РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Часть I

М. А. КОРОЛЕВ

1. Простые числа. Теорема Евклида о бесконечности множества простых чисел. Функция $\pi(x)$. Основная теорема арифметики. Решето Эратосфена. Верхняя оценка $\pi(x)$.

2. Функция Мангольдта $\Lambda(n)$. Функция Чебышёва $\psi(x)$. Правильный порядок роста $\psi(x)$. Формула суммирования Абеля. Связь функций $\pi(x)$ и $\psi(x)$.

3. Дзета-функция Римана $\zeta(s)$. Тождество Эйлера. Полюса функций $\zeta(s)$ и $\zeta'(s)/\zeta(s)$ в точке $s = 1$. Тэта-ряд $\theta(x)$. Функциональное уравнение $\zeta(s)$.

4. Функция Римана $\xi(s)$ и её порядок. Нули $\xi(s)$ и произведение Вейерштрасса для $\xi(s)$.

5. Простейшие свойства нулей $\zeta(s)$. Теорема Валле-Пуссена об отсутствии у $\zeta(s)$ нулей в окрестности прямой $\operatorname{Re} s = 1$.

6. Разрывный множитель Дирихле. Формула Перрона (метод комплексного интегрирования). Выражение $\psi(x)$ через нули $\zeta(s)$. Асимптотический закон распределения простых чисел. Простейшие следствия из гипотезы Римана.

7. Полная и приведённая системы вычетов по заданному модулю. Функция Эйлера $\varphi(n)$. Показатель, которому принадлежит число по заданному модулю. Первообразные корни. Индексы.

8. Характеры Дирихле по модулю, равному степени простого числа, их простейшие свойства. Примеры. Примитивные характеры. Сумма Гаусса, её модуль. Характеры Дирихле по составному модулю.

9. Функции Дирихле $L(s, \chi)$. Тождество Эйлера для $L(s, \chi)$. Аналитическое продолжение $l(s, \chi)$ в полуплоскость $\operatorname{Re} s > 0$. Тэта-ряд $\theta(x; \chi)$. Функциональное уравнение для $L(s, \chi)$.

10. Функция $\xi(s, \chi)$. Произведение Вейерштрасса для $\xi(s, \chi)$. Простейшие свойства нулей $L(s, \chi)$. Приближение функции $L'(s, \chi)/L(s, \chi)$ конечной суммой по нулям. Теорема об отсутствии нулей у $L(s, \chi)$ в окрестности единичной прямой.

11. Оценка Виноградова-Пойя суммы значений характера. Нижняя оценка $L(1, \chi)$ для вещественного примитивного характера χ. Теоремы Пэйджа.

12. Теорема Зигеля о границе вещественного нуля функции $L(s, \chi)$ для примитивного вещественного характера χ. Асимптотический закон распределения простых чисел в арифметических прогрессиях с растущим модулем.

Часть II курса предполагается посвятить доказательству плотностной теоремы Бомбьери-Виноградова и её приложениям к задачам теории простых чисел.