# Начала теории Галуа: разрешимость алгебраических уравнений в радикалах

**Андрей Леонидович Канунников**
к. ф.-м. н., мехмат МГУ

Алгебраическое уравнение (с одной неизвестной) — это уравнение вида $P(x) = 0$, где $P(x)$ — многочлен. Его коэффициенты могут быть конкретными числами, могут зависеть от букв, но в любом случае считаются известными. Задача выразить неизвестное $x$ была долгое время основной в алгебре.

**Алгебра в средние века — наука о решении уравнений.**

Линейные и квадратные уравнения умели решать ещё в Древнем мире. В 16-м веке в школе итальянского математика Джероламо Кардано научились решать кубические уравнения, а вскоре и уравнения четвёртой степени. С помощью ряда замен они сводились к последовательному решению двучленных уравнений вида $y^n = a$, поэтому неизвестное $x$ выражалось через коэффициенты с помощью арифметических действий и радикалов. Таким образом,

**уравнения степени не выше четвёртой разрешимы в радикалах.**

При этом в решениях неизбежно возникали квадратные корни из отрицательных чисел. Не сумев побороть эти мнимые числа, их в конце концов узаконили (как в своё время и отрицательные) и тем самым расширили числовую систему до поля комплексных чисел.

**Комплексные числа возникли при решении кубических уравнений.**

Привыкание к комплексным числам, понимание их геометрии заняло больше века. Лишь в начале 18-го века из комплексных чисел научились извлекать корни (формула Муавра). Спустя ещё век немецкий математик Карл Гаусс доказал, что

**любой комплексный многочлен положительной степени имеет комплексный корень.**

Это утверждение по праву стали называть основной теоремой алгебры. И хотя она утверждает, что корни многочленов существуют, но ничего не говорит о том, как эти корни искать. Этот вопрос оставался открытым.

Во второй половине 18-го века французский математик Луи Лагранж систематизировал все известные методы решения уравнений и пересмотрел их, пытаясь найти общий метод, пригодный для любых уравнений. Разработанный им *метод резольвент* универсальным не был, но зато вплотную приблизил задачу к окончательному решению. Идеи Лагранжа развили итальянский математик Паоло Руффини и норвежский математик Нильс Абель, доказавшие, что

**уравнения пятой степени (и выше) в общем виде не разрешимы в радикалах.**

Доказательство Руффини 1799 года содержало пробелы, Абель независимо получил полное доказательство в 1824 году. Но на этом рано было ставить точку. Пусть нет общей формулы, но может быть, каждое *конкретное* уравнение (с числовыми коэффициентами) решается в радикалах, может, для каждого есть свой метод? Оказывается, нет. Например, уравнения $x^5 - x - 1 = 0$, $x^5 - 4x - 2 = 0$ не разрешимы в радикалах. Критерий разрешимости в радикалах числовых уравнений получил гениальный французский математик Эварист Галуа в первой половине 19-го века. Его открытие преобразило всю математику того времени и заложило основы многих её современных разделов, в первую очередь, теорий групп и полей. Позднее идеи Галуа развивались и обобщались, и сегодня под теорией Галуа понимают изучение различных структур (и не только алгебраических) на основе их групп автоморфизмов.

Такова краткая история вопроса, которую мы воссоздадим на первых занятиях.

# Программа курса

## I семестр

**1. История вопроса. Постановка задач и элементарные решения некоторых из них.**

1) Решение уравнений третьей и четвёртой степеней.

2) Метод резольвент Лагранжа.

3) Теорема Абеля–Руффини о неразрешимости общего уравнения пятой степени (элементарное доказательство).

4) Теорема Кронекера о неразрешимости некоторого класса конкретных уравнений пятой степени (элементарное доказательство).

**2. Алгебраическая подготовка: группы, поля, многочлены.**

1) Элементы теории групп: коммутант, разрешимые группы.

2) Расширения полей: алгебраические, конечные, сепарабельные, радикальные, нормальные; алгебраическое замыкание.

3) Некоторые признаки неприводимости многочленов над $\mathbb{Q}$.

4) Круговые многочлены, их неприводимость над $\mathbb{Q}$.

**3. Начала теории Галуа.**

1) Группа Галуа. Соответствия Галуа. Основная теорема теории Галуа.

2) Группа Галуа двучлена. Циклические расширения. Теорема Артина–Шрайера.

3) Теорема: связь между разрешимостью уравнения в радикалах и разрешимостью его группы Галуа.

4) Первые применения: новые доказательства теорем Абеля–Руффини и Кронекера.

5) Критерий Абеля–Галуа разрешимости уравнения простой степени.

## II семестр

**4. Разрешимость в квадратных радикалах.**

1) Группа Галуа многочлена, разрешимого в квадратных радикалах. Критерий разрешимости.

2) Периоды Гаусса.

3) Построимые (циркулем и линейной) правильные многоугольники.

**5. Теория Галуа конечных полей.**

1) Строение конечных полей.

2) Группы автоморфизмов конечных полей.

**6. Вычисление группы Галуа.**

1) Группы Галуа многочленов степени $\leqslant 4$.

2) Резольвентные многочлены.

3) Редукция по простому модулю (переход от $\mathbb{Z}$ к $\mathbb{Z}_p$).

4) Построение многочлена с наперёд заданной группой Галуа.

**7. Топологические аспекты теории Галуа.**

1) Необходимые сведения из топологии и комплексного анализа.

2) Несколько доказательств основной теоремы алгебры.

3) Римановы поверхности, их схемы и группы Галуа.

4) Топологическое доказательство теоремы Абеля.