Семинар №3. Свойства проективных модулей

В данном разделе $\mathcal{A}$ — любое (ассоциативное) кольцо, хотя в дальнейшем мы будем использовать утверждения этого раздела лишь для случая, когда $\mathcal{A}$ — С*-алгебра.

Напомним данное на лекции определение проективного модуля.

Определение 1. Правый $\mathcal{A}$-модуль $\mathcal{P}$ называется *проективным*, если он обладает следующим универсальным свойством: для любого $\mathcal{A}$-линейного отображения правых $\mathcal{A}$-модулей $\varphi\colon \mathcal{P} \to \mathcal{G}$ и любого сюръективного $\mathcal{A}$-линейного отображения правых $\mathcal{A}$-модулей $f\colon \mathcal{E} \to \mathcal{G}$ существует $\mathcal{A}$-линейное отображение $\psi\colon \mathcal{P} \to \mathcal{E}$ такое, что $\varphi = f\psi$, то есть следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, "f"] & \mathcal{G} \arrow[r] & 0 \\ \mathcal{P} \arrow[u, dashed, "\psi"] \arrow[ur, "\varphi"'] & & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Напомним также, что *свободным* правым $\mathcal{A}$-модулем называется модуль $\mathcal{F}$, обладающий $\mathcal{A}$-*базисом*, то есть таким множеством образующих T, что для любых различных элементов $t_1, \dots t_r \in T$ из соотношения $t_1 a_1 + \dots + t_r a_r = 0$ с $a_1, \dots, a_r \in \mathcal{A}$ следует, что $a_1 = \dots = a_r = 0$.

Свойства проективных модулей.

1. Любой свободный правый $\mathcal{A}$-модуль проективен.

2. Прямая сумма правых $\mathcal{A}$-модулей проективна тогда и только тогда, когда каждое слагаемое в ней проективно.

3. Правый $\mathcal{A}$-модуль $\mathcal{P}$ проективен тогда и только тогда, когда любая короткая точная последовательность $\mathcal{A}$-модулей

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{P} \longrightarrow 0 \tag{1}$$

расщепляется.

4. Правый $\mathcal{A}$-модуль $\mathcal{P}$ проективен тогда и только тогда, когда он выделяется прямым слагаемым в некотором свободном правом $\mathcal{A}$-модуле.

5. Правый $\mathcal{A}$-модуль $\mathcal{P}$ проективен тогда и только тогда, когда он имеет вид $\mathcal{P} = \varepsilon\mathcal{F}$, где $\mathcal{F}$ — некоторый свободный правый $\mathcal{A}$-модуль, а ε — $\mathcal{A}$-линейное отображение модуля $\mathcal{F}$ в себя, являющееся *идемпотентом*, то есть $\varepsilon^2 = \varepsilon$.

6. Если проективный $\mathcal{A}$-модуль конечно порожден (то есть обладает конечной системой образующих), то свободный модуль в свойствах 4 и 5 тоже можно выбрать конечно порожденным.

Доказательства этих свойств довольно просты.

1. Пусть $\mathcal{F}$ — свободный правый $\mathcal{A}$-модуль с системой образующих $\{t_\alpha\}_{\alpha\in I}$ (здесь I — некоторое множество индексов, возможно, бесконечное и даже несчетное). Пусть $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ — $\mathcal{A}$-линейное отображение правых $\mathcal{A}$-модулей и $f\colon \mathcal{E} \to \mathcal{G}$ — сюръективное $\mathcal{A}$-линейное отображение. Для любого элемента t_α системы образующих $\mathcal{F}$ в силу сюръективности отображения f найдется такой элемент $e_\alpha \in \mathcal{E}$, что $f(e_\alpha) = \varphi(t_\alpha)$. Определим отображение ψ таким образом: положим $\psi(t_\alpha) = e_\alpha$, а далее продолжим по $\mathcal{A}$ -линейности. Тогда $f(\psi(t_\alpha)) = f(e_\alpha) = \varphi(t_\alpha)$ для любого $\alpha \in I$, а значит, в силу $\mathcal{A}$-линейности отображений $f\circ\psi$ и φ равенство $f(\psi(t)) = \varphi(t)$ выполняется для любого $t \in \mathcal{P}$.

2. Пусть $\mathcal{P} = \bigoplus\limits_{\alpha\in I} \mathcal{P}_\alpha$ — прямая сумма правых $\mathcal{A}$-модулей.

Предположим, что модуль $\mathcal{P}$ проективен. Покажем, что каждый модуль $\mathcal{P}_\alpha$ также проективен. Пусть для некоторого α имеются отображения $\varphi\colon \mathcal{P}_\alpha \to \mathcal{G}$ — $\mathcal{A}$-линейное отображение правых $\mathcal{A}$-модулей и $f\colon \mathcal{E} \to \mathcal{G}$ — сюръективное $\mathcal{A}$-линейное отображение. Тогда отображение φ можно продолжить до $\mathcal{A}$-линейного отображения $\tilde{\varphi}\colon \mathcal{P} \to \mathcal{G}$, полагая его равным нулю на всех слагаемых $\mathcal{P}_\beta$ с $\beta \in I$, $\beta \neq \alpha$. Поскольку модуль $\mathcal{P}$ проективен, найдется отображение $\psi\colon \mathcal{P} \to \mathcal{E}$ такое, что $\tilde{\varphi} = f\circ\psi$. Ограничивая отображение ψ на $\mathcal{P}_\alpha$, мы получим отображение ψ_α такое, что $\varphi = f\circ\psi_\alpha$. Значит, модуль $\mathcal{P}_\alpha$ проективен.

Предположим теперь, что каждый модуль $\mathcal{P}_\alpha$ проективен. Пусть $\varphi\colon \mathcal{P} \to \mathcal{G}$ — $\mathcal{A}$-линейное отображение правых $\mathcal{A}$-модулей и $f\colon \mathcal{E} \to \mathcal{G}$ — сюръективное $\mathcal{A}$-линейное отображение. Каждое ограничение $\varphi_\alpha := \varphi|_{\mathcal{P}_\alpha}$ есть $\mathcal{A}$-линейное отображение из $\mathcal{P}_\alpha$ в $\mathcal{G}$, и по свойству проективности модулей $\mathcal{P}_\alpha$ для каждого $\alpha \in I$ найдется $\mathcal{A}$-линейное отображение $\psi_\alpha\colon \mathcal{P}_\alpha \to \mathcal{E}$ такое, что $\varphi_\alpha = f\circ\psi_\alpha$. Тогда прямая сумма этих отображений $\psi = \bigoplus\limits_{\alpha\in I}\psi_\alpha\colon \mathcal{P} \to \mathcal{E}$ будет удовлетворять условию $\varphi = f\circ\psi$. Поэтому модуль $\mathcal{P}$ проективен.

3 и 4. Свойства 3 и 4 удобно доказывать вместе. Мы покажем, что 1) если $\mathcal{A}$-модуль $\mathcal{P}$ проективен, то всякая короткая точная последовательность вида (1) расщепляется; 2) для любого $\mathcal{A}$-модуля $\mathcal{P}$ найдется короткая точная последовательность вида (1), в которой $\mathcal{G}$ — свободный модуль, и если она расщепляется, то модуль $\mathcal{P}$ есть подмодуль в $\mathcal{G}$, ко-

торый выделяется прямым слагаемым. Если модуль $\mathcal{P}$ есть подмодуль в свободном модуле, который выделяется прямым слагаемым, то $\mathcal{P}$ проективен вследствие доказанных свойств 1 и 2.

Докажем 1). Пусть $\mathcal{A}$-модуль $\mathcal{P}$ проективен и имеется короткая точная последовательность

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{P} \longrightarrow 0.$$

Вследствие проективности модуля $\mathcal{P}$ найдется такое отображение ψ, что следующая диаграмма будет коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{E} \arrow[r, "f"] & \mathcal{G} \arrow[r, "g"] & \mathcal{P} \arrow[r] & 0 \\
 & & & \mathcal{P} \arrow[u, "Id_{\mathcal{P}}"'] \arrow[ul, dashed, "\psi"] &
\end{tikzcd}$$

Отображение ψ расщепляет короткую точную последовательность, поскольку $g \circ \psi = Id_{\mathcal{P}}$, то есть отображение ψ является правым обратным к g. Если $x \in \mathcal{G}$, то $x - \psi(g(x)) \in \ker g$, поэтому $\mathcal{G} = \operatorname{im} \psi \oplus \ker g = \operatorname{im} \psi \oplus \operatorname{im} f$.

Докажем 2). Пусть $\mathcal{P}$ — произвольный правый $\mathcal{A}$-модуль. Построим короткую точную последовательность вида (1), в которой $\mathcal{G}$ — свободный $\mathcal{A}$-модуль. Выберем в $\mathcal{P}$ какую-нибудь систему образующих $\{p_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Рассмотрим свободный правый $\mathcal{A}$-модуль $\mathcal{F}$ с $\mathcal{A}$-базисом $\{f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ такой же мощности, что и $\{p_\alpha\}$, то есть модуль, состоящий из всевозможных формальных конечных сумм вида $\sum_{j=1}^{n} f_{\alpha_j} a_j$ с коэффициентами $a_j \in \mathcal{A}$, $j = 1 \dots, n$ (число n не фиксировано; сумма двух таких сумм и произведение такой суммы на элемент алгебры $\mathcal{A}$ определяется естественным образом). Определим отображение $g\colon \mathcal{F} \to \mathcal{P}$: положим $g(f_\alpha) = p_\alpha$, а далее продолжим g по $\mathcal{A}$-линейности. Поскольку $\{p_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — система образующих модуля $\mathcal{P}$, то определенное таким образом отображение g будет сюръективным. Полагая $\mathcal{E} = \ker g$ и обозначая через i вложение $\ker g$ в $\mathcal{F}$, получаем короткую точную последовательность вида (1):

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{i} \mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{P} \longrightarrow 0. \tag{2}$$

Если правый $\mathcal{A}$-модуль $\mathcal{P}$ обладает тем свойством, что любая точная поледовательность вида (1) расщепляется, то и построенная для него последовательность (2) также расщепляется, то есть существует $\mathcal{A}$-линейное отображение $\psi\colon \mathcal{P} \to \mathcal{F}$ такое, что $g \circ \psi = Id_{\mathcal{P}}$. Тогда для любого элемента $x \in \mathcal{F}$ верно равенство $g(x - \psi(g(x))) = 0$, а значит, $x - \psi(g(x)) \in \ker g$, и поэтому $\mathcal{F} = \operatorname{im}\psi \oplus \ker\psi$. Поскольку $g \circ \psi = Id_{\mathcal{P}}$, то отображение ψ инъективно, поэтому $\operatorname{im}\psi \cong \mathcal{P}$. Значит, модуль $\mathcal{P}$ выделяется прямым слагаемым в свободном модуле $\mathcal{F}$.

Итак, свойства 3 и 4 доказаны.

5. Если правый $\mathcal{A}$-модуль проективен, то по свойству 4 найдется такой свободный $\mathcal{A}$-модуль $\mathcal{F}$, что $\mathcal{F} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ — некоторый $\mathcal{A}$-модуль. Требуемый идемпотент ε есть проекция в этой прямой сумме на первое слагаемое.

Обратно, если ε — $\mathcal{A}$-линейное отображение некоторого свободного $\mathcal{A}$-модуля $\mathcal{F}$ в себя такое, что $\varepsilon^2 = \varepsilon$, то $\mathcal{F} = \operatorname{im}\varepsilon \oplus \ker\varepsilon$, так как если $x \in \mathcal{F}$, то $x = \varepsilon x + (x - \varepsilon x)$ и $\varepsilon(x - \varepsilon x) = 0$. Значит, модуль $\varepsilon\mathcal{F} = \operatorname{im}\varepsilon$ выделяется прямым слагаемым в свободном модуле $\mathcal{F}$

6. Если $\mathcal{P}$ — конечно порожденный проективный правый $\mathcal{A}$-модуль с системой образующих $p_1, p_2, \ldots, p_r$, то в доказательстве свойства 4 свободный модуль $\mathcal{F}$ также можно выбрать с конечным $\mathcal{A}$-базисом $f_1, f_2, \ldots f_r$. Поэтому конечно порожденный проективный $\mathcal{A}$-модуль выделяется прямым слагаемым в свободном $\mathcal{A}$-модуле $\mathcal{F}$ с конечным базисом. А значит, модуль $\mathcal{P}$ является образом некоторого $\mathcal{A}$-линейного идемпотента, действующего на свободном модуле $\mathcal{F}$ с конечным базисом (см. доказательство свойства 5).