

**Лекция 1 (14 сентября 2009)**  
**Ньютон и эллиптические кривые (I).**

**1.0. План.** Реальной историей математики мы всё-таки заниматься не будем хотя бы по причине недостатка времени.

Вместо этого мы в сегодняшней и в следующей лекции с современных позиций обсудим три (связанные между собой) задачи, которыми занимался Исаак Ньютон:

- интегрирование уравнений Кеплера;
- вычисление длины дуги эллипса;
- классификация плоских кубических кривых.

**ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ  
И УРАВНЕНИЯ КЕПЛЕРА**

*Люблю обычные слова,  
Как неизведанные страны.  
Они понятны лишь сперва,  
Потом значения их туманны.  
Их протирают, как стекло.  
И в этом наше ремесло.*

Д. Самойлов

**1.1. Уравнения Кеплера.** Опуская физические рассуждения, напомним, что, согласно Кеплеру-Ньютону, плоское движение планеты (например, Земли) в поле тяготения Солнца в естественной системе координат (с центром в Солнце) описывается парой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\gamma \frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} & (1.1.1) \\ \ddot{y} = -\gamma \frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} & (1.1.2) \end{cases}$$

В Солнечной системе

$$\gamma = Gm_{\odot} \approx 1.327 \cdot 10^{20} \frac{\text{м}^3}{\text{сек}^2}.$$

**1.2. Круговые решения.** Бросается в глаза двупараметрическое семейство решений уравнений Кеплера

$$x(t) = r_0 \cos \frac{\sqrt{\gamma}(t - t_0)}{r_0^{\frac{3}{2}}}, \quad y(t) = r_0 \sin \frac{\sqrt{\gamma}(t - t_0)}{r_0^{\frac{3}{2}}}.$$

Иначе эти решения можно записать в виде

$$x(t) = r_0 \cos \frac{2\pi(t - t_0)}{T}, \quad y(t) = r_0 \sin \frac{2\pi(t - t_0)}{T}.$$

Равносильность двух записей выражается соотношением

$$\frac{\sqrt{\gamma}}{r_0^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\pi}{T},$$

или

$$\frac{r_0^3}{T^2} = \frac{\gamma}{4\pi^2}.$$

Это равенство связано с *третьим законом Кеплера*: его левая часть зависит от планеты, а правая постоянна в Солнечной системе.

Если бы Земля двигалась вокруг Солнца по окружности, то естественно было бы принять за  $r_0$  *среднее расстояние от Земли до Солнца* (называемое также *астрономической единицей*), приближённо равное *полтора ста миллионов километров*, или

$$r_0 = 1.5 \cdot 10^{11} \text{м};$$

это даёт для *года* значение

$$T = 2\pi \frac{r_0^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\gamma}} \approx 2\pi \frac{(1.5 \cdot 10^{11} \text{м})^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1.327 \cdot 10^{20} \frac{\text{м}^3}{\text{сек}^2}}} = 2\pi \frac{(1.5 \cdot 10^{11})^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1.327 \cdot 10^{20}}} \text{сек} \approx$$

$$\approx 3.136 \cdot 10^7 \text{сек} \approx 5.227 \cdot 10^5 \text{мин} \approx 8712.569 \text{час} \approx 363.023 \text{суток},$$

в хорошем согласии с нашими знаниями о мире. Проведённая прикидка подтверждает, что реальное движение Земли вокруг Солнца достаточно близко к круговому.

**1.3. Общие решения уравнений Кеплера.** Как мы знаем из теоремы существования и единственности решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений, множество всех решений 4-мерно; как мы вскоре увидим, общие решения этих уравнений Кеплера-Ньютона – в некотором смысле возмущения круговых и тоже *периодичны*. Сейчас они будут полностью описаны, хотя для некруговых решений  $x$  и  $y$  не могут быть выражены в виде известных функций от  $t$ .

Причина того, что уравнений Кеплера удаётся проинтегрировать, заключается в их *симметриях*. Действительно, на множестве решений уравнений (1.1.1), (1.1.2) действуют три группы:

сдвиги по времени  $(x(t), y(t)) \mapsto (x(t - t_0), y(t - t_0))$ ;  
 повороты  $(x, y) \mapsto (\cos \alpha \cdot x + \sin \alpha \cdot y, -\sin \alpha \cdot x + \cos \alpha \cdot y)$ ;  
 масштабные преобразования  $(x(t), y(t)) \mapsto (Rx(\frac{t}{R^{\frac{3}{2}}}), Ry(\frac{t}{R^{\frac{3}{2}}}))$ .

**1.4. Секториальная скорость.**<sup>1</sup> Вращения, как и всякая группа симметрий системы дифференциальных уравнений, определяют (по теореме Э.Нётер...) *интеграл* – в данном случае величину

$$\Sigma := xy - \dot{x}y,$$

очевидно сохраняющуюся в силу уравнений (1.1.1), (1.1.2).

**1.5. Переход к полярным координатам.** Введя обычные обозначения

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi, \quad (1.5.1)$$

вычислим

$$\Sigma = r^2 \dot{\phi}; \quad (1.5.2)$$

сами уравнения (1.1.1), (1.1.2) принимают вид

$$\begin{cases} \ddot{r} \cos \phi - 2\dot{r}\dot{\phi} \sin \phi - r\dot{\phi}^2 \cos \phi - r\ddot{\phi} \sin \phi = -\gamma \frac{\cos \phi}{r^2} & (1.5.3) \\ \ddot{r} \sin \phi + 2\dot{r}\dot{\phi} \cos \phi - r\dot{\phi}^2 \sin \phi + r\ddot{\phi} \cos \phi = -\gamma \frac{\sin \phi}{r^2}. & (1.5.4) \end{cases}$$

---

<sup>1</sup>Во многих книгах используется непонятное для немехаников словосочетание *кинетический момент*

**1.6. Разделение переменных.** Комбинация  $\cos \phi \cdot (1.5.3) + \sin \phi \cdot (1.5.4)$  даёт

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = -\frac{\gamma}{r^2}, \quad (1.6.1)$$

или, с учётом (1.5.2),

$$\ddot{r} = \frac{\Sigma^2}{r^3} - \frac{\gamma}{r^2}. \quad (1.6.2)$$

**1.7. Интеграл энергии.** Уравнения типа (1.6.2) изучаются в курсе теоретической механики под названием *механическая система с одной степенью свободы*. Эти системы обладают интегралом (*эффективной???*) *энергии* – в данной случае величиной

$$E := \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{\Sigma^2}{2r^2} - \frac{\gamma}{r}, \quad (1.7.1)$$

сохраняющейся в силу (1.6.2). Последнее соотношение разрешается относительно  $\dot{r}$ :

$$\dot{r} = \sqrt{2E + \frac{2\gamma}{r} - \frac{\Sigma^2}{r^2}},$$

и мы получаем выражение для "дифференциала времени"

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{2E + \frac{2\gamma}{r} - \frac{\Sigma^2}{r^2}}}. \quad (1.7.2)$$

**1.8. Наша первая риманова поверхность.** Здесь мы готовы вспомнить о предмете нашего курса: введя *коникку*, заданную соотношением

$$\frac{1}{\rho^2} = 2E + \frac{2\gamma}{r} - \frac{\Sigma^2}{r^2}, \quad (1.8.1)$$

мы можем (с точностью до константы) выразить время как *интеграл от рациональной формы на римановой поверхности*: соотношение (1.10) переписывается в виде

$$t = \int \rho dr, \quad (1.8.2)$$

где  $\rho$  и  $r$  связаны уравнением

$$\frac{1}{\rho^2} + \left(\frac{\Sigma}{r} - \frac{\gamma}{\Sigma}\right)^2 = 2E + \frac{\gamma^2}{\Sigma^2}. \quad (1.8.3)$$

Наша коника допускает *рациональную параметризацию* (вспомните тангенс половинного аргумента или формулу для пифагоровых троек):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho\sqrt{2E + \frac{\gamma^2}{\Sigma^2}}} = \frac{1 - T^2}{1 + T^2} \quad (1.8.4) \\ \frac{\frac{\Sigma}{r} - \frac{\gamma}{\Sigma}}{\sqrt{2E + \frac{\gamma^2}{\Sigma^2}}} = \frac{2T}{1 + T^2}. \quad (1.8.5) \end{array} \right.$$

**1.9. Интегрирование дифференциала времени.** Прямые вычисления показывают

$$dt \stackrel{(1.8.2)}{=} \rho dr \stackrel{(1.8.4),(1.8.5)}{=} \frac{2\Sigma^3(1 + T^2)}{[\gamma(1 + T^2) + 2T\sqrt{\gamma^2 + 2E\Sigma^2}]^2} dT. \quad (1.9.1)$$

Вводя *безразмерный* параметр (геометрический смысл которого вскоре станет ясен)

$$\epsilon := \sqrt{1 + \frac{2E\Sigma^2}{\gamma^2}} \quad (1.9.2)$$

и выражая через него энергию

$$E = -\frac{1}{2}(1 - \epsilon^2)\frac{\gamma^2}{\Sigma^2}, \quad (1.9.3)$$

переписываем *дифференциал безразмерного времени* в виде

$$\frac{1}{2} \frac{\gamma^2}{\Sigma^2} dt \stackrel{(1.9.1),(1.9.3)}{=} \frac{1 + T^2}{(1 + 2\epsilon T + T^2)^2} dT \quad (1.9.4)$$

и берём стандартный интеграл: с точностью до константы

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\gamma^2}{\Sigma^2} t \stackrel{(1.9.4)}{=} \int \frac{1 + T^2}{(1 + 2\epsilon T + T^2)^2} dT = \\ & = \int \frac{1 + 2\epsilon T + T^2 - 2\epsilon T}{(1 + 2\epsilon T + T^2)^2} dT = \int \frac{dT}{1 + 2\epsilon T + T^2} - 2\epsilon \int \frac{T dT}{(1 + 2\epsilon T + T^2)^2} = \\ & = \int \frac{d(T + \epsilon)}{1 - \epsilon^2 + (T + \epsilon)^2} - 2\epsilon \int \frac{(T + \epsilon)dT - \epsilon dT}{[1 - \epsilon^2 + (T + \epsilon)^2]^2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \operatorname{arctg} \frac{T+\epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}} - 2\epsilon \int \frac{(T+\epsilon)d(T+\epsilon)}{[1-\epsilon^2+(T+\epsilon)^2]^2} + \\
&\quad + 2\epsilon^2 \int \frac{d(T+\epsilon)}{[1-\epsilon^2+(T+\epsilon)^2]^2} \stackrel{T+\epsilon=\sqrt{1-\epsilon^2}\tau}{=} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \operatorname{arctg} \tau - \frac{2\epsilon}{1-\epsilon^2} \int \frac{\tau d\tau}{(1+\tau^2)^2} + \frac{2\epsilon^2}{(1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{d\tau}{(1+\tau^2)^2} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \operatorname{arctg} \tau + \frac{\epsilon}{1-\epsilon^2} \frac{1}{1+\tau^2} + \frac{\epsilon^2}{(1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{\tau}{1+\tau^2} + \operatorname{arctg} \tau \right) = \\
&= \frac{1}{(1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arctg} \tau + \frac{\epsilon}{1-\epsilon^2} \frac{1 + \frac{\epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}}\tau}{1+\tau^2}. \tag{1.9.5}
\end{aligned}$$

Окончательно

$$t = t_0 + \frac{2\Sigma^2}{\gamma^2} \left[ \frac{1}{(1-\epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arctg} \tau + \frac{\epsilon}{1-\epsilon^2} \frac{1 + \frac{\epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}}\tau}{1+\tau^2} \right], \tag{1.9.6}$$

где

$$r \stackrel{(1.8.5)}{=} \frac{\Sigma^2}{\gamma} \frac{1+T^2}{1+2\epsilon T+T^2}, \quad T+\epsilon = \sqrt{1-\epsilon^2}\tau. \tag{1.9.7}$$

Таким образом, нам удалось выразить ВРЕМЯ  $t$ , и как элементарную функцию от вспомогательного параметра  $\tau$ . Однако разрешить это соотношение в элементарных функциях невозможно. Время – ТРАНСЦЕНДЕНТНАЯ ХИМЕРА!

**1.10. Угловое "время".** К счастью, "угловое время"  $\phi$  ведёт себя лучше. Переписывая (1.5.2) в виде

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\Sigma}{r^2}, \tag{1.10.1}$$

преобразуем (1.7.2) к

$$\frac{r^2 d\phi}{\Sigma} = \frac{dr}{\sqrt{2E + \frac{2\gamma}{r} - \frac{\Sigma^2}{r^2}}}, \tag{1.10.2}$$

или

$$d\phi = \frac{\Sigma dr}{r^2 \sqrt{2E + \frac{2\gamma}{r} - \frac{\Sigma^2}{r^2}}} = - \frac{\Sigma d\frac{1}{r}}{\sqrt{2E + \frac{2\gamma}{r} - \frac{\Sigma^2}{r^2}}} = - \frac{\Sigma d\frac{1}{r}}{\sqrt{2E + \frac{\gamma^2}{J^2} - \left(\frac{\Sigma}{r} - \frac{\gamma}{J}\right)^2}} =$$

$$= -\frac{d\left(\frac{\Sigma}{r} - \frac{\gamma}{\Sigma}\right)}{\sqrt{2E + \frac{\gamma^2}{\Sigma^2} - \left(\frac{\Sigma}{r} - \frac{\gamma}{\Sigma}\right)^2}} = d \arccos \frac{\frac{\Sigma}{r} - \frac{\gamma}{\Sigma}}{\sqrt{2E + \frac{\gamma^2}{\Sigma^2}}}. \quad (1.10.3)$$

Интегрируя это соотношение, получаем

$$\phi - \phi_0 = \arccos \frac{\frac{\Sigma}{r} - \frac{\gamma}{\Sigma}}{\sqrt{2E + \frac{\gamma^2}{\Sigma^2}}},$$

или

$$\cos(\phi - \phi_0) = \frac{\frac{\Sigma}{r} - \frac{\gamma}{\Sigma}}{\sqrt{2E + \frac{\gamma^2}{\Sigma^2}}},$$

или

$$\frac{\gamma}{\Sigma} + \sqrt{2E + \frac{\gamma^2}{\Sigma^2}} \cos(\phi - \phi_0) = \frac{\Sigma}{r},$$

откуда

$$r = \frac{\Sigma}{\frac{\gamma}{\Sigma} + \sqrt{2E + \frac{\gamma^2}{\Sigma^2}} \cos(\phi - \phi_0)} = \frac{\frac{\Sigma^2}{\gamma}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2E\Sigma^2}{\gamma^2}} \cos(\phi - \phi_0)}. \quad (1.10.4)$$

Это – *уравнение эллипса* в полярных координатах, и мы вывели *первый закон Кеплера* из закона Всемирного Тяготения. Наш обезразмеривающий время параметр  $\epsilon$ , таким образом – *эксцентриситет* эллиптической орбиты планеты.

Вводя

$$r_0 := \frac{\Sigma^2}{\gamma} \quad (1.10.5)$$

и пользуясь введённым выше

$$\epsilon := \sqrt{1 + \frac{2E\Sigma^2}{\gamma^2}},$$

переписываем (1.10.4) в виде

$$r = \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos(\phi - \phi_0)}. \quad (1.10.6)$$

**1.11. Ответ.** Прямые вычисления показывают, что  $\phi$ -динамика в расширенном фазовом пространстве выглядит следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{r_0 \cos \phi}{1 + \epsilon \cos(\phi - \phi_0)} \quad (1.11.1) \\ y = \frac{r_0 \sin \phi}{1 + \epsilon \cos(\phi - \phi_0)} \quad (1.11.2) \\ \dot{x} = \sqrt{\frac{\gamma}{r_0}}(-\sin \phi - \epsilon \sin \phi_0) \quad (1.11.3) \\ \dot{y} = \sqrt{\frac{\gamma}{r_0}}(\cos \phi + \epsilon \cos \phi_0) \quad (1.11.4) \end{array} \right.$$

Связь времён:

$$dt = \sqrt{\frac{r_0^3}{\gamma}} \frac{d\phi}{[1 + \epsilon \cos(\phi - \phi_0)]^2} \quad (1.11.5)$$

**1.12. Пройденный путь.** Как обычно,

$$\begin{aligned} ds &:= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \stackrel{(1.11.3), (1.11.4)}{=} \sqrt{\frac{\gamma}{r_0}} \sqrt{1 + 2\epsilon \cos(\phi - \phi_0) + \epsilon^2} dt \stackrel{(1.11.5)}{=} \\ &= \sqrt{\frac{\gamma}{r_0}} \sqrt{1 + 2\epsilon \cos(\phi - \phi_0) + \epsilon^2} \sqrt{\frac{r_0^3}{\gamma}} \frac{d\phi}{[1 + \epsilon \cos(\phi - \phi_0)]^2} = \\ &= r_0 \frac{\sqrt{1 + 2\epsilon \cos(\phi - \phi_0) + \epsilon^2}}{[1 + \epsilon \cos(\phi - \phi_0)]^2} d\phi. \end{aligned} \quad (1.12.1)$$

Введя

$$\xi := -\cos(\phi - \phi_0), \quad (1.12.2)$$

получим

$$\frac{ds}{r_0} = \frac{\sqrt{1 - 2\epsilon\xi + \epsilon^2}}{(1 - \epsilon\xi)^2} \cdot \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}. \quad (1.12.3)$$

На МАЛОЙ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

$$\zeta^2 = (1 - \xi^2)(1 + \epsilon^2 - 2\epsilon\xi) \quad (1.12.4)$$

имеем

$$ds = r_0 \cdot \frac{1 - 2\epsilon\xi + \epsilon^2}{(1 - \epsilon\xi)^2} \cdot \frac{d\xi}{\zeta}. \quad (1.12.4)$$



**1.13. Другие величины.** Имеем

$$d\phi \stackrel{(1.12.2)}{=} -d \arccos \xi = \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}. \quad (1.13.1)$$

Этот дифференциал иррационален на малой римановой поверхности, поэтому введём ещё

$$\eta := \arcsin(\phi - \phi_0) \quad (1.13.2)$$

и БОЛЬШУЮ РИМАНОВУ ПОВЕРХНОСТЬ, определяемую в трёхмерном  $(\xi, \eta, \zeta)$ -пространстве соотношениями

$$\begin{cases} \xi^2 + \eta^2 = 1 & (1.13.3) \\ \zeta^2 = (1 - \xi^2)(1 + \epsilon^2 - 2\epsilon\xi). & (1.13.4) \end{cases}$$

На этой римановой поверхности дифференциалы всех рассмотренных величин рациональны:

$$d\phi \stackrel{(1.13.1), (1.13.3)}{=} \frac{d\xi}{\eta}, \quad (1.13.5)$$

$$\begin{aligned} dt \stackrel{(1.11.5)}{=} \sqrt{\frac{r_0^3}{\gamma}} \frac{d\phi}{[1 + \epsilon \cos(\phi - \phi_0)]^2} & \stackrel{(1.12.2), (1.13.5)}{=} \\ & = \sqrt{\frac{r_0^3}{\gamma}} \cdot \frac{d\xi}{\eta(1 - \epsilon\xi)^2}, \end{aligned} \quad (1.13.6)$$

$$\begin{aligned} dr \stackrel{(1.10.6)}{=} d \frac{r_0}{1 + \epsilon \cos(\phi - \phi_0)} & = r_0 d \frac{1}{1 - \epsilon\xi} = \\ & = \epsilon r_0 \frac{d\xi}{(1 - \epsilon\xi)^2}; \end{aligned} \quad (1.13.7)$$

с помощью этих соотношений легко выразить также и дифференциалы исходных координат  $x, y, \dot{x}, \dot{y}$  в расширенном фазовом пространстве. Развив соответствующий аппарат, Мы вернёмся в последующих лекциях к анализу этих дифференциалов и к их интегрированию.

## ДЛИНА ДУГИ ЭЛЛИПСА

*Сравняться с зимним днём,  
С его пустым овалом,  
И быть всегда при нём  
Его оттенком малым.*

Б. Ахмадулина

**1.14. Тригонометрическая параметризация.** Рассмотрим эллипс, заданный стандартным уравнением

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1; \quad (1.14.1)$$

дифференциал длины его дуги имеет вид

$$ds = \sqrt{(dX)^2 + (dY)^2} \quad (1.14.2).$$

Воспользовавшись тригонометрической параметризацией

$$X = a \cos T, \quad Y = b \sin T, \quad (1.14.3)$$

получим

$$s = \int \sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T} dT. \quad (1.14.4)$$

Это – (неполный) *интеграл Лежандра второго рода* в тригонометрической форме, за века тщательно изученный и затабулированный.

**1.15. Переход на риманову поверхность.** Сведём рассматриваемый интеграл к обсуждавшемуся выше виду. Введём

$$Z := \sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T} \quad (1.15.1)$$

и отметим тождество

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = a^2 + b^2, \quad (1.15.2)$$

так что вещественная часть нашей кривой реализована как пересечение сферы с эллиптическим цилиндром. Поскольку

$$dT = d \operatorname{arctg} \frac{aY}{bX} = \frac{a}{b} \frac{d\frac{Y}{X}}{1 + \frac{a^2 Y^2}{b^2 X^2}} = \frac{a}{b} \frac{XdY - YdX}{X^2 + \frac{a^2}{b^2} Y^2}, \quad (1.15.3)$$

а дифференциал равенства (1.14.1) имеет вид

$$\frac{2}{a^2}X dX + \frac{2}{b^2}Y dY = 0, \quad (1.15.4)$$

дифференциал длины (с подходящим знаком) переписывается как

$$\begin{aligned} ds & \stackrel{(1.14.4)}{=} -Z dT \stackrel{(1.15.3), (1.15.4)}{=} -Z \frac{a X \frac{-b^2 X}{a^2 Y} dX - Y dX}{X^2 + \frac{a^2}{b^2} Y^2} = \\ & = \frac{Z a \frac{b^2 X^2}{a^2} + Y^2}{Y b X^2 + \frac{a^2}{b^2} Y^2} dX = \frac{b Z dX}{a Y}. \end{aligned} \quad (1.15.5)$$

**1.16. Дифференциал длины на лежандровой кривой.** Перепишем дифференциал длины в виде

$$\begin{aligned} ds & = \sqrt{1 + \left(\frac{dY}{dX}\right)^2} dX \stackrel{(1.15.4)}{=} \sqrt{1 + \frac{b^4 X^2}{a^4 Y^2}} dX = \sqrt{1 + \frac{b^4}{a^4} \frac{X^2}{b^2 \left(1 - \frac{X^2}{a^2}\right)}} dX = \\ & = \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2) X^2}{a^2 (a^2 - X^2)}} dX. \end{aligned} \quad (1.16.1)$$

Вводя

$$\frac{X}{a} = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \quad \frac{Y}{b} = \frac{2u}{1 + u^2}, \quad (1.16.2)$$

– эта параметризация связана с предыдущей соотношением

$$u = \operatorname{tg} \frac{T}{2} \quad (1.16.3)$$

– переписываем уравнение сферы (1.15.2) в виде

$$Z^2 = a^2 + b^2 - a^2 \frac{(1 - u^2)^2}{(1 + u^2)^2} - 4b^2 \frac{u^2}{(1 + u^2)^2}, \quad (1.16.4)$$

или

$$\begin{aligned} [Z(1 + u^2)]^2 & = (a^2 + b^2)(1 + u^2)^2 - a^2(1 - u^2)^2 - 4b^2 u^2 = \\ & = b^2 + (4a^2 - 2b^2)u^2 + b^2 u^4, \end{aligned} \quad (1.16.5)$$

или

$$\left[\frac{Z(1 + u^2)}{b}\right]^2 = 1 + \left(4\frac{a^2}{b^2} - 2\right)u^2 + u^4. \quad (1.16.6)$$

Введя

$$v := \frac{Z(1+u^2)}{b}, \quad (1.16.7)$$

мы обнаружим, что оказались на *лежандроподобной* кривой, заданной уравнением

$$v^2 = 1 + \left(4\frac{a^2}{b^2} - 2\right)u^2 + u^4; \quad (1.16.7)$$

это (нетрадиционное) название связано с тем, что *лежандровой* кривой принято называть кривую, заданную уравнением

$$v^2 = (1-u^2)(1-k^2u^2); \quad (1.16.8)$$

параметр  $k$  называется *модулем* лежандровой кривой. Очевидно, наша лежандроподобная кривая приводится к стандартному лежандру виду простыми масштабными преобразованиями.

Отметим, что Эйлер и Гаусс особенно интересовались интегралами на кривой

$$v^2 = 1 - u^4, \quad (1.16.9)$$

который соответствует модулю  $k = i$  и случаю  $b^2 = 2a^2$ , т.е. эллипсу, у которого одна из полуосей в  $\sqrt{2}$  раз больше другой (с последующей *мнимой* заменой переменной  $u \leftarrow iu$ ).

**Факт.** *Дифференциал длины дуги* (с точностью до знака) *на кривой*  $v^2 = 1 + \left(4\frac{a^2}{b^2} - 2\right)u^2 + u^4$  *имеет вид*

$$-ds = 2b \frac{vdu}{(1+u^2)^2} \quad (1.16.10)$$

**Проверка.** Вычисляем

$$\begin{aligned} -ds & \stackrel{(1.15.5)}{=} -\frac{b}{a} \frac{ZdX}{Y} \stackrel{(1.16.1)}{=} -\sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)X^2}{a^2(a^2 - X^2)}} dX \stackrel{X=(1.16.2)a\frac{1-u^2}{1+u^2}}{=} \\ & = -a \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)a^2\frac{(1-u^2)^2}{(1+u^2)^2}}{a^2(a^2 - a^2\frac{(1-u^2)^2}{(1+u^2)^2})}} d\frac{1-u^2}{1+u^2} = \\ & = 4a \sqrt{\frac{a^2 - (a^2 - b^2)\frac{(1-u^2)^2}{(1+u^2)^2}}{a^2 - a^2\frac{(1-u^2)^2}{(1+u^2)^2}}} \frac{udu}{(1+u^2)^2} = 4 \sqrt{\frac{a^2 - (a^2 - b^2)\frac{(1-u^2)^2}{(1+u^2)^2}}{1 - \frac{(1-u^2)^2}{(1+u^2)^2}}} \frac{udu}{(1+u^2)^2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4\sqrt{\frac{a^2(1+u^2)^2 - (a^2-b^2)(1-u^2)^2}{(1+u^2)^2 - (1-u^2)^2}} \frac{u du}{(1+u^2)^2} = \\
&= 2\sqrt{a^2(1+u^2)^2 - (a^2-b^2)(1-u^2)^2} \frac{du}{(1+u^2)^2} = \\
&= 2\sqrt{b^2 + (4a^2 - 2b^2)u^2 + b^2u^4} \frac{du}{(1+u^2)^2} = \\
&= 2b\sqrt{1 + (4\frac{a^2}{b^2} - 2)u^2 + u^4} \frac{du}{(1+u^2)^2} \stackrel{(1.16.7)}{=} 2b \frac{v du}{(1+u^2)^2}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

**1.17. Длина эллипса как период рационального дифференциала на лежандровой кривой.** Определим

$$\begin{aligned}
\text{Len}(a, b) &:= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T} dT = \\
&= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T} dT \stackrel{(1.16.2), (1.16.10)}{=} 2b \int_{-1}^1 \frac{v du}{(1+u^2)^2}. \quad (1.17.1)
\end{aligned}$$

Это – определённый интеграл от рационального дифференциала на кривой, которой мы теперь дадим (временное) имя:

$$\ddot{\mathbf{X}}(a, b) : \quad v^2 = 1 + (4\frac{a^2}{b^2} - 2)u^2 + u^4 \quad (1.17.2)$$

(объяснение двум точкам  $\ddot{\mathbf{X}}$  над  $\mathbf{X}$  будет дано ниже).

В самодостаточном вещественном виде

$$\text{Len}(a, b) := 2b \int_{-1}^1 \sqrt{1 + (4\frac{a^2}{b^2} - 2)u^2 + u^4} \frac{du}{(1+u^2)^2}; \quad (1.17.3)$$

замена переменных (отражающая симметрию эллипса) в части этого интеграла

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \sqrt{1 + (4\frac{a^2}{b^2} - 2)u^2 + u^4} \frac{du}{(1+u^2)^2} \stackrel{u=\frac{1}{\hat{u}}}{=} \\
&= \int_{\infty}^1 \sqrt{1 + \frac{4\frac{a^2}{b^2} - 2}{\hat{u}^2} + \frac{1}{\hat{u}^4}} \frac{-\frac{d\hat{u}}{\hat{u}^2}}{(1 + \frac{1}{\hat{u}^2})^2} \stackrel{u \leftarrow \hat{u}}{=}
\end{aligned}$$

$$= \int_1^\infty \sqrt{1 + \frac{4\frac{a^2}{b^2} - 2}{u^2} + \frac{1}{u^4} \frac{du}{u^2}} = \int_1^\infty \sqrt{1 + (4\frac{a^2}{b^2} - 2)u^2 + u^4} \frac{du}{(1+u^2)^2}$$

позволяет переписать длину эллипса в виде

$$\text{Len}(a, b) := b \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{1 + (4\frac{a^2}{b^2} - 2)u^2 + u^4} \frac{du}{(1+u^2)^2} \quad (1.17.4)$$

или (пока символически)

$$\text{Len}(a, b) := b \oint_{\mathbf{X}(a,b)} \frac{vdu}{(1+u^2)^2}. \quad (1.17.5)$$

**1.18. Длина эллипса как период рационального дифференциала на другой лежандровой кривой.** Вычислим теперь длину эллипса иначе: введём

$$U := \text{tg } T \stackrel{(1.16.3)}{=} \frac{2u}{1-u^2} \quad (1.18.1)$$

и перепишем

$$\begin{aligned} \text{Len}(a, b) &:= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 T + b^2 \cos^2 T} dT = \\ &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{a^2 \text{tg}^2 T + b^2}{\text{tg}^2 T + 1}} dT = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{a^2 U^2 + b^2}{1 + U^2}} \frac{dU}{U^2 + 1} = \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{(U^2 + 1)(a^2 U^2 + b^2)}}{(U^2 + 1)^2} dU = \\ &= 2b \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{(1 + U^2)(1 + \frac{a^2}{b^2} U^2)}}{(U^2 + 1)^2} dU. \end{aligned} \quad (1.18.1)$$

Введём теперь новую кривую

$$\ddot{\mathbf{Y}}(a, b) : \quad V^2 = (1 + U^2)(1 + \frac{a^2}{b^2} U^2). \quad (1.18.2)$$

С её помощью длина эллипса запишется в виде, совершенно аналогичном (1.17.5):

$$\text{Len}(a, b) := b \oint_{\mathbf{Y}(a,b)} \frac{VdU}{(1+U^2)^2}. \quad (1.18.3)$$

Формулы (1.17.5) и (1.18.5) различаются кривыми, по которым производится интегрирование, и множителем 2. Что же происходит?

**1.19. Сравнение двух лежандровых кривых.** Рассматриваемые нами кривые  $\mathbf{X}(a, b)$  и  $\mathbf{Y}(a, b)$  действительно *разные*! Их нельзя преобразовать друг в друга никакими разумными заменами переменных; точный смысл этому утверждению будет придан в следующей лекции.

Множитель 2 напоминает о том, что между кривыми  $\mathbf{X}(a, b)$  и  $\mathbf{Y}(a, b)$  имеется, тем не менее, тесная связь: одна из них *двулистно накрывает* другую. Этому утверждению точный смысл будет придан в лекции ???

Пока отметим не бросающееся в глаза соотношение между рассматриваемыми кривыми. Пусть даны два эллипса, причём полуоси одного из них являются *средними* – арифметическим и геометрическим – полуосей другого:

$$a = \frac{A+B}{2}, \quad b = \sqrt{AB} \quad (1.19.1)$$

Тогда уравнение кривой  $\ddot{\mathbf{X}}(a, b)$  преобразуется как

$$\begin{aligned} v^2 &= 1 + (4\frac{a^2}{b^2} - 2)u^2 + u^4 = 1 + [\frac{(A+B)^2}{AB} - 2]u^2 + u^4 \\ &= 1 + \frac{A^2 + B^2}{AB}u^2 + u^4 \end{aligned} \quad (1.19.2)$$

Перемасштабирование  $u = \sqrt{\frac{B}{A}}\hat{u}$  приводит эту кривую к виду

$$\begin{aligned} v^2 &= 1 + \frac{A^2 + B^2}{AB} \frac{B}{A} \hat{u}^2 + \frac{B^2}{A^2} \hat{u}^4 = 1 + \frac{A^2 + B^2}{A^2} \hat{u}^2 + \frac{B^2}{A^2} \hat{u}^4 = \\ &= (1 + \hat{u}^2)(1 + \frac{B^2}{A^2} \hat{u}^2) \end{aligned} \quad (1.19.3)$$

Это – уравнение кривой  $\ddot{\mathbf{Y}}(A, B)$ ! Мы обнаружили, таким образом, что

$$\mathbf{Y}(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}) \simeq \mathbf{X}(a, b). \quad (1.19.4)$$

Значку  $\simeq$ , имеющему смысл *изоморфизма кривых*, будет придан точный смысл в лекции ??. Сам изоморфизм (в историческом контексте) будет

обсуждаться в лекции 3.

**1.20. Канонический лежандров вид.** Приведём, наконец, рассмотренные кривые и интегралы к стандартному виду.

Введя (снова) эксцентриситет исходного эллипса

$$\epsilon := \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}, \quad (1.20.1)$$

выразим с его помощью одну полуось через другую

$$b = \sqrt{1 - \epsilon^2} a \quad (1.20.2)$$

и перепишем уравнения наших (с Ньютоном...) кривых:

$$\ddot{X}(a, b) : \quad v^2 \stackrel{(1.17.2)}{=} 1 + \left(4\frac{a^2}{b^2} - 2\right)u^2 + u^4 = 1 + \left(4\frac{a^2}{b^2} - 2\right)u^2 + u^4 =$$

+++++

и "модуль"

$$k := \frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon}, \quad (1.20.2)$$

---

<sup>2</sup>скругление:  $\epsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \mapsto \sqrt{1 - \frac{\sqrt{ab^2}}{(\frac{a+b}{2})^2}} = \sqrt{1 - \frac{4ab}{(a+b)^2}} = \frac{a-b}{a+b} = \frac{1 - \sqrt{1 - \epsilon^2}}{1 + \sqrt{1 - \epsilon^2}}$ .