Ломоносовский Доклад–2020/21. Топология в Теоретической Физике.

С. П. Новиков

31 марта 2021 г.

Введение. Позвольте сначала представить свою научную биографию. Я начал научную деятельность еще студентом МГУ в средине 50х годов 20 века. Меня привлекла топология, в которой тогда на Западе происходило бурное развитие, завершение которого мы обсудим ниже. Топология была основана гениальным математиком и натурфилософом Анри Пуанкаре в конце 19 века, но длительное время не достигала естественных наук–до 1970х годов. Предшественниками были Эйлер, Гаусс, Риман, физики Максвелл и Кельвин среди прочих, обратившие внимание на отдельные топологические феномены. Хотя в нашей стране и были выдающиеся топологи начиная с 20х годов– а особенно с 30х–к началу 50х деятельность у нас в зтой области ослабла. Мне пришлось начинать заново.

I. Со второй половины 50хгг- начались много лет прерванные научные контакты, поездки на конгрессы и конференции. Западные ученые и среди них топологи начали посещать СССР. В 1961 году на последний Всесоюзный Математический Конгресс в Ленинграде приехали выдающиеся топологи–и среди них Джон Милнор (США), слава которого в математике тогда гремела, а также Хирцебрух (ФРГ), потом Смейл (США). Позднее мне помогли А.Картан (Франция) и Атия (Англия). Эти ученые помогли мне достичь мирового уровня. Я работал в этой области 15 лет, но ее идеи пронизали мою математическую душу–над чем бы я потом ни работал. Начиная с конца 1950 годов началось возрождение научных связей (под руководством Лаврентьева и Петровского). Тогда же произошел распад физико–математического отделения АН СССР на физиков и математиков. Для математиков это не было хорошо, в ее руководстве присутствовали аморальные явления, которые позднее разрослись. Впрочем, они уже проявлялись в острые годы советской науки 1929-33, 1948-53.

Хотя всю первую половину 1960х меня не пускали за рубеж на международрые конгрессы и конференции по каким-то иррациональным мотивам, к 1966г мне удалось полностью стать на ноги в математике, но некоторые потери я понес. Мне среди прочих результатов удалось решить одну из самых центральных проблем топологии–я доказал топологическую инвариантность классов Понтрягина (1965). Мат начальники почему-то смягчились, хоть и ненадолго. Меня выбрали член-кором (1966), присудили Ленинскую Премию (1967), большинство крупных математиков и даже мат начальники меня поддержали. Вскоре все изменилось. У математиков начался аналог варфоломеевой ночи.

В частности, мне присудили Медаль Филдса (1970)–впервые в истории она была присуждена российскому (советскому) математику, но меня мат начальники не пустили на Международный Конгресс Математиков в Ницце на процедуру вручения. Это ускорило мое решение порвать с этими людьми, научно я уже был к этому готов и вскоре ушел в институт теор физики Ландау вместе с Яшей Синаем, хотя мне препятствовали. Это привело к острым конфликтам.
В начале 1980х Боголюбов просил меня вернуться в математические учереждения для работы по возрождению научной этики, и я этим занимался вместе с ним и затем со следующими директорами Стекловки, продолжая работать и в институте Ландау. Ряд лет я работал в США, проводя 4 месяца в году в Москве.

В конце 1970х, когда я уже не работал в топологии, ее основное направление захлебнулось в своей сложности. Однако появились совсем другие идеи, пришедшие извне и не использующие предыдущий научный багаж топологии, посвященные маломерным проблемам–в размерностях 3 и 4 (1978-85). Они привели к значительным результатам. Отметим особо выдающиеся результаты: с помощью крупномасштабного использования компьютеров совместно компьютерщиком и топологом была решена двухсотлетняя проблема 4х красок (1980е годы), новым аналитическим методом была доказана столетняя гипотеза Пуанкаре (2004). Квантовая теория поля стала использоваться для построения топологических инвариантов. Это начал мой друг А.Шварц в начале 1980х. Позднее западные люди, развивая эту тему старались выбросить его из цитирований.

III.К концу 60х годов у меня образовались ученики–самый сильный из них Бухштабер–а затем пришла плеяда юных талантов, достигших аспирантуры в начале 70х . Это итог моей деятельности в топологии Часть моих учеников продолжала взаимодействовать со мной в Институте Ландау.

Пуанкаре основал также качественную теорию динамических систем. (Наш соотечественнник А.М.Ляпунов тоже сыграл важную роль в этом). Эта область достигла классической физики раньше–например, создатель горьковской (нижегородской) школы физиков А.А.Андронов еще в 30х годах вместе с математиком (Понтрягиным) внес важный вклад в этот раздел математики.

Мы еще встретим топологию и динамические системы– в нашем докладе.

IV.В конце 1960х пошли разговоры в среде физиков о топологии как о новой области, с которой надо бы познакомиться. Хороший физик из ИТЭФ – И.С.Шапиро–захотел ее подучить. Ему порекомендовали учебник двух хороших топологов– фамилии не называю. Их книга написана слишком формально–наверное, это худшее, что они в жизни написали. Шапиро плевался, стал читать Пуанкаре, топологию не выучил–это слишком сырой материал, все позднее было приведено в ясность и далеко развито, особенно с 1920 по 1970 годы.

Мы в Институте Ландау по просьбе физиков организовали курсы для студентов, чтобы они понимали основы топологии, но за пределами института Ландау все оставалось прежним.

V. Я вместе с Я. Синаем с 1970-71 года начал новую жизнь среди физиков–теоретиков молодого тогда замечательного института имени Ландау. Его тогдашний директор–И.М.Халатников, ученик Ландау–только что скончался на 102 году жизни. Там мы работали со звездами теор физики Халатниковым, Горьковым, Дзялошинским, Абрикосовым, Ларкиным, Поляковым, Покровским, Анисимовым,отцом и сыном Мигдалами, потом с Захаровым и с ленинградцами–Грибовым, Элиашбергом, и их школами–там был ряд молодых талантов. Потом приехал Шабат. Иногда взаимодействие было весьма плодотворно. Из моих учеников в разное время там поработали успешно Богоявленский, Веселов, Кричевер, Гриневич, Мальцев, Павлов. В США, где я работал 25 дет, моим учеником был Роберто де Лео. Были и другие, но они ушли в другие области.

Для общения необходимо было освоить теор физику – это заняло около 10 лет, из них несколько лет до прихода в мир физиков-теоретиков, и несколько лет после. Мы учили некоторые разделы вместе с Синаем, хотя научные цели у нас были разные. Моя работа среди физиков–теоретиков состояла из двух частей. Первая–это помощь физикам в освоении и использовании, новых разделов математики, если необходимо–вывести их на правильные контакты в математике, вторая–использование общения с физиками для правильного понимания и постановки новых возникающих в физике математических задач.
О второй мы еще поговорим, а о первой скажу, что мы, в частности, помогли некоторым крупным физикам использовать топологию изучая особенности в низкотемпературных сверхтекучих системах, способствовали открытию инстантонов в теории полей Янга–Миллса среди прочего.

VI.Я начал работу в институте Ландау с трехлетнего периода работы в Эйнштейновской гравитации, используя динамические системы. Директор ("Халат") просил об этом, и мы помогли физикам.

VII.Вскоре я перешел в новую тогда теорию солитонов, красивые открытия которой в 1960хгг вызвали широкий резонанс в физико– математическом сообществе.

Удалось эффективно использовать топологию, динамические системы, риманову и алгебраическую геометрию для математических задач, возникших в теор физике.

Последняя область–алгебраическая геометрия –в приложениях сопровождает обычно системы с повышенной точной решаемостью – эту ситуацию называют скрытой симметрией (хотя обычной симметрии может и не быть, как в теории солитонов, есть глубокая связь с квантовой механикой). Это называется "метод обратной задачи рассеяния открытый в 1960х. Поначалу алгебраической геометрии не было видно, но при решении нами периодической задачи в средине 1970х она вылезла.

Я много работал в теории нелинейных волн и солитонов, их периодических аналогов и связанных с этим проблем квантовой механики, но сейчас об этом говорить не буду–я упомянул об этом, потому что это вывело меня на задачи квантовой механики. Целый ряд моих самых лучших учеников поработали здесь, сотрудничество с физиком-вычислителем Авиловым было очень плодотворным.

VIII.Теперь переходим к топологии в теор физике. Еще в древности заметили такой топологический феномен, как узлы, связывая веревки и канаты. Когда индийские мудрецы предложили Александру Македонскому задачу – распутать узел – он взял и разрубил его мечем. Сейчас теория узлов – это глубокая наука, но приложений в физике я пока не вижу.
Группа талантливых биофизиков из Курчатовского Института много лет назад произвела значительный компьютерный эксперимент с узлами, но глубоких закономерностей тогда выявлено не было.
К концу 1960гг топология с ее своеобразным аппаратом достигла высокого уровня сложности, оказала большое влияние на другие области математики, но даже сейчас лишь небольшая часть этого проявляется в естественных науках – таких, как теоретическая физика. Наиболее полезные топологические характеристики выражаются обычно в величинах типа целых чисел. Начну с такого примера.

Гениальный физик – Дирак – уже будучи пожилым, после войны, поставил такой вопрос: может ли существовать магнитный заряд? Ведь магнитный поток сквозь замкнутую поверхность обычно всегда ноль. Он пришел исходя из Шредингерского квантования к выводу,что противоречия с законами квантовой теории нет, если поток целочисленный – разумеется в квантовых единицах. Ему не верили. Только топология приводит в ясность возникающий здесь набор понятий.

Говоря языком топологии, в магнитном поле пространство функций становится пространством "сечений" векторного расслоения – как например векторные или тензорные поля, где значение функции в каждой точке лежит в векторном пространстве, пришитом к этой точке, а магнитное поле определяет (как указал Г.Вейль) "связность" (ковариантное дифференцирование) в расслоении – прообраз полей Янга–Миллса позднее. При этом возникают так называемые характеристические классы (Понтрягина, Черна), интегралы от которых по циклам всегда целочисленны.

В данном случае мы имеем дело с простейшим классом – первым классом Черна. Пока магнитный монополь не найден. Альтернативным является Фейнмановское квантование, где "действие"системы S является функцией (функционалом) на пространстве путей (полей в многомерном случае). Около 1981 года я продумывал монополь Дирака с точки зрения Фейнмановского квантования (кто-то из крупных физиков тоже это проделал). Важно,что я понял, каков правильный многомерный аналог этого. Оказывается, действие S может быть многозначным функционалом, таким что $\exp iS/h$ однозначно–наподобие угловой функции на плоскости без нуля. Для монополя Дирака действие S определено на бесконечномерном пространстве путей, соединяющих две фиксированные точки в трехмерном пространстве без нуля. Немало трудностей принесла школьникам многозначность угла в тригонометрии.

Такие функционалы (лагранжианы) при условии локальности я классифицировал (1981-82)

Вскоре эти лагранжианы нашли применение в квантовой теории поля.
Года через 2 (1983) обнаружилось, что такие добавки к лагранжианам возникали в вычислениях в теории полей Янга–Миллса, но физики них не обратили внимания тогда – и главное не увидели их топологических свойств. Мои коллеги-наши физики-и Поляков (который с самого начала приветствовал эту идею), и Фаддеев (который первоначально счел это чепухой) и другие активно поддерживали мой вклад, когда эта тема взорвалась,– но я в этой области больше не работал.

IX. Перейдем теперь к основной части доклада – топологические явления в “нормальных” металлах.
Если металл достаточно чистый, то это кристалл с решеткой периодов порядка одного ангстрема ($10^{-8} cm$). Узлы решетки–это положительно заряженные йоны. Квантовая механика определяет электронный спектр, начинающийся с какого-то основного состояния и идущий вверх. Электронов должно быть много–ведь система в целом электронейтральна. База спектра – это дуальная решетка (координаты в ней имеют размерность импульса).
Размеры элементарной ячейки в дуальной решетке определяются с помошью константы Планка, как и скалярное произведение между геометрической и дуальной решеткой: координаты в геометрической решетке имеют размерность L длины, а координаты в дуальной решетке размерность P–импульса, поэтому величина LP/h безразмерна, это и порождает скалярное произведение. Спектр может иметь бесконечное число ветвей, но любой уровень пересекается лишь с конечным числом.

Важно, что дуальная решетка “свернута” в силу законов квантовой механики (см Рис 1 в одномерном случае). Это пространство “квазиимпульсов”. При этом свернутая решетка–это компактное многообразие, как говорят топологи–но несложное–трехмерный тор T^3.

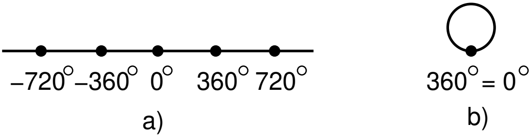

Рис.: Одномерная свернутая решетка: а) решетка с шагом 360 градусов–прямая, разбитая на отрезки по 360 градусов; б) свернутая решетка–окружность

Уместно заметить, что во всех справочниках топологическая сторона этих картинок (Ферми–поверхностей и др) изложена на уровне 19 века, до Пуанкаре.

О свернутости решетки не говорится, о ручках Ферми-поверхности не говорится, а есть “открытые дыры” там, где в первой зоне Бриллюэна (это- “фундаментальная область” в математике еще с 19 века–многогранник) Ферми поверхность подходит к границе–грани ячейки. Далее мы говорим- только о первой зоне Бриллюэна, не оговаривая специально. Сколько таких подходов? На самом деле они разбиваются на пары, которые в свернутой решетке отождествлены. Это не указывается в интернет–сайтах и справочниках (см Рис 2).

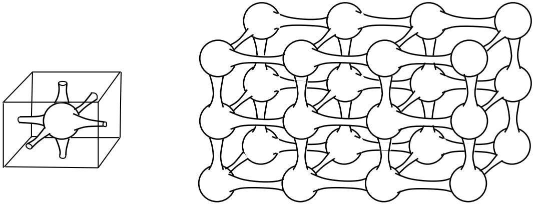

Рис.: a) Ферми-поверхность в первой зоне Бриллюэна. b) Ферми-поверхность в несвернутой решетке.

Выходы на границу элементарной ячейки (зоны Бриллюэна) делятся на пары, переходящие друг в друга при базисных сдвигах решетки. Каждая такая пара и есть ручка Ферми-поверхности, кроме тривиальных случаев. Например, для меди и золота имеется по 4 пары – это и есть род, если нет "тривиальных" ручек в несвернутом пространстве – в частности, в зоне Бриллюэна. Топологическую информацию в справочниках надо бы улучшить. Ранг определяется как ранг образа фундаментальной группы Ферми-поверхности в решетке Z^3–он может быть 0,1,2,3. Здесь уже надо немного понимать основы топологии.

Намек на появление топологии появляется уже в следующем: состояния в дуальной решетке, местоположение которых отличается на вектор дуальной решетки, тождественны–это одно и то же состояние.(Вспомните угол на плоскости без нуля – это свернутая прямая с периодами решетки – целыми кратными 360 градусов).

Вспомним теперь, что электроны–это ферми частицы. Два одинаковых (с учетом спина) электрона не могут сесть в одно состояние.
Что происходит при нулевой температуре по Кельвину?
Грубо говоря, после занятия нижних по энергии состояний, следующим электронам приходится занимать следующие места по энергии и.т.д., и электронов много. Где этот процесс кончится, при каких энергиях, в какой области спектра? Ответ таков–при нескольких десятках тысяч градусов. (Впрочем ничего не нагревается). Конец– это энергия Ферми ϵ_F. Эта поверхность уровня называется Ферми-поверхностью. Она, замкнута в свернутой решетке, может быть и несвязной. Мы будем рассматривать каждую компоненту связности по отдельности.

Для металлов этот конец заполненного спектра лежит внутри непрерывного спектра, как говорят, в зоне проводимости.

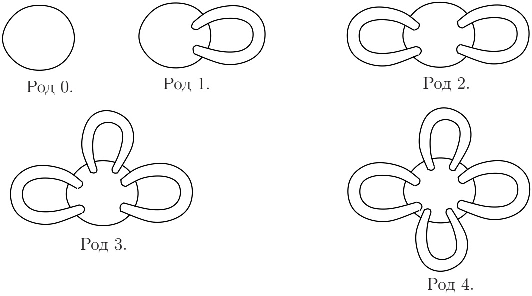

Рис.: Ферми-Поверхность как многообразие.

Замкнутые поверхности, их топологические типы, классифицировал еще Пуанкаре. Топологически ориентируемая поверхность – а нам только такие и нужны–определяется числом ручек (см Рис 3)

Край области, заполненной электронами – это замкнутая поверхность в трехмерном торе квазиимпульсов – Ферми-поверхность (в свернутой решетке). Какова она? Какой она вообще может быть?
Другой вопрос–как она вложена в трехмерный тор. Здесь возникает еще одна топологическая характеристика–ранг (см ниже). Грубо говоря, ранг–это число базисных сдвигов подрешетки трехмерной решетки, порожденнных путями на Ферми–поверхности. Ранг не может больше, чем 3. (см рис 4)

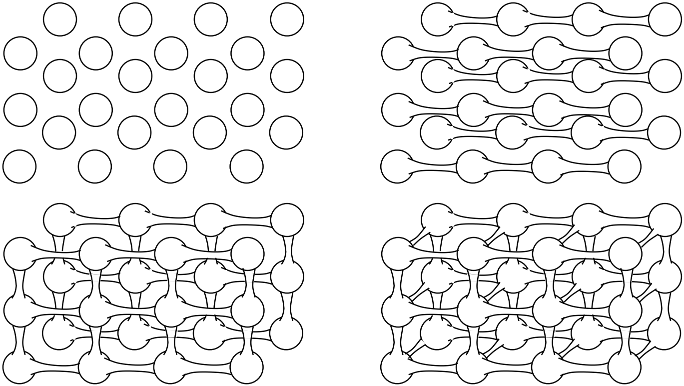

Рис.: Род и Ранг: кубическая решетка, примеры. a)Ранг 0 b) Ранг 1 c) Ранг 2 d)Ранг 3

Математическая модель такова: В трехмерном (свернутом) торе задана вещественная функция $\epsilon(p)$ (уровни энергии) и ее поверхность уровня, $\epsilon(p) = \epsilon_F$, где значение равно энергии Ферми.

При очень низких температурах по Кельвину почти все электроны находятся там, где были при нуле температуры. В сильном магнитном поле квазиимпульсы начнут меняться, но нас интересует только ситуация вдоль поверхности Ферми (надо наложить слабое электрическое поле, чтобы пошел ток в x-пространстве). Уравнение имеет вид $dp/dt = e/c\nabla\epsilon \times B$ Получается динамическая система. Это и есть нужная нам картина. Сделаем отступление об истории вопроса.

VIII. Крупнейшим специалистом по низким температурам и сильным магнитным полям был П.Л.Капица. После трагической катастрофы с Ландау он пригласил из Харькова крупного физика-теоретика И.М.Лифшица. У него была сильная школа, в частности в физике твердого тела, еще в Харькове Лифшиц взаимодействовал с крупным геометром Погореловым. Я с ними общался с начала 1980х годов. К нам приходил М.Каганов, делал об этом доклады. Видимо, было желание довести эту тему до математиков. У них были ценные наблюдения, но их математических знаний и тренировки нехватало. Я подметил здесь любопытные математические возможности, начал ставить задачи ученикам, начиная с 1982 года. Были выполнены хорошие работы как работы по топологии– их авторы не знали физики (Зорич, Царев, Дынников)–но как бывает с учениками и особенно с приглашенными авторами:–сделает что-то ценное и убежит. Приходится приглашать других, развивая тему.

Лишь 15 лет спустя вместе с моим учеником А.Мальцевым из института Ландау мы нашли физическую реализацию зтих математических исследований. Перейдем к нашим результатам. IX. Пусть температура очень низкая–скажем 1K или ниже–скажем, $10^{-2} - 10^{-3}$K. Приложим сильное постоянное магнитное поле порядка 1 тесла или больше–например 10-20 тесла (напомним, что один тесла это 10^4 гаусс, а один гаусс–это по порядку величины магнитное поле земли). На Ферми-поверхности возникнет движение значений квазиимпульса электронов, $(dp/dt = \frac{e}{c}\nabla\epsilon \times B)$. Наложим слабое электрическое поле. Тогда в x-пространстве пойдет ток (внутренность-ниже нас не интересует сейчас, хотя она важна–но не для наших целей). Мы будем все представлять в свернутой решетке–легко все пересчитать в геометрическое пространство–они тождественны, но координаты в них имеют разные размерности. Возникает динамическая система на Ферми-поверхности при данном магнитном поле. Ее траектории–это пересечения Ферми-поверхности с плоскостями, ортогональными магнитному полю.

Это картина в дуальном пространстве R^3, его еще надо свернуть. Она весьма нетривиальна–особенно для ранга 3. В ряде случаев электрическое сопротивление оказывается сильно анизотропным в плоскости, ортогональной магнитному полю. Картина ясна для ранга 0, - все таектории замкнуты и гомотопны нулю или упираются в обе стироны в критические точки—то-есть, замкнуты или конечны в несвернутом (как говорят топологи, в накрывающем) пространстве R^3, обычно уже в зоне Бриллюэна.
Благородные металлы–золото, платина, а также медь–имеют ранг 3 и род 4. Щелочные металлы (литий, натрий, калий, рубидий, цезий) имеют ранг 0. Динамические системы при любом направлении магнитного поля тривиальны в этом случае, сопротивление растет вместе с полем. Все траектории замкнуты и гомотопически тривиальны, как уже говорилось. Сейчас известны Ферми-поверхности многих металлов.
Но в школе Лифшица были обнаружены и другие, более сложные случаи (Каганов, Песчанский, Азбель...). Это, видимо, и побудило обратиться к математикам–то-есть, к нам.

X. Наши результаты таковы. Рассмотрим плоскости, ортогональные к магнитному полю в дуальном пространстве R^3.

Случай 1. Все орбиты компактны в несвернутой решетке R^3, мы имеем простейший случай, уже обсуждавшийся выше. Согласно правильно переформулированным результатам нашей группы, здесь для множества полной меры в 2-сфере направлений магнитного поля в плоскости все орбиты замкнуты или упираются в обе стороны в седловые критические точки (простейший тип).

Случай 2. Имеются открытые орбиты в R^3—полосы; они таковы, что каждая из них заключена в полосу конечной ширины, идущей в определенном направлении в R^3. Это – одно направление при данном магнитном поле. Сосуществование с вторым направлением в этом наборе параллельных плоскостей возможно только на множестве направлений магнитного поля нулевой меры в S^2.

Периодические орбиты в свернутой решетке (открытые в терминологии справочников) и непериодические с определенным средним направлением в несвернутом пространстве R^3). и полосы вокруг них (см Рис 5 в несвернутойрешетке), большинство непериодичны. Электрическое сопротивление в случае полосы сильно анизотропно в плоскости ортогональной полю: вдоль одного направления-полосы-растет , а в остальных направлениях этой плоскости выходит на константу. Первые примеры этого были обнаружены в школе Лифшица.

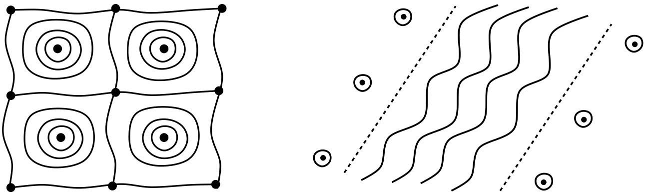

Рис.: Типичные траектории занимающие множество полной меры– типы а) – простейший случай и б) – полосы

Но самое главное состоит в том, что среднее направление полосы в R^3 является пересечением плоскости, ортогональной магнитному полю, с ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ плоскостью , определяемой тремя целыми числами с точностью до общего множителя. Эта картина устойчива, поэтому можно восстановить целые числа, совершая малые возмущения и следя за изменением направления, где сопротивление (или проводимость) стремится к бесконечности (соответственно к нулю). Это–общий закон.
В случае ранга 1 такие полосы бывают, но они неустойчивы– все разваливается при почти любом возмущении направления магнитного поля для ранга 1. Для рангов 2 и 3 они устойчивы. Таков общий закон, но что из этого реализуется для конкретного металла–другой вопрос. Чем больше целые числа, тем реже они возникают. Я сейчас планирую развить эту тему, хотя вычислительный эксперимент здесь сложен. Проще всего было бы определить области с полосами физическим экспериментом, но у нас нет такой возможности–мы математики.

Один крупный специалист сказал мне, прикинув мои аргументы: “Похоже, все так, как ты говоришь, но эксперимент ушел из этой области. Придется тебе развивать это как раздел математики значительный период”. Это было в Израиле. В разных странах – особенно в США и России – именно физики более старшего поколения – “поколения великой физики” приветствовали развитие этой темы.
Математическая модель такова: В свернутой дуальной решетке (то-есть в торе T^3) задана замкнутая поверхность (уровень функции). Пусть ее род >=3 и ранг равен 3–то-есть максимален. Динамическая система получается как сечения поверхности плоскостями, ортогональными магнитному полю. Эти системы определяются направлением магнитного поля. В сфере S^2, точки которой нумеруют такие системы, имеются области, где имеются полосы открытых орбит, устойчивые относительно малых возмущений магнитного поля.
Этих областей конечное число для меди и золота (род 4 и ранг 3), вычисление производил Roberto Deleo.

В математической модели имеются весьма экзотические примеры. Например, для кубической решетки с функцией $f(p) = \cos(p_1) + \cos(p_2) + \cos(p_3)$ (размерности игнорируем) и уровня $f(p) = 0$ возникает весь букет–бесконечное число областей открытости с разными целыми числами и фракталов, где они скапливаются. Методически этот пример очень любопытен. При не малом возмущении эти режимы разрушаются–либо возникнут новые целые числа, либо все орбиты станут замкнутыми и гомотопными нулю, но может быть мы попадем в границы этих режимов. Фрактальная размерность множества границ этого не более 1 в сфере S^2 направлений магнитного поля, то-есть на единицу меньше полной размерности, равной 2. Численный эксперимент (Дынников и Роберто де Лео) показывает, что фрактальная размерность особо хитрых режимов строго меньше 1, но теорем здесь нет. Примеры фрактальных орбит имеются (первый пример нашел Царев, затем ряд примеров нашел Дынников), но непонятно, какой случай является наиболее общим из возникающих здесь фракталов.

В настоящее время известно или создано много новых материалов с металлическими свойствами. Мы не знаем общего принципа, выделяющего физически реализуемые системы. В последнее время физический эксперимент ушел из этой области, а численный счет затруднен. Сейчас мы планируем возобновить активность в этой области. Существуют и другие задачи– особенно в физике двумерных систем, где возникают математически родственные ситуации, как указал Мальцев, но мы их сейчас обсуждать не будем.
XI.Завершая доклад, я сделаю общее замечание. Физико–математические науки в 20 веке подверглись гигантскому, я бы сказал взрывному, развитию. Сейчас ситуация изменилась. Подобно разбеганию галактик во Вселенной, даже в наших теоретических науках разные части их разбегаются друг от друга, перестают друг друга понимать. Мой старший друг и ученый редкостного ума И.М.Гельфанд – выдающийся математик – тратил более половины времени на то, чтобы учиться понимать другие области. Я старался следовать его примеру.

Мы – это HOMO SAPIENS, а не галактики, и должны интеллектуально противостоять разбеганию. Это главная задача теоретиков или хотя бы их лидеров.

Благодарю за внимание.