1. Коммутативные банаховы алгебры

Стандартным примером такой алгебры является

1.1. **Алгебра непрерывных функций на компакте.**

Определение 1. Пусть X – компактное хаусдорфово топологическое пространство. Обозначим через $C(X)$ алгебру непрерывных функций $f : X \to \mathbb{C}$, наделенную нормой
$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$
Единицей в алгебре $C(X)$ служит функция $f \equiv 1$, а роль инволюции играет отображение: $f \mapsto f^*$, где $f^*(x) := \overline{f(x)}$.

Введенная норма обладает, очевидно, следующим свойством:
$$\|f\|^2 = \|f^* f\|,$$
которое характеризует C^*-алгебры (см. семинар). Тем самым, $C(X)$ является коммутативной унитальной (т.е. обладающей единицей) C^*-алгеброй.

1.2. **Мультипликативные функционалы.**

Определение 2. *Мультипликативным функционалом* на банаховой алгебре A называется гомоморфизм $\mu : A \to \mathbb{C}$. Множество всех мультипликативных функционалов на A обозначается через $M(A)$ и называется иначе *спектром* A.

Пример 1. Примером мультипликативного функционала на алгебре A может служить отображение эвалюоации="значение в точке" $x \in X$
$$\varepsilon_x : f \longmapsto f(x) \quad \text{для } f \in A.$$

Введем на пространстве $M(A)$ топологию. Для этого рассмотрим пространство A^* непрерывных линейных функционалов $\varphi : A \to \mathbb{C}$ на A и н6аделим его *-слабой топологией (т.е. топологией поточечной сходимости на элементах из A). В случае $A = C(X)$ пространство A^* совпадает с пространством комплекснозначных борелевских мер на X со стандартной топологией. По теореме Банаха-Алаоглу единичный шар $A_1^* = \{\|f\| \le 1\}$ в пространстве A^* является компактом в *-слабой топологии. Спектр $M(A)$ содержится в A_1^* и наделяется индуцированной топологией. Он обязательно является локально компактным пространством (его замыкание в A^* компактно).

Определение 3. *Преобразованием Гельфанда* называется отображение
$$\mathcal{G} : A \longrightarrow C_0(M(A)),$$
задаваемое формулой
$$A \ni a \longmapsto \hat{a} : M(A) \to \mathbb{C}, \quad \text{где } \hat{a}(\mu) := \mu(a).$$
Здесь через $C_0(M(A))$ обозначается пространство непрерывных функций на $M(A)$, обращающихся в нуль "на бесконечности" (см. семинар).

Посмотрим, как преобразование Гельфанда действует на инволюцию в алгебре A. Произвольный элемент $a \in A$ можно представить в виде суммы $a = \alpha + i\beta$, где
$$\alpha = \frac{a + a^*}{2}, \ \beta = \frac{a - a^*}{2i}$$

— самосопряженные элементы A. Мультипликативный функционал μ принимает вещественный значения на самосопряженных элементах (см. семинар). Поэтому если A есть C^*-алгебра и $\mu \in M(A)$, то

$$\mu(a^*) = \mu(\alpha - i\beta) = \mu(\alpha) - i\mu(\beta) = \overline{\mu(a)},$$

откуда $\widehat{a^*}(\mu) = \overline{\hat{a}(\mu)}$, т.е. $\mathcal{G}(a^*) = \overline{\mathcal{G}(a)}$.

Иными словами, преобразование Гельфанда коммутирует с инволюциями в A и $C_0(M(A))$, т.е. является *-гомоморфизмом.

Справедлив следующий вариант теоремы Хана-Банаха.

Лемма 1. *Пусть A есть унитальная коммутативная C^*-алгебра и $a \in A$. Если $\lambda \in sp(a)$, то найдется мультипликативный функционал $\mu \in M(S)$ такой, что $\mu(a) = \lambda$.*

Доказательство этого результата будет дано на семинаре.

Теорема 1 (Гельфанд–Наймарк)**.** *Пусть A – коммутативная C^*-алгебра. Тогда преобразование Гельфанда задает изометрический *-изоморфизм $\mathcal{G} : A \to C_0(M(A))$.*

Доказательство. Как мы уже показали, преобразование Гельфанда задает *-гомоморфизм. Его изометричность вытекает из следующей цепочки равенств:

$$\|\hat{a}\|^2 = \|\widehat{a^*}\hat{a}\| = \|\widehat{a^*a}\| = r(a^*a) = \|a^*a\| = \|a\|^2,$$

где равенство $\|\widehat{a^*a}\| = r(a^*a)$ (r – спектральный радиус) вытекает из Леммы 1 (почему?).

В частности, преобразование Гельфанда инъективно. Поэтому образ $\mathcal{G}(A)$ алгебры A в $C_0(M(A))$ является подалгеброй, которая полна (поскольку полна A, а $\mathcal{G}$ изометрично) и, следовательно, замкнута. Отображение эвалюации разделяет мультипликативные функционалы на A и алгебра $\mathcal{G}(A)$ не обращается в нуль ни в одной точке $M(A)$ (напомним, что подалгебра B в алгебре $C_0(X)$ не обращается в нуль в точке $x \in X$, если найдется функция из B, не равная нулю в этой точке). Кроме того, алгебра $\mathcal{G}(A)$ замкнута относительно комплексного сопряжения. Следовательно, по теореме Стоуна–Вейерштрасса (см. ее формулировку ниже) подалгебра $\mathcal{G}(A)$ совпадает с $C_0(M(A))$. □

Напомним формулировку *теоремы Стоуна–Вейерштрасса*. Пусть X – локально компактное топологическое пространство, B – замкнутая подалгебра в $C_0(X)$, которая разделяет точки X. Если алгебра B не обращается в нуль ни в одной точке X и замкнута относительно комплексного сопряжения, то $B = C_0(X)$.

1.3. **Соответствие: компактные пространства$\longleftrightarrow$ унитальные коммутативные банаховы алгебры.** Непрерывное отображение $f : X \to Y$ компактных топологических пространств порождает гомоморфизм их алгебр непрерывных функций $Cf : C(Y) \to C(X)$ по формуле $\varphi \mapsto \varphi \circ f$. Это унитальный (т.е. сохраняющий единицу) *-гомоморфизм, обладающий следующим функториальным свойством: если задано другое непрерывное отображение $g : Y \to Z$ компактных топологических пространств, то $C(g \circ f) = Cf \circ Cg$.

Следовательно, соответствие

$$F : X \longmapsto C(X), \quad f \longmapsto Cf$$

задает контравариантный функтор из категории компактных топологических пространств (с непрерывными отображениями в качестве морфизмов) в категорию унитальных коммутативных C^*-алгебр (с унитальными *-гомоморфизмами в качестве морфизмов).

Обратный к нему функтор Φ строится следующим образом. Напомним, что *-слабая топология на $M(A)$ является слабейшей из тех, для которых непрерывны все отображения эвалюации $\hat{a} : M(A) \to \mathbb{C}$, $a \in A$. В частности, отображение $f : X \to M(A)$ непрерывно $\iff$ все отображения $\hat{a} \circ f : X \to \mathbb{C}$ непрерывны.

Пусть $\varphi : A \to B$ – унитальный *-гомоморфизм унитальных коммутативных C^*-алгебр. Обозначим через $M\varphi : M(B) \to M(A)$ отображение, задаваемое формулой $\mu \mapsto \mu \circ \varphi$. Оно непрерывно, поскольку все функции вида $\hat{a} \circ M\varphi = \widehat{\varphi(a)}$ непрерывны для $a \in A$, и обладает функториальным свойством: если $\psi : B \to C$ – другой унитальный *-гомоморфизм унитальных коммутативных C^*-алгебр, то $M(\psi \circ \varphi) = M\varphi \circ M\psi$.

Построенные функторы задают эквивалентность указанных выше категорий.

Следствие 1. *Две унитальные коммутативные C^*-алгебры изоморфны $\iff$ их спектры гомеоморфны.*

Следствие 2. *Группа автоморфизмов $\operatorname{Aut} A$ унитальной коммутативной C^*-алгебры A изоморфна группе гомеоморфизмов $Homeo(M(A))$ ее спектра.*

Построенная эквивалентность категорий устанавливает словарь соответствия между топологией и алгеброй:

<u>топология</u>	$\longleftrightarrow$	<u>алгебра</u>
гомеоморфизм	$\longleftrightarrow$	автоморфизм
компактность	$\longleftrightarrow$	унитальность
компактификация	$\longleftrightarrow$	добавление единицы
открытое подмножество	$\longleftrightarrow$	идеал
замкнутое подмножество	$\longleftrightarrow$	фактор-алгебра
метризуемость	$\longleftrightarrow$	сепарабельность

2. Векторные расслоения

2.1. **Комплексные векторные расслоения.**

Определение 4. *Комплексным векторным расслоением* ранга r над хаусдорфовым топологическим пространством M называется непрерывное сюръективное отображение $\pi : E \to M$ топологических пространств, каждый слой которого $E_x = \pi^{-1}(x)$, $x \in M$, является комплексным векторным пространством размерности r, и выполняется условие *локальной тривиальности*: для каждого $x \in M$ найдется его открытая окрестность U и послойный гомеоморфизм

$$\varphi_U : U \times \mathbb{C}^r \longrightarrow \pi^{-1}(U),$$

ограничение которого на слои является изоморфизмом векторных пространств. Если в качестве U из этого определения можно взять все пространство M, то такое расслоение называется *тривиальным*.

Комплексные векторные расслоения можно задавать с помощью функций перехода. Пусть E – комплексное векторное расслоение ранга r и $\{U_j\}$ – его *тривиализующее покрытие*, иными словами, $\{U_j\}$ – это открытое покрытие пространства M вместе с гомеоморфизмами

$$\varphi_j \equiv \varphi_{U_j} : U_j \times \mathbb{C}^r \longrightarrow \pi^{-1}(U_j),$$

обладающими свойствами, перечисленными в Определении 4. Тогда функции $\varphi_{ij} := \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i$, заданные на пересечениях $U_{ij} := U_i \cap U_j$, называются *функциями перехода* расслоения E. Они принимают сзачения в группе $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ невырожденных линейных отображений $\mathbb{C}^r \to \mathbb{C}^r$ и удовлетворяют *коциклическому условию*:

$$\varphi_{ii} = \mathrm{id}, \quad \varphi_{ij} \circ \varphi_{jk} = \varphi_{ik} \quad \text{на } U_{ijk} := U_i \cap U_j \cap U_k.$$

Обозначим через $\Gamma(U, E)$ множество *сечений* расслоения E над подмножеством $U \subset M$, т.е. непрерывных отображений $s : U \to E$, таких что $\pi \circ s = \mathrm{id}$.

Предложение 1. *Пусть E – комплексное векторное расслоение ранга r над компактным топологическим многообразием M. Тогда найдется другое комплексное векторное расслоение $E' \to M$ такое, что для некоторого n будет иметь место изоморфизм расслоений*

$$E \oplus E' \cong M \times \mathbb{C}^n.$$

Замечание 1. В вещественном случае для расслоения E, совпадающего с касательным расслоением многообразия M, вложенного в векторное пространство, в качестве E' можно взять нормальное расслоение этого многообразия.

Доказательство. Пользуясь компактностью M, мы можем выбрать конечное открытое тривиализующее покрытие $\{U_j\}_{j=1}^m$ многообразия M. На каждом множестве U_j из этого покрытия можно найти набор из r линейно независимых сечений $s_{j1}, \ldots, s_{jr} : U_j \to E$ расслоения E. Обозначим через $\{\psi_j\}_{j=1}^m$ непрерывное разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_j\}$, состоящее из непрерывных функций ψ_j с компактным носителем в U_j, для которых $\sum \psi_j \equiv 1$. Введем отображения

$$\sigma_{jk} : M \to E, \text{равные} \begin{cases} \psi j s_{jk} & \text{на } U_j \\ 0 & \text{вне } U_j. \end{cases}$$

Векторы $\sigma_{j1}(x), \ldots, \sigma_{jr}(x)$ порождают слой E_x при любом $x \in M$.

Положим $n := mr$ и рассмотрим отображение $\beta : M \times \mathbb{C}^n \to E$, определяемое формулой

$$\beta(x, t) = \sum_{j,k} t_{jk} \sigma_{jk}(x).$$

Оно задает сюръективный морфизм расслоений (т.е. послойно-линейных отображений), который включается в точную последовательность морфизмов

$$0 \longrightarrow E' := \mathrm{Ker}\, \beta \xrightarrow{\alpha} M \times \mathbb{C}^n \xrightarrow{\beta} E \longrightarrow 0.$$

Покажем, что эта последовательность *расщепляется*, т.е. существует правый обратный морфизм к морфизму β. Отсюда будет следовать, что $E \oplus E' \cong M \times \mathbb{C}^n$.

Действительно, в каждой точке $x \in M$ точная последовательность линейных отображений векторных пространств

$$0 \longrightarrow E'_x \xrightarrow{\alpha_x} \mathbb{C}^n \xrightarrow{\beta_x} E_x \longrightarrow 0$$

расщепляется, поскольку $\dim \operatorname{Ker} \beta_x + \dim \operatorname{Im} \beta_x = n$. В некоторой окрестности U_x точки x морфизм β задается матричной функцией $b : U_x \to \operatorname{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^r)$, имеющей в точке x ранг $\operatorname{rk} b(x) = r$. Поэтому сужая, если необходимо, окрестность U_x до окрестности $V_x \subset U_x$, можно добиться, чтобы $\operatorname{rk} b(y) = r$ для всех $y \in V_x$. Над этой окрестностью V_x точная последовательность

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow M \times \mathbb{C}^n \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

также расщепляется. Выберем теперь из множеств $\{V_x\}_{x \in M}$ конечное подпокрытие $\{V_j\}$ многообразия M и обозначим через γ_j правый обратный к β морфизм над окрестностью V_j. Если $\{\psi_j\}$ – непрерывное разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{V_j\}$, то положим

$$\gamma := \sum_j \psi_j \gamma_j .$$

Тогда γ является правым обратным к β над M. $\square$

Замечание 2. Доказанное предложение остается верным и в случае, когда M является паракомпактным многообразием.

2.2. **Функтор** Γ. Пространство сечений $\Gamma(M, E) \equiv \Gamma(E)$ векторного расслоения $\pi : E \to M$ является модулем над коммутативной банаховой алгеброй $C(M)$, который мы для определенности считаем правым, так что

$$(sa)(x) := s(x)a(x) \quad \text{для } s \in \Gamma(E), a \in C(M).$$

Это ковариантный функтор из категории векторных расслоений над M в категорию правых модулей над алгеброй $C(M)$. Действительно, каждому морфизму расслоений $\tau : E \to E'$ можно сопоставить гомоморфизм $C(M)$-модулей

$$\Gamma\tau : \Gamma(E) \longrightarrow \Gamma(E'),$$

действующий по формуле: $(\Gamma\tau)s = \tau \circ s$. Этот гомоморфизм линеен, т.е. $(\Gamma\tau)(sa) = (\Gamma\tau)(s)a$ для $a \in C(M)$, поскольку линейны отображения $\tau_x : E_x \to E'_x$ для $x \in M$. Кроме того, функтор Γ переводит операции двойственности, прямой суммы и тензорного произведения над расслоениями в аналогичные операции над $C(M)$-модулями.

Помимо этого, указанный функтор обладает следующими важными свойствами:

(1) Γ является *строгим*: это означает, что совпадение $\Gamma f = \Gamma g$ для двух морфизмов расслоений $f, g : E \to E'$ влечет за собой равенство $f = g$.

(2) Γ является *полным*: это означает, что отображение

$$\tau \longmapsto \Gamma\tau : \operatorname{Hom}(E, E') \longrightarrow \operatorname{Hom}_{C(M)}(\Gamma(E), \Gamma(E'))$$

сюръективно.

(3) Γ сохраняет короткие точные последовательности и переводит расщепляющиеся короткие точные последовательности снова в расщепляющиеся короткие точные последовательности.

2.3. **Проективные модули.**

Определение 5. Правый $\mathcal{A}$-модуль $\mathcal{E}$ над унитальным кольцом $\mathcal{A}$ называется *свободным*, если он обладает $\mathcal{A}$-*базисом*, т.е. множеством образующих T таким, что из каждого соотношения вида $t_1 a_1 + \ldots + t_r a_r = 0$ с $t_j \in T$, $a_j \in \mathcal{A}$, вытекает, что $a_1 = \ldots = a_r = 0$. Модуль $\mathcal{E}$ называется *конечно порожденным*, если он обладает конечным множеством образующих или, иначе, конечным $\mathcal{A}$-базисом.

Пример 2. Стандартный свободный $\mathcal{A}$-модуль ранга r имеет вид $\mathcal{A}^r = \underbrace{\mathcal{A} \oplus \ldots \oplus \mathcal{A}}_{r}$ и состоит из вектор-столбцов с компонентами из $\mathcal{A}$. Он имеет стандартный базис, состоящий из элементов $e_j = {}^t(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (с 1 на j-м месте). Можно реализовать его также в виде модуля ${}^r\mathcal{A} = \underbrace{\mathcal{A} \oplus \ldots \oplus \mathcal{A}}_{r}$, состоящего из вектор-строк с компонентами из $\mathcal{A}$. Любой конечно порожденный свободный $\mathcal{A}$-модуль изоморфен $\mathcal{A}^r$ и ${}^r\mathcal{A}$ при некотором r.

Определение 6. Правый $\mathcal{A}$-модуль $\mathcal{P}$ называется *проективным*, если он обладает следующим универсальным свойством: для любого сюръективного $\mathcal{A}$-линейного отображения правых $\mathcal{A}$-модулей $f : \mathcal{E} \to \mathcal{G}$ и любого $\mathcal{A}$-линейного отображения правых $\mathcal{A}$-модулей $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{G}$ существует $\mathcal{A}$-линейное отображение $\psi : \mathcal{P} \to \mathcal{E}$ такое, что следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E} \arrow[r, "f"] & \mathcal{G} \arrow[r] & 0 \\ \mathcal{P} \arrow[u, dashed, "\psi"] \arrow[ur, "\varphi"'] & & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Свойства проективных модулей:

(1) Любой свободный правый $\mathcal{A}$-модуль проективен.
(2) Прямая сумма правых $\mathcal{A}$-модулей проективна $\Longleftrightarrow$ каждой слагаемое в этой сумме проективно.
(3) Правый $\mathcal{A}$-модуль $\mathcal{P}$ проективен $\Longleftrightarrow$ любая короткая точная последовательность $\mathcal{A}$-линейных отображений правых $\mathcal{A}$-модулей вида
$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{P} \longrightarrow 0$$
расщепляется.
(4) Правый $\mathcal{A}$-модуль $\mathcal{P}$ проективен $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{P}$ является прямым слагаемым в свободном $\mathcal{A}$-модуле.
(5) Правый $\mathcal{A}$-модуль $\mathcal{P}$ проективен $\Longleftrightarrow$ он имеет вид $\mathcal{P} = \varepsilon\mathcal{F}$, где $\mathcal{F}$ – свободный правый $\mathcal{A}$-модуль, а ε – идемпотент в алгебре $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}\mathcal{F}$.

2.4. **Теорема Серра–Суона.**

Предложение 2. *Пусть M – компактное многообразие и $E \to M$ – векторное расслоение над ним. Тогда $C(M)$-модуль $\Gamma(E)$ конечно порожден и проективен.*

Доказательство. Согласно Предложению 1 существует векторное расслоение $E' \to M$ такое, что $E \oplus E' \cong M \times \mathbb{C}^n$. Так как
$$\Gamma(E) \oplus \Gamma(E') = \Gamma(M \times \mathbb{C}^N) = C(M)^n,$$
то модуль $\Gamma(E)$ является прямым слагаемым в свободном модуле $C(M)^n$. Отсюда следует и конечная порожденность $\Gamma(E)$. $\square$

Теорема 2 (Серр–Суон). *Функтор Γ устанавливает эквивалентность категории векторных расслоений над компактным многообразием M и категории конечно порожденных проективных модулей над алгеброй $C(M)$.*

Доказательство. Ввиду Предложения 2 нужно доказать только, что каждый конечно порожденный проективный $C(M)$-модуль $\mathcal{E}$ совпадает с $\Gamma(M, E)$ для некоторого векторного расслоения $\pi : E \to M$. По Свойству (5) проективных модулей (см. п.2.3) модуль $\mathcal{E}$ имеет вид $\mathcal{E} = eC(M)^n$ для некоторого идемпотента $e \in \mathrm{End}_{C(M)}(C(M)^n) \cong \mathrm{Mat}_n(C(M))$. Точная последовательность

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\, e \longrightarrow C(M)^n \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0$$

расщепляется по Свойству (3) проективных модулей (см. п.2.3). Из полноты функтора Γ следует, что эндоморфизм $e \in \mathrm{Mat}_n(C(M))$ порождается некоторым морфизмом расслоений $\tau : M \times \mathbb{C}^n \to M \times \mathbb{C}^n$, так что $eC(M)^n$ совпадает с $\mathrm{Im}\, \tau$. Остается только показать, что $\mathrm{Im}\, \tau$ есть подрасслоение в $M \times \mathbb{C}^n$. Это утверждение вытекает из того, что $\mathrm{id} - \tau$ является идемпотентом, также как и τ, причем $\mathrm{rk}(\mathrm{id} - \tau_x) = n - \mathrm{rk}\, \tau_x$ для любого $x \in M$. Отсюда следует, что отображение $x \mapsto \mathrm{rk}\, \tau_x$ полунепрерывно одновременно сверху и снизу, а потому непрерывно и, следовательно, локально постоянно. Тем самым, $\mathcal{E} = \mathrm{Im}\, \tau$. □

Замечание 3. Приведенное доказательство допускает следующую интерпретацию. Идемпотент $e \in \mathrm{Mat}_n(C(M))$ можно рассматривать как непрерывное отображение из M в пространство матричных идемпотентов. Обозначим через ε_x отображение эвалюоации в точке $x \in M$. Тогда отображение $\varepsilon(e) : x \mapsto \varepsilon_x(e)$ порождает отображение $M \to G_m(\mathbb{C}^n)$, где $m = \mathrm{rk}\, e < n$. Иначе говоря, пространство $E_x = \varepsilon_x(e)\mathbb{C}^n$ лежит в слое тавтологического расслоения $T \to G_m(\mathbb{C}^n)$ над точкой x. Нужное нам расслоение $E \to M$, отвечающее проективному модулю $\mathcal{E}$, совпадает с обратным образом тавтологического расслоения T при отображении $\varepsilon(e)$:

$$\begin{array}{ccc} E = \varepsilon(e)^*(T) & \longrightarrow & T \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow[\varepsilon(e)]{} & G_m(\mathbb{C}^n) \end{array}$$

3. Функциональный анализ над C^*-алгебрами

В этой лекции изучаются ограниченные линейные операторы в гильбертовых пространствах над C^*-алгебрами. Ее основной целью является распространение теоремы Серра–Суона на случай общих C^*-алгебр.

Начнем с определения указанных гильбертовых пространств.

3.1. **Гильбертовы пространства, ассоциированные с C^*-алгебрами.** На семинаре мы подробно разберем свойства C^*-модулей, а сейчас коротко напомним только их определение. (Правым) *C^*-модулем над C^*-алгеброй* A называется (правый) A-модуль $\mathcal{E}$, наделенный полуторалинейным спариванием $\mathcal{E} \times \mathcal{E} \to A$, который является одновременно комплексным банаховым пространством относительно нормы, определяемой указанным спариванием.

Важным примером такого модуля над алгеброй A является модуль

$$\mathcal{H} \otimes A,$$

где $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство. Указанный модуль совпадает с пополнением алгебраического тензорного произведения $\mathcal{H} \odot A$ по естественной норме, задаваемой на простых тензорах формулой

$$(\xi \otimes a, \eta \otimes b) = (\xi, \eta) a^* b,$$

где $a, b \in A$, $\xi, \eta \in \mathcal{H}$.

Приведем еще одну конструкцию указанного C^*-модуля. Для этого обозначим через $\mathcal{H}_A \equiv \ell^2_A$ C^*-модуль над A, состоящий из последовательностей $a = \{a_k\}$ элементов из A, для которых ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^* a_k$$

сходится в A. Наделим его полуторалинейным спариванием вида

$$(a, b) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k^* b_k.$$

Примером операторов, действующих в $\mathcal{H}_A$, могут служить операторы P_n, задаваемые формулой

$$P_n(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots) = (a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots),$$

которые являются, очевидно, *проекторами* в $\mathcal{H}_A$, т.е. $P_n^2 = P_n$ и $P_n^* = P_n$.

Приведем пример операторов, действующих в произвольных C^*-модулях. Это операторы ранга 1, действующие из C^*-модуля $\mathcal{E}$ в C^*-модуль $\mathcal{F}$, называемые *кетбра-операторами*, которые задаются формулой

$$|r\rangle\langle s| : t \longmapsto r(s, t),$$

где $s, t \in \mathcal{E}$, $r \in \mathcal{F}$. Указанные операторы A-линейны, так как

$$r(st, a) = r(s, t)a$$

для $a \in A$, и допускают сопряжение, причем

$$|r\rangle\langle s|^* = |s\rangle\langle r|.$$

В случае $\mathcal{E} = \mathcal{F}$ композиция двух кетбра-операторов

$$|r\rangle\langle s| \circ |t\rangle\langle u| = |r\rangle(s, t)\langle u| = |r\rangle\langle u(t, s)|$$

является снова кетбра-оператором, так что конечные суммы кетбра-операторов образуют алгебру операторов, действующих в $\mathcal{E}$. Эта алгебра является двусторонним идеалом в алгебре $\mathrm{End}_A\mathcal{E}$, который обозначается через $\mathrm{Fin}_A\mathcal{E}$, а его замыкание по операторной норме — через $\mathcal{K}_A(\mathcal{E})$.

Более общим образом, мы обозначаем через $\mathrm{Fin}_A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ пространство кетбра-операторов вида

$$\sum_{k=1}^{n} |r_k\rangle\langle s_k|,$$

называемых иначе операторами *A-конечного ранга*. Замыкание $\mathrm{Fin}_A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ по операторной норме обозначается через $\mathcal{K}_A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, а его элементы называются *A-компактными операторами*.

Заметим сразу же, что A-компактный оператор не обязан быть компактным в обычном смысле.

Изучим введенные классы операторов более подробно.

3.2. **Проекторы и A-компактные операторы.** Заметим, что для любой унитальной C^*-алгебры A имеет место изоморфизм

$$\mathcal{K}_A(A) \cong A.$$

Действительно, отображение $T \mapsto T(1)$ задает биекцию алгебры ограниченных линейных операторов на алгебру A. Далее, любое отображение вида $a \mapsto b^* a$, совпадающее на самом деле с кетбра-оператором $|1\rangle\langle b|$, допускает сопряжение и имеет конечный A-ранг. Поэтому $\mathcal{K}_A(A) \cong A$.

Аналогичным образом можно показать, что

$$\mathcal{K}_A(A^n) \cong \mathrm{Mat}_n(A).$$

На самом деле, справедлив следующий, более общий результат.

Лемма 2. *Если p есть проектор в $Mat_n(A)$, то pA^n является C^*-модулем над алгеброй A, причем*

$$\mathcal{K}_A(pA^n) \cong p\, Mat_n(A) p.$$

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$\mathrm{Fin}_A(pA^n) \longrightarrow p\,\mathrm{Mat}_n(A)p,$$

которое переводит кетбра-оператор вида $|pa\rangle\langle pb|$ в матрицу с (i,j)-компонентами, равными

$$\sum_{k,l} p_{ik} a_k b_l^* p_{lj}.$$

Это отображение является изометрическим $*$-изоморфизмом, который продолжается до изоморфизма $\mathcal{K}_A(pA^n)$ на $p\,\mathrm{Mat}_n(A)p$. $\square$

Ниже мы покажем, что для алгебры $A = C(M)$, где M – компактное многообразие, имеет место изоморфизм

$$\mathcal{K}_A(\Gamma(M, E)) \cong \Gamma(M, \mathrm{End}\, E)$$

для любого эрмитова векторного расслоения $E \to M$.

Одним из важных свойств C^*-алгебр является то, что алгебры операторов над ними также являются C^*-алгебрами.

Предложение 3. *Пусть $\mathcal{E}$ – (правый) C^*-модуль над C^*-алгеброй A. Тогда алгебра $End_A\mathcal{E}$ ограниченных линейных операторов, допускающих сопряжение, также является C^*-алгеброй.*

Прежде, чем переходить к доказательству этого предложения, напомним, что ограниченный линейный оператор $T : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ между C^*- модулями $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ *допускает сопряжение*, если существует линейный оператор $T^* : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$, называемый *сопряженным* к T, такой что

$$(r, Ts) = (T^* r, s)$$

для всех $s \in \mathcal{E}$, $r \in \mathcal{F}$.

Более подробно о свойствах сопряженных операторах см. семинар.

Доказательство Предложения 3. Норма в алгебре $\mathrm{End}_A\mathcal{E}$ определяется равенством

$$\|T\| = \sup_{\|s\| \le 1} \|Ts\|,$$

где $s \in \mathcal{E}$. По неравенству Коши-Буняковского

$$\|Ts\|^2 = \|(s, T^*Ts)\| \leq \|s\| \cdot \|T^*Ts\| \leq \|T^*T\| \cdot \|s\|^2,$$

откуда

$$\|T\|^2 \leq \|T^*T\| \leq \|T^*\| \cdot \|T\|,$$

т.е. $\|T\| \leq \|T^*\|$ и, следовательно, $\|T\| = \|T^*\|$, поскольку $T^{**} = T$. Тем самым,

$$\|T\|^2 \leq \|T^*T\| \leq \|T\|^2 \Longrightarrow \|T^*T\| = \|T\|^2,$$

т.е. $\|\cdot\|$ является C^*-нормой.

Для доказательства полноты пространства $\mathrm{End}_A\mathcal{E}$ заметим, что если задана последовательность Коши $\{T_n\}$, состоящая из операторов, допускающих сопряжение, то она сходится к некоторому ограниченному линейному оператору T. По доказанному, последовательность сопряженных операторов $\{T_n^*\}$ также является последовательностью Коши и потому сходится к некоторому ограниченному линейному оператору S. Так как

$$(r, Ts) = \lim_n (r, T_n s) = \lim_n (T_n^* r, s) = (Sr, s)$$

для всех $r, s \in \mathcal{E}$, то оператор T допускает сопряжение и сопряженный к нему оператор совпадает с S. Это доказывает полноту пространства $\mathrm{End}_A\mathcal{E}$. □

Следствие 3. *Алгебра $\mathcal{K}_A(\mathcal{E})$, состоящая из A-компактных операторов, действующих в C^*-модуле $\mathcal{E}$, является C^*-алгеброй и двусторонним идеалом в алгебре $\mathrm{End}_A\mathcal{E}$.*

В частности, алгебра $\mathcal{K} \equiv \mathcal{K}(\mathcal{H})$, состоящая из компактных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, является двусторонним идеалом в алгебре $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ всех ограниченных линейных операторов в $\mathcal{H}$.

Введем теперь еще одну C^*-алгебру, ассоциированную с A и состоящую из "бесконечных" матриц над A. А именно, рассмотрим алгебру, являющуюся тензорным произведением $\mathcal{K} \otimes A$ алгебры компактных операторов $\mathcal{K}$ на алгебру A.

Напомним, что $\mathcal{K} \otimes A$ является пополнением алгебраического тензорного произведения $\mathcal{K} \circledcirc A$ по единственной C^*-норме, обладающей *перекрестным свойством*:

$$\|\xi \otimes \eta\| = \|\xi\| \cdot \|\eta\|.$$

(Более подробное обсуждение тензорных произведений C^*-алгебр см. в семинаре.)

Определение 7. Тензорное произведение $A_S := \mathcal{K} \otimes A$ называется *стабилизацией* C^*-алгебры A. Она в свою очередь является C^*-алгеброй, которая называется *стабильной*, если $A_S \cong A$. Две C^*-алгебры A и B называются *стабильно эквивалентными*, если $A_S \cong B_S$.

Перейдем к изучению проекторов в C^*-модулях. Пусть $\mathcal{F}$ есть замкнутый подмодуль в C^*-модуле $\mathcal{E}$. Как известно, не любой такой подмодуль допускает ортогональное дополнение. Допустим, однако, что у $\mathcal{F}$ такое дополнение $\mathcal{F}^\perp$ имеется, так что $\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}^\perp \cong \mathcal{E}$. Тогда любой элемент $s \in \mathcal{E}$ будет однозначно записываться в виде

$$s = t + u,$$

где $t \in \mathcal{F}$, $u \in \mathcal{F}^\perp$, а отображение $s \mapsto t$ будет задавать проектор $p \in \mathrm{End}_A\mathcal{E}$ с областью значений $\mathcal{F}$.

Обратно, если $p \in \mathrm{End}_A\mathcal{E}$ является проектором, то

$$(\mathrm{Im}\, p)^{\perp} = \mathrm{Im}(1_{\mathcal{E}} - p) = \mathrm{Ker}\, p$$

и, следовательно, ортогональное дополнение к $\mathrm{Im}\, p$ существует.

Тем самым, установлено взаимно-однозначное соответствие между дополняемыми C^*-подмодулями в $\mathcal{E}$ и областями значений проекторов из $\mathrm{End}_A\mathcal{E}$.

Определение 8. Пусть A есть унитальная C^*-алгебра. Тогда A-компактные проекторы в $\mathcal{H}_A$ образуют подмножество в C^*-алгебре A_S, обозначаемое через $\mathcal{P}(A_S)$. Это замкнутое подмножество в единичном шаре алгебры A_S.

Примерами операторов из $\mathcal{P}(A_S)$ могут служить проекторы

$$P_n = \sum_{j=1}^{n} |e_j\rangle\langle e_j|,$$

где $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (с 1 на j-м месте).

3.3. **Проективные C^*-модули.** В этом параграфе мы докажем аналог теоремы Серра-Суона для произвольных унитальных C^*-алгебр, точнее, будет установлено взаимно-однозначное соответствие между A-компактными проекторами и конечно порожденными проективными C^*-модулями.

Теорема 3. *Пусть A есть унитальная C^*-алгебра. Тогда правые C^*-модули вида $p\mathcal{H}_A$ с $p \in \mathcal{P}(A_S)$ являются конечно порожденными проективными модулями над A. Эквивалентно, каждый из них изоморфен прямому слагаемому в свободном модуле A^n для некоторого n.*

Идея доказательства: состоит в том, чтобы сопоставить модулю $p\mathcal{H}_A$ изоморфный ему модуль, вложенный в свободный модуль $P_n\mathcal{H}_A \cong A^n$, где P_n – стандартный проектор в $\mathcal{H}_A$, введенный в начале п.3.1. Чтобы исходный проектор p можно было сравнивать с P_n, его нужно сначала "повернуть" с помощью унитарного элемента $u_n \in \mathrm{End}_A\mathcal{H}_A$ так, чтобы обеспечить выполнение неравенства $u_n p u_n^* \le P_n$.

Более подробно, для заданного $p \in \mathcal{P}(A_S)$ будет построена последовательность унитарных элементов $u_n \in \mathrm{End}_A\mathcal{H}_A$, которые сходятся по норме к тождественному оператору I при $n \to \infty$ и удовлетворяют неравенству

$$u_n p u_n^* \le P_n.$$

Переходя к построению указанной последовательности, заметим, что для заданного $\varepsilon > 0$ найдется n такое, что

$$\|p - P_n p P_n\| < \varepsilon/3.$$

Оператор $a_n := P_n p P_n$ положителен, поскольку

$$a_n \ge a_n^2 = a_n^* a_n \ge 0.$$

Действительно, неравенство $a_n \ge a_n^2$ записывается в виде соотношения $P_n p P_n \ge P_n p P_n p P_n$, которое вытекает из неравенства $p \ge p P_n p$, следующего в свою очередь из $I \ge P_n$.

Более того, $\|a_n - a_n^2\| < \varepsilon$, поскольку

$$\|a_n - a_n^2\| \le \|a_n - p\| + \|p(p - a_n)\| + \|(p - a_n)a_n\| \le$$
$$\le \varepsilon/3 + \|p\|\varepsilon/3 + \|a_n\|\varepsilon/3 < \varepsilon,$$

так как $\|p\| \le 1$ и $\|a_n\| \le 1$.

Легко видеть, что спектр a_n содержится в отрезке $[0,1]$ за вычетом точки $1/2$. Более того, можно показать, что этот спектр содержится в объединении отрезков $[0,2\varepsilon] \cup [1-2\varepsilon,1]$ (предполагая при этом, что $\varepsilon < 1/4$).

Применим теперь спектральную теорему для самосопряженных элементов банаховой алгебры (ее формулировка имеется, например в учебнике У.Рудина по функциональному анализу). Обозначим через p_n спектральный проектор, отвечающий отрезку
$[1-2\varepsilon,1]$. Этот проектор равен $f(a_n)$ для некоторой непрерывной функции f на отрезке $[0,1]$, такой что $0 \le f \le 1$ и

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \le t \le 2\varepsilon \\ 1 & \text{при } 1-2\varepsilon \le t \le 1. \end{cases}$$

Так как $a_n \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_A)$, то $p_n \in \mathcal{P}(A_S)$, причем $\|p_n - p\| < 3\varepsilon < 3/4$.

Воспользуемся теперь следующей леммой, которая будет доказана на семинаре.

Лемма 3. *Если p, q – два проектора в унитальной C^*-алгебре B, удовлетворяющие соотношению $\|p-q\| < 1$, то существует унитарный элемент $u \in B$ такой, что $q = upu^*$.*

По этой лемме $p_n = u_n p u_n^*$ для некоторого унитарного элемента u_n из унитальной C^*-алгебры $\mathrm{End}_A \mathcal{H}_A$. Кроме того, $p_n \le P_n$. Действительно, из очевидного соотношения

$$P_n a_n = a_n P_n = a_n$$

следует (с помощью аппроксимации функции f полиномами), что

$$P_n p_n = p_n P_n = p_n.$$

Отсюда вытекает, что $P_n - p_n$ является проектором в $\mathcal{P}(A_S)$, поскольку

$$(P_n - p_n)^2 = P_n - p_n P_n - P_n p_n + p_n = P_n - p_n.$$

C^*-модуль $p_n \mathcal{H}_A$ конечно порожден и проективен, поскольку он является прямым слагаемым с свободном модуле $P_n \mathcal{H}_A \cong A^n$:

$$p_n \mathcal{H}_A \oplus (P_n - p_n)\mathcal{H}_A = P_n \mathcal{H}_A.$$

Отображение $s \mapsto u_n s$ устанавливает унитарную эквивалентность A-модулей $p\mathcal{H}_A$ и $p_n \mathcal{H}_A$. Поэтому и C^*-модуль $p\mathcal{H}_A$ изоморфен прямому слагаемому в A^n, т.е. является конечно порожденным и проективным. $\square$

Справедлив и обратный результат.

Теорема 4. *Пусть $\mathcal{E}$ есть (правый) конечно порожденный проективный модуль над унитальной C^*-алгеброй A. Тогда его можно наделить структурой C^*-модуля над A таким образом, что он станет изоморфен $p\mathcal{H}_A$ для некоторого $p \in \mathcal{P}(A_S)$.*

Доказательство. Как было показано ранее, модуль $\mathcal{E}$ имеет вид $\mathcal{E} = eA^n$, где e – некоторый идемпотент в $\mathrm{Mat}_n(A)$. Так как область значений идемоптента замкнута, то структуру C^*-модуля на $\mathcal{E}$ можно задать, ограничивая стандартную структуру C^*-модуля из A^n на $\mathcal{E}$.

Заметим, что оператор e допускает сопряжение. Действительно, если $\{u_j\}_{j=1}^n$ – стандартный базис в A^n, так что

$$1_{A^n} = \sum_{j=1}^n |u_j\rangle\langle u_j|,$$

то в его терминах идемпотент e можно записать в виде

$$e = \sum_{j=1}^n |eu_j\rangle\langle u_j|,$$

откуда

$$e^* = \sum_{j=1}^n |u_j\rangle\langle eu_j|.$$

Как уже отмечалось ранее,

$$(\operatorname{Im} e)^\perp = \operatorname{Ker} e^*,$$

поскольку

$$e^*s = 0 \Longleftrightarrow (er, s) = (r, e^*s) = 0 \quad \text{для всех } r \in A^n.$$

Отсюда следует, что $(\operatorname{Ker} e^*)^\perp = \operatorname{Im} e$, и аналогичным образом $(\operatorname{Im} e^*)^\perp = \operatorname{Ker} e$, $(\operatorname{Ker} e)^\perp = \operatorname{Im} e^*$, поскольку e^* также является идемпотентом.

Далее,

$$\operatorname{Ker} e = \operatorname{Ker}(e^*e),$$

так как из $(e^*e)s = 0$ вытекает, что

$$(es, es) = (s, (e^*e)s) = 0 \Longrightarrow es = 0.$$

Переходя к ортогональным дополнениям, получим

$$\operatorname{Im} e^* = \operatorname{Im}(e^*e).$$

Поэтому если элемент $s \in A^n$, то $e^*s = (e^*e)t$ для некоторого $t \in A^n$ и мы можем представить его в виде суммы

$$s = et + (s - et) \in \operatorname{Im} e \oplus \operatorname{Ker} e^* = \operatorname{Im} e \oplus (\operatorname{Im} e)^\perp.$$

Тем самым, мы показали, что $A^n = \mathcal{E} \oplus \mathcal{E}^\perp$, т.е. $\mathcal{E}$ допускает ортогональное дополнение. Поэтому существует проектор $p \in \operatorname{Mat}_n(A)$ такой, что $\mathcal{E} = pA^n$. Так как $A^n \cong P_n(\mathcal{H}_A)$ и $p \le P_n$ при таком отождествлении, то $\mathcal{E} = p\mathcal{H}_A$. □

Замечание 4 (формула Капланского). Имеется явная формула, выражающая проектор p через идемпотент e, найденная Капланским. Именно, рассмотрим оператор

$$r = ee^* = (1 - e^*)(1 - e) = 1 + (e - e^*)(e^* - e) = 1 - e^* - e + ee^* + e^*e.$$

Это положительный и обратимый элемент в $\operatorname{Mat}_n(A)$ (поскольку этими свойствами обладают все элементы вида $1 + a^*a$). Более того, r коммутирует как с e, так и с e^*. Действительно,

$$re = er = ee^*e \quad \text{и} \quad re^* = e^*r = e^*ee^*.$$

Поэтому и r^{-1} коммутирует с e и e^*. Теперь положим $p := ee^*r^{-1}$. Тогда $p = p^*$ и

$$p^2 = ee^*ee^*r^{-2} = ere^*r^{-2} = p,$$

т.е. p является проектором. Далее, $ep = p$ и $pe = e$, поскольку

$$per = ee^*e = er,$$

так что область значений p совпадает с областью значений e.

Из Теоремы 4 вытекает

Следствие 4. *Для произвольного эрмитова векторного расслоения $E \to M$ над компактным многообразием M справедливо равенство*

$$\mathcal{K}(\Gamma(M,E)) = End_A(\Gamma(M,E)) \cong \Gamma(M, End\, E).$$

4. K-теория

4.1. **K_0-группа.** Введем на множестве проекторов C^*-алгебры A следующее отношение эквивалентности.

Определение 9. Два проектора $p, q \in \mathcal{P}(A_S)$ *эквивалентны*, если $q = upu^* = upu^{-1}$ для некоторого унитарного элемента $u \in \mathrm{End}_A \mathcal{H}_A$.

Обозначим через

$$V^{\mathrm{top}}(A) := \mathcal{P}(A_S)/\sim$$

фактор пространства $\mathcal{P}(A_S)$ по введенному отношению эквивалентности.

Предложение 4. *Множество $V^{top}(A)$ является унитальной коммутативной полугруппой.*

Доказательство. Определим прямую сумму проекторов $p, q \in \mathcal{P}(A_S)$ по формуле

$$p \oplus q = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} .$$

С учетом этого сложение в $V^{\mathrm{top}}(A)$ будет задаваться как

$$[p] + [q] = [p \oplus q].$$

Оно корректно определено, поскольку

$$upu^{-1} \oplus vqv^{-1} = (u \oplus v)(p \oplus q)(u^{-1} \oplus v^{-1})$$

для унитарных $u, v \in \mathrm{End}_A \mathcal{H}_A$. Далее,

$$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix},$$

т.е. указанная полугруппа коммутативна. Роль единицы (или, скорее, нуля) в этой полугруппе играет нулевой класс $[0]$. □

Конструкция Гротендика. По любой унитальной коммутативной полугруппе S можно каноническим образом построить группу K, называемую *группой Гротендика* полугруппы S. Это коммутативная группа, заданная вместе с унитальным полугрупповым гомоморфизмом $\vartheta : S \to K$, обладающая следующим универсальным свойством: если G – другая группа, заданная вместе с унитальным полугрупповым гомоморфизмом $\gamma : S \to G$, то существует единственный групповой гомоморфизм $\kappa : K \to G$ такой, что следующая диаграмма

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, dashed, "\kappa"] & G \\ S \arrow[u, "\vartheta"] \arrow[ur, "\gamma"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна, т.е. $\gamma = \kappa \circ \vartheta$.

Группа K определяется однозначно с точностью до изоморфизма. Построить ее можно следующим образом. Рассмотрим на множестве $S \times S$ следующее отношение эквивалентности:

$$(x, y) \sim (x', y') \iff \text{существует } z \in S \text{ такое, что } x + y' + z = x' + y + z.$$

Тогда группа K определяется как $K = A \times A/\sim$, а гомоморфизм ϑ задается формулой: $\vartheta(x) := [x, 0]$, так что $[x, y] = \vartheta(x) - \vartheta(y)$ в группе K.

Определение 10. *Топологической K_0-группой* унитальной C^*-алгебры A называется группа Гротендика $K_0^{\mathrm{top}}(A)$ полугруппы $V^{\mathrm{top}}(A)$.

Перейдем теперь к построению алгебраической K_0-группы. Для этого докажем сначала следующую лемму.

Лемма 4. *Пусть $e \in Mat_n(\mathcal{A})$ и $f \in Mat_m(\mathcal{A})$ – два матричных идемпотента над унитальным кольцом $\mathcal{A}$. Отвечающие им конечно порожденные модули $e\mathcal{A}^n$ и $f\mathcal{A}^m$ изоморфны тогда и только тогда, когда существует обратимая матрица $a \in Mat_N(\mathcal{A})$ с $N > m, n$ такая, что*

$$a \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0_{N-n} \end{pmatrix} a^{-1} = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 0_{N-m} \end{pmatrix} .$$

Доказательство. Необходимость. Предположим, что имеется изоморфизм $\varphi : e\mathcal{A}^n \to f\mathcal{A}^m$. Продолжим φ нулем на $(1-e)\mathcal{A}^n$ до морфизма $\psi : \mathcal{A}^n \to \mathcal{A}^m$ и, аналогично, продолжим φ^{-1} нулем на $(1-f)\mathcal{A}^m$ до морфизма $\eta : \mathcal{A}^m \to \mathcal{A}^n$. Эти морфизмы можно записать в виде

$$\psi(s) = gs \quad \text{и} \quad \eta(t) = ht$$

для подходящих матриц $g \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathcal{A})$ и $h \in \mathrm{Mat}_{n,m}(\mathcal{A})$. Указанные матрицы удовлетворяют следующим легко проверяемым соотношениям

$$gh = f,\ hg = e \quad \text{и} \quad g = ge = fg,\ h = eh = hf.$$

Положим теперь $N = m + n$ и заметим, что

$$\begin{pmatrix} g & 1-f \\ 1-e & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h & 1-e \\ 1-f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

причем

$$\begin{pmatrix} g & 1-f \\ 1-e & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h & 1-e \\ 1-f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Это доказывает необходимость условий леммы.

Достаточность. Если $a(e \oplus 0)a^{-1} = f \oplus 0$, то $ae\mathcal{A}^N = fa\mathcal{A}^N$, т.е. модули $e\mathcal{A}^n$ и $f\mathcal{A}^m$ изоморфны. □

Обозначим через $Q_n(\mathcal{A})$ множество идемпотентов в алгебре $\mathrm{Mat}_n(\mathcal{A})$ и через $\mathrm{GL}_n(\mathcal{A})$ группу обратимых элементов в $\mathrm{Mat}_n(\mathcal{A})$. Имеются естественные вложения

$$\mathrm{Mat}_n(\mathcal{A}) \hookrightarrow \mathrm{Mat}_{n+1}(\mathcal{A}), \quad m \longmapsto \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и

$$\mathrm{GL}_n(\mathcal{A}) \hookrightarrow \mathrm{GL}_{n+1}(\mathcal{A}), \quad a \longmapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Первое из них порождает также вложение $Q_n(\mathcal{A}) \hookrightarrow Q_{n+1}(\mathcal{A})$. Пользуясь указанными вложениями, мы можем определить индуктивные пределы

$$\mathrm{Mat}_\infty(\mathcal{A}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Mat}_n(\mathcal{A}),\ Q_\infty(\mathcal{A}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n(\mathcal{A}),\ \mathrm{GL}_\infty(\mathcal{A}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{GL}_n(\mathcal{A}).$$

Определение 11. Два идемпотента $e, f \in Q_m(\mathcal{A})$ *эквивалентны*, если они сопряжены с помощью $\mathrm{GL}_\infty(\mathcal{A})$, т.е. если для некоторого n найдется элемент $a \in \mathrm{GL}_{n+m}(\mathcal{A})$ такой, что

$$a \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0_n \end{pmatrix} a^{-1} = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & 0_n \end{pmatrix} .$$

Рассмотрим множество

$$V^{\mathrm{alg}}(\mathcal{A}) = Q_\infty(\mathcal{A})/\sim,$$

являющееся фактором $Q_\infty(\mathcal{A})$ по введенному отношению эквивалентности. Определим сложение в $V^{\mathrm{alg}}(\mathcal{A})$ по правилу

$$[e] + [f] = \left[\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}\right] .$$

Эта операция корректно определена благодаря соотношению $e \oplus f \sim f \oplus e$. Тем самым, $V^{\mathrm{alg}}(\mathcal{A})$ является коммутативной полугруппой и мы можем определить *алгебраическую K_0-группу* $K_0^{\mathrm{alg}}(\mathcal{A})$ как группу Гротендика полугруппы $V^{\mathrm{alg}}(\mathcal{A})$.

Теорема 5. *Для произвольной унитальной C^*-алгебры A обе K_0-группы совпадают, т.е.*

$$K_0^{top}(A) = K_0^{alg}(A).$$

Доказательство. Допустим сначала, что идемпотенты $e, f \in Q_\infty(A)$ эквивалентны. По лемме 4 найдется такое достаточно большое n, для которого правые A-модули eA^n и fA^n изоморфны. Тогда по теореме 4 найдутся проекторы $p, q \in \mathrm{Mat}_n(A)$ такие, что

$$eA^n = p\mathcal{H}_A \quad \text{и} \quad fA^n = q\mathcal{H}_A.$$

Отсюда следует, что $p \sim e \sim f \sim q$ в $Q_\infty(A)$, т.е. существует элемент $z \in \mathrm{GL}_\infty(A)$ такой, что

$$q = zpz^{-1}.$$

Чтобы доказать эквивалентность проекторов p и q в пространстве $\mathcal{P}(A_S)$, нужно найти унитарный оператор u в $\mathcal{H}_A$ такой, что $q = upu^{-1}$. Для этого представим z в полярной форме $z = u|z|$, где u – унитарный оператор в пространстве $\mathrm{End}_A\mathcal{H}_A$. Тогда

$$|z|p|z|^{-1} = u^*qu = (u^*qu)^* = |z|^{-1}p|z|,$$

т.е. p коммутирует с $|z|^2$, а потому и с $|z|$ (почему?). Следовательно, $q = upu^*$.

Обратно, пусть проекторы $p, q \in \mathcal{P}(A_S)$ эквивалентны друг другу, т.е. существует унитарный оператор $u \in \mathrm{End}_A\mathcal{H}_A$. Тогда, также как в доказательстве теоремы 3, можно найти для некоторого достаточно большого n проекторы $p_n, q_n \in \mathrm{Mat}_n(A)$ такие, что $p_n \sim p \sim q \sim q_n$ с помощью унитарных сопряжений, откуда следует, что

$$q_n = vp_nv^*$$

для некоторого унитарного оператора $v \in \mathrm{End}_A\mathcal{H}_A$. Если $v \in \mathrm{GL}_m(A)$ с некотором $m \geq n$, то это означает, что проекторы p_n и q_n принадлежат одному классу в $Q_\infty(A)$, т.е. модули $p_n\mathcal{H}_A$ и $q_n\mathcal{H}_A$ изоморфны. Но тогда изоморфны и модули $p\mathcal{H}_A$ и $q\mathcal{H}_A$, т.е. по лемме 4 они принадлежат одному классу в $K_0^{\mathrm{alg}}(A)$.

Если же v – общий унитарный оператор в $\mathcal{H}_A$, то мы можем, тем не менее считать, что $v \in A_S^+$. Действительно, также как в лемме 3, мы можем построить унитарные операторы u_n и v_n, принадлежащие группе $\mathrm{GL}_n(A) \subset A_S^+$, такие что

$$p_n = u_n p u_n^* \quad \text{и} \quad q_n = v_n q v_n^*.$$

В их терминах оператор v записывается в виде $v = v_n u u_n^*$, откуда и следует высказанное утверждение.

Пользуясь им, мы можем найти для достаточно большого $m \geq n$ унитарный оператор $w \in \mathrm{Mat}_m(A)$, приближающий v на $\mathrm{Mat}_m(A)$ с заданной точностью ε. Обозначим через $\hat{q}_n \in \mathrm{Mat}_m(A)$ проектор вида $\hat{q}_n = w p_n w^*$. Тогда

$$\begin{aligned} q_n - \hat{q}_n = P_m(q_n - \hat{q}_n)P_m = \\ = P_m(v-w)p_n(v-w)^*P_m + P_m w p_n (v-w)^* P_m + P_m(v-w)p_n w^* P_m = \\ = P_m(v-w)P_m p_n P_m (v-w)^* P_m + P_m w P_m p_n P_m (v-w)^* P_m + \\ + P_m(v-w)P_m p_n P_m w^* P_m, \end{aligned}$$

где последнее равенство вытекает из очевидного соотношения $p_n = P_m p_n P_m$. Отсюда следует, что оператор $q_n - \hat{q}_n$ допускает оценку

$$\begin{aligned} \|q_n - \hat{q}_n\| = \|P_m(v-w)P_m p_n P_m(v-w)^* P_m + \\ + P_m w P_m p_n P_m (v-w)^* P_m + P_m(v-w)P_m p_n P_m w^* P_m\| < \\ < \varepsilon^2 + 2\varepsilon < 1. \end{aligned}$$

Поэтому по лемме 4 существует унитарный оператор $w_m \in \mathrm{Mat}_m(A)$ такой, что $q_n = w_m \hat{q}_n w_m^*$. Тогда оператор $z_m := w_m w \in \mathrm{GL}_m(A)$ будет удовлетворять соотношению $q_n = z_m p_n z_m^{-1}$, из которого вытекает, что проекторы p_n и q_n принадлежат одному классу в $Q_\infty(A)$, т.е. модули $p_n\mathcal{H}_A$ и $q_n\mathcal{H}_A$ изоморфны. Но тогда изоморфны также модули $p\mathcal{H}_A$ и $q\mathcal{H}_A$ и по лемме 4 принадлежат одному классу в $K_0^{\mathrm{alg}}(A)$. □

С учетом доказанной теоремы мы будем далее опускать индексы “top” и “alg” в обозначениях $V(A)$ и $K_0(A)$.

Любой элемент из $K_0(A)$ представим в виде $[p]-[q]$, где проекторы $p, q \in \mathcal{P}(A_S)$. Пусть $\varphi : A \to B$ есть унитальный морфизм C^*-алгебр. Обозначим через $K_0\varphi : K_0(A) \to K_0(B)$ отображение, задаваемое формулой

$$K_0\varphi : [p]-[q] \longrightarrow [\varphi(p)] - [\varphi(q)].$$

Предложение 5. *Соответствие*

$$(A, \varphi) \longmapsto (K_0(A), K_0\varphi)$$

задает ковариантный функтор из категории унитальных C^*-алгебр в категорию абелевых групп.

Пример 3. $K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$.

Действительно, $V(\mathbb{C}) = \mathbb{N}$, поскольку все проекторы в $\mathcal{P}(\mathbb{C}_S)$ имеют конечный ранг, который является их единственным инвариантом.

Пример 4. Аналогично, $K_0(\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})) = \mathbb{Z}$.

Вопрос: чему равна K_0-группа $K_0(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ алгебры ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$?

Свойства K_0-функтора

(1) *стабильность*: $K_0(A_S) = K_0(A)$.

(2) *полуточность*: K_0 переводит короткие точные последовательности вида $0 \to J \to A \to B \to 0$ в последовательности

$$K_0(J) \to K_0(A) \to K_0(B),$$

точные в среднем члене.

(3) K_0 *коммутирует с индуктивными пределами.*

4.2. **Высшие K-группы.** Для того, чтобы определить высшие K-группы, введем понятие *надстройки* (суспензии) C^*-алгебры A. Это C^*-алгебра вида

$$\Sigma A := A \otimes C_0(\mathbb{R}) \cong C_0(\mathbb{R}, A),$$

где $C_0(X)$ обозначает пространство непрерывных функций на локально компактном топологическом пространстве X, обращающихся в нуль "на бесконечности". С учетом этого определим *K-группу порядка n* для C^*-алгебры A как

$$K_n(A) := K_0(\Sigma^n A).$$

Теорема 6 (теорема периодичности Ботта)**.** *Для любой C^*-алгебры A и любого натурального n имеют место изоморфизмы*

$$K_{2n}(A) \cong K_0(A), \quad K_{2n+1}(A) \cong K_1(A).$$

В силу этой теоремы имеет смысл изучать, помимо группы $K_0(A)$, только группу $K_1(A)$, для которой мы приведем другое, эквивалентное определение (доказательство эквивалентности мы опускаем).

А именно, введем группу

$$K_1^{\mathrm{top}}(A) = [C_0(\mathbb{R}), A_S],$$

отождествляемую с множеством гомотопических классов гомоморфизмов $C_0(\mathbb{R}) \to A_S$. Это определение можно переписать в виде

$$[C_0(\mathbb{R}), A_S] \cong [C(\mathbb{T}), A_S^+]_+,$$

где A_S^+ обозначает унитализацию алгебры A_S, а индекс "+" в обозначении $[X, Y]_+$ указывает на то, что рассматривается множество гомотопических классов непрерывных отображений $X \to Y$ пространств X, Y с отмеченными точками.

Заметим далее, что C^*-алгебра $C(\mathbb{T})$ порождается единственным унитарным элементом $t \mapsto e^{it}$. Поэтому гомоморфизм из $K_1^{\mathrm{top}}(A) \cong [C(\mathbb{T}), A_S^+]_+$ определяется выбором унитарного элемента в $A_S^+ = (\mathcal{K} \otimes A)^+$. Таким образом, мы можем отождествить $K_1^{\mathrm{top}}(A)$ с группой $\pi_0(\mathrm{U}(A_S^+))$ компонент связности унитарной группы $\mathrm{U}(A_S^+)$.

Пользуясь тем, что $\mathcal{K}(\mathcal{H}) = \varinjlim \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, мы можем переписать последнее определение $K_1^{\mathrm{top}}(A)$ в виде

$$K_1^{\mathrm{top}}(A) = \varinjlim \mathrm{U}_n(A)/\mathrm{U}_n(A)^0 = \varinjlim \mathrm{GL}_n(A)/\mathrm{GL}_n(A)^0,$$

где $\mathrm{U}_n(A)$ обозначает подгруппу в $\mathrm{Mat}_n(A)$, состоящую из унитарных элементов, а $\mathrm{U}_n(A)^0$ – связную подгруппу единицы в $\mathrm{U}_n(A)$.

Пример 5. $K_1^{\mathrm{top}}(\mathbb{C}) = 0$.

Этот факт вытекает из связности группы $\mathrm{U}(\mathbb{K})^+$, которую мы предлагаем проверить самостоятельно.

Пример 6. Аналогично, $K_1^{\mathrm{top}}(\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})) = 0$.

Умножение в группе $K_1^{\mathrm{top}}(A)$ задается формулой:

$$[u]\cdot[v] = [uv] = \left[\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}\right],$$

где второе равенство и коммутативность умножения вытекают из цепочки гомотопий

$$\begin{pmatrix} uv & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} vu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

проверку которых мы оставляем читателю.

Перейдем к определению алгебраической K_1-группы. Напомним сначала, что *коммутантом* произвольной группы G называется ее нормальная подгруппа $G' \equiv [G,G]$, порождаемая элементами вида $[g,h] := ghg^{-1}h^{-1}$. Фактор

$$G_{\mathrm{ab}} := G/G'$$

является абелевой группой и называется *абелианизацией* группы G.

Пользуясь этим понятием, мы можем определить K_1-*группу* произвольного кольца $\mathcal{A}$ как

$$K_1^{\mathrm{alg}}(\mathcal{A}) = \mathrm{GL}_\infty(\mathcal{A})_{\mathrm{ab}} = \mathrm{GL}_\infty(\mathcal{A})/\mathrm{GL}_\infty(\mathcal{A})'.$$

Пример 7. Если $\mathcal{A} = \mathbb{Z}$, то $K_1^{\mathrm{alg}}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$.

Пример 8. Если $\mathcal{A} = F$ есть поле, то $K_1^{\mathrm{alg}}(F) = F^\times$ (группа обратимых элементов в F).

В частности, если кольцо $\mathcal{A}$ есть унитальная C^*-алгебра A, то

$$K_1^{\mathrm{alg}}(A) = \mathrm{GL}_\infty(A)_{\mathrm{ab}} = \mathrm{GL}_\infty(A)/\mathrm{GL}_\infty(A)'.$$

В то же время

$$K_1^{\mathrm{top}}(A) = \mathrm{GL}_\infty(A)/\mathrm{GL}_\infty(A)^0.$$

Так как коммутант содержится в связной подгруппе единицы (почему?), имеется естественное сюръективное отображение

$$K_1^{\mathrm{alg}}(A) \longrightarrow K_1^{\mathrm{top}}(A),$$

которое однако, в отличие от случая K_0-групп, не всегда является инъективным. Действительно, в случае C^*-алгебры $A = \mathbb{C}$ имеем:

$$K_1^{\mathrm{alg}}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times, \quad \text{а } K_1^{\mathrm{top}}(\mathbb{C}) = 0.$$

(Указанное отображение является биективным для т.н. стабильных C^*-алгебр.)

В дальнейшем мы обозначаем через $K_1(A)$ группу $K_1^{\mathrm{top}}(A)$.

5. Фредгольмовы операторы

5.1. **Топологическая теория.** Обратимся к алгебре $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ограниченных линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Идеал $\mathcal{K} \equiv \mathcal{K}(\mathcal{H})$ компактных операторов в алгебре $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ будет в дальнейшем играть роль множества инфинитезимальных элементов в этой алгебре. Поэтому представляет интерес изучение т.н. *алгебры Калкина*

$$Q(\mathcal{H}) = \mathcal{L}(\mathcal{H})/\mathcal{K}(\mathcal{H}).$$

Заметим, что два оператора $S, T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ имеют один и тот же образ в алгебре $Q(\mathcal{H})$ тогда и только тогда, когда $S = T + K$ для некоторого компактного оператора K.

Предложение 6. *Ограниченный линейный оператор $F \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ имеет обратимый образ в алгебре $Q(\mathcal{H})$ тогда и только тогда, когда существует оператор $G \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ такой, что операторы $1 - GF$ и $1 - FG$ компактны. Последнее условие эквивалентно тому, что образ $\mathrm{Im}\, F$ замкнут, а ядро $\mathrm{Ker}\, F$ и коядро $\mathrm{Coker}\, F$ оператора F конечномерны.*

Доказательство. Первая эквивалентность очевидна. Перейдем к доказательству второй. Предположим, что существует оператор $G \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ такой, что операторы $1 - GF$ и $1 - FG$ компактны. Допустим, что мы уже доказали замкнутость $\mathrm{Im}\, F$ и покажем, что ядро $\mathrm{Ker}\, F$ конечномерно. Заметим, что $\mathrm{Ker}\, F$ инвариантно относительно оператора $1 - GF$, поскольку

$$(1 - GF)\xi = \xi - GF\xi = \xi$$

для $\xi \in \mathrm{Ker}\, F$. То же самое верно и для единичного шара в пространстве $\mathrm{Ker}\, F$, совпадающего, тем самым, с образом компактного оператора $1 - GF$. Из компактности этого шара вытекает конечномерность $\mathrm{Ker}\, F$.

Докажем теперь замкнутость $\mathrm{Im}\, F$. Для этого выберем оператор R конечного ранга, такой что

$$\|(1 - GF) - R\| < 1/2.$$

Для $\xi \in \mathrm{Ker}\, R$ будем иметь

$$\|\xi\| - \|\xi - GF\xi\| \le \|GF\xi\| \le \|G\| \cdot \|F\xi\|.$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{2}\|\xi\| - \|\xi - GF\xi\| \ge \|\xi\| - \frac{1}{2}\|\xi\| = \frac{1}{2}\|\xi\|,$$

т.е.

$$\frac{1}{2}\|\xi\| \le \|G\| \cdot \|F\xi\|.$$

Отсюда

$$\|F\xi\| \ge \frac{\|\xi\|}{2\|G\|}$$

и, следовательно, сужение оператора F на $\mathrm{Ker}\, R$ имеет замкнутый образ. Но подпространство $(\mathrm{Ker}\, R)^{\perp} = \mathrm{Im}\, R^*$ конечномерно, поскольку оператор R имеет конечный ранг. Поэтому пространство

$$\mathrm{Im}\, F = F(\mathrm{Ker}\, R) + F(\mathrm{Ker}\, R)^{\perp})$$

замкнуто.

Для доказательства конечномерности коядра $\operatorname{Coker} F$ заметим, что, также как и выше, пространство $\operatorname{Ker} F^*$ инвариантно относительно оператора $(1 - FG)^* = 1 - G^*F^*$, откуда вытекает его конечномерность. Но

$$\operatorname{Coker} F = \mathcal{H}/\operatorname{Im} F \cong \operatorname{Ker} F^*,$$

поэтому оно также конечномерно.

Обратно, если образ $\operatorname{Im} F$ замкнут, а подпространства $\operatorname{Ker} F$ и $\operatorname{Coker} F$ конечномерны, то мы можем построить искомый оператор G, полагая

$$\begin{cases} G(F\xi) = \xi & \text{для } \xi \in (\operatorname{Ker} F)^\perp, \\ G(\eta) = 0 & \text{для } \xi \in (\operatorname{Im} F)^\perp. \end{cases}$$

Действительно, этот оператор корректно определен, поскольку отображение $F : (\operatorname{Ker} F)^\perp \to \operatorname{Im} F$ биективно. Кроме того, операторы $1 - GF$ и $1 - FG$ имеют конечный ранг и потому компактны. $\square$

Определение 12. Ограниченный линейный оператор $F : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ из гильбертова пространства $\mathcal{H}_1$ в гильбертово пространство $\mathcal{H}_2$ называется *фредгольмовым*, если его образ $\operatorname{Im} F$ замкнут, а пространства $\operatorname{Ker} F$ и $\operatorname{Coker} F$ конечномерны. *Индекс фредгольмова оператора* F по определению равен

$$\operatorname{ind} F = \dim \operatorname{Ker} F - \dim \operatorname{Coker} F.$$

При $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$ пространство фредгольмовых операторов $F : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ обозначается через $\operatorname{Fred} = \operatorname{Fred}(\mathcal{H})$ и наделяется топологией равномерной сходимости из $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Оно является мульпликативной полугруппой (см. свойство 2 ниже).

Свойства индекса:

(1) Отображение $\operatorname{ind} : \operatorname{Fred} \to \mathbb{Z}$ непрерывно.
(2) Отображение ind является полугрупповым гомоморфизмом, т.е.
$$\operatorname{ind}(F_1F_2) = \operatorname{ind} F_1 + \operatorname{ind} F_2.$$
(3) Значение индекса не меняется при компактных возмущениях, т.е.
$$\operatorname{ind}(F + K) = \operatorname{ind} F$$
для любого $K \in \mathcal{K}$.
(4) $\operatorname{ind} F = 0 \Longleftrightarrow F$ является компактным возмущением обратимого оператора.
(5) Стандартный оператор правого сдвига в пространстве ℓ^2 фредгольмов и его индекс равен -1.
(6) $\operatorname{ind} F = \dim \operatorname{Ker}(F^*F) - \dim \operatorname{Ker}(FF^*)$.
(7) $\operatorname{ind} F^* = -\operatorname{ind} F$.

Теорема 7 (теорема Атьи–Ениха)**.** *Для любого компактного хаусдорфова топологического пространства X имеется групповой изоморфизм*

$$ind : [X, Fred] \longrightarrow K^0(X),$$

где $K^0(X)$ есть группа Гротендика $K(Vect(X))$ полугруппы $Vect(X)$ виртуальных векторных расслоений над X. Указанный изоморфизм функториален в том смысле, что для любого непрерывного отображения $\varphi : Y \to X$ компактных топологических пространств справедливо соотношение

$$ind \circ \varphi^* = K^0\varphi \circ ind,$$

где $\varphi^* : [X, Fred] \to [Y, Fred]$ – гомоморфизм, порождаемый отображением $F \mapsto F \circ \varphi$ из пространства $C(X, Fred)$ в пространство $C(Y, Fred)$, а $K^0\varphi : K^0(X) \to K^0(Y)$.

Замечание 5. Поясним идею доказательства этой теоремы. Пусть $F : X \to \mathrm{Fred}$, $x \mapsto F_x$, есть непрерывное отображение из пространства X в пространство фредгольмовых операторов. Нам нужно сопоставить ему элемент из $K^0(X)$. Первое, что приходит в голову, это задать искомый элемент полем виртуальных векторных пространств $x \mapsto [\operatorname{Ker} F_x] - [\operatorname{Coker} F_x]$. Однако такое отображение в общем случае не определено, поскольку размерности пространств $\operatorname{Ker} F_x$ и $\operatorname{Coker} F_x$ могут изменяться от точки к точке.

Для того, чтобы обойти эту трудность, используется следующий прием. Поле пространств $x \mapsto \operatorname{Ker} F_x$ заменяется тривиальным расслоением над X со слоем $\mathcal{H}/V$, где V – замкнутое подпространство в $\mathcal{H}$ конечной коразмерности такое, что

$$V \cap \operatorname{Ker} F_x = \{0\}$$

для всех $x \in X$. Такое V выбирается с использованием компактности X в виде пересечения

$$V = \bigcap_{i=1}^{m} (\operatorname{Ker} F_x)^\perp$$

по некоторому подходящему набору точек $x_1, \dots, x_m \in X$. Класс $[\mathcal{H}/V]$ тривиального векторного расслоения со слоем $\mathcal{H}/V$ в $K^0(X)$ и служит заменой поля $x \mapsto \operatorname{Ker} F_x$. Далее показывается, что объединение

$$\bigcup_{x \in X} \mathcal{H}/F_x(V)$$

является тотальным пространством некоторого локально тривиального векторного расслоения $W \to X$ над X и класс $[W]$ этого расслоения в $K^0(X)$ служит заменой поля $x \mapsto \operatorname{Coker} F_x$. После этого доказывается, что

$$\operatorname{ind} F = [\mathcal{H}/V] - [W] \in K^0(X).$$

5.2. **Фредгольмовы операторы в C^*-модулях.**

Определение 13. Пусть $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ есть правые C^*-модули над C^*-алгеброй A и $F \in \operatorname{Hom}_A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ – ограниченный A-линейный оператор. Оператор F называется A-*фредгольмовым*, если существует оператор $G \in \operatorname{Hom}_A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ такой, что $1_\mathcal{F} - FG \in \mathcal{K}_A(\mathcal{F})$ и $1_\mathcal{E} - GF \in \mathcal{K}_A(\mathcal{E})$. В случае $\mathcal{E} = \mathcal{F}$ это условие эквивалентно обратимости образа F в фактор-алгебре $\operatorname{End}_A(\mathcal{E})/\mathcal{K}_A(\mathcal{E})$. Множество A-фредгольмовых операторов обозначается через $\operatorname{Fred}_A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$.

Замечание 6. Заметим, что в этом определении можно заменить A-компактные операторы на операторы A-конечного ранга. Это вытекает из следующей леммы, доказательство которой будет дано на семинаре.

Лемма 5. *Пусть A – унитальная банахова алгебра, а J – ее идеал, замыкание которого обозначается через $\overline{J}$. Тогда, если какой-либо элемент $a \in A$ обратим по модулю $\overline{J}$, то он обратим и по модулю J.*

Замечание 7. Заметим, что образ $\operatorname{Im} F$ A-фредгольмова оператора F не обязательно замкнут. Возьмем, например, в качестве A алгебру $C(I)$ функций, непрерывных на единичном отрезке $I = [0, 1]$, а в качестве $\mathcal{E}$ саму алгебру A.

Определим оператор F по формуле: $Fa(t) := ta(t)$ при $t \in I$. Так как алгебра A унитальна, то $\mathcal{K}_A(A) \cong A$, так что любой оператор из $\mathrm{End}_A A$ является A-компактным и A-фредгольмовым. В то же время образ $\operatorname{Im} F$ не замкнут, поскольку функция $b(t) = \sqrt{t}$ принадлежит алгебре A и может быть аппроксимирована полиномами, равными нулю при $t = 0$ (и потому принадлежащими $\operatorname{Im} F$). (Например, в качестве таких полиномов можно взять полиномы Бернштейна $\sum_{k=1}^{n} C_n^k \sqrt{k/n} t^k (n-t)^{n-k}$.) Однако сама эта функция, очевидно, не принадлежит $\operatorname{Im} F$.

Для того, чтобы обойти указанную трудность, введем понятие псевдообратного оператора. При доказательстве предложения 6 мы построили оператор G такой, что операторы $1-FG$ и $1-GF$ являются проекторами на $\operatorname{Ker} F$ и $\operatorname{Ker} F^*$ соответственно. Операторы F и G удовлетворяют соотношениям: $FGF = F$ и $GFG = G$.

Это наблюдение мотивирует следующее определение.

Определение 14. Для заданного оператора $T \in \mathrm{Hom}_A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ его *псевдообратным* называется оператор $S \in \mathrm{Hom}_A(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ такой, что

$$TST = T \quad \text{и} \quad STS = S.$$

В этом случае операторы TS и ST являются идемпотентами и имеют замкнутые образы. Более того,

$$\operatorname{Ker} ST = \operatorname{Ker} T,$$

поскольку, с одной стороны, $\operatorname{Ker} T \subset \operatorname{Ker} ST$, а с другой стороны, $STu = 0 \Longrightarrow TSTu = Tu = 0$.

Далее, образ $\operatorname{Im}(1 - ST)$ совпадает с $\operatorname{Ker} T$. Действительно, если $u \in \operatorname{Ker} T$, то $u = (1 - ST)u \in \operatorname{Im}(1 - ST)$. С другой стороны, если $v = u - STu$, то $Tv = Tu - TSTu = Tu - Tu = 0$.

Кроме того, образ $\operatorname{Im}(TS)$ совпадает с $\operatorname{Im} T$. Действительно, $\operatorname{Im}(TS) \subset \operatorname{Im} T$ и для любого u, равного Tv для некоторого v, получаем, что $u = Tv = TSTv$, т.е. $u \in \operatorname{Im}(TS)$.

Так как отношение псевдообратности симметрично по S и T, то справедливы и аналогичные свойства, получаемые заменой T на S:

$$\operatorname{Ker} TS = \operatorname{Ker} S,\ \operatorname{Im}(ST) = \operatorname{Im} S,\ \operatorname{Im}(1 - TS) = \operatorname{Ker} S.$$

Будем называть операторы, обладающие псевдообратными, *регулярными*. Ясно, что обычные фредгольмовы операторы регулярны.

Предположим, что F есть регулярный A-фредгольмов оператор с псевдообратным S и обозначим через G оператор, существующий по определению 13. Заметим, что

$$(1 - GF)(1 - SF) = 1 - SF,$$

поскольку $\operatorname{Im}(1-SF) = \operatorname{Ker} F$. Следовательно, оператор $1-SF \in \mathcal{K}_A(\mathcal{E})$. Аналогично, $1-FS \in \mathcal{K}_A(\mathcal{F})$. Поэтому в качестве оператора G из определения 13 для регулярного A-фредгольмова оператора F можно брать его псевдообратный. Более того, операторы $1 - FS$ и $1 - SF$ имеют замкнутые образы. Обозначим идемпотент $1 - SF$ через e и сопоставим ему проектор $p \in \mathcal{K}_A(\mathcal{E})$ на образ e, задаваемый формулой Капланского. На семинаре было показано, что проектор p, будучи A-компактным, имеет на самом деле A-конечный ранг. То же самое верно и для идемпотента e, поскольку $e = pe$. Следовательно, $1-SF \in \mathrm{Fin}_A(\mathcal{E})$. Аналогично доказывается, что $1 - FS \in \mathrm{Fin}_A(\mathcal{F})$.

С учетом этих замечаний мы сможем ввести индекс регулярных фредгольмовых операторов, пользуясь следующей важной теоремой.

Теорема 8 (теорема Каспарова о поглощении). *Если $\mathcal{E}$ – произвольный счетно порожденный C^*-модуль над алгеброй A, то*

$$\mathcal{E} \oplus \mathcal{H}_A \cong \mathcal{H}_A$$

как A-модули.

Доказательство этой теоремы будет дано на семинаре, а сейчас покажем, как с ее помощью удается определить индекс регулярных фредгольмовых операторов. Из теоремы о поглощении следует, что любой C^*-модуль $\mathcal{E}$ A-конечного ранга можно рассматривать как подмодуль в $\mathcal{H}_A$ вида $p\mathcal{H}_A$ с $p \in \mathcal{P}(A_S)$. Этот проектор определяет класс $[p]$ в $K_0(A)$, который сопоставляется C^*-модулю $\mathcal{E}$ и обозначается через $[\mathcal{E}]$.

Пусть теперь F есть регулярный фредгольмов оператор. Тогда C^*-модули $\operatorname{Ker} F = \operatorname{Im}(1 - SF)$ и $\operatorname{Ker} F^* = \operatorname{Im}(1 - FS)$ имеют, как отмечено выше, A-конечный ранг и потому определяют элементы $[\operatorname{Ker} F]$ и $[\operatorname{Ker} F^*]$ группы $K_0(A)$. С учетом этого мы можем дать следующее определение.

Определение 15. Пусть $F \in \operatorname{Fred}_A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ – регулярный A-фредгольмов оператор. Определим *индекс* оператора F формулой

$$\operatorname{ind} F := [\operatorname{Ker} F] - [\operatorname{Ker} F^*] \in K_0(A).$$

Спрашивается, можно ли определить индекс произвольного, возможно нерегулярного оператора? Прежде, чем ответить на этот вопрос, условимся представлять операторы $T \in \operatorname{Hom}_A(\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2, \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2)$ в блочном виде, так что

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix},$$

где $T_{ij} \in \operatorname{Hom}_A(\mathcal{E}_i \oplus \mathcal{F}_j$, $i, j = 1, 2$.

Для определения индекса воспользуемся следующей леммой.

Лемма 6. *Пусть $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ есть C^*-модули над унитальной C^*-алгеброй A и $F \in Fred_A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. Тогда существуют натуральное число $n \in \mathbb{N}$ и регулярный оператор $\tilde{F} \in Fred_A(\mathcal{E} \oplus A^n, \mathcal{F} \oplus A^n)$ такой, что $\tilde{F}_{11} = F$.*

Доказательство. Так как оператор F A-фредгольмов, то согласно замечанию 6 существует A-линейный оператор G такой, что операторы $1 - GF =: R$ и $1 - FG$ имеют A-конечный ранг. Запишем оператор R в виде

$$R = \sum_{i=1}^{n} |r_i\rangle\langle s_i|\,,$$

где $r_i, s_i \in \mathcal{E}$. Обозначим через $\{u_1, \dots, u_n\}$ стандартный базис в A^n и рассмотрим оператор

$$L_r = \sum_{i=1}^{n} |r_i\rangle\langle u_i| \ : a \longmapsto \sum_{i=1}^{n} r_i a_i.$$

Этот оператор принадлежит пространству $\mathcal{K}_A(A^n, \mathcal{E})$ и имеет сопряженный оператор вида

$$L_r = \sum_{i=1}^{n} |u_i\rangle\langle r_i|\,.$$

Определим теперь искомый оператор $\tilde{F} : \mathcal{E} \oplus A^n \to \mathcal{F} \oplus A^n$ и оператор $\tilde{S}$, действующий в обратном направлении, по формулам

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} F & 0 \\ L_s^* & 0 \end{pmatrix} , \quad \tilde{F} = \begin{pmatrix} G & L_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Так как $L_r L_s^* = R = 1 - GF$, то $\tilde{F}\tilde{S}\tilde{F} = \tilde{F}$, $\tilde{S}\tilde{F}\tilde{S} = \tilde{S}$ и

$$1 - \tilde{S}\tilde{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} , \quad 1 - \tilde{F}\tilde{S} = \begin{pmatrix} 1_{\mathcal{F}} - FG & -FL_r \\ -L_s^* G & 1_n - L_s^* L_r \end{pmatrix} .$$

Эти операторы являются, очевидно, A-компактными. Тем самым, мы показали, что оператор $\tilde{F}$ регулярен и A-компактен, а оператор $\tilde{S}$ является его псевдообратным. ☐

Теперь мы можем ввести *индекс* произвольного *A-фредгольмова оператора* F, полагая по определению

$$\operatorname{ind} F = \operatorname{ind} \tilde{F}.$$

Нужно только проверить корректность этого определения, зависящего от выбора регулярного расширения $\tilde{F}$, в свою очередь определяемого с помощью оператора G. Однако, любой другой выбор оператора G', для которого операторы $1 - G'F$ и $1 - FG'$ являются операторами A-конечного ранга, будет приводить к оператору $\widetilde{F'}$, отличающемуся от $\tilde{F}$ на оператор A-конечного ранга. Поэтому оператор $\widetilde{F'}$ будет иметь тот же индекс, что и $\tilde{F}$, ввиду следующего утверждения, доказательство которого будет дано на семинаре.

Предложение 7. *Если операторы $F_1, F_2 \in Fred_A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ регулярны и $F_1 - F_2 \in \mathcal{K}_A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, то $ind\, F_1 = ind\, F_2$.*

Перечислим свойства определенного таким образом индекса A-фредгольмовых операторов.

Свойства индекса A-фредгольмовых операторов:

(1) Если $F_1, F_2 \in \mathrm{Fred}_A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ и $F_1 - F_2 \in \mathcal{K}_A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, то $\operatorname{ind} F_1 = \operatorname{ind} F_2$, т.е. индекс не меняется при A-компактных возмущениях.
(2) Множество $\mathrm{Fred}_A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ открыто в $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, а отображение индекса $\operatorname{ind} : \mathrm{Fred}_A(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \to K_0(A)$ локально постоянно.
(3) Если $F \in \mathrm{Fred}_A(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ и $G \in \mathrm{Fred}_A(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, то $GF \in \mathrm{Fred}_A(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ и

$$\operatorname{ind}(GF) = \operatorname{ind} G + \operatorname{ind} F.$$

Теорема 9 (некоммутативная теорема Атьи–Ениха)**.** *Если A есть унитальная C^*-алгебра, то отображение*

$$ind : \pi_0(Fred_A) \longrightarrow K_0(A),$$

где $Fred_A := Fred_A(\mathcal{H}_A)$, является групповым изоморфизмом.

Замечание 8. Приведенная теорема является обобщением теоремы Атьи–Ениха 7, которой отвечает случай $A = C(X)$, где X – компактное топологическое пространство, поскольку в этом случае имеется групповой изоморфизм

$$\pi_0(\mathrm{Fred}_{C(X)}) \cong [X, \mathrm{Fred}_{\mathbb{C}}].$$

5.3. **Морита-эквивалентность.** Пусть заданы две C^*-алгебры A и B и два правых C^*-предмодуля: предмодуль $\mathcal{E}$ над A и предмодуль $\mathcal{F}$ над B. Допустим, что имеется представление C^*-алгебры A в предмодуле $\mathcal{F}$, т.е. гомоморфизм $\rho : A \to \mathrm{End}_B \mathcal{F}$. Тогда мы можем образовать алгебраическое тензорное произведение $\mathcal{E} \circledcirc \mathcal{F}$, являющееся правым B-модулем, и наделить его положительно определенным спариванием, определяемым формулой

$$(s_1 \otimes t_1, s_2 \otimes t_2) = (\rho((s_2, s_1))\, t_1, t_2) = (t_1, \rho((s_1, s_2))\, t_2)\,.$$

Если профакторизовать $\mathcal{E} \circledcirc \mathcal{F}$ по B-подмодулю, состоящему из элементов r таких, что $(r, r) = 0$, то получим C^*-предмодуль над B, называемый *тензорным произведением* $\mathcal{E} \otimes_A \mathcal{F}$ *предмодулей* $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$.

Определение 16. Предположим теперь, что нам задано комплексное векторное пространство, являющееся одновременно правым C^*-предмодулем над C^*-алгеброй A с полуторалинейным спариванием $(\cdot\,,\cdot)$ и левым C^*-предмодулем над C^*-алгеброй B с полуторалинейным спариванием $\{\cdot\,,\cdot\}$. Такое пространство $\mathcal{E}$ называется *C^*-предбимодулем* над (B, A), если выполняется следующее условие согласования спариваний

$$r(s, t) = \{r, s\}t \quad \text{для любых } r, s, t \in \mathcal{E}.$$

Будем называть предбимодуль $\mathcal{E}$ *плотным справа*, если $(\mathcal{E}, \mathcal{E})$ плотно в A и *плотным слева*, если $\{\mathcal{E}, \mathcal{E}\}$ плотно в B. Если выполнены оба свойства, будем называть предбимодуль $\mathcal{E}$ просто *плотным*.

Лемма 7. *Две нормы, определяемые спариваниями $(\cdot\,,\cdot)$ и $\{\cdot\,,\cdot\}$ на C^*-предбимодуле $\mathcal{E}$ над (B, A), совпадают.*

Доказательство. Покажем, что для произвольного $s \in \mathcal{E}$ справедливо равенство $\|(s, s)\|_A = \|\{s, s\}\|_B$. Действительно, из неравенства Коши вытекает, что

$$\|(s,s)\|_A^4 = \|(s,s)(s,s)\|_A^2 = \|\,(s, s(s,s))\,\|_A^2 = \|\,(s, s\{s,s\})\,\|_A^2 \leq$$
$$\|(s,s)\|_A \|\,(\{s,s\}s, \{s,s\}s)\,\|_A \leq \|(s,s)\|_A^2 \|\{s,s\}\|_B^2,$$

откуда $\|(s, s)\|_A \leq \|\{s, s\}\|_B$. Меняя в этой цепочке соотношений A и B местами, получим противоположное неравенство. $\square$

Уточним, о каком неравенстве Коши идет речь в доказательстве леммы. Если $\mathcal{E}$ – правый C^*-модуль над C^*-алгеброй A, то справедливо неравенство

$$\|(r, t)\|_A \leq \|r\|_{\mathcal{E}} \cdot \|t\|_{\mathcal{E}}$$

для любых $r, t \in \mathcal{E}$.

Определение 17. C^*-предбимодуль $\mathcal{E}$ над (B, A) называется *C^*-бимодулем*, если он является полным по норме $\|(s, s)\|_A = \|\{s, s\}\|_B$.

Пример 9. C^*-алгебра A является C^*-бимодулем над (A, A), спаривания в котором задаются формулами

$$(a, b) := a^* b \quad \text{и} \quad \{a, b\} := ab^*.$$

Условие согласования выполнено, поскольку

$$c(a, b) = ca^* b = \{c, a\}b.$$

Пример 10. Пусть $\mathcal{E}$ – плотный справа C^*-модуль над C^*-алгеброй A и $B = \mathcal{K}_A(\mathcal{E})$, так что B действует на $\mathcal{E}$ слева. Введем на $\mathcal{E}$ B-значное спаривание по формуле

$$\{r, s\} := |r\rangle\langle s|.$$

Тогда $\mathcal{E}$ становится C^*-бимодулем над (B, A). Условие согласования означает, что

$$r(s, t) = |r\rangle\langle s|t = \{r, s\}t.$$

Пример 11. Если $\mathcal{F}$ есть C^*-бимодуль над (A, B) и $\mathcal{G}$ есть C^*-бимодуль над (B, C), то их тензорное произведение $\mathcal{F} \otimes_B \mathcal{G}$ есть C^*-бимодуль над (A, C), в котором спаривания простых тензоров задаются формулами:

$$(r_1 \otimes s_1, r_2 \otimes s_2) = ((r_2, r_1)_B s_1, s_2)_C\,,$$
$$\{r_1 \otimes s_1, r_2 \otimes s_2\} = \{r_1, r_2\{s_2, s_1\}_B\}_A\,.$$

Определение 18. Две C^*-алгебры A и B называются *морита-эквивалентными*, если существует C^*-бимодуль $\mathcal{E}$ над (B, A) и C^*-бимодуль $\mathcal{F}$ над (A, B) такие, что

$$\mathcal{E} \otimes_A \mathcal{F} \cong B \quad (\text{как } B\text{-бимодули}) \quad \text{и} \quad \mathcal{F} \otimes_B \mathcal{E} \cong B \quad (\text{как } A\text{-бимодули}).$$

Например, если в качестве C^*-бимодуля $\mathcal{E}$ взять алгебру A, а в качестве C^*-бимодуля $\mathcal{F}$ взять ${}^nA$, то получим, что матричная алгебра $\mathrm{Mat}_n(A)$ морита-эквивалентна исходной алгебре A.

Предложение 8. *Морита-эквивалентность есть отношение эквивалентности.*

Доказательство этого предложения будет дано на семинаре.

Морита-эквивалентность C^*-алгебр A и B позволяет отождествить правые C^*-модули над A с правыми C^*-модулями над B (и аналогично для левых модулей). Действительно, отображение $\mathcal{S} \mapsto \mathcal{S} \otimes_A \mathcal{F}$ сопоставляет правому A-модулю $\mathcal{S}$ правый B-модуль $\mathcal{S} \otimes_A \mathcal{F}$ и, обратно, отображение $\mathcal{T} \mapsto \mathcal{T} \otimes_D \mathcal{E}$ сопоставляет правому B-модулю $\mathcal{T}$ правый A-модуль $\mathcal{T} \otimes_B \mathcal{E}$.

Предложение 9. *Две C^*-алгебры A и B морита-эквивалентны тогда и только тогда, когда существует плотный справа правый C^*-модуль $\mathcal{E}$ над A такой, что $\mathcal{K}_A(\mathcal{E}) \cong B$.*

Доказательства этого и последующих утверждений о морита-эквивалентности см. в семинаре.

Предложение 10. *Любая C^*-алгебра A морита-эквивалентна своей стабилизации, т.е. $A_S \cong \mathcal{K} \otimes A$ морита-эквивалентна A.*

Следствие 5. *Если A и B – две стабильно эквивалентные C^*-алгебры, то алгебра A морита-эквивалентна алгебре B.*

Теорема 10 (Эксель)**.** *Если C^*-алгебры A и B морита-эквивалентны, то $K_0(A) \cong K_0(B)$.*

Если C^*-алгебры A и B морита-эквивалентны, то с помощью GNS-конструкции, рассмотренной на семинаре, можно установить биективное соответствие между невырожденными представлениями алгебр A и B. Указанное соответствие сохраняет свойство неприводимости представлений.