Семинар №2. Теорема Гельфанда – Наймарка.

Положительные элементы, положительные функционалы, состояния

Определение 1. Элемент a C*-алгебры $\mathcal{A}$ называется *положительным*, если он самосопряжен ($a = a^*$) и его спектр неотрицателен ($\mathrm{sp}(a) \in [0, \infty)$).

Упражнение 1. Показать, что $a \in \mathcal{A}$ положительный тогда и только тогда, когда $a = b^*b$ для некоторого $b \in \mathcal{A}$. (Подсказка: показать, что положительный элемент a обладает корнем $\sqrt{a}$.)

На самосопряженных элементах C*-алгебры можно ввести отношение частичного порядка:

Определение 2. Пусть a, b — самосопряженные элементы C*-алгебры. Будем говорить, что $a \leqslant b$, если элемент $b - a$ положителен.

Чтобы убедиться в том, что введенное отношение действительно является отношением частичного порядка (то есть из $a \leqslant b$ и $b \leqslant c$ следует $a \leqslant c$), достаточно показать, что сумма положительных элементов будет положительным элементом. (Доказательство этого факта можно, например, получить из теоремы Гельфанда – Наймарка (см. ниже) и аналогичного факта для линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве.)

Упражнение 2. Показать, что если алгебра $\mathcal{A}$ содержит единицу $\mathbb{1}$, то любой самосопряженный элемент a удовлетворяет неравенству

$$-\|a\| \cdot \mathbb{1} \leqslant a \leqslant \|a\| \cdot \mathbb{1}.$$

Упражнение 3. Пусть алгебра $\mathcal{A}$ содержит единицу $\mathbb{1}$. Показать, что для произвольных $a, b \in \mathcal{A}$ верно

$$b^*a^*ab \leqslant \|a^*a\| b^*b.$$

(Это утверждение верно для произвольных C*-алгебр, не обязательно унитальных.)

Упражнение 4. Показать, что если для положительны элементов a, b алгебры $\mathcal{A}$ выполненно неравенство $0 \leqslant a \leqslant b$, то $\|a\| \leqslant \|b\|$. Подсказка: используйте упражнение 2 этого семинара и упражнение 10 из семинара 1.

Упражнение 5. Показать, что из неравенства $0 \leqslant a \leqslant \mathbb{1}$ следует неравенство $0 \leqslant a^2 \leqslant a$.

Определение 3. Линейный функционал $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ называется *положительным*, если $\varphi(a) \geqslant 0$ для любого положительного $a \in \mathcal{A}$.

Упражнение 6. Предположим, что алгебра $\mathcal{A}$ содержит единицу $\mathbb{1}$. Показать, что любой положительный линейный функционал φ на $\mathcal{A}$ является ограниченным, причем $\|\varphi\| = \varphi(\mathbb{1})$. Подсказка: воспользоваться тем, что для скалярного произведения на $\mathcal{A}$, задаваемого φ, выполнено неравенство Коши – Буняковского (см. ниже).

Упражнение 7 (*)**.** Верно и обратное. Предположим, что алгебра $\mathcal{A}$ содержит единицу $\mathbb{1}$. Показать, что любой линейный ограниченный функционал φ на $\mathcal{A}$ со свойством $\varphi(\mathbb{1}) = \|\varphi\|$ является положительным.

Если алгебра не содержит единицы, то любой положительный функционал также будет ограниченным (для интересующегося читателя: в этом случае единица заменяется на аппроксимативную единицу).

Определение 4. Положительный линейный функционал $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ с нормой $\|\varphi\| = 1$ называется *состоянием.*

Понятно, что множество состояний является выпуклым множеством, то есть, если φ, ψ — состояния, то и $t\varphi + (1-t)\psi$, где $t \in [0,1]$, также будет состоянием.

Определение 5. Состояние φ называется чистым, если оно не представляется в виде суммы $t\psi_1 + (1-t)\psi_2$, где ψ_1, ψ_2 — состояния и $t \in (0,1)$.

ГНС-конструкция и теорема Гельфанда – Наймарка

Универсальное описание всех C*-алгебр дает теорема Гельфанда – Наймарка.

Теорема 1 (Гельфанд – Наймарк)**.** *Любая C^*-алгебра изоморфна некоторой подалгебре в алгебре $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ограниченных линейных операторов в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.*

В основе доказательства теоремы Гельфанда – Наймарка лежит так называемая *ГНС-конструкция* (Гельфанд – Наймарк – Сигал). ГНС-конструкция — это способ по любому состоянию φ на C*-алгебре $\mathcal{A}$ построить *-представление π_φ алгебры $\mathcal{A}$ в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_\varphi$. Причем это представление будет гомоморфизмом $\mathcal{A}$ в алгебру $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\varphi)$ — *ограниченных* линейных операторов на $\mathcal{H}_\varphi$.

Перейдем к поэтапному **описанию ГНС-конструкции**. Пусть φ — состояние на C*-алгебре $\mathcal{A}$. Тогда

1. Определим (возможно, вырожденное) скалярное произведение на $\mathcal{A}$ формулой

$$(a, b)_\varphi = \varphi(a^* b).$$

Оно будет линейно по второму аргументу и антилинейно по первому.

Упражнение 8. Показать, что введенная полуторалинейная форма действительно будет скалярным произведением на $\mathcal{A}$ (возможно, вырожденным, то есть из $(a, a)_\varphi = 0$ в общем случае не следует $a = 0$).

2. Сделаем скалярное произведение $(a, b)_\varphi$ невырожденным, перейдя к факторпространству. (Это общая конструкция для линейных пространств, не использующая то, что $\mathcal{A}$ — алгебра.)

Пусть

$$N_\varphi := \{a \in \mathcal{A} : (a, a)_\varphi = 0\}.$$

Рассмотрим факторпространство $\mathcal{A}/N_\varphi$, его элементы будем обозначать $[a]_\varphi := a + N_\varphi$. Введем на нем скалярное произведение

$$([a]_\varphi, [b]_\varphi)_\varphi := (a, b)_\varphi.$$

Покажем, что введенное скалярное произведение определено корректно, то есть не зависит от выбора элемента из класса сопряженности. Заметим, что так как $(a, b)_\varphi$ является скалярным произведением (пусть даже и вырожденным), то для него верно неравенство Коши – Буняковского:

$$|(a, b)_\varphi|^2 \leqslant (a, a)_\varphi (b, b)_\varphi.$$

Поэтому

$$N_\varphi = \{a \in \mathcal{A} : (b, a)_\varphi = 0 \ \forall b \in \mathcal{A}\} = \{a \in \mathcal{A} : (a, b)_\varphi = 0 \ \forall b \in \mathcal{A}\}, \qquad (1)$$

откуда следует корректность введенного скалярного произведения $([a]_\varphi, [b]_\varphi)_\varphi$.

Итак, скалярное произведение $([a]_\varphi, [b]_\varphi)_\varphi$ невырождено на $\mathcal{A}/N_\varphi$. В качестве гильбертова пространства $\mathcal{H}_\varphi$ возьмем пополнение пространства $\mathcal{A}/N_\varphi$ по норме, порожденной скалярным произведением $([a]_\varphi, [b]_\varphi)_\varphi$.

3. Определим представление π_φ алгебры $\mathcal{A}$ в $\mathcal{H}_\varphi$ следующим образом:

$$\pi_\varphi(a) : [b]_\varphi \mapsto [ab]_\varphi$$

для любого $a \in \mathcal{A}$ и $[b]_\varphi \in \mathcal{H}_\varphi$. Чтобы убедиться в том, что определение корректно, покажем, что N_φ — *левый идеал в* $\mathcal{A}$ (но (в общем случае) не правый!). Для этого воспользуемся описанием N_φ в (1) и формулой для скалярного произведения $(a, b)_\varphi = \varphi(a^* b)$. Получим

$$N_\varphi = \{a \in \mathcal{A} : \varphi(b^* a) = 0 \ \forall b \in \mathcal{A}\}.$$

Поэтому N_φ — левый идеал в $\mathcal{A}$.

Упражнение 9. Показать, что построенный оператор $\pi_\varphi(a)$ ограничен на $\mathcal{A}/N_\varphi$ и, более того, $\|\pi_\varphi(a)\| \leqslant \|a\|$. Под $\|\pi_\varphi(a)\|$ понимается операторная норма на операторах в пространстве $\mathcal{H}_\varphi$, а под $\|a\|$ — норма в алгебре $\mathcal{A}$ (не в пространстве $\mathcal{H}_\varphi$). Подсказка: воспользоваться упражнением 3.

Упражнение 10. Показать, что построенное представление является *-представлением, то есть $\pi_\varphi(a^*) = (\pi_\varphi(a))^*$, где $(\pi_\varphi(a))^*$ — оператор, сопряженный к оператору $\pi_\varphi(a)$.

Так как любой ограниченный линейный оператор, заданный на плотном подпространстве гильбертова пространства, продолжается по непрерывности до ограниченного оператора на всем пространстве с сохранением нормы, то получаем, что π_φ — **требуемое представление**.

Заметим, что если алгебра $\mathcal{A}$ содержит единицу $\mathbb{1}$, то вектор $[\mathbb{1}]_\varphi$ является *циклическим* для представления π_φ (то есть множество $\{\pi_\varphi(a)[\mathbb{1}]_\varphi, a \in \mathcal{A}\}$ плотно в $\mathcal{H}_\varphi$). Поэтому, в частности, единица $\mathbb{1}$ алгебры переходит в единичный оператор $\mathcal{I}$ на $\mathcal{H}_\varphi$ (а не в какой-то произвольный проектор).

Упражнение 11 (*)**.** Представление π_φ будет неприводимым тогда и только тогда, когда состояние φ — *чистое*.

Итак, требуемое представление π_φ построено. Теперь перейдем к теореме Гельфанда – Наймарка

Идея доказательства теоремы Гельфанда – Наймарка.

Упражнение 12. Для любого ненулевого элемента a C*-алгебры $\mathcal{A}$ существует состояние φ_a такое, что $\varphi_a(a^*a) = \|a\|^2$. Подсказка: воспользоваться теоремой Хана – Банаха и упражнением 7.

Теперь рассмотрим прямую сумму ГНС-представлений, отвечающих всевозможным φ_a:

$$\pi := \bigoplus_{\varphi_a : a \in \mathcal{A}\setminus\{0\}} \pi_{\varphi_a},$$

действующую в пространстве $\mathcal{H} := \bigoplus\limits_{\varphi_a : a \in \mathcal{A}\setminus\{0\}} \mathcal{H}_{\varphi_a}$.

Покажем, что представление π искомое. Точнее, нам нужно показать, что $\|\pi(a)\| = \|a\|$ для любого $a \in \mathcal{A}$. Заметим, что для произвольного линейного оператора L, являющегося прямой суммой других операторов $L := \bigoplus\limits_{\mu \in M} L_\mu$, где M некоторое (не обязательно счетное) множество, его норма вычисляется как

$$\|L\| = \sup_{\mu \in M} \|L_\mu\|.$$

Поэтому, используя упражнение 9, получаем, что $\|\pi(a)\| \leqslant \|a\|$.

В силу вышесказанного для доказательства того, что $\|\pi(a)\| = \|a\|$, достаточно показать, что $\|\pi_{\varphi_a}(a)\| = \|a\|$. Для этого мы покажем, что на векторе $[\mathbb{1}]_{\varphi_a}$ эта норма достигается:

$$\|\pi_{\varphi_a}(a)[\mathbb{1}]_{\varphi_a}\|_{\varphi_a} = \|a\|^2 \|[\mathbb{1}]_{\varphi_a}\|_{\varphi_a}. \tag{2}$$

Чтобы это увидеть, заметим, что так как φ_a — состояние, то $\varphi_a(\mathbb{1}) = 1$ (см. упражнение 6), следовательно,

$$([\mathbb{1}]_{\varphi_a}, [\mathbb{1}]_{\varphi_a})_{\varphi_a} = \varphi_a(\mathbb{1}) = 1.$$

В то же время

$$(\pi_{\varphi_a}(a)[\mathbb{1}]_{\varphi_a}, \pi_{\varphi_a}(a)[\mathbb{1}]_{\varphi_a})_{\varphi_a} = \varphi_a(a^*a) = \|a\|^2.$$

Два последних тождества доказывают формулу (2). Тем самым теорема Гельфанда – Наймарка доказана.

Заметим, что в общем случае не только пространство $\mathcal{H}$, но и пространства $\mathcal{H}_\varphi$ не сепарабельны. Однако, если исходная C*-алгебра $\mathcal{A}$ была сепарабельна, то, очевидно, построенные пространства $\mathcal{H}_\varphi$ будут сепарабельными.

Упражнение 13. Показать, что если C*-алгебра $\mathcal{A}$ сепарабельна, то она изоморфна некоторой подалгебре в алгебре $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ограниченных линейных операторов в некотором *сепарабельном* гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.