порождает каноническим образом связность на клиффордовом расслоении $\mathrm{Cl}(E)$. Ковариантная производная, отвечающая этой связности, обладает следующим характеристическим свойством.

Предложение 31. *Ковариантная производная ∇ построенной связности на клиффордовом расслоении $Cl(E)$ действует как дифференцирование сечений клиффордова расслоения, т.е.*

$$\nabla(\sigma \cdot \tau) = (\nabla\sigma) \cdot \tau + \sigma \cdot (\nabla\tau)$$

для любых сечений $\sigma, \tau \in \Gamma(Cl(E))$.

Заметим, что при каноническом отождествлении $\mathrm{Cl}(E)$ с расслоением $\Lambda^*(E)$ ковариантной производной ∇ будет отвечать дифференцирование $\Lambda^*(E)$, сохраняющее подрасслоения $\Lambda^k(E)$. Отсюда, в частности, вытекает, что ∇ сохраняет также подрасслоения $\mathrm{Cl}^{\mathrm{ev}}(E)$ и $\mathrm{Cl}^{\mathrm{od}}(E)$, а элемент объема $\omega = e_1 \cdot \ldots \cdot e_n$ параллелен относительно ∇, т.е. $\nabla\omega = 0$. Отсюда следует, что при $n \equiv 3, 4 \bmod 4$ подрасслоения $\mathrm{Cl}^{\pm}(E)$ также сохраняются производной ∇.

Доказательство этих утверждений и следующего предложения можно найти в [7], II.4, предложения 4.8, 4.10.

Предложение 32. *Для любой пары касательных векторных полей X, Y в окрестности точки $x \in M$ преобразование кривизны*

$$R_{X,Y} : Cl(E_x) \longrightarrow Cl(E_x)$$

является дифференцированием, т.е.

$$R_{X,Y}(\sigma \cdot \tau) = R_{X,Y}(\sigma) \cdot \tau + \sigma \cdot R_{X,Y}(\tau)$$

для любых сечений $\sigma, \tau \in Cl(E_x)$.

Это преобразование также сохраняет подпространства $\mathrm{Cl}^{\mathrm{ev}}(E_x)$, $\mathrm{Cl}^{\mathrm{od}}(E_x)$ и $\mathrm{Cl}^{\pm}(E_x)$.

Предположим теперь, что расслоение E наделено спинорной структурой, т.е. задан эпиморфизм расслоений

$$\Pi : P_{\mathrm{Spin}}(E) \longrightarrow P_{\mathrm{SO}}(E).$$

Рассмотрим ассоциированное спинорное расслоение

$$S(E) = P_{\mathrm{Spin}}(E) \times_{\Delta_n} S,$$

построенное с помощью спинорного представления $\Delta_n : \mathrm{Spin}(n) \to S$. Тогда связность на расслоении $P_{\mathrm{SO}}(E)$ поднимается с помощью эпиморфизма Π до связности на расслоении $P_{\mathrm{Spin}}(E)$. Полученная связность в свою очередь порождает каноническим образом связность на спинорном расслоении $S(E)$. Для нее выполняются аналоги предложений 31 и 32.

Ковариантную производную построенной связности и ее кривизну можно вычислить явно в терминах локального ортонормированного базиса сечений расслоения $P_{\mathrm{SO}}(E)$. Приведем формулировку этого результата, отсылая за его доказательством к [7], II.4, теоремы 4.14, 4.15.

Предложение 33. *Пусть ω есть форма связности на расслоении $P_{SO}(E)$ и $S(E)$ – спинорное расслоение, ассоциированное с E. Тогда ковариантная производная связности на $S(E)$, построенной по связности ω, задается в терминах локального ортонормированного базиса $e = \{e_i\}$ сечений расслоения E формулой*

$$\nabla s_k = \frac{1}{2}\sum_{i<j} \tilde{\omega}_{ij} \otimes e_i e_j \cdot s_k,$$

где $s = \{s_k\}$ – локальное сечение расслоения $P_{SO}(S(E))$, определяемое сечением e, а $\tilde{\omega} = e^*\omega$.

Если Ω есть форма кривизны связности ω, то кривизна R спинорной связности ∇ на $S(E)$ задается формулой

$$Rs = \frac{1}{2}\sum_{i<j} \tilde{\Omega}_{ij} \otimes e_i e_j \cdot s,$$

где s – сечение расслоения $S(E)$, а $\tilde{\Omega} = e^*\Omega$. В частности, для любой пары касательных векторных полей X, Y в окрестности точки $x \in M$ преобразование кривизны

$$R_{X,Y} : S(E_x) \longrightarrow S(E_x)$$

задается формулой

$$R_{X,Y}s = \frac{1}{2}\sum_{i<j} \langle R_{X,Y}(e_i), e_j\rangle e_i e_j \cdot s.$$

В случае, когда $E = TM$, обозначим $P_{\mathrm{SO}}(M) := P_{\mathrm{SO}}(TM)$ и $\mathrm{Cl}(M) := \mathrm{Cl}(TM)$. Если на расслоении $P_{\mathrm{SO}}(M)$ имеется связность ∇, то по ней можно построить тензорное поле T, сопоставляющее паре касательных векторных полей X, Y в окрестности точки $x \in M$ величину

$$T_{X,Y} := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y],$$

называемую *тензором кручения* связности ∇. Тензор T задает 2-форму на многообразии M со значениями в касательном расслоении TM.

Теорема 16. *Пусть M – риманово многообразие и $P_{SO}(M)$ – расслоение реперов на TM. Тогда на $P_{SO}(M)$ существует единственная связность, тензор кручения которой равен нулю.*

Эта связность называется *канонической римановой связностью* или *связностью Леви-Чивита* на M. Она индуцирует каноническую связность на клиффордовом расслоении $\mathrm{Cl}(M)$. В случае, когда M допускает спинорную структуру, эта связность индуцирует также каноническую риманову связность на расслоении $P_{\mathrm{Spin}}(M)$ и, следовательно, на любом спинорном расслоении, ассоциированном с $P_{\mathrm{Spin}}(M)$.

Тензор кривизны R канонической римановой связности на M обладает следующими свойствами симметрии:

$$R_{X,Y}Z + R_{Y,Z}X + R_{Z,X}Y = 0,$$
$$\langle R_{X,Y}Z, U\rangle = \langle R_{Z,U}X, Y\rangle$$

для любых касательных векторных полей X, Y, Z, U в окрестности точки $x \in M$.

3.2.3 Оператор Дирака

Основные определения

Пусть M есть ориентируемое риманово многообразие. Пользуясь римановой метрикой, можно, в частности, отождествить касательное пространство T_xM с кокасательным пространством T_x^*M в каждой точке $x \in M$. Обозначим через $\mathrm{Cl}(M)$ клиффордово расслоение над M. Предположим, что задано расслоение S клиффордовых модулей над M, так что каждый его слой S_x является модулем над клиффордовой алгеброй $\mathrm{Cl}(T_xM)$. Будем предполагать также, что S риманово и наделено римановой связностью ∇. Обозначим через $\rho : \Gamma(\mathrm{Cl}(M)) \otimes S \to S$ отображение клиффордова умножения на S.

Определение 71. *Оператором Дирака* на S, порожденным связностью ∇, называется линейный дифференциальный оператор $D : \Gamma(S) \to \Gamma(S)$ вида

$$\Gamma(S) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(T^*M \otimes S) \xrightarrow{j\otimes 1} \Gamma(\mathrm{Cl}(M) \otimes S) \xrightarrow{\rho} \Gamma(S),$$

где вложение j порождается отождествлением $\Lambda(T^*M) = \Lambda(TM)$ с $\mathrm{Cl}(TM)$.

В терминах локального ортонормированного базиса $\{e_1, \dots, e_n\}$ расслоения TM оператор Дирака D задается формулой

$$Ds = \sum_{j=1}^{n} e_j \cdot \nabla_{e_j} s,$$

где $s \in \Gamma(S)$. Оператор D^2 называется *лапласианом Дирака*.

Лемма 17. *Пусть $f \in C^\infty(M)$ есть гладкая функция на M, рассматриваемая как оператор умножения на сечения из $\Gamma(S)$. Тогда*

$$[D, f] = \rho(df).$$

Доказательство. Так как умножение на f коммутирует с клиффордовым умножением, то для любого $s \in \Gamma(S)$ будем иметь

$$[D, f]s = \rho\nabla(fs) - f\rho(\nabla s) = \rho(df \otimes s) = \rho(df)s.$$

□

Напомним, что *главным символом* дифференциального оператора $\mathcal{D} : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$, задаваемого в локальных координатах x в окрестности точки $x^0 \in M$ формулой

$$\mathcal{D} = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha},$$

называется отображение, сопоставляющее каждому $x \in M$ и каждому ковектору $\xi = \sum \xi_j dx_j \in T_x^*M \setminus \{0\}$ линейное отображение $\sigma_\xi(\mathcal{D}) : E_x \to E_x$ вида

$$\sigma_\xi(\mathcal{D}) = i^m \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha(x) \xi^\alpha.$$

Оператор $\mathcal{D}$ называется *эллиптическим*, если отображение $\sigma_\xi(\mathcal{D}) : E_x \to E_x$ невырождено для любых $x \in M$ и $\xi \in T_x^*M \setminus \{0\}$.

Лемма 18. *Для любого $\xi \in T_x^*M \setminus \{0\}$ главные символы оператора Дирака и лапласиана Дирака равны*

$$\sigma_\xi(D) = i\xi \quad \text{и} \quad \sigma_\xi(D^2) = \|\xi\|^2,$$

где оба оператора действуют на S с помощью клиффордова умножения. В частности, оба оператора D и D^2 являются эллиптическими.

Доказательство. Фиксируем точку $x^0 \in M$ и локальный репер $\{e_1, \dots, e_n\}$ расслоения TM в окрестности точки x^0. Выберем локальные координаты в окрестности x^0 так, чтобы $x^0 = 0$ и $e_j = \partial/\partial x_j$ в точке x^0. Тогда для любой локальной тривиализации расслоения S в окрестности x^0 ковариантная производная ∇_{e_j} в окрестности точки x^0 будет записываться в виде

$$\nabla_{e_j} = \partial/\partial x_j + \text{ члены 0-го порядка},$$

а оператор Дирака будет иметь вид

$$D = \sum_j e_j \partial/\partial x_j + \text{ члены 0-го порядка}.$$

Поэтому для любого ковектора $\xi = \sum \xi_j dx_j \in T_x^*M \setminus \{0\}$ в окрестности точки x^0 справедливы соотношения

$$\sigma_\xi(D) = i \sum_j e_j \xi_j = i\xi,$$
$$\sigma_\xi(D^2) = \sigma_\xi(D)^2 = -\xi \cdot \xi = \|\xi\|^2.$$

□

Общие свойства

Наложим теперь на расслоение клиффордовых модулей S некоторые дополнительные естественные условия.

Во-первых, будем считать, что расслоение S наделено римановой структурой, согласованной с клиффордовым умножением в том смысле, что клиффордово умножение на единичные векторы из TM является ортогональным преобразованием S, так что для любого $x \in M$ выполняется соотношение

$$\langle es_1, es_2 \rangle = \langle s_1, s_2 \rangle \qquad (3.2)$$

для любого единичного вектора $e \in T_xM$ и любых сечений $s_1, s_2 \in \Gamma(S)$ в точке x.

Кроме того, будем предполагать, что расслоение S наделено клиффордовой связностью ∇, удовлетворяющей следующему правилу Лейбница

$$\nabla(\sigma \cdot s) = (\nabla\sigma) \cdot s + \sigma \cdot (\nabla s),$$

где $\sigma \in \Gamma(\mathrm{Cl}(M))$, $s \in \Gamma(S)$, а под $\nabla\sigma$ понимается действие канонической римановой связности на клиффордовом расслоении.

Расслоения S клиффордовых модулей, обладающие указанными свойствами, будем для краткости именовать *дираковскими*.

Введем на S *скалярное произведение*, задаваемое формулой

$$(s_1, s_2) := \int_M \langle s_1, s_2 \rangle \, \mathrm{vol},$$

где $s_1, s_2 \in \Gamma(S)$, vol – форма объема на M.

Предложение 34. *Оператор Дирака D на дираковском расслоении S формально самосопряжен, т.е.*

$$(Ds_1, s_2) = (s_1, Ds_2)$$

для любых гладких сечений $s_1, s_2 \in C^\infty(S)$ с компактными носителями на M.

Доказательство. Фиксируем точку $x^0 \in M$ и локальный репер $\{e_1, \dots, e_n\}$ расслоения TM в окрестности точки x^0, такой что $\nabla_{e_i} e_j = 0$ в точке x^0. (Такой репер можно построить, выбирая его сначала в точке x^0 и затем продолжая в окрестность x^0 с помощью параллельного переноса вдоль геодезических с началом в x^0.) Тогда вычисление в точке x^0 будет давать:

$$\begin{aligned}
\langle Ds_1, s_2 \rangle = \sum_j \langle e_j \nabla_{e_j} s_1, s_2 \rangle = \ & \text{(формула (3.2))} \\
-\sum_j \langle \nabla_{e_j} s_1, e_j \cdot s_2 \rangle = \ & \text{(совместимость с римановой структурой)} \\
-\sum_j \left\{ e_j \langle s_1, e_j \cdot s_2 \rangle - \langle s_1, (\nabla_{e_j} e_j) s_2 \rangle - \langle s_1, e_j \nabla_{e_j} s_2 \rangle \right\} = & \\
-\sum_j e_j \langle s_1, e_j \cdot s_2 \rangle + \langle s_1, Ds_2 \rangle. &
\end{aligned}$$

Введем векторное поле X, определяемое равенством:

$$\langle X, Y \rangle = -\langle s_1, Y s_2 \rangle$$

для произвольного касательного векторного поля Y. В терминах этого векторного поля мы можем переписать первый член в последней формуле из выписанной выше цепочки равенств в виде

$$\begin{aligned}
-\sum_j e_j \langle s_1, e_j \cdot s_2 \rangle = -\sum_j e_j \langle X, e_j \rangle = \ & \text{(добавляя нулевой член } -\sum_j \langle X, \nabla_{e_j} e_j \rangle\text{)} \\
\sum_j \left\{ e_j \langle X, e_j \rangle - \langle X, \nabla_{e_j} e_j \rangle \right\} = \ & \text{(совместимость с римановой структурой)} \\
\sum_j \langle \nabla_{e_j} X, e_j \rangle =: \operatorname{div} X. &
\end{aligned}$$

Тем самым, мы установили, что

$$\langle Ds_1, s_2 \rangle = \operatorname{div} X + \langle s_1, Ds_2 \rangle.$$

Ввиду компактности носителей s_1, s_2 первый член справа исчезает при интегрировании по M и мы получаем требуемое утверждение. □

Замечание 14. В случае многообразия M с границей ∂M предыдущее рассуждение дает следующую *формулу Стокса*

$$(Ds_1, s_2) - (s_1, Ds_2) = \int_{\partial M} \langle \nu \cdot s_1, s_2 \rangle \operatorname{vol},$$

где ν – внешняя нормаль к ∂M.

Замечание 15. Из общей теории эллиптических операторов D вытекает, что любое слабое решение уравнения $Ds = 0$ является на самом деле C^∞-гладким. Если многообразие M компактно, то из этой теории вытекает также, что пространство решений уравнения $Ds = 0$ конечномерно.

Обозначим через $L^2(S)$ пространство L^2-сечений расслоения S, получаемое замыканием пространства $\Gamma_0^\infty(S)$ гладких сечений S с компактными носителями по введенной выше L^2-норме. Оператор Дирака D является симметрическим оператором на $\Gamma_0^\infty(S)$ и потому допускает замыкание по норме $L^2(S)$. Полученный таким образом оператор является неограниченным самосопряженным оператором в $L^2(S)$.

Напомним, что оператор Дирака D имеет главный символ $i\xi$, а его квадрат D^2 – главный символ $\|\xi\|^2$, что совпадает с главным символом оператора Лапласа–Бельтрами на M. Если ввести *спинорный лапласиан* Δ^S по формуле

$$\Delta^S := -\operatorname{Tr}_g(\tilde{\nabla}^S \circ \nabla^S),$$

где ∇^S – спинорная связность на S, то этот оператор будет связан с лапласианом Дирака следующей формулой

$$D^2 = \Delta^S + \frac{1}{4} \operatorname{scal}_g,$$

где scal_g – скалярная кривизна (M, g). Эта формула, называемая *формулой Лихнеровича* (см. [7], II.8, теорема 8.8), является частным случаем общей *формулы Вейценбека.*

Классический оператор Дирака

Пусть $M = \mathbb{R}^n$ и $S = \mathbb{R}^n \times S_0$, где S_0 – какой-нибудь клиффордов модуль над $\operatorname{Cl}(n)$. В этом случае оператор Дирака D представляет собой дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами вида

$$D = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

действующий на S_0-значных функциях, заданных на $\mathbb{R}^n$. Здесь, γ_j – *матрицы Дирака*, т.е. линейные отображения $\gamma_j : S_0 \to S_0$, удовлетворяющие соотношениям

$$\gamma_j\gamma_k + \gamma_k\gamma_j = -2\delta_{jk}$$

для всех $j, k = 1, \ldots, n$. Из этих соотношений следует, что $D^2 = \Delta \cdot \operatorname{Id}$, где $\Delta = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ – лапласиан на $\mathbb{R}^n$.

Частные случаи

1. При $n = 1$ клиффордова алгебра $\mathrm{Cl}(1) = \mathbb{C}$, а оператор $D = i\frac{\partial}{\partial x_1}$.

2. При $n = 2$ клиффордова алгебра $\mathrm{Cl}(2) = \mathbb{H} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} = \mathrm{Cl}^{\mathrm{ev}}(2) \oplus \mathrm{Cl}^{\mathrm{od}}(2)$, а оператор D меняет $\mathrm{Cl}^{\mathrm{ev}}(2)$ и $\mathrm{Cl}^{\mathrm{od}}(2)$ местами. Введем на $\mathbb{H}$ вещественные координаты, записывая кватернионы $q \in \mathbb{H}$ в виде $q = x_0 1 + x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$. Если отождествить $\mathrm{Cl}^{\mathrm{ev}}(2)$ и $\mathrm{Cl}^{\mathrm{od}}(2)$ с $\mathbb{C}$ с помощью отображений $u + e_2 e_1 \leftrightarrow u + iv \leftrightarrow ue_1 + ve_2$, то оператор $D = e_1\partial/\partial x_1 + e_2\partial/\partial x_2$ будет задаваться матрицей
$$D = \begin{pmatrix} 0 & -\partial/\partial z \\ \partial/\partial \bar{z} & 0 \end{pmatrix},$$
где $\partial/\partial\bar{z} = \partial/\partial x_1 + i\partial/\partial x_2$. Иными словами, ограничение этого оператора на пространство $\mathrm{Cl}^{\mathrm{ev}}(2)$ совпадает с оператором Коши–Римана.

3. При $n = 3$ клиффордова алгебра $\mathrm{Cl}(3) = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$, а $S_0 = \mathbb{H}$. Эта алгебра имеет два представления в $\mathbb{H}$, действующих следующим образом. Отождествим пространство $\mathbb{R}^3$ с пространством $\mathrm{Im}\,\mathbb{H}$ мнимых кватернионов, вводя в пространстве $\mathrm{Im}\,\mathbb{H}$ стандартный базис, образованный мнимыми единицами i, j, k. Тогда действие указанных представлений в $\mathbb{H}$ будет задаваться умножением на базисные кватернионы слева или справа. Выбирая левое действие, получим, что оператор Дирака совпадает с оператором вида
$$D = i\frac{\partial}{\partial x_1} + j\frac{\partial}{\partial x_2} + k\frac{\partial}{\partial x_3},$$
действующим на $\mathbb{H}$-значные функции на пространстве $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}\,\mathbb{H}$.

4. При $n = 4$ клиффордова алгебра $\mathrm{Cl}(4) = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{H})$, а $S_0 = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} = \mathrm{Cl}^{\mathrm{ev}}(4) \oplus \mathrm{Cl}^{\mathrm{od}}(4)$. Как и в случае $n = 2$, оператор D меняет $\mathrm{Cl}^{\mathrm{ev}}(4)$ и $\mathrm{Cl}^{\mathrm{od}}(4)$ местами. Отождествим пространство $\mathbb{R}^4$ с $\mathbb{H}$, выбирая стандартный базис в $\mathbb{H}$, образованный $1, i, j, k$. Введем кватернионный аналог оператора Коши–Римана, действующий на функции $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$ по формуле:
$$\frac{\partial}{\partial\bar{q}} = \frac{\partial}{\partial x_0} + i\frac{\partial}{\partial x_1} + j\frac{\partial}{\partial x_2} + k\frac{\partial}{\partial x_3}$$
или в терминах матриц Паули
$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$
по формуле
$$\frac{\partial}{\partial\bar{q}} = \sigma_0\frac{\partial}{\partial x_0} + \sigma_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \sigma_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \sigma_3\frac{\partial}{\partial x_3}.$$
Тогда оператор Дирака D, действующий на функции со значениями в $S_0 = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$, будет задаваться матрицей вида
$$D = \begin{pmatrix} 0 & -\partial/\partial q \\ \partial/\partial\bar{q} & 0 \end{pmatrix}.$$

Другие примеры операторов Дирака

1. Пусть $S = \mathrm{Cl}(M)$ есть клиффордово расслоение над TM, рассматриваемое как расслоение клиффордовых модулей над $\mathrm{Cl}(M)$, действующих с помощью клиффордова умножения слева. Тогда соответствующий оператор Дирака совпадает с квадратным корнем из лапласиана Ходжа и называется *оператором Дирака–Ходжа.*

2. Пусть M есть спинорное многообразие и S – спинорное расслоение над M, наделенное римановой связностью. Возникающий при этом оператор Дирака называется *оператором Атьи–Зингера* и играет ключевую роль в теореме Атьи–Зингера об индексе.

3. Воспользуемся изоморфизмом $\mathrm{Cl}(M) \cong \Lambda^*(M) \equiv \Lambda^*(T^*M)$ и рассмотрим на $\Lambda^*(M)$, наряду с оператором внешнего дифференцирования $d : \Lambda^*(M) \to \Lambda^*(M)$, формально сопряженный к нему оператор $d^* : \Lambda^*(M) \to \Lambda^*(M)$, задаваемый на сечениях $\Lambda^p(M)$ формулой
$$d^* = (-1)^{np+n+1} * d* \,,$$
где $*$ – оператор Ходжа, определяемый равенством: $\mu \wedge *\nu = \langle \mu, \nu \rangle \,\mathrm{vol}$. Тогда оператор Дирака на $\mathrm{Cl}(M) \cong \Lambda^*(M)$ будет совпадать с оператором $D = d + d^*$, а оператор D^2 — с лапласианом Ходжа $\Delta = dd^* + d^*d$.

3.2.4 Spin^c-структуры

Spin^c-структуры на главных расслоениях

Пусть M есть компактное ориентируемое риманово многообразие размерности n и $P_{\mathrm{SO}} \to M$ – главное $\mathrm{SO}(n)$-расслоение реперов (ортонормированных базисов) на M. Тогда Spin^c-структурой на $P_{\mathrm{SO}} \to M$ будем называть поднятие этого расслоения до главного $\mathrm{Spin}^c(n)$-расслоения над M.

Более формально,

Определение 72. *Spin^c-структурой на главном расслоении $P_{\mathrm{SO}} \to M$* называется главное $\mathrm{Spin}^c(n)$-расслоение $P_{\mathrm{Spin}^c} \to M$ вместе со $\mathrm{Spin}^c(n)$-эквивариантным эпиморфизмом расслоений

$$\begin{tikzcd} P_{\mathrm{Spin}^c} \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_{\mathrm{SO}} \arrow[dl] \\ & M & \end{tikzcd}$$

где $\mathrm{Spin}^c(n)$ действует на расслоении $P_{\mathrm{SO}} \to M$ посредством гомоморфизма $\pi : \mathrm{Spin}^c(n) \to \mathrm{SO}(n)$.

Сопоставим расслоению $P_{\mathrm{Spin}^c} \to M$ главное $\mathrm{U}(1)$-расслоение $P_{\mathrm{U}(1)} \to M$ вместе со $\mathrm{Spin}^c(n)$-эквивариантным эпиморфизмом расслоений так, чтобы следующая диаграмма была коммутативной

$$\begin{tikzcd} P_{\mathrm{Spin}^c} \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_{\mathrm{U}(1)} \arrow[dl] \\ & M & \end{tikzcd}$$

где $\mathrm{Spin}^c(n)$ действует на расслоении $P_{\mathrm{U}(1)} \to M$ посредством гомоморфизма $\delta : \mathrm{Spin}^c(n) \to \mathrm{U}(1)$. Комплексное линейное расслоение $\mathcal{L} \to M$, ассоциированное с главным расслоением $P_{\mathrm{U}(1)} \to M$, называется *характеристическим расслоением*, а его класс Черна $c_1(\mathcal{L})$ – *характеристическим классом* рассматриваемой Spin^c-структуры. В терминах введенного расслоения Spin^c-структуру можно определить также следующим эквивалентным образом.

Определение 73. Пусть $P_{\mathrm{SO}} \to M$ есть главное $\mathrm{SO}(n)$-расслоение реперов на M. Тогда Spin^c-структура на $P_{\mathrm{SO}} \to M$ задается главным $\mathrm{Spin}^c(n)$-расслоением $P_{\mathrm{Spin}^c} \to M$ и главным $\mathrm{U}(1)$-расслоением $P_{\mathrm{U}(1)} \to M$ вместе со $\mathrm{Spin}^c(n)$-эквивариантным эпиморфизмом расслоений

$$\begin{tikzcd} P_{\mathrm{Spin}^c} \arrow[rr] \arrow[dr] & & P_{\mathrm{SO}} \times P_{\mathrm{U}(1)} \arrow[dl] \\ & M & \end{tikzcd}$$

где $\mathrm{Spin}^c(n)$ действует на расслоении $P_{\mathrm{SO}} \times P_{\mathrm{U}(1)}$ посредством гомоморфизма (π, δ).

Приведенное определение допускает распространение на произвольные ориентируемые римановы векторные расслоения $E \to M$ ранга n над компактным ориентируемым римановым многообразием M, ассоциированные с главным расслоением $P_{\mathrm{SO}} \to M$, т.е.

$$E = P_{\mathrm{SO}} \times_{\mathrm{SO}(n)} \mathbb{R}^n.$$

Определение 74. *Spin^c-структурой на расслоении* $E \to M$ называется расширение его структурной группы с $\mathrm{SO}(n)$ до $\mathrm{Spin}^c(n)$. Иными словами, расслоение $E \to M$ допускает Spin^c-структуру, если оно является расслоением, ассоциированным с главным $\mathrm{Spin}^c(n)$-расслоением $P_{\mathrm{Spin}^c} \to M$, т.е. существует $\mathrm{Spin}^c(n)$-эквивариантный эпиморфизм расслоений, делающий следующую диаграмму коммутативной

$$\begin{tikzcd} P_{\mathrm{Spin}^c} \times_{\mathrm{Spin}^c(n)} \mathbb{R}^n \arrow[rr] \arrow[dr] & & E \arrow[dl] \\ & M & \end{tikzcd}$$

где группа $\mathrm{Spin}^c(n)$ действует на $\mathbb{R}^n$ посредством гомоморфизма $\pi : \mathrm{Spin}^c(n) \to \mathrm{SO}(n)$.

Если, в частности, в качестве E взять касательное расслоение TM n-мерного риманова многообразия M, то Spin^c-структура на TM называется *Spin^c-структурой на многообразии M*.

Примеры Spin^c-структур

Предложение 35. *Главное $SO(n)$-расслоение $P_{SO} \to M$ допускает $Spin^c$-структуру тогда и только тогда, когда его 2-й класс Штифеля–Уитни $w_2(P_{SO})$ является редукцией по $mod\,2$ некоторого целочисленного класса $c \in H^2(M, \mathbb{Z})$, т.е.*

$$w_2(P_{SO}) \equiv c \, mod\, 2.$$

Аналогичное утверждение имеет место для ориентируемых римановых векторных расслоений $E \to M$ над M.

Напомним, что расслоение $P_{\mathrm{SO}} \to M$ допускает Spin-структуру тогда и только тогда, когда его 2-й класс Штифеля–Уитни равен нулю: $w_2(P_{\mathrm{SO}}) = 0$. Отсюда следует

Пример 23. Любое главное расслоение $P_{\mathrm{SO}} \to M$, наделенное спинорной структурой, обладает канонической Spin^c-структурой. В этом случае главное Spin^c-расслоение $P_{\mathrm{Spin}^c} \to M$ определяется как

$$P_{\mathrm{Spin}^c} = P_{\mathrm{Spin}} \times_\delta \mathrm{U}(1),$$

где $\mathrm{U}(1)$ обозначает тривиальное $\mathrm{U}(1)$-расслоение над M, а группа $\mathrm{Spin}^c(n)$ действует на расслоении в правой части как $\mathrm{Spin}^c(n) = \mathrm{Spin}(n) \times_{\mathbb{Z}_2} \mathrm{U}(1)$.

Пример 24. Любое комплексное векторное расслоение $E \to M$ обладает канонической Spin^c-структурой. Действительно, в этом случае $w_2(E) \equiv c_1(E) \bmod 2$ и потому существование указанной Spin^c-структуры вытекает из предложения 35 (точнее, его аналога для векторных расслоений).

Комплексные спинорные расслоения

Пусть M есть Spin^c-многообразие размерности n. *Комплексным спинорным расслоением* над M называется комплексное векторное расслоение S вида

$$S = P_{\mathrm{Spin}^c} \times_{\Delta_n^c} S_0,$$

где S_0 – клиффордов модуль, а $\Delta_n^c : \mathrm{Spin}^c(n) \to \mathrm{GL}(S_0, \mathbb{C})$ – спинорное представление. Расслоение S называется *фундаментальным*, если представление Δ_n^c неприводимо.

Если n четно, то имеются два неприводимых представления комплексифицированной клиффордовой алгебры, которые становятся эквивалентными при сужении на $\mathrm{Spin}^c(n)$. С учетом этого замечания на любом Spin^c-многообразии имеется только одно фундаментальное комплексное спинорное расслоение.

Spin^c-структуры на комплексных многообразиях

Если M является комплексным Spin^c-многообразием размерности m, то на нем имеется каноническая Spin^c-структура, расслоение спиноров для которой совпадает с расслоением $(0,q)$-форм

$$S_{\mathrm{can}} = \Lambda^{0,*}(T^*_{\mathbb{C}} M) = \bigoplus_{q=1}^{m} \Lambda^{0,q}(T^*_{\mathbb{C}} M).$$

Здесь $T^*_{\mathbb{C}} M$ есть комплексифицированное кокасательное расслоение, которое, как и в алгебраическом случае (см. п.3.1.5), представляется в виде прямой суммы $T^*_{\mathbb{C}} M = T^{1,0} M \oplus T^{0,1} M$. Поэтому для каждого касательного вектора v двойственный к нему ковектор v^* допускает разложение вида

$$v^* = v^{1,0} + v^{0,1}.$$

Клиффордово умножение $\rho : \mathbb{C}\mathrm{l}(M) \to \mathrm{End}\, S_{\mathrm{can}}$ действует при этом следующим образом. Произвольному касательному вектору v сопоставляется линейное отображение $\rho(v) : \Lambda^*(T^*_{\mathbb{C}}M) \to \Lambda^*_{\mathbb{C}}(TM)$, задаваемое формулой:

$$\rho(v)\eta = v^{0,1} \wedge \eta - v^{0,1} \lrcorner\, \eta,$$

где $\eta \in \Lambda^{0,q}(V^*)$. Тогда $\rho(v)(\rho(v)\eta) = -\|v\|^2\eta$, поэтому отображение ρ продолжается по универсальному свойству на все клиффордово расслоение $\mathbb{C}\mathrm{l}(M)$.

Полуспинорные расслоения совпадают при этом с

$$S^+_{\mathrm{can}} = \Lambda^{0,\mathrm{ev}}(T^*_{\mathbb{C}}M), \quad S^-_{\mathrm{can}} = \Lambda^{0,\mathrm{od}}(T^*_{\mathbb{C}}M).$$

Другие Spin^c-структуры на многообразии M, наделенном канонической Spin^c-структурой, можно построить, тензорно умножая каноническое спинорное расслоение S_{can} на какое-нибудь комплексное линейное расслоение $L \to M$, т.е. полагая

$$S(L) := S_{\mathrm{can}} \otimes L$$

и

$$P_{\mathrm{Spin}^c}(L) := P_{\mathrm{Spin}} \times_\delta P_{\mathrm{U}(1)}(L),$$

где $P_{\mathrm{U}(1)}(L)$ – главное $\mathrm{U}(1)$-расслоение, ассоциированное с L, а действие группы $\mathrm{Spin}^c(n)$ на расслоении в правой части задается гомоморфизмом (π, δ) : $\mathrm{Spin}^c(n) \to \mathrm{SO}(n) \times \mathrm{U}(1)$.

Тем самым, возникает действие группы $H^2(M, \mathbb{Z})$, параметризующей классы эквивалентности комплексных линейных расслоений над M, на пространстве Spin^c-структур. Фактор по этому действию, т.е. пространство различных Spin^c-структур на M, отождествляется с группой $H^1(M, \mathbb{Z}_2)$.

Связь со спинорной структурой

Определение Spin^c-связностей на расслоениях со Spin^c-структурой вполне аналогично определению Spin-связностей на спинорных расслоениях. Такие связности допускают следующее описание.

Предложение 36. *Пусть M есть $Spin^c$-многообразие, являющееся одновременно спинорным. Тогда по любой $Spin^c$-структуре на M, отвечающей комплексному линейному расслоению $L \to M$, и произвольной $U(1)$-связности на ассоциированном главном расслоении $P_{U(1)} \to M$, можно построить каноническую связность на $P_{Spin^c} \to M$, являющуюся подъемом связности на $P_{SO} \times P_{U(1)}$, задаваемой тензорным произведением канонической римановой связности на P_{SO} и выбранной $U(1)$-связности на $P_{U(1)}$.*

Доказательство см. в [7], предложение D.11.

На самом деле, требование спинорности, наложенное на M, является излишним. Приведенная конструкция распространяется на случай общих Spin^c-многообразий M, если при этом заменить $\mathrm{U}(1)$-связность на L т.н. *виртуальной* связностью на виртуальном расслоении $L^{1/2}$ (см. [7], стр.396-398).

В заключение рассмотрим следующий вопрос: каким образом можно описать спинорную структуру в терминах Spin^c-структуры. Пусть M есть Spin^c-многообразие и S – отвечающее ему комплексное спинорное расслоение, наделенное эрмитовой метрикой.

Предложение 37. *Многообразие M является спинорным тогда и только тогда, когда существует антилинейная изометрия $C : S \to S$, обладающая следующими свойствами:*

1. $C(sf) = (Cs)\bar{f}$ *для* $s \in \Gamma(S), f \in C^\infty(M)$;
2. $C(\sigma s) = \chi(\bar{\sigma})(Cs)$ *для* $s \in \Gamma(S), \sigma \in \Gamma(\mathbb{C}l(M))$;
3. $\langle Cs, Cs' \rangle = \langle s', s \rangle$ *для* $s, s' \in \Gamma(S)$.

Доказательство см. в [3], теорема 9.6.

Глава 4

НЕКОММУТАТИВНАЯ СПИНОРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Эта глава является итоговой для настоящего курса. В ней сводятся воедино объекты некоммутативной геометрии, определенные в предшествующих главах. Иными словами, ее цель состоит в том, чтобы описать те роли, в которых выступают в некоммутативной спинорной геометрии объекты спинорной геометрии Дирака.

Сама некоммутативная спинорная геометрия кодируется в терминах понятия спектральной тройки, которое вводится в параграфе 4.1. Для того, чтобы по такой тройке можно было построить некоммутативную спинорную геометрию, она должна удовлетворять семи естественным условиям, формулируемым в параграфе 4.2.

Главными результатами главы являются Теорема 17, утверждающая, что спинорная геометрия Дирака есть некоммутативная спинорная геометрия и обратная к ней Теорема 18, согласно которой любая некоммутативная спинорная геометрия над алгеброй $A = C^\infty(M)$ есть спинорная геометрия Дирака.

4.1 Спектральные тройки

В этом параграфе вводится ключевое для некоммутативной геометрии понятие спектральной тройки $(A, \mathcal{H}, D)$, состоящей из алгебры A вместе с ее представлением π в алгебре $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и самосопряженного оператора D, коммутатор которого с любым элементом $\pi(a)$, $a \in A$, ограничен.

Определение 75. *Спектральной тройкой* для алгебры A называется тройка $(A, \mathcal{H}, D)$, состоящая из гильбертова пространства $\mathcal{H}$, в котором задано представление π алгебры A ограниченными линейными операторами, и самосопряженного оператора D в $\mathcal{H}$, обладающего компактной резольвентой и удовлетворяющего следующему свойству: коммутатор $[D, a]$ оператора D с любым элементом $a \in A$ (точнее, с задаваемым этим элементом оператором представления $\pi(a)$) является ограниченным линейным оператором в $\mathcal{H}$.

Определение 76. *Вещественной спектральной тройкой* для алгебры A с инволюцией будем называть спектральную тройку вместе с антиунитарным оператором C в пространстве $\mathcal{H}$, для которого отображение

$$b \longmapsto Cb^*C^{-1}$$

задает действие противоположной алгебры A^o на $\mathcal{H}$, коммутирующее с действием алгебры A, т.е.

$$[a, Cb^*C^{-1}] = 0 \tag{4.1}$$

для всех $a, b \in A$.

Напомним, что оператор $C : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ называется *антиунитарным*, если он задает антилинейную биекцию $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$, обладающую *свойством антиизометричности*:

$$(C\xi, C\eta) = (\eta, \xi)$$

для всех $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ и $C^2 = \pm 1$.

Если π есть действие алгебры A на $\mathcal{H}$, то действие π^o противоположной алгебры A^o на $\mathcal{H}$ будет задаваться формулой

$$\pi^o(b) := C\pi(b^*)C^{-1}.$$

Условие (4.1) будет при этом означать, что представления π и π^o коммутируют друг с другом.

4.2 Определение некоммутативной спинорной геометрии

В этом параграфе в терминах спектральных троек определяется понятие некоммутативной спинорной геометрии. Спектральная тройка $(A, \mathcal{H}, D)$, ассоциированная с такой геометрией, должна удовлетворять семи условиям, перечисленным ниже.

4.2.1 Размерность

> Существует неотрицательное целое число n, называемое *размерностью геометрии*, для которого $D^{-1} \in \mathcal{L}^{n+}(\mathcal{H})$, но $D^{-1} \notin \mathcal{L}_0^{n+}(\mathcal{H})$. Отсюда следует, в частности, что оператор $|D|^{-n}$ имеет конечный след Диксмье, отличный от нуля.

В случае, когда алгебра A и гильбертово пространство $\mathcal{H}$ конечномерны, размерность геометрии полагается равной нулю.

Заметим, что размерность геометрии определяется сформулированным условием однозначно. Действительно, если дан оператор $T \in \mathcal{L}^p(\mathcal{H})$ с $p \le n$, то $|T|^n$ имеет след в обычном смысле, поэтому его след Диксмье равен нулю. В частности, если $D^{-1} \in \mathcal{L}^{r+}(\mathcal{H})$ с $r < n$, то $D^{-1} \in \mathcal{L}^p(\mathcal{H})$ с $p = \frac{n+r}{2}$ и, следовательно, $D^{-1} \in \mathcal{L}_0^{n+}(\mathcal{H})$ вопреки предположению.

4.2.2 Регулярность

Заданная спектральная тройка $(A, \mathcal{H}, D)$ должна быть *регулярной*. Это означает, что алгебра $\tilde{A}_D := A \cup [D, A]$, порождаемая алгеброй A и операторами вида $[D, a]$ с $a \in A$, должна удовлетворять следующему условию

$$\tilde{A}_D = A \cup [D, A] \subset \mathrm{Dom}^\infty \delta,$$

где $\delta(T) := [|D|, T]$.

Сформулированное условие означает, иными словами, что алгебра $\tilde{A}_D$ принадлежит гладкой области определения $\mathrm{Dom}^\infty\delta$ оператора дифференцирования δ. В частности, операторы вида $[D, a]$ принадлежат областям определения $\mathrm{Dom}\,\delta^k$ всех натуральных степеней δ^k оператора δ.

Остановимся на этом условии более подробно. Для регулярной спектральной тройки $(A, \mathcal{H}, D)$ можно ввести *соболевскую шкалу* гильбертовых пространств

$$\mathcal{H}^s := \mathrm{Dom}\,|D|^s, \quad s \in \mathbb{R},$$

с нормой:

$$\|\xi\|_s^2 := \|\xi\|^2 + \|\,|D|^s\xi\|^2.$$

При $s > t$ имеется непрерывное вложение $\mathcal{H}^s \subset \mathcal{H}^t$ и пересечение

$$\mathcal{H}^\infty := \bigcap_{s\in\mathbb{R}} \mathcal{H}^s = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}^k = \mathrm{Dom}^\infty|D|$$

является пространством Фреше с метрикой, задаваемой семейством полунорм $\|\cdot\|_k$, $k \in \mathbb{N}$.

Обозначим через Op_D^r пространство *операторов r-го порядка*, т.е. линейных операторов $T : \mathcal{H}^\infty \to \mathcal{H}^\infty$ таких, что для любого $s \in \mathbb{R}$ существует положительная константа C_s, для которой

$$\|T\xi\|_{s-r} \le C_s\|\xi\|_s.$$

Иными словами, оператор T продолжается до ограниченного оператора $\mathcal{H}^s \to \mathcal{H}^{s-r}$.

Тогда из условия регулярности вытекает, что $\tilde{A}_D \subset \mathrm{Op}_D^0$, а операторы вида $b - |D|b|D|^{-1} \in \mathrm{Op}_D^{-1}$ для любых $b \in \tilde{A}_D$.

4.2.3 Конечность

Алгебра A является пред-C^*-алгеброй, а пространство гладких векторов

$$\mathcal{H}^\infty = \bigcap_{k=0}^{\infty} \mathrm{Dom}\,D^k$$

является конечно порожденным проективным A-модулем.

Начнем с первого условия и напомним, что *пред-C^*-алгеброй* называется подалгебра A в C^*-алгебре B, полная относительно некоторой локально выпуклой топологии, более тонкой, чем топология B, и замкнутая относительно голоморфного функционального исчисления.

Более подробно, так как алгебра $A \subset \mathrm{Dom}^\infty\delta$, то можно ввести на ней топологию Фреше, порождаемую полунормами $a \mapsto \|\delta^k(a)\|$, $k \in \mathbb{N}$. Если алгебра A полна в указанной топологии, то

$$A = \bigcap_n A_n,$$

где A_n – банахова алгебра, получаемая пополнением алгебры A по норме $a \mapsto \sum_{k=0}^n \|\delta^k(a)\|$. В этом случае алгебра A удовлетворяет первому условию. Поэтому указанное свойство естественно включить в условие конечности и в общем случае.

Рассмотрим теперь второе требование из формулировки условия конечности. Согласно ему, мы можем найти число $m \in \mathbb{N}$ и идемпотент $e \in \mathrm{Mat}_m(A)$, для которого имеет место изоморфизм $\mathcal{H}^\infty \to {}^mAe$ левых A-модулей. Заменяя идемпотент e проектором p из алгебры $\mathrm{Mat}_m(A)$ по формуле Капланского, получим, что $\mathcal{H}^\infty = {}^mAp$. Алгебра эндоморфизмов $\mathrm{End}_A\mathcal{H}^\infty$ будет при этом отождествляться с алгеброй

$$p\mathrm{Mat}_m(A)p = pA^m \otimes_A {}^mAp.$$

4.2.4 Вещественность

Ключевую роль в формулировке этого условия играет понятие вещественных спектральных данных для алгебры A с инволюцией τ, которое существенно зависит от четности числа $j \equiv n \bmod 8$.

Определение 77. *Вещественными спектральными данными* индекса $j \in \mathbb{Z}_8$ для алгебры A с инволюцией τ называется: при четном j набор данных $(A, \mathcal{H}, D, C, \chi)$, а при нечетном j набор данных $(A, \mathcal{H}, D, C)$, состоящих из:

1. $(A, \mathcal{H}, D)$ – спектральная тройка для алгебры A.

2. C – антилинейная изометрия на пространстве $\mathcal{H}$, согласованная с инволюцией τ; последнее означает, что $CaC^{-1} = \tau(a)$ для всех $a \in A$.

3. при четном j: χ есть оператор градуировки на $\mathcal{H}$, антикоммутирующий с D.

4. операторы D, C, χ удовлетворяют коммутационным соотношениям вида

   $$C^2 = \pm 1, \quad CD = \pm DC, \quad C\chi = \pm \chi C,$$

   где знаки зависят от числа j и определяются одной из двух следующих таблиц:

$j \bmod 8$	0	2	4	6
$C^2 = \pm 1$	$+$	$-$	$-$	$+$
$CD = \pm DC$	$+$	$+$	$+$	$+$
$C\chi = \pm \chi C$	$+$	$-$	$+$	$-$

и

$j \bmod 8$	1	3	5	7
$C^2 = \pm 1$	$+$	$-$	$-$	$+$
$CD = \pm DC$	$-$	$+$	$-$	$+$

Выбор знаков в этих таблицах диктуется теорией представлений вещественных алгебр Клиффорда $\mathrm{Cl}_{p,q}$, ассоциированных с невырожденными квадратичными формами сигнатуры (p,q). Поскольку эта теория выходит за рамки нашего курса, мы отсылаем заинтересованного читателя за подробным обсуждением клиффордовых алгебр $\mathrm{Cl}_{p,q}$ и понятия вещественных спектральных троек к [3], пп.5.1,9.5.

Напомним, что в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ действуют представления π алгебры A и π^o противоположной алгебры A^o. Рассмотрим представление $\pi \otimes \pi^o$ алгебры $A \otimes A^o$, являющейся тензорным произведением алгебр A и A^o, задаваемое формулой

$$a \otimes b^o \longmapsto aCb^*C^{-1},$$

где $*$ – инволюция на алгебре A. На алгебре $A \otimes A^o$ можно ввести инволюцию, определяемую формулой

$$\tau(a \otimes b^o) := b^* \otimes (a^*)^o.$$

Элементу алгебры $A \otimes A^o$, стоящему в правой части, отвечает оператор в $\mathcal{H}$, действующий по формуле:

$$b^*CaC^{-1} = CaC^{-1}b^* = C(aC^{-1}b^*C)C^{-1}.$$

Так как оператор сопряжения удовлетворяет условию $C^2 = \pm 1$, то $C^{-1}b^*C = Cb^*C^{-1}$ и последнюю выносную формулу можно переписать в виде соотношения

$$b^*CaC^{-1} = C(aCb^*C^{-1})C^{-1},$$

которое означает, что оператор сопряжения C согласован с инволюцией τ. Тем самым, мы находимся в ситуации, к которой применимо определение 77 вещественных спектральных данных для алгебры $A \otimes A^o$.

> Оператор сопряжения C удовлетворяет коммутационным соотношениям
> $$C^2 = \pm 1, \quad CD = \pm DC, \quad C\chi = \pm \chi C,$$
> так что $(A, \mathcal{H}, D, C, \chi)$ образуют набор вещественных спектральных данных индекса $j \equiv n \bmod 8$ для алгебры $A \otimes A^o$ с инволюцией τ.

Оператор сопряжения C будем называть также *вещественной структурой на спектральной тройке* $(A, \mathcal{H}, D)$.

4.2.5 Первый порядок

> Представление π^o алгебры A^o коммутирует не только с представлением π алгебры A, но и со всеми операторами вида $[D, a]$ с $a \in A$, т.е.
> $$\big[[D, a], Cb^*C^{-1}\big] = 0$$
> для всех $a, b \in A$.

Это определение симметрично по A и A^o, поскольку из тождества Якоби следует, что

$$\big[[D, a], Cb^*C^{-1}\big] + \big[a, [D, Cb^*C^{-1}]\big] = \big[D, [a, Cb^*C^{-1}]\big] = 0,$$

откуда

$$\big[a, [D, Cb^*C^{-1}]\big] = 0.$$

4.2.6 Ориентация

Пользуясь условием первого порядка, мы можем построить представление цепей Хохшильда на A со значениями в алгебре $A \otimes A^o$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

Заметим, прежде всего, что $A \otimes A^o$ является A-бимодулем с естественной структурой, задаваемой соотношением

$$a'(a \otimes b^o)a'' := a'aa'' \otimes b^o.$$

Упомянутое представление задается на однородных k-цепях Хохшильда из $C_k(A, A \otimes A^o)$ формулой

$$\pi_D\left((a \otimes b^o) \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_k\right) := aCb^*C^{-1}[D, a_1] \ldots [D, a_k].$$

Теперь мы можем сформулировать условие, определяющее форму объема.

> Существует цикл Хохшильда $c \in Z_n(A, A \otimes A^o)$ такой, что $\pi_D(c) = \chi$ в случае четной размерности n рассматриваемой геометрии. В нечетномерном случае указанное условие сводится к соотношению $\pi_D(c) = 1$.

4.2.7 Двойственность Пуанкаре

Это условие представляет собой переформулировку классической двойственности Пуанкаре в терминах K-теории. А именно, пользуясь отображением индекса для оператора D, можно построить (см. [3], с.485) аддитивные спаривания на K-группах:

$$K_i(A) \times K_i(A) \longrightarrow \mathbb{Z},$$

где $i = 0, 1$. Тогда

> двойственность Пуанкаре означает, что построенные аддитивные спаривания на группах $K_0(A)$ и $K_1(A)$ невырождены.

4.2.8 Определение некоммутативной спинорной геометрии

Определение 78. *Некоммутативной спинорной геометрией* называется спектральная тройка $(A, \mathcal{H}, D)$, удовлетворяющая семи сформулированным выше условиям.

4.3 Геометрия Дирака как некоммутативная спинорная геометрия

С каждым гладким компактным ориентируемым римановым многообразием M, наделенным Spin^c-структурой, можно связать отвечающую ему спинорную геометрию Дирака, задаваемую пятеркой $(A, \mathcal{H}, D, C, \chi)$, где $(A, \mathcal{H}, D)$ – спектральная тройка, в которой A есть алгебра гладких функций на M, $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство L^2-интегрируемых спиноров на M, а D – соответствующий оператор Дирака. Оператор сопряжения C определяет спинорную структуру на M, а χ – оператор градуировки. Главный результат этого параграфа – теорема 17 – утверждает, что спинорная геометрия Дирака является некоммутативной спинорной геометрией.

Пусть M есть компактное ориентируемое риманово многообразие, наделенное Spin^c-структурой. Иначе говоря, задано спинорное риманово расслоение S вместе с антилинейной изометрией $C : S \to S$.

Определение 79. *Геометрией Дирака* на M называется пятерка
$\mathcal{G} = (A, \mathcal{H}, D, C, \chi)$, где $(A, \mathcal{H}, D)$ – спектральная тройка с

1. $A = C^\infty(M)$.

2. $\mathcal{H} = L^2(M, S)$ – гильбертово пространство спиноров, полученное замыканием пространства гладких сечений $\Gamma^\infty(M, S)$ по норме, определяемой скалярным произведением
$$(s, t) := \int_M \langle s, t\rangle \,\mathrm{vol},$$
где $\langle \cdot\,, \cdot\rangle$ – евклидово скалярное произведение на S, vol – форма объема на M.

3. D – оператор на $\mathcal{H}$, получаемый замыканием оператора Дирака $D = \rho \circ \nabla$ на $\Gamma^\infty(M, S)$, задаваемого композицией клиффордова умножения ρ и спинорной связности $\nabla \equiv \nabla^S$.

4. C – оператор сопряжения, определяющий спинорную структуру на M.

5. $\chi = \rho(\omega)$ – оператор градуировки, если размерность M четна, и $\chi = 1$, если размерность M нечетна.

Мы собираемся показать, что геометрия Дирака на M является некоммутативной спинорной геометрией в смысле определения 77, т.е. удовлетворяет семи условиям, перечисленным в п.4.2. Учитывая, что алгебра $A = C^\infty(M)$

коммутативна, некоторые из этих условий упрощаются. Например, противоположная алгебра A^o в этом случае совпадает с исходной алгеброй A, а представление π^o этой алгебры совпадает с представлением π алгебры A. Соотношение $[a, Cb^*C^{-1}] = 0$ превращается в условие $[a, b] = 0$ коммутативности алгебры A.

Цикл Хохшильда $c \in Z_n(A, A \otimes A^o)$, задающий ориентацию, можно рассматривать в этом случае как элемент $Z_n(A)$. Действительно, представление π_D из п.4.2.6 ограниченными операторами, действующими в $\mathcal{H}$, сводится в этом случае к представлению группы цепей Хохшильда $C_k(A)$ в $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, задаваемому формулой

$$\pi_D(a_0 \otimes \ldots \otimes a_k) = a_0[D, a_1] \ldots [D, a_k].$$

Ядро этого отображения содержит подкомплекс $D_k(A)$, порождаемый цепями вида $a_0 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes \ldots \otimes a_k$, у которых какой-либо из элементов a_i равен 1. Переходя к фактору

$$\Omega_k(A) = C_k(A)/D_k(A),$$

мы можем рассматривать π_D как гомоморфизм A-модулей $\pi_D : \Omega_k(A) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Главным результатом этого параграфа является следующая

Теорема 17. *Геометрия Дирака есть некоммутативная спинорная геометрия.*

Иными словами, она удовлетворяет условиям, перечисленным в п.4.2. Ниже мы наметим доказательство этой теоремы, отсылая за деталями к книге [3], теорема 11.1.

4.3.1 Размерность

Размерность геометрии $\mathcal{G}$ совпадает с размерностью многообразия M. Действительно, квадрат оператора Дирака D^2 имеет главный символ

$$\sigma_2(D^2)(x, \xi) = \|\xi\|^2$$

и, тем самым, совпадает с главным символом оператора Лапласа–Бельтрами Δ на M. Поэтому

$$\sigma_{-n}(|D|^{-n}) = \left(\|\xi\|^2\right)^{-n/2} \cdot \mathrm{Id} = \sigma_{-n}(\Delta^{-n/2}) \cdot \mathrm{Id},$$

где Id – тождественный оператор на S.

Отсюда следует, что оператор $|D|^{-n}$ является измеримым оператором класса Диксмье. Действительно, вычет Водзицки в этом случае равен

$$\mathrm{Res}(f|D|^{-n}) = \mathrm{rank}\, S \cdot \mathrm{Res}(f\Delta^{-n/2})$$

для $f \in C^\infty(M)$. Некоммутативный интеграл записывается в виде

$$\int f|D|^{-n} = c_n \mathrm{Tr}^+(f|D|^{-n}),$$

где

$$c_n = \frac{n(2\pi)^n}{2^{[n/2]}\Omega_n}\,.$$

В частности,

$$\int |D|^{-n} = c_n \mathrm{Tr}^+(|D|^{-n}) = 1,$$

т.е. оператор $|D|^{-n} \in \mathcal{L}^{1+}(\mathcal{H})$, но не принадлежит пространству $\mathcal{L}_0^{1+}(\mathcal{H})$.

4.3.2 Регулярность

Поскольку $[D, f] = \rho(df)$ по лемме 17, то

$$\|[D, f]\| = \|\rho(df)\| = \|df\|,$$

т.е. оператор $[D, f]$ ограничен в $\mathcal{H}$ при любом $f \in C^\infty(M)$.

Для доказательства регулярности спектральной тройки $(A, \mathcal{H}, D)$ нужно еще проверить, что алгебра $\tilde{A}_D$, порожденная A и $[D, A]$, лежит в гладкой области определения $\mathrm{Dom}^\infty \delta$, где $\delta(T) := [|D|, T]$. Мы опускаем доказательство этого факта, отсылая за ним к [3], стр. 489.

4.3.3 Конечность

Алгебра $A = C^\infty(M)$ замкнута относительно голоморфного функционального исчисления, поскольку функция $f \in C^\infty(M)$ обратима в этой алгебре тогда и только тогда, когда она не имеет нулей, и в этом случае обратная функция $1/f$ также принадлежит $C^\infty(M)$.

Гладкая область определения оператора D совпадает с $\mathcal{H}^\infty = C^\infty(M)$. Последнее пространство является конечно порожденным проективным модулем над $C^\infty(M)$ по теореме Серра–Суона (точнее, по ее гладкой версии).

4.3.4 Вещественность

Проверку того факта, что пятерка $(A, \mathcal{H}, D, C, \chi)$ составляет набор вещественных спектральных данных для алгебры $A = C^\infty(M)$ мы опускаем, ее можно найти в [3], стр. 406-407.

4.3.5 Первый порядок

Это условие в рассматриваемом случае принимает вид

$$[[D, f], g] = [df, g] = 0$$

для $f, g \in C^\infty(M)$ и очевидно выполняется в случае коммутативной алгебры $A = C^\infty(M)$.

4.3.6 Ориентация

Нужный нам n-цикл Хохшильда $c \in Z_n(A)$ совпадает в рассматриваемом случае с формой объема vol ориентируемого риманова многообразия M (проверка этого факта проведена в [3], стр. 489-490).

4.3.7 Двойственность Пуанкаре

Это условие выполняется, поскольку в случае алгебры $A = C^\infty(M)$ оно сводится к обычной двойственности Пуанкаре между гомологиями и когомологиями де Рама многообразия M (см. [3], стр. 490-491).

4.4 Некоммутативная спинорная геометрия над алгеброй $A = C^\infty(M)$

Главным результатом этого параграфа является теорема 18, обратная к теореме 17 из предыдущего параграфа. Эта теорема утверждает, что любая некоммутативная спинорная геометрия над алгеброй $A = C^\infty(M)$, где M – гладкое компактное ориентируемое риманово многообразие, является спинорной геометрией Дирака.

Назовем некоммутативную спинорную геометрию $\mathcal{G} = (A, \mathcal{H}, D, C, \chi)$ *неприводимой*, если она не является нетривиальной прямой суммой двух других некоммутативных спинорных геометрий $\mathcal{G}_1 = (A, \mathcal{H}_1, D_1, C_1, \chi_1)$ и
$\mathcal{G}_2 = (A, \mathcal{H}_2, D_2, C_2, \chi_2)$, т.е. не допускает разложения вида

$$\mathcal{G} = (A, \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2, D_1 \oplus S_2, C_1 \oplus C_2, \chi_1 \oplus \chi_2).$$

Главным результатом этого параграфа является следующая

Теорема 18. *Пусть $\mathcal{G} = (A, \mathcal{H}, D, C, \chi)$ есть неприводимая некоммутативная спинорная геометрия размерности n над алгеброй $A = C^\infty(M)$, где M – компактное ориентируемое риманово многообразие. Тогда*

1. *существует единственная риманова метрика $g = g(D)$ на многообразии M с функцией расстояния*

$$d_g(p, q) = \sup\{|f(p) - f(q)| : \ f \in C^\infty(M), \|[D, f]\| \le 1\}.$$

2. *M является спинорным многообразием и оператор Дирака $\mathcal{D}$, отвечающий этой структуре, отличается от исходного оператора D только членом нулевого порядка.*

Иными словами, некоммутативная спинорная геометрия над алгеброй $A = C^\infty(M)$ является геометрией Дирака.

Как и в случае предыдущей теоремы, мы лишь наметим доказательство теоремы 18, отсылая за деталями к книге [3], теорема 11.2.

Построение формы объема

Определим сначала некоммутативный интеграл, для чего воспользуемся следующим утверждением.

Предложение 38. *Если $\mathcal{G}$ есть некоммутативная спинорная геометрия размерности n над алгеброй $A = C^\infty(M)$, то оператор $f|D|^{-n}$ измерим для любой функции $f \in C^\infty(M)$.*

Доказательство см. в [3], предложение 11.3.

Приведенное предложение означает, иными словами, что определение некоммутативного интеграла

$$\int f|D|^{-n} = \mathrm{Tr}_\omega(f|D|^{-n})$$

не зависит от выбора формы ω в определении следа Диксмье. Можно показать (см. [3], стр. 494-500), что введенный интеграл *положительно определен* в том смысле, что $\int f|D|^{-n} > 0$, если f – положительный элемент алгебры A. В частности, этот интеграл невырожден, что позволяет ввести его плотность, задающую форму объема на M.

4.4.1 Построение спинорной структуры и метрики

В качестве кандидата на роль спинорного модуля возьмем пространство $\mathcal{H}^\infty$ гладких векторов относительно действия оператора D на $\mathcal{H}$. Это пространство по свойству конечности является конечно порожденным проективным A-модулем, на котором алгебра $A = C^\infty(M)$ действует операторами умножения. По теореме Серра–Суона $\mathcal{H}^\infty$ является модулем $\Gamma^\infty(M, S)$ гладких сечений некоторого векторного расслоения $S \to M$.

Предложение 39. *На пространстве $\mathcal{H}^\infty$ существует единственное A-значное спаривание $\{\cdot, \cdot\}$ такое, что*

$$(\varphi, \psi) = \int \{\psi, \varphi\}|D|^{-n}$$

для всех $\varphi, \psi \in \mathcal{H}^\infty$.

Доказательство. Пространство $\mathcal{H}^\infty$ можно отождествить с модулем ${}^mAp$ для некоторого проектора $p \in \mathrm{Mat}_m(A)$. На ${}^mAp$ имеется стандартное эрмитово спаривание

$$\{ap, bp\}' \equiv ap\, b^* = \sum_{j,k} a_j p_{jk} b_k^*,$$

поэтому мы можем ввести на $\mathcal{H}^\infty$ новое скалярное произведение, полагая

$$(\varphi, \psi)' := \int \{\psi, \varphi\}'|D|^{-n}.$$

Это скалярное произведение эквивалентно, но, вообще говоря, не совпадает с исходным скалярным произведением (φ, ψ). Однако

$$(\varphi, \psi)' = (\varphi, T\psi), \quad \varphi, \psi \in \mathcal{H}^\infty,$$

для некоторого положительного обратимого оператора $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Тогда для любого $f \in C^\infty(M)$ будем иметь

$$(\varphi, Tf\psi) = (\varphi, f\psi)' = \int \{f\psi, \varphi\}'|D|^{-n} =$$
$$\int \{\psi, f^*\varphi\}'|D|^{-n} = (f^*\varphi, \psi)' = (f^*\varphi, T\psi) = (\varphi, fT\psi).$$

Иначе говоря, оператор T коммутирует с действием алгебры A, поэтому мы можем ввести новое скалярное произведение на A-модуле $\mathcal{H}^\infty$, полагая

$$\{\psi, \varphi\} := \{T^{-1}\psi, \varphi\}'.$$

Это A-значное спаривание уже удовлетворяет условию предложения.

Чтобы доказать единственность введенного спаривания, заметим, что разность двух таких спариваний дает A-значное билинейное отображение, зануляемое всеми функционалами вида $g \mapsto \int fg|D|^n$ с $f \in C^\infty(M)$. В частности, $\int ff^*|D|^n = 0$, что возможно только если $ff^* = 0$ в A, т.е. $f = 0$. $\square$

Мы отождествили $\mathcal{H}^\infty$ с модулем гладких сечений $\Gamma^\infty(M, S)$ расслоения $S \to M$. Условие первого порядка гласит, что

$$[[D, f], g] = 0$$

для всех $f, g \in C^\infty(M)$. Пользуясь условием регулярности, можно показать, что оператор $[D, f]$ сохраняет пространство $\mathcal{H}^\infty$. Поэтому из приведенного равенства следует, что $[D, f]$ является оператором нулевого порядка на пространстве сечений $\Gamma^\infty(M, S)$, т.е. принадлежит пространству $\Gamma^\infty(M, \operatorname{End} S)$. Иначе говоря, этот оператор является матричнозначным оператором умножения на $\mathcal{H}^\infty$.

Далее, для произвольных $f, g \in C^\infty(M)$ и $\psi \in \mathcal{H}^\infty$ будем иметь

$$[D, fg]\psi = f[D, g]\psi + [D, f]g\psi = f[D, g]\psi + g[D, f]\psi,$$

т.е.

$$[D, fg] = f[D, g] + g[D, f].$$

Это означает, что D есть матричнозначный дифференциальный оператор первого порядка, действующий на гладких сечениях расслоения $S \to M$.

Главным символом этого оператора является операторная функция $\sigma_1(D)$, определенная на кокасательном расслоении T^*M. Вычислим ее, пользуясь следующей формулой из теории дифференциальных операторов:

$$\sigma_1(D)(x, \xi) = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} e^{-itf(x)} D e^{itf(x)},$$

выполненной для любой функции $f \in C^\infty(M)$ такой, что $df(x) = \xi$. Пользуясь правилом Лопиталя в пределе справа, последнюю формулу можно переписать в виде

$$\sigma_1(D)(x, \xi) = \lim_{t \to \infty} \frac{d}{dt} e^{-itf(x)} D e^{itf(x)}.$$

Заметим, что для любой 1-формы $\eta \in \Omega^1(M)$ отображение

$$x \longmapsto \sigma_1(D)(x, \eta_x)$$

задает гладкое сечение из пространства $\Gamma^\infty(M, \operatorname{End} S)$. Обозначим через $\rho(\eta)$ сечение вида

$$\rho(\eta)(x) := -i\sigma_1(D)(x, \eta_x). \tag{4.2}$$

Тогда при $\eta = df$, $\xi = df(x)$ будем иметь

$$\rho(df)(x) := -i\sigma_1(D)(x,\xi) = -i\lim_{t\to\infty}\frac{d}{dt}e^{-itf(x)}De^{itf(x)} = \\ \lim_{t\to\infty} e^{-itf(x)}[D,f]e^{itf(x)} = [D,f](x),$$

где в последнем равенстве мы воспользовались тем, что $[D,f]$ является оператором умножения. Итак,

$$[D,f] = \rho(df).$$

Формула (4.2) задает клиффордово действие 1-форм из $\Omega^1(M)$ на пространстве $\mathcal{H}^\infty$. При этом $-\rho(\eta)^2$ порождает *невырожденную метрику*, порождаемую квадратичной формой на T^*M:

$$g_x(\eta_x,\eta_x) = g^{-1}(\eta,\eta)(x) := -\rho(\eta_x)^2. \tag{4.3}$$

Эта метрика является римановой, поскольку

$$-\rho(\eta)^2(x) = \sigma_2(D^2)(x,\eta_x)$$

совпадает с главным символом положительно определенного оператора.

В силу формулы (4.3) клиффордово действие ρ распространяется на все клиффордово расслоение $\mathrm{Cl}(M)$. Тем самым, мы построили *спинорное расслоение* $S \to M$ и *клиффордово действие* $\rho : \mathrm{Cl}(M) \to \mathrm{End}\, S$, т.е. Spin^c-структуру на M.

Обратимся теперь к *функции расстояния*, определяемой введенной метрикой g. Пусть $f \in C^\infty(M)$ и d_g – функция расстояния на M, определяемая построенной метрикой. Если $\gamma : [0,1] \to M$ есть кусочно гладкая кривая с началом в точке p и концом в точке q, то

$$f(q) - f(p) = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = \int_0^1 \frac{d}{dt}f(\gamma(t))dt = \\ \int_0^1 df_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t))dt = \int_0^1 g_{\gamma(t)}(\mathrm{grad}_{\gamma(t)}f, \dot\gamma(t))dt.$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского к подынтегральному выражению, получим

$$|f(q) - f(p)| \le \int_0^1 |g_{\gamma(t)}(\mathrm{grad}_{\gamma(t)}f, \dot\gamma(t))|dt \le \\ \int_0^1 |\mathrm{grad}_{\gamma(t)}f|\cdot|\dot\gamma(t)|dt \le \|\mathrm{grad} f\|_\infty \int_0^1 |\dot\gamma(t)|dt = \|\mathrm{grad} f\|_\infty \ell(\gamma),$$

где $\ell(\gamma)$ – длина кривой γ. Поэтому при $\|\mathrm{grad} f\|_\infty \le 1$

$$|f(q) - f(p)| \le \ell(\gamma)$$

для любой кусочно гладкой кривой γ, соединяющей точки p и q. Следовательно,

$$|f(q) - f(p)| \le d_g(p,q) \tag{4.4}$$

и

$$\sup\{|f(q)-f(p)|:\ f\in C^\infty(M) \text{ и } \|\mathrm{grad} f\|_\infty\le 1\}\le d_g(p,q).$$

На самом деле, оценка (4.4) выполняется для любых абсолютно непрерывных функций f, градиент которых определен почти всюду как существенно ограниченное векторное поле.

Для того, чтобы показать, что верхняя грань в формуле (4.4) совпадает с $d_g(p,q)$, возьмем в качестве f функцию

$$f(x)\equiv f_p(x):=d_g(p,x).$$

Эта функция является липшицевой с липшицевой нормой, равной 1 (по неравенству треугольника), и для нее верхняя грань в формуле (4.4) достигается и равна $d_g(p,q)$.

Исходя из этого, получаем

Предложение 40. *Расстояние между точками p и q на многообразии M можно вычислить по формуле*

$$d_g(p,q)=\sup\{|f(q)-f(p)|:\ f\in C^\infty(M)\ \text{с}\ \|[D,f]\|\le 1\}.$$

Доказательство. Так как $[D,f]=\rho(df)$, то

$$\|\rho(df)\|^2_\infty=\sup_{x\in M}\|\rho(df)(x)\|^2=\sup_{x\in M}g_x^{-1}(d\bar f(x),df(x))=$$
$$\sup_{x\in M}g_x(\mathrm{grad}_x\bar f,\mathrm{grad}_x f)=\|\mathrm{grad} f\|^2_\infty,$$

откуда и следует утверждение предложения. □

Таким образом, *расстояние на M целиком определяется в терминах оператора D*.

Обратимся теперь к *спинорной структуре* на M, определяемой в терминах Spin^c-структуры оператором сопряжения C. Для коммутативной алгебры $A=C^\infty(M)$, ввиду совпадения представлений π и π^o, должно выполняться равенство

$$Cf^*C^{-1}=f,$$

т.е. оператор C задает антилинейный автоморфизм спинорного расслоения C.

Если $\eta\in\Omega^1(M)$ есть вещественная 1-форма, то оператор C сплетает $\rho(\eta)$ с $-\rho(\eta)$. Кроме того, C является антиунитарным оператором относительно спаривания $\{\cdot,\cdot\}$ (см. [3],стр. 505). Тем самым, этот оператор удовлетворяет свойствам, перечисленным в предложении 37, и потому действительно определяет спинорную структуру на M.

4.4.2 Оператор Дирака

Оператор Дирака $\mathcal{D}$ для введенной спинорной структуры на M, вообще говоря, отличается от исходного оператора D, но оба они имеют один и тот же главный символ, равный

$$\sigma_1(\mathcal{D})(x,\eta_x)=-i\rho(\eta)(x)=\sigma_1(D)(x,\eta_x).$$

Поэтому указанные операторы отличаются только членом нулевого порядка, задаваемым матричнозначным оператором умножения, действующим в $\mathcal{H}^\infty$:

$$\mathcal{D} = D - m, \tag{4.5}$$

где $m \in \Gamma^\infty(M, \operatorname{End} S)$. Матричнозначная функция m обладает теми же свойствами, что и оператор Дирака, а именно:

$$m^* = m, \quad \chi m = (-1)^n m\chi, \quad CmC^{-1} = \pm m. \tag{4.6}$$

Поскольку операторы D и $\mathcal{D}$ являются эллиптическими, то же самое верно и для их степеней, поэтому мы можем рассматривать некоммутативные интегралы вида $\int f|\mathcal{D}|^{-n}$, определяемые с помощью вычета Водзицки формулой:

$$\int f|\mathcal{D}|^{-n} = c_n \mathrm{Res}(f|\mathcal{D}|^{-n}),$$

где $c_n = \frac{1}{2^{[n/2]}\Omega_n}$. Оператор $f|\mathcal{D}|^{-n}$ для $f \in C^\infty(M)$ имеет порядок, равный $-n$, а его главный символ имеет вид

$$f(x)\sigma_{-n}(f|\mathcal{D}|^{-n}) = f(x)\sigma_{-n}(\Delta^{-n/2}) \cdot \mathrm{Id}.$$

Плотность Водзицки задается формулой

$$\mathrm{res}_x(f|\mathcal{D}|^{-n}) = c'_n f(x)\sqrt{\det g_x}\, d^n x,$$

где $c'_n = 2^{[n/2]}\Omega_n$, а $\nu_g = \sqrt{\det g_x}\, d^n x$ есть плотность римановой метрики g. Поэтому интеграл

$$\int f|\mathcal{D}|^{-n} = \int f\nu_g$$

не зависит от члена нулевого порядка m.

На операторах вида (4.5) с членом m нулевого порядка, удовлетворяющим соотношениям (4.6), можно ввести действие, задаваемое некоммутативным интегралом вида

$$S(\mathcal{D}) = \int |\mathcal{D}|^{-n+2}.$$

Прямое вычисление этого интеграла, проведенное в [3], стр. 507-512, показывает, что указанный функционал действия (рассматриваемый как функция от m) достигает абсолютного минимума при $m = 0$ и этот минимум равен

$$S(D) = -\frac{n-2}{24}\int_M \mathrm{scal}_g \nu_g,$$

т.е. совпадает с *действием Гильберта–Эйнштейна.*

Литература

[1] Х.Басс, *Алгебраическая K-теория*, Мир, Москва, 1973.

[2] A.Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, London–San Diego, 1994.

[3] J.M.Gracia-Bondia, J.C.Varilly, H.Figueroa, *Elements of Noncommutative Geometry*, Birkhäuser, Boston–Basel–Berlin, 2001.

[4] Л.Хермандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*, Мир, Москва, 1986.

[5] M.Khalkhali, *Basic Noncommutative Geometry*, European Mathematical Society, Zürich, 2013.

[6] G.Landi, *An Introduction to Noncommutative Spaces and their Geometries*, Springer, Berlin, 1997.

[7] H.Lawson, M.-L.Michelsohn, *Spin Geometry*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1989.

[8] Дж.Милнор, Дж.Сташефф, *Характеристические классы*, Мир, Москва, 1979.

[9] У.Рудин, *Функциональный анализ*, Мир, Москва, 1975.

[10] А.Г.Сергеев, *Лекции по функциональному анализу*, МИАН, Москва, 2014.

[11] М.Тейлор, *Псевдодифференциальные операторы*, Мир, Москва, 1985.