C*-модули

Определение C*-модуля

Определение 1. $\mathcal{E}$ — (правый) C*-предмодуль над C*-алгеброй $\mathcal{A}$, если выполнены следующие условия:

1. $\mathcal{E}$ — комплексное векторное пространство;
2. $\mathcal{E}$ — (правый) $\mathcal{A}$-модуль;
3. на $\mathcal{E}$ задано спаривание $(\cdot,\cdot) : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathcal{A}$ со следующими свойствами, верными для любых $r, s, t \in \mathcal{E}$ и $a \in \mathcal{A}$:
   (a) $(r, s+t) = (r, s) + (r, t)$,
   (b) $(r, sa) = (r, s)a$,
   (c) $(r, s) = (s, r)^*$,
   (d) $(s, s) > 0$ при $s \neq 0$ (то есть (s, s) — положительный элемент в C*-алгебре $\mathcal{A}$);
4. спаривание $(\cdot,\cdot)$ полуторалинейно над $\mathbb{C}$ (линейно по второму аргументу и антилинейно по первому).

Заметим, что из определения спаривания вытекает, в частности, что $(ra, s) = a^*(r, s)$.

В дальнейшем мы будем рассматривать в основном только правые C*-(пред)модули, поэтому слово "правый" мы будем, как правило, опускать. Более того, в основном рассматриваемые нами C*-(пред)модули будут над *унитальными* C*-алгебрами $\mathcal{A}$. В этом случае, очевидно, свойство 4 из определения C*-предмодуля следует из свойства 3.

Оказывается, что с помощью спаривания на C*-предмодуле $\mathcal{E}$ можно ввести норму $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ следующим образом. Пусть $s \in \mathcal{E}$, тогда положим

$$\|s\|_{\mathcal{E}} := \sqrt{\|(s, s)\|},$$

здесь $\|\cdot\|$ — норма в C*-алгебре $\mathcal{A}$ (над которой задан C*-предмодуль $\mathcal{E}$). Чтобы показать, что $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ действительно является нормой, докажем сначала аналог неравенства Коши – Буняковского для $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$.

Утверждение 1. *Пусть $\mathcal{E}$ — C*-предмодуль над C*-алгеброй $\mathcal{A}$. Тогда для любых $r, s \in \mathcal{E}$ выполнено неравенство*

$$\|(s,r)\| \leqslant \sqrt{\|(s,s)\|}\sqrt{\|(r,r)\|},$$

где $\|\cdot\|$ — норма в $\mathcal{A}$.

Доказательство приведем для случая, когда C*-алгебра $\mathcal{A}$ содержит единицу $\mathbb{1}$. Пусть $a \in \mathcal{A}$. Тогда по свойствам спаривания имеем:

$$0 \leqslant (ra + s, ra + s) = a^*(r,r)a + a^*(r,s) + (s,r)a + (s,s). \tag{1}$$

Заметим, что так как (r,r) — положительный элемент в $\mathcal{A}$, то $a^*(r,r)a \leqslant \|(r,r)\|a^*a$ и $(s,s) \leqslant \|(s,s)\| \cdot \mathbb{1}$ (см. упражнения 2, 3 из семинара 2). Поэтому из (1) получаем:

$$0 \leqslant \|(r,r)\|a^*a + a^*(r,s) + (s,r)a + \|(s,s)\| \cdot \mathbb{1}. \tag{2}$$

Выбирая теперь $a = \dfrac{-(r,s)}{\|(r,r)\|}$ и учитывая, что $(r,s) = (s,r)^*$, получаем из (2):

$$0 \leqslant -\frac{(s,r)(s,r)^*}{\|(r,r)\|} + \|(s,s)\| \cdot \mathbb{1}.$$

Следовательно,

$$0 \leqslant (s,r)(s,r)^* \leqslant \|(r,r)\|\|(s,s)\| \cdot \mathbb{1}.$$

Откуда следует (см. упражнение 4 из семинара 2) требуемое утверждение.

Упражнение 1. Показать, что в C*-предмодуле $\mathcal{E}$ функция $\|s\|_{\mathcal{E}} := \sqrt{\|(s,s)\|}$ является нормой. Подсказка: чтобы доказать неравенство треугольника, воспользуйтесь утверждением 1.

Определение 2. C*-предмодуль $\mathcal{E}$ называется C*-модулем, если $\mathcal{E}$ является полным относительно нормы $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$.

Упражнение 2. Показать, что пополнение любого C*-предмодуля $\mathcal{E}$ по норме $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ будет C*-модулем. (То есть показать, что спаривание корректно продолжается на пополнение.)

Примеры C*-модулей

Напомним, что все C*-модули у нас правые.

1. Гильбертово пространство является C*-модулем над $\mathbb{C}$ (спаривание — это обычное скалярное произведение).

2. Любая C*-алгебра $\mathcal{A}$ является C*-модулем над собой со спариванием $(a, b) := a^*b$.

3. Введенный на лекции 2 свободный $\mathcal{A}$-модуль $\mathcal{A}^n$ (вектор-столбцы с компонентами из $\mathcal{A}$) является C*-модулем над $\mathcal{A}$. Спаривание двух элементов $a = (a_1, \ldots, a_n)^t$ и $b = (b_1, \ldots, b_n)^t$ равно $(a, b) := (a_1^*, \ldots, a_n^*)(b_1, \ldots, b_n)^t = (a_1^*b_1 + \cdots + a_n^*b_n)$.

4. Также введенный на лекции 2 свободный $\mathcal{A}$-модуль ${}^n\mathcal{A}$ (вектор-строки с компонентами из $\mathcal{A}$) является C*-модулем над $\mathrm{Mat}_n(\mathcal{A})$. Спаривание двух элементов $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, \ldots, b_n)$ равно $(a, b) := (a_1^*, \ldots, a_n^*)^t(b_1, \ldots, b_n)$.

5. Введенный на лекции 3 C*-модуль $\mathcal{H} \otimes \mathcal{A}$ над $\mathcal{A}$, где $\mathcal{H}$ — комплексное гильбертово пространство. Разберем его конструкцию подробнее. Сначала рассматривается алгебраическое тензорное произведение $\mathcal{H}\ \mathcal{A}$ комплексного гильбертова пространства $\mathcal{H}$ и C*-алгебры $\mathcal{A}$ (как линейных пространств над $\mathbb{C}$). На нем вводится спаривание следующим образом. На простых тензорах $(\xi \odot a, \eta \odot b) := (\xi, \eta)_{\mathcal{H}} a^*b$ (где $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$ — скалярное произведение в $\mathcal{H}$), далее спаривание продолжается по $\mathbb{C}$-линейности на их линейные комбинации, то есть на все $\mathcal{H} \odot \mathcal{A}$. (Проверьте, что определение корректно!) Тем самым $\mathcal{H} \odot \mathcal{A}$ является C*-предмодулем над $\mathcal{A}$. Его пополнение по норме $\|\cdot\|_{\mathcal{H}\odot\mathcal{A}}$ (см. упражнение 2) и будет C*-модулем $\mathcal{H} \otimes \mathcal{A}$.

6. Также на лекции 3 был введен еще один C*-модуль $\mathcal{H}_{\mathcal{A}} \equiv l^2_{\mathcal{A}}$ над $\mathcal{A}$. Напомним, что он состоит из последовательностей $a = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ элементов из $\mathcal{A}$, для которых ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^*a_k$ сходится в $\mathcal{A}$. Спаривание определяется следующим образом: $(a, b) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k^*b_k$.

7. Пусть E — эрмитово векторное расслоение (то есть векторное расслоение, в каждом слое которого E_x задана эрмитова форма $H_x(\cdot, \cdot)$,

непрывно зависящая от точки базы $x \in M$) над компактным топологическим пространством M. Тогда пространство его сечений $\Gamma(M,E)$ является C*-модулем над $C(M)$. Спаривание двух сечений $s_1, s_2 \in \Gamma(M,E)$ определяется следующим образом: $(s_1,s_2)(x) := H_x(s_1(x), s_2(x))$.

Упражнение 3. Проверить, что все приведенные выше примеры C*-модулей действительно являются C*-модулями.

Упражнение 4. Показать, что если гильбертово пространство $\mathcal{H}$ сепарабельно, то C*-модули $\mathcal{H}\otimes\mathcal{A}$ и $\mathcal{H}_\mathcal{A}$ (см. примеры 5, 6) изоморфны. Наводящее соображение: зафиксируйте в $\mathcal{H}$ некоторый ортонормированный базис $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ и вычислите в $\mathcal{H}\otimes\mathcal{A}$ спаривание $(\sum_{j=1}^{n_1} e_j\otimes a_j, \sum_{j=1}^{n_2} e_j\otimes b_j)$, где a_j, b_j — произвольные элементы $\mathcal{A}$.

Отличие C*-модулей от гильбертовых пространств

Понятие C*-модуля можно рассматривать как обобщение понятия гильбертова пространства (как отмечалось в примере 1, гильбертово пространство является C*-модулем над $\mathbb{C}$). Однако ряд привычных свойств гильбертовых пространств и операторов в них оказываются неверными при переходе к общим C*-модулям. Проиллюстрируем два таких свойства.

Хорошо известно, что если $\mathcal{H}_1$ — замкнутое подпространство в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, то $\mathcal{H}$ разлагается в прямую сумму $\mathcal{H}_1$ и его ортогонального дополнения $\mathcal{H}_1^\perp$, то есть $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_1^\perp$. Если $\mathcal{E}_1$ — подмодуль в C*-модуле $\mathcal{E}$, то можно так же, как и в случае гильбертова пространства, определить его ортогональное дополнение: $\mathcal{E}_1^\perp := \{r \in \mathcal{E} : (r,s) = 0,\ \forall s \in \mathcal{E}_1\}$. Однако в общем случае неверно, что если $\mathcal{E}_1$ — замкнутый подмодуль, то $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_1^\perp$.

Упражнение 5. Приведите пример C*-модуля $\mathcal{E}$ и такого его замкнутого подмодуля $\mathcal{E}_1$, что $\mathcal{E} \neq \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_1^\perp$. Подсказка: рассмотрите в качестве $\mathcal{E}$ алгебру $C(M)$, где M — компактное топологическое пространство без изолированных точек, как модуль над собой (см. пример 2). В качестве $\mathcal{E}_1$ можно взять идеал (а следовательно, и подмодуль) в $C(M)$, состоящий из функций, равных 0 в некоторой фиксированной точке $x \in M$.

Другой пример, иллюстрирующий различие между гильбертовыми пространствами и общими C*-модулями, будет связан с линейными операторами в них. На лекции 3 для любого C*-модуля $\mathcal{E}$ над $\mathcal{A}$ вводилось (и далее активно использовалось) пространство $\operatorname{End}_{\mathcal{A}} \mathcal{E}$, которое состояло не просто из $\mathcal{A}$-линейных ограниченных операторов в $\mathcal{E}$, но еще и допускающих сопряжение. В случае гильбертовых пространств последнее требование излишне, ибо любой ограниченный линейный оператор в гильбертовом пространстве имеет сопряженный. Однако в случае общих C*-модулей это не так.

Приведем пример C*-модуля $\mathcal{E}$ над некоторой C*-алгеброй $\mathcal{A}$ и ограниченного $\mathcal{A}$-линейного оператора T в $\mathcal{E}$, не допускающего сопряжения. В качестве $\mathcal{A}$ снова рассмотрим алгебру $C(M)$, где M — компактное топологическое пространство без изолированных точек. Пусть J — идеал в $C(M)$, состоящий из функций, равных 0 в некоторой фиксированной точке $x_0 \in M$. Как отмечалось ранее, и $C(M)$, и J являются C*-модулями над $C(M)$. В качестве $\mathcal{E}$ рассмотрим прямую сумму модулей $C(M)$ и J, то есть $\mathcal{E} := C(M) \oplus J$ — C*-модуль над $C(M)$. Следовательно, спаривание в $\mathcal{E}$ будет задаваться формулой:

$$(f \oplus u, g \oplus v) = \bar{f}g + \bar{u}v.$$

Оператор T определим следующим образом:

$$T\,(f \oplus u) := u \oplus 0.$$

Очевидно, что T — ограниченный ($\|T\| = 1$) $C(M)$-линейный оператор.

Утверждение 2. *Только что определенный оператор T не имеет ограниченного сопряженного оператора.*

Доказательство. Предположим противное, пусть существует T^* — оператор, сопряженный T. Тогда $T^*(1 \oplus 0) = h \oplus w$ для некоторых $h \in C(M)$ и $w \in J$. Следовательно, для любой функции $k \in J$ имеем:

$$k = (1 \oplus 0, k \oplus 0)) = (1 \oplus 0, T(0 \oplus k)) =$$

$$= (T^*(1 \oplus 0), 0 \oplus k) = (h \oplus w, 0 \oplus k) = \bar{w}k.$$

Итак, получили, что для любой функции $k \in J$ выполнено $k = \bar{w}k$. Значит, $w \equiv 1$, но $w \in J$, в частности, $w(x_0) = 0$, противоречие. Утверждение 2 доказано.