09.8.7 / 09.12.6

Лекция 4 (5 октября)
Автоморфные функции и их обращение; кристоффелиан.

> *Пуанкаре, в начале своей деятельности очень плохо знавший обстановку в Германии, называл группы с предельными окружностями "фуксовыми", хотя Фукс никаких заслуг в этой области не имел. Когда я обратил его внимание на общие функции этого рода, он стал называть их "клейновскими". Таким образом, по части истории здесь царит невероятная путаница. В Германии мало-помалу получило всеобщую поддержку моё предложение отказаться от всяких терминов персонального характера и называть эти функции "автоморфными".*

Ф. Клейн

4.0. Введение. Нашей ближайшей целью является определение *римановой поверхности ростка аналитической функции.* Неформально, это – "истинная" область определения аналитической функции, наибольшее множество, на которое функция может быть продолжена *переразложением* сходящихся степенных рядов; формальное определение будет дано в следующей лекции.

Риманову поверхность произвольного ростка аналитической функции далеко не всегда удаётся представить себе в виде наглядного образа; в общем случае лучшее, на что можно рассчитывать – это на картину *графика многозначного соответствия.* Однако для широкого класса функций, содержащего элементарные и многие другие, возможна гораздо более ясная картина. Именно этому классу функций – грубо говоря, обратным к периодическим и квазипериодическим – и посвящена сегодняшняя лекция.

Материал, излагаемый в этой лекции, является стандартным, однако термин *крмстоффелиан* (с соответствующими объяснениями) вводится здесь впервые, а само понятие является модификацией известного – функция заменяется на дифференциал.

4.1. Два примера. Рассмотрим два степенных ряда, сходящихся при $|z| < 1$:

$$-\log(1-z) := z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots \qquad (\mathbf{4.1.1})$$

и

$$\sqrt{1+z} := 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1!}z + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}z^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}z^3 \pm \dots =$$
$$= 1 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{8}z^2 + \frac{1}{16}z^3 - \frac{5}{128}\,z^4 + \frac{7}{256}\,z^5 - \frac{21}{1024}\,z^6 \pm \dots =$$
$$= 1 + \frac{z}{2} - \frac{1}{2\cdot 4}z^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}z^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}z^4 \pm \dots \qquad (\mathbf{4.1.2})$$

Эти две элементарные функции, рассматриваемые в комплексной области, доставляют простейшие примеры ростков аналитических функций, допускающих нетривиальное (многозначное) аналитическое продолжение за пределы своего круга сходимости.

Начинать изучение этих функций лучше всего с геометрических представлений – подобно тому, как в вещественном анализе рекомендуется прежде всего представить себе график функции. В данном случае картины комплексных "графиков" непросты – это и есть интересующие нас *римановы поверхности*, однако задача облегчается тем, что *обратные* к рассматриваемым функции, определённые на всей комплексной плоскости, ведут себя просто и понятно.

Действительно, поменяв ролями "оси" первого из "графиков", мы перепишем $w = -\log(1-z)$ как

$$z = 1 - e^{-w}, \qquad (\mathbf{4.1.3})$$

и оказывается, что с точностью до сдвигов и центральных симметрий отображение $w \mapsto z$ представляет собой "скручивание $w-$ плокости в трубочку, а $z \mapsto w$, стало быть – обратное многозначное отображение. Обратим внимание на то, что точка $z = 1$, лежащая на границе круга сходимости ряда (1.4.1), (в ней ряд расходится как гармонический) не участвует в игре.

Смена ролей осей второго из "графиков" приводит к переписыванию $w = \sqrt{1+z}$ в виде
$$z = w^2 - 1, \tag{\textbf{4.1.4}}$$
который показывает, что и в этом случае отображение $w \mapsto z$ имеет простой геометрический смысл.

Прямое рассмотрение аналитических продолжений (*переразложений*) рассматриваемых функций также возможно, но требует бо́льших усилий; см. задачи 4.1 и 4.2.

4.2. Элементарные функции как обращения интегралов. Оставим $\sqrt{1+z}$ (римановым поверхностям алгебраических функций будут посвящены лекции ???) и рассмотрим интегральные представления той же $z \mapsto -\log(1-z)$ и ещё одной элементарной функций:
$$-\log(1-\underline{z}) := \int_0^{\underline{z}} \frac{\mathrm{d}z}{1-z}, \tag{\textbf{4.2.1}}$$
$$\operatorname{arctg} \underline{z} := \int_0^{\underline{z}} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}; \tag{\textbf{4.2.2}}$$
многозначность этих функций скрыта, разумеется, в *путях интегрирования* от 0 до $\underline{z}$.

В комплексной области логарифм мало отличается от арктангенса: имеет место тождество
$$\frac{2}{1+z^2} \equiv \frac{\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}} - \frac{\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}, \tag{\textbf{4.2.3}}$$
в силу которого формула (4.2.2) может быть переписана в виде
$$\operatorname{arctg} \underline{z} := \frac{\mathrm{i}}{2} \int_0^{\underline{z}} (\frac{1}{z+\mathrm{i}} - \frac{1}{z-\mathrm{i}}) \mathrm{d}z. \tag{\textbf{4.2.4}}$$

В аналогичной форме может быть представлен и арксинус – см. задачу 4.3.

Таким образом, элементарные функции побуждают нас рассмотреть в комплексной области общие интегралы вида

$$I(\underline{z}) := \int_{z_0}^{z} \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{z - A_i} \mathrm{d}z; \tag{4.2.4}$$

в соответствии с терминологией, введённой в начале лекции 2, такие интегралы следует называть *интегралами третьего рода* на римановой сфере.

С точки зрения символического (=неопределённого) интегрирования они интереса не представляют: например, в вещественной области в самом общем виде

$$I(z) = \mathrm{Const} + \log \prod_{i=1}^{n} [(z - A_i)^{c_i}]. \tag{4.2.5}$$

Однако в комплексной области сочетание в этой формуле логарифма и степенных функций с произвольными (комплексными) показателями делает эту функцию (с параметрами $A_1, \ldots, A_n; c_1, \ldots, c_n$) многозначной и сложной для изучения. Ниже в этой лекции мы проясним её геометрический смысл.

4.3. Обращение интегралов алгебраических функций. Классики придавали огромное значение обобщению, скажем, определения синуса через функцию, обратную интегралу алгебраической функции: синус может быть определён тождеством

$$z \equiv \int_0^{\sin z} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - u^2}} \tag{4.3.0}$$

Одно из таких обобщений – введение Фаньяно и Эйлером *лемнискатического синуса,* который а современной литературе (см. **[Маркушевич1974]**) обозначается sl, (Гаусс обозначал его sinlemn) определяется тождеством

$$z \equiv \int_0^{\mathrm{sl} z} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - u^4}}. \tag{4.3.1}$$

Лемнискатический синус – *однозначная* (двоякопериодическая мероморфная) функция; этот неочевидный результат будет нами получен в лекции ?? современными средствами. Дальнейшие обобщения этих понятий и связанных с ними результатов также будут излагаться на современном языке.

Отметим, что интеграл (4.3.1) – *неполный* (имеет переменный верхний предел); в предыдущей же лекции мы обсуждали вычисление *полных* интегралов.

4.4. Квазипериодические функции. Сменим теперь точку зрения на *противоположную*: будем рассматривать экспоненту вместо логарифма, синус вместо арксинуса и т.п. Функции, которыми мы занимаемся, станут однозначными; это в некотором смысле означает возвращение из курса по *римановым поверхностям* в *тфкп*. Однако, даже только обращая интегралы алгебраических функций, мы встретимся с классами функций, которые обычно в современных курсах тфкп не рассматриваются.

В случае обращения элементарных многозначных функций приращения значений при обходах точек ветвления превращаются в известные свойства *периодичности* функций, такие, как

$$\sin(z+2\pi) \equiv \sin z \tag{\textbf{4.4.1}}$$

или

$$e^{z+2\pi \mathrm{i}} \equiv e^{z}. \tag{\textbf{4.4.2}}$$

Для наших целей потребуется расширение этого понятия. Комплексную плоскость $\mathbb{C}$ (область определения синуса и экспоненты) мы заменим на произвольную область $D \subseteq \mathbb{C}$, а группу $\mathbb{Z}$ преобразований плоскости, реализованную как группу сдвигов $z \mapsto z+2\pi$ и $z \mapsto z+2\pi\mathrm{i}$ – на произвольную *дискретную* подгруппу

$$\Gamma \subset \mathrm{Aut} D; \tag{\textbf{4.4.3}}$$

здесь $\mathrm{Aut}D$ – полная группа *биголоморфных* (=конформных, сохраняющих ориентацию) отображений области D в себя; в силу стандартных результатов тфкп вещественная размерность этой группы не превосходит 4.

Основные примеры пар (D,Γ) – это

•$(\mathbb{C}, \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z})$, где $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ действует на $\mathbb{C}$ *сдвигами на решётку,* т.е. преобразованиями $z \mapsto z + m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2$, в которых $(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$, а

λ_1, λ_2– ненулевые комплексные числа с невещественным отношением,

и

$\bullet(\mathcal{H}, \mathsf{PSL}_2(\mathbb{Z}))$, где $\mathcal{H} := \{\tau \in \mathbb{C} | \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$ – *верхняя полуплоскость,* а

$$\mathsf{PSL}_2(\mathbb{Z}) := \frac{\mathsf{SL}_2(\mathbb{Z})}{\{\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}} = \frac{\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1\}}{\{\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}}; \tag{4.4.4}$$

группа $\mathsf{PSL}_2(\mathbb{Z})$ действует на $\mathcal{H}$ дробно-линейными преобразованиями $\tau \mapsto \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$, коэффициенты которого определены с точностью до знака. Часто вместо группы $\mathsf{PSL}_2(\mathbb{Z})$ рассматриваются её подгруппы конечного индекса.

При заданных D и Γ *мероморфная* функция $f \in \mathcal{M}[D]$ будет "называться" *квазипериодической,* если имеется система **достаточно простых** функций $a_\gamma, b_\gamma \in \mathcal{O}[D]$ для всех $\gamma \in \Gamma$, что

$$f(\gamma \cdot z) \equiv a_\gamma(z) f(z) + b_\gamma(z). \tag{4.4.5}$$

Разумеется, это – не математическое определение, поскольку мы не даём определения *простых* функций; однако приведённая формулировка позволит нам без колебаний относить некоторые функции к квазипериодическим, как только для них будут выполняться соотношения вида (4.4.6). Обычно функции a_γ и b_γ – константы, линейные функции или экспоненты линейных функций.

4.5. Конформные эквивалентности многоугольников. Мы рассмотрим класс аналитических функций, имеющих прозрачный геометрический смысл: их *элементы* будут задавать *конформные эквивалентности* многоугольников на комплексной плоскости.

Многоугольник мы будем понимать чуть-чуть шире, чем в школьной математике; мы будем называть многоугольником непустое собственное связное односвязное открытое подмножество комплексной плоскости, ограниченное конечным количеством отрезков, лучей и прямых;

такое представление неоднозначно, и $n-$ угольником будет называться многоугольник, для которого n – минимально возможное такое количество. Так, 1-угольники – это полуплоскость и дополнение к замкнутому лучу, а 2-угольники – внутренности углов и полосы.

Очевидным образом определяются *вершины* многоугольника и *углы* в них, лежащие между 0 и 2π.

Неограниченный многоугольник называется также *несобственным;* у него есть вершина в бесконечности, угол в которой определяется с помощью стереографической проекции на сферу Римана; этот угол может оказаться нулевым.

Согласно теореме Римана, все многоугольники, будучи связными односвязными областями в $\mathbb{C}$, конформно эквивалентны друг другу и, в частности, верхней полуплоскости $\mathcal{H}$; именно явным видом последней конформной эквивалентности мы и займёмся.

Итак, мы ищем однолистные функции

$$z : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C},$$

отображающие верхнюю полуплоскость $\mathcal{H}$ на многоугольники; согласно геометрической теории функций, каждое такое отображение z непрерывно продолжается на границу области $\mathcal{H}$, т.е. на $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, и соответствующее продолжение мы тоже будем обозначать

$$z : \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{C});$$

образ $z(\mathbb{P}_1(\mathbb{R}))$ – ломаная, ограничивающая многоугольник. В случае несобственного многоугольника она содержит бесконечную вершину.

Обозначим z-прообразы вершин многоугольника через $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$; традиционно предполагается, что вершины и их прообразы нумеруются в соответствии с циклическим порядком обхода по границе многоугольника, но для дальнейшего это несущественно.

Обозначим $\pi\alpha_1, \ldots, \pi\alpha_n$ углы при вершинах $z(A_1), \ldots, z(A_n)$. Согласно (разумному) определению угла,

$$0 \leq \alpha_1, \ldots, \alpha_n \leq 2; \qquad \textbf{(4.5.1)}$$

как известно,

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = n-2. \qquad (\mathbf{4.5.2})$$

(Эта формула должна быть уточнена при $n = 1$ и $n = 2$. Кроме того, угол в бесконечности должен браться с правильным знаком).

Обозначим $\mathrm{Conf}(A_1, \ldots, A_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ множество конформных отображенный с указанными параметры. Это множество, очевидно, является вещественным алгебраическим многообразием с краем; его вещественная размерность в силу (4.5.2) равна

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Conf}(A_1, \ldots, A_n; \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 2n-1. \qquad (\mathbf{4.5.3})$$

С другой стороны, обозначив группу преобразований подобия комплексной плоскости

$$\mathsf{Aff}_1(\mathbb{C}) := \{z \mapsto Kz + B | (K, B) \in \mathbb{C}^{\times} \times \mathbb{C}\}, \qquad (\mathbf{4.5.4})$$

заметим, что множество *классов подобия* n-угольников представляет собой множество упорядоченных вершин многоугольника, отфакторизованное по действию группы $\mathsf{Aff}_1(\mathbb{C})$, так что

$$\dim_{\mathbb{R}} \frac{\{\text{вершины } z_1, \ldots, z_n\}}{\mathsf{Aff}_1(\mathbb{C})} = 2 \dim_{\mathbb{C}} \frac{\{\text{вершины } z_1, \ldots, z_n\}}{\mathsf{Aff}_1(\mathbb{C})} =$$
$$2(n-2) = 2n-4. \qquad (\mathbf{4.5.5})$$

Различие размерностей на 3 объясняется тем, что геометрия образа верхней полуплоскости $z(\mathcal{H})$ определяется не самой функцией z, а её классом эквивалентности под действием группы

$$\mathsf{SL}_2(\mathbb{R}) := \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1\}$$

на аргументы преобразованиями $t \mapsto \frac{dt-b}{-ct+a}$. Итак, в целом нас интересует множество голоморфных на верхней полуплоскости однолистных функций $t \mapsto z(t)$ по модулю отношения эквивалентности, определяемого действием вещественной 7-параметрической группы, согласно которому

$$[t \mapsto z(t)] \sim [t \mapsto Kz(\frac{dt-b}{-ct+a}) + B]. \qquad (\mathbf{4.5.6})$$

4.6. Кристоффелиан. Действие группы преобразований подобия "убивается" переходом от функции z к функции $\frac{\ddot{z}}{\dot{z}}$. Заметим, что новая функция голоморфна на $\mathcal{H}$ в силу однолистности функции z.

Теорема. *Если z – однолистная функция, определённая в предыдущих разделах, а $\{A_1, \dots, A_n\} \subset \mathbb{R}$, то $\frac{\ddot{z}}{\dot{z}}$ продолжается до рациональной функции на всей $t-$плоскости и имеет вид*

$$\frac{\ddot{z}(t)}{\dot{z}(t)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j - 1}{t - A_j}.$$

Если одна из точек $\{A_1, \dots, A_n\}$ лежит в бесконечности, то соответствующее ей слагаемое из-под знака суммы выбрасывается.

Эта теорема доказывается во многих стандартных учебниках, см., например, **[ГурвицКурант1968]**.

4.7. Интегралы Кристоффеля-Шварца.
++++++++++++++++++++++++++++++++++

Задачи

4.1. Введите в рассмотрение какую-нибудь замкнутую кривую, обходящую (как это принято, *против* часовой стрелки) особую точку $z = 1$ ряда (4.1.1) для функции $z \mapsto -\log(1-z)$. Покройте эту кривую кругами *небольших* радиусов – таких, что *переразложения,* т.е. тождественные равенства сходящихся рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{m,n}(z - a_m)^n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} c_{m+1,n}(z - a_{m+1})^n,$$

имеют место для всех пар соседних кругов; здесь $0 \le m \le M$, причём $a_0 = a_M = 0$ и $c_{0,0} = 0$, $c_{0,n} = \frac{1}{n}$ при $n > 0$. Цель исследования – определение последнего ряда $\sum_{n=0}^{\infty} c_{M,n} z^n$.

4.2 Сформулируйте и решите задачу, аналогичную 4.1, для ряда (4.1.2), в который разлагается функция $z \mapsto \sqrt{1+z}$.

4.3. Воспользовавшись рациональной параметризацией коники, постройте интегральное представление арксинуса в комплексной области.

4.4. Докажите (в удобных для вас предположениях) *формулу Фаньяно*

$$\int_0^{\frac{2u\sqrt{1-u^4}}{1+u^4}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} = 2\int_0^u \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Выпишите несколько первых членов разложений обеих частей формулы в ряды по u.

4.5. Выразите решение *уравнения колебания маятника*

$$\ddot{x} = a\sin x$$

в виде неполного эллиптического интеграла первого рода.

4.6. Для $k = 2, 3, 4, \ldots$ *рядами Эйзенштейна* называются голоморфные функции $G_k \in \mathcal{O}(\mathcal{H})$, задаваемые формулами

$$G_k(\tau) := \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\setminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(m\tau+n)^{2k}}.$$

Проверьте сходимость этих рядов и изучите их квазипериодические свойства относительно группы $\mathsf{PSL}_2(\mathbb{Z})$.

Подсказка. Эта группа порождена преобразованиями $\tau \mapsto \tau + 1$ и $\tau \mapsto -\frac{1}{\tau}$.

4.7. Перечислите конформные эквивалентности многоугольников, задаваемые элементарными функциями.