ФГБОУ ВО «Московский государственный
университет имени М. В. Ломоносова»

На правах рукописи

Солодов Алексей Петрович

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ В ТЕОРИИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ И КОМПЛЕКСНОМ АНАЛИЗЕ

1.1.1 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2021

Работа выполнена на кафедре математического анализа федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова».

Официальные оппоненты:

Антонов Николай Юрьевич — доктор физико-математических наук, профессор РАН, заместитель директора по научной работе ФГБУН Институт математики и механики имени Н. Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук (специальность 1.1.1);

Горяйнов Виктор Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей математики ФГАОУ ВО «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)» (МФТИ) (специальность 1.1.1);

Иванов Валерий Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики и информатики Института прикладной математики и компьютерных наук ФГБОУ ВО «Тульский государственный университет» (специальность 1.1.1).

Ведущая организация:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет».

Защита диссертации состоится 21 октября 2021 г. в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 002.022.01 при Математическом институте имени В. А. Стеклова Российской академии наук по адресу: 119991, г. Москва, ул. Губкина, д. 8, 9-й этаж, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Математического института имени В. А. Стеклова РАН и на сайте http://www.mi-ras.ru/dis/ref21/solodov/dis.pdf.

Автореферат разослан „ ” июля 2021 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 002.022.01 при МИАН
доктор физико-математических наук,
профессор В. А. Ватутин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Систематические исследования тригонометрических рядов восходят к знаменитой работе Ж.-Б. Фурье „Аналитическая теория тепла” (1807), опубликованной в 1822—1824 гг., в которой был предложен метод разложения в ряды по синусам решения краевой задачи для уравнения теплопроводности. С тех пор ряды по синусам и общие тригонометрические ряды стали мощным инструментом при решении задач математической физики и задач теории приближения функций. Возможность такого использования стала ясна после основополагающей работы Г. Л. Дирихле (1829) о разложении произвольной функции на $[0, 2\pi]$, имеющей конечное число участков монотонности, во всюду сходящийся к ней общий тригонометрический ряд, а также после появления теоремы К. Вейерштрасса (1885), утверждающей, что произвольную непрерывную 2π-периодическую функцию можно с любой наперёд заданной точностью приблизить тригонометрическим полиномом. Впоследствии в развитие теории тригонометрических рядов внесли вклад такие известные математики как Б. Риман, М. Жордан, Э. Гейне, Г. Кантор, А. Лебег, Л. Фейер, Г. Х. Харди, Дж. Е. Литтлвуд, Н. Н. Лузин, И. И. Привалов, А. Н. Колмогоров, Д. Е. Меньшов, а в последнее время — Л. Карлесон, Ч. Фефферман, С. В. Конягин, Л. В. Жижиашвили, А. А. Талалян, А. М. Олевский, В. В. Арестов, А. Г. Бабенко, И. Л. Блошанский, Н. Ю. Антонов, Н. Н. Холщевникова, Д. В. Горбачёв и др.

Одной из важных областей в теории тригонометрических рядов является исследование рядов по синусам и по косинусам с монотонными коэффициентами. Интерес к таким рядам связан, в первую очередь, с тем, что многие специальные ряды, возникающие в приложениях, имеют как раз монотонные коэффициенты. Кроме того, поскольку такие ряды сходятся в каждой точке, то возникает возможность провести довольно полное их исследование. Исследованием тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами занимались Р. Салем, С. Идзуми, П. Л. Ульянов, С. Б. Стечкин, С. А. Теляковский, Г. А. Фомин, М. И. Дьяченко, А. Ю. Попов, А. С. Белов, В. Ф. Гапошкин, С. Ю. Тихонов, К. А. Оганесян и др.

Несмотря на то, что ряды по синусам с монотонными коэффициентами с качественной точки зрения хорошо изучены, в последнее время активно исследуются задачи, связанные с уточнением асимптотики сумм таких рядов и поиском точных постоянных в классических оценках. Первые результаты, касающиеся точных порядковых соотношений для достаточно регулярных последовательностей коэффициентов сумм рядов по синусам и косинусам, принадлежат Г. Х. Харди, В. В. Рогозинскому[1], Р. Салему[2]. Впоследствии различные уточнения и обобщения их результатов были получены С. Идзуми[3], С. Алянчичем, Р. Бояничем, М. Томичем[4], С. А. Теляковским[5,6], А. Ю. Поповым[7]. Продолжению этих исследований посвящены первая и вторая главы диссертации.

Другое направление диссертационного исследования связано с изучением вопроса сходимости почти всюду рядов по общим ортогональным системам. Теория общих ортогональных рядов является важной частью метрической теории функций. Получаемые результаты находят применение в функциональном анализе, математической физике, вычислительной математике и других областях.

Отправной точкой в исследовании сходимости почти всюду рядов по общим ортогональным системам является знаменитая теорема, доказанная Д. Е. Меньшовым[8] и, независимо, Г. Радемахером[9], о том, что $\log_2^2 n$ является точным множителем Вейля на классе всех ортонормированных систем. Этот фундаментальный результат позволяет делать более глубокие выводы о характерных особенностях сходимости ортогональных рядов в сравнении с теоремами, установленными в специальных случаях. Теорема Меньшова—Радемахера явилась итогом длительных исследований, ей предшествовали работы П. Фату, Г. Вейля, Е. Гобсона, М. Планшереля, Г. Х. Харди, Н. Н. Лузина. Впоследствии её обобщения были установлены Л. В. Канторовичем, Р. Салемом, А. А. Талаляном, А. Вальфишем. Многие математики занимались сложной задачей о получении более точной, чем вытекающей из

---

[1] Hardy G. H., Rogosinski W. W. Asymptotic formulae for the sums of certain trigonometrical series // Quart. J. Math., Oxford Ser. – 1945. – V. 16. – P. 49–58.

[2] Salem R. Determination del'ordre de grandeur ál'origine de certaines séries trigonométriques // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1928. – V. 186. – P. 1804–1806.

[3] Izumi S. Some trigonometrical series, XII // Proc. Japan Acad. – 1955. – V. 31, № 4. – P. 207–209.

[4] Aljančić S., Bojanić R., Tomić M. Sur le comportement asymptotique au voisinage de zéro des séries trigonométriques de sinus à coefficients monotones // Acad. Serbe Sci. Publ. Inst. Math. – 1956. – V. 10. – P. 101–120.

[5] Telyakovskiĭ S. A. On the behavior near the origin of the sine series with convex coefficients // Publ. Inst. Math. (Beograd). – 1995. – V. 58 (72). – P. 43–50.

[6] Теляковский С. А. К вопросу о поведении рядов по синусам вблизи нуля // Makedon. Akad. Nauk. Umet. Oddel. Mat.-Tehn. Nauk. Prilozi. – 2000, 2002. – Т. 21, № 1-2. – С. 47–53.

[7] Попов А. Ю. Оценки сумм рядов по синусам с монотонными коэффициентами некоторых классов // Матем. заметки. – 2003. – Т. 74, № 6. – С. 877–888.

[8] Menchoff D. Sur les séries de fonctions orthogonales // Fund. Math. – 1923. – V. 4. – P. 82–105.

[9] Rademacher H. Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen // Math. Ann. – 1922. – V. 87, № 1–2. – 112–138.

теоремы Меньшова—Радемахера, оценки множителя Вейля для конкретной ортонормированной системы. В частности, Л. Карлесон доказал, что тригонометрическая система является системой сходимости. Исследования Д. Е. Меньшова в разных постановках продолжали П. Л. Ульянов, В. И. Мацаев, С. В. Бочкарёв, К. Тандори, Дж. Беннетт, П. Биллард, Б. С. Кашин, А. А. Талалян, С. Ш. Галстян, Г. А. Карагулян, В. И. Иванов, Т. П. Лукашенко, А. Паскевич и др.

Как показал С. Качмаж[10], пример Меньшова, устанавливающий точность теоремы Меньшова—Радемахера, фактически основан на тёплицевой матрице, построенной Д. Гильбертом. В третьей главе диссертации предложен новый метод построения примеров ортонормированных систем, устанавливающих точность теоремы Меньшова—Радемахера, на основе обобщённых тёплицевых матриц, которые, в свою очередь, связаны со свойствами рядов по системе характеров на компактных абелевых группах. Отметим, что изучение указанных рядов представляет активно развивающееся направление современного гармонического анализа.

Третье направление диссертационного исследования относится к решению экстремальных задач, которые связаны с понятием однолистности. Однолистные функции являются самыми простыми и наиболее интересными для изучения аналитическими функциями. Однолистность функции в области является её важнейшей геометрической характеристикой. Кроме того, в приложениях однолистность часто связана с физической реализуемостью математической модели.

Для аналитических в единичном круге функций хорошо известными являются такие достаточные условия однолистности, как признаки выпуклости, звёздообразности, почти выпуклости, условия Базилевича, Носиро—Варшавского, Нехари, Беккера, Альфорса и другие.

В связи с исследованием однолистности различных функций, структурных формул, интегральных представлений, решений краевых задач возник широкий круг новых достаточных условий однолистности, вместе с тем обогатился набор применяемых методов. Различные обобщения и уточнения известных достаточных условий однолистности, а также комбинированные и новые условия однолистности с применением разнообразных методов получали З. Нехари, А. Гудман, С. Одзаки, Т. Умедзава, И. Е. Базилевич, Й. Беккер, Х. Поммеренке, С. Р. Насыров, Л. А. Аксентьев, Ф. Г. Авхадиев, П. Л. Шабалин, В. В. Покорный, Д. В. Прохоров, В. Н. Дубинин и многие другие математики.

Довольно интересной является задача нахождения радиусов одно-

---

[10]Kaczmarz S. Notes on orthogonal series, II // Studia Math. – 1935. – V. 5. – P. 103–106.

листности на классе функций. Основная трудность состоит в подборе соответствующего достаточного условия однолистности и получении нужных оценок на рассматриваемом классе. Один из первых результатов в этом направлении принадлежит Э. Ландау[11], который в связи с теоремой Блоха о существовании круга, являющегося однолистным образом некоторой части единичного круга при отображении, осуществляемом голоморфной в единичном круге функцией со стандартной нормировкой, нашёл точное значение радиуса голоморфизма обратной функции и, одновременно с этим, вычислил точное значение радиуса однолистности.

В различных постановках решением задачи о поиске областей однолистности занимались Ж. Валирон, З. Нехари, А. Гудман, Т. Мак-Грегор, Х. Поммеренке, Й. Беккер, Г. В. Кузьмина, В. В. Горяйнов, В. В. Старков и др.

В. В. Горяйнов[12] изучал влияние угловых производных в граничных неподвижных точках голоморфных отображений единичного круга в себя на свойства отображений внутри единичного круга. В частности, он выделил условия на угловые производные, при которых внутри единичного круга возникают области однолистности. В четвёртой главе диссертации исследования В. В. Горяйнова продолжены, решена задача о нахождении неулучшаемых областей однолистности на классах голоморфных отображений круга в себя с внутренней и граничной неподвижными точками.

Цели и задачи исследования. Целью диссертационной работы является решение ряда экстремальных задач в теории ортогональных рядов и в геометрической теории функций комплексного переменного. Для достижения этой цели в диссертации рассматриваются следующие основные задачи.

1. Получить точные решения экстремальных задач для специальных классов сумм рядов по синусам.

2. Получить близкую к неулучшаемой двустороннюю оценку суммы ряда по синусам с выпуклыми, медленно меняющимися коэффициентами.

3. Разработать метод построения ортонормированных систем с экстремально большой L_2-нормой максимального оператора на основе обобщённых тёплицевых матриц.

[11] Landau E. Der Picard—Schottkysche Satz und die Blochsche Konstante // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Phys.-Math. Kl. – 1926. – V. 32. – P. 467–474.

[12] Горяйнов В. В. Голоморфные отображения единичного круга в себя с двумя неподвижными точками // Матем. сб. – 2017. – Т. 208, № 3. – С. 54–71.

4. Найти точные области однолистности на классах голоморфных отображений единичного круга в себя с двумя неподвижными точками.

Методы исследования. В диссертации используются методы теории ортогональных рядов, гармонического анализа, теории функций действительного и комплексного переменного.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и состоят в следующем.

1. Показано, что положительность суммы ряда по синусам в некоторой правой полуокрестности нуля имеет место не только в случае монотонной последовательности коэффициентов, но и для некоторых квазимонотонных последовательностей. Получено полное описание класса квазимонотонных последовательностей с указанным свойством.

2. Построена модификация функции Салема, позволяющая получать оценки снизу сумм рядов по синусам с выпуклыми коэффициентами с эффективной точностью, не зависящей от того, сколь медленно меняется последовательность коэффициентов.

3. Найдены оценки сумм рядов по синусам с монотонными коэффициентами специальных классов через мажоранту Салема. Установлена асимптотическая неулучшаемость полученных оценок на рассматриваемых классах последовательностей коэффициентов.

4. Получены точные двусторонние оценки сумм для класса рядов по синусам с выпуклыми коэффициентами. Построены примеры, демонстрирующие высокую точность оценок.

5. Уточнена асимптотика С. Алянчича, Р. Боянича и М. Томича суммы рядов по синусам на классе выпуклых, медленно меняющихся последовательностей. Найден второй член асимптотики в регулярном случае.

6. Обобщена предложенная А. Паскевичем конструкция примера ортонормированной системы, который устанавливает точность теоремы Меньшова—Радемахера о множителе Вейля для сходимости почти всюду рядов по общим ортогональным системам. Предложен метод построения обобщённых тёплицевых матриц с экстремально большой L_2-нормой максимального оператора.

7. На основе матрицы, имеющей структуру, отличную от матрицы Гильберта, построен пример ортонормированной системы с экстремально большой L_2-нормой максимального оператора.

8. Найдены точные области однолистности на классах голоморфных отображений единичного круга в себя с внутренней и граничной неподвижными точками в зависимости от значений угловой производной в граничной неподвижной точке и расположения внутренней неподвижной точки. Этот результат является аналогом теоремы Ландау для функций соответствующего класса.

9. Получены асимптотически точные двусторонние оценки областей однолистности на классах голоморфных отображений единичного круга в себя с двумя диаметрально противоположными граничными неподвижными точками и инвариантным диаметром в зависимости от значения произведения угловых производных в граничных неподвижных точках.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут найти применение в гармоническом анализе, теории общих ортогональных рядов, геометрической теории функций комплексного переменного.

Разделы диссертации могут стать основой содержания специальных курсов для студентов высших учебных заведений и аспирантов, обучающихся по специальности „Математика".

Апробация работы. Результаты диссертационного исследования докладывались и обсуждались на следующих семинарах:

- научный семинар механико-математического факультета МГУ по теории функций действительного переменного под руководством академика РАН, профессора Б. С. Кашина, академика РАН, профессора С. В. Конягина, д.ф.-м.н., профессора Б. И. Голубова, д.ф.-м.н., профессора М. И. Дьяченко, 2015, 2018, 2020 гг.;

- научный семинар Математического института имени В. А. Стеклова по комплексному анализу (Семинар Гончара) под руководством чл.-корр. РАН, профессора Е. М. Чирки и чл.-корр. РАН, профессора А. И. Аптекарева, 2018, 2020 гг.;

- научный семинар механико-математического факультета МГУ по теории тригонометрических и ортогональных рядов под руководством д.ф.-м.н., профессора М. К. Потапова (1931—2021), д.ф.-

м.н., профессора М. И. Дьяченко, д.ф.-м.н., профессора Т. П. Лукашенко, д.ф.-м.н., профессора В. А. Скворцова (неоднократно, 2015–2019 гг.);

- научный семинар Математического института имени В. А. Стеклова по теории приближений под руководством д.ф.-м.н., профессора С. А. Теляковского (1932—2020), 2013, 2015, 2017, 2018, 2019 гг.;

- межвузовский научно-исследовательский семинар по математике „Анализ и его приложения" под руководством д.ф.-м.н., профессора Г. Г. Брайчева, д.ф.-м.н., профессора И. В. Тихонова, д.ф.-м.н., профессора В. Б. Шерстюкова, 2017 г.

Сообщения о результатах диссертации делались на конференциях:

- Воронежская зимняя математическая школа „Современные методы теории функций и смежные проблемы" (Воронеж, 2005, 2007, 2011, 2015, 2017, 2019 гг.);

- международный симпозиум „Ряды Фурье и их приложения" (Ростов-на-Дону, 2005 г.);

- международная Саратовская зимняя школа „Современные проблемы теории функций и их приложения" (Саратов, 2008, 2014, 2016, 2018, 2020 гг.);

- международная школа-конференция „Analysis, Geometry and Probability" (Москва, 2016 г.);

- международная конференция „Harmonic Analysis and Approximations" (Цахкадзор, Армения, 2018 г.);

- международная школа-конференция „High-dimensional Approximation and Discretization" (Москва, 2018 г.);

- международная конференция „Analysis Mathematica International Conference" (Будапешт, Венгрия, 2019 г.);

- международная школа-конференция „Комплексный анализ и его приложения" (Краснодар, 2021 г.).

Публикации. Результаты диссертационного исследования опубликованы в 13 работах. Все статьи опубликованы в изданиях, входящих в утверждённый ВАК перечень ведущих рецензируемых изданий. Все статьи (или их переводные версии) опубликованы в журналах, входящих в международные реферативные базы данных и системы цитирования Web of Science и Scopus.

Личный вклад. Научные результаты, выносимые на защиту и составляющие содержание диссертационной работы, получены автором самостоятельно. Для полноты изложения в текст диссертационного исследования включены некоторые результаты, полученные соавторами (А. Ю. Попов, О. С. Кудрявцева) в совместных работах. Вклад соавторов отмечен в тексте диссертации и отделён от результатов автора.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, четырёх глав и библиографического списка, содержащего 123 наименований. Общий объём диссертации составляет 238 страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность диссертационного исследования, даётся обзор результатов и научной литературы, обозначается цель, ставятся задачи, а также формулируются основные результаты диссертационной работы.

В **главе 1** изучается асимптотическое поведение в правой полуокрестности нуля сумм рядов по синусам

$$g(\boldsymbol{b}, x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \tag{1}$$

с монотонными и квазимонотонными коэффициентами $\boldsymbol{b} = \{b_k\}_{k=1}^{\infty}$.

В **§1.1** рассматривается сумма ряда по синусам (1), последовательность коэффициентов $\boldsymbol{b} = \{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ которого монотонно стремится к нулю:

$$b_1 > 0, \qquad b_{k+1} \leqslant b_k \quad \forall k \in \mathbb{N}, \qquad \lim_{k\to\infty} b_k = 0.$$

Обозначим через $\mathcal{M}$ класс всех таких последовательностей.

Функцией Салема называется кусочно-линейная функция переменной $x \in (0, \pi]$, определяемая монотонной последовательностью $\boldsymbol{b}$ и равная

$$v(\boldsymbol{b}, x) = x \sum_{k=1}^{m(x)} k b_k,$$

$m(x) = [\pi/x]$, $[t]$ — целая часть числа t.

А.Ю. Попов доказал, что функция Салема $v(\boldsymbol{b}, x)$ является мажорантой $g(\boldsymbol{b}, x)$ на интервале $(0, \pi)$, какова бы ни была последовательность $\boldsymbol{b} \in \mathcal{M}$. В то же время оценка снизу $g(\boldsymbol{b}, x)$ через функцию Салема $v(\boldsymbol{b}, x)$ на классе $\mathcal{M}$ невозможна.

Из результатов П. Хартмана, А. Винтнера, С. А. Теляковского и А. Ю. Попова следует, что максимум $\overline{l}(\boldsymbol{b}) = \overline{\lim}_{x\to+0} g(\boldsymbol{b},x)/v(\boldsymbol{b},x)$, взятый по всем последовательностям $\boldsymbol{b}\in\mathcal{M}$, равен 1. Мы решаем задачу о поиске точной нижней грани $\overline{l}(\boldsymbol{b})$, взятой по всем последовательностям $\boldsymbol{b}\in\mathcal{M}$.

Теорема 1.1. *Справедливо равенство* $\min_{\boldsymbol{b}\in\mathcal{M}}\overline{l}(\boldsymbol{b}) = 2\pi^{-2}$.

В **§1.2** получена новая оценка сверху суммы ряда по синусам с монотонными коэффициентами.

Р. Салем при некоторых дополнительных предположениях на монотонную, стремящуюся к нулю последовательность $\boldsymbol{b}$ установил существование таких положительных величин $C_1(\boldsymbol{b})$, $C_2(\boldsymbol{b})$, что верна двусторонняя оценка

$$C_2(\boldsymbol{b})v(\boldsymbol{b},x) \leqslant g(\boldsymbol{b},x) \leqslant C_1(\boldsymbol{b})v(\boldsymbol{b},x), \quad 0<x\leqslant x_0. \tag{2}$$

С. А. Теляковский улучшил этот результат, выведя оценку (2) с абсолютными постоянными C_1 и C_2, освободив последовательность $\boldsymbol{b}$ от дополнительных требований и показав, что оценка сверху выполняется для любой монотонной последовательности $\boldsymbol{b}$, а оценка снизу — для любой выпуклой последовательности $\boldsymbol{b}$ (то есть $b_k - 2b_{k+1} + b_{k+2} \geqslant 0$, $k\in\mathbb{N}$).

Теорема 2.B (С. А. Теляковский). *Пусть $\boldsymbol{b}\in\mathcal{M}$. Тогда найдётся такая постоянная $C_2>0$, что*

$$g(\boldsymbol{b},x) \leqslant C_2 v(\boldsymbol{b},x), \quad 0<x\leqslant \frac{\pi}{11}.$$

Если же последовательность $\boldsymbol{b}$ ещё и выпукла, найдётся такая постоянная $C_1>0$, что

$$g(\boldsymbol{b},x) \geqslant C_1(\boldsymbol{b})v(\boldsymbol{b},x), \quad 0<x\leqslant \frac{\pi}{11}.$$

А. Ю. Попов получил точные значения постоянных в оценках Теляковского. А именно, им были доказаны следующие теоремы.

Теорема 1.C (А. Ю. Попов). *Для любой невозрастающей и стремящейся к нулю последовательности $\boldsymbol{b}$ выполняется неравенство*

$$g(\boldsymbol{b},x) \leqslant v(\boldsymbol{b},x), \quad 0<x\leqslant\pi. \tag{3}$$

Теорема 1.D (А. Ю. Попов). *Для любой выпуклой и стремящейся к нулю последовательности $\boldsymbol{b}$ выполняется неравенство*

$$g(\boldsymbol{b},x) \geqslant \frac{2}{\pi^2}\,v(\boldsymbol{b},x) - 0.46\,b_{m(x)}, \quad 0<x\leqslant\frac{\pi}{2}. \tag{4}$$

Оценка (4), вообще говоря, не выполняется при отсутствии второго отрицательного слагаемого в её правой части. Возникает вопрос, можно ли видоизменить функцию Салема $v(\boldsymbol{b}, x)$ так, чтобы двусторонняя оценка с постоянными $C_1 = 1$ и $C_2 = 2\pi^{-2}$ всё же выполнялась бы в некоторой правой окрестности нуля? Ответ на данный вопрос положителен.

Мы показываем, что оценка (3) допускает усиление. В качестве новой мажоранты рассмотрим функцию

$$u(\boldsymbol{b}, x) = x \sum_{k=1}^{[(m(x)+1)/2]} k b_k + x \sum_{k=[(m(x)+3)/2]}^{m(x)} \bigl(m(x) + 1 - k\bigr) b_k.$$

Справедливо следующее уточнение теоремы 1.С.

Теорема 1.4. *Для любой неубывающей и стремящейся к нулю последовательности* $\boldsymbol{b}$ *выполняется неравенство*

$$g(\boldsymbol{b}, x) \leqslant u(\boldsymbol{b}, x), \quad 0 < x \leqslant \pi.$$

Мы также показываем, что при дополнительном условии выпуклости последовательности $\boldsymbol{b}$ функция $2\pi^{-2} u(\boldsymbol{b}, x)$ оказывается минорантой суммы ряда по синусам не только в некоторой окрестности нуля, а практически на всём промежутке $(0, \pi/2]$.

Теорема 1.5. *Для любой выпуклой и стремящейся к нулю последовательности* $\boldsymbol{b}$ *выполняется неравенство*

$$g(\boldsymbol{b}, x) \geqslant \frac{2}{\pi^2}\, u(\boldsymbol{b}, x), \quad 0 < x \leqslant \frac{9\pi}{20}.$$

В **§1.3** рассматривается сумма ряда по синусам (1), коэффициенты которого образуют стремящуюся к нулю и „почти монотонную" последовательность.

Введём расширения множества $\mathcal{M}$. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная неубывающая последовательность положительных чисел. Символом $\mathcal{M}_\Lambda$ обозначим множество всех последовательностей $\boldsymbol{b} = \{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, для которых справедливо включение $\{b_k/\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{M}$. Очевидно, что $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_\Lambda$, а равенство $\mathcal{M} = \mathcal{M}_\Lambda$ выполняется тогда и только тогда, когда Λ — постоянная последовательность. Множество $\mathcal{M}_\Lambda$ назовём классом квазимонотонных относительно Λ последовательностей.

Исследуется поведение при стремлении x к нулю справа отрицательной части суммы ряда (1) с квазимонотонными коэффициентами. Найдено условие на произвольную неубывающую и ограниченную последовательность Λ положительных чисел, при выполнении которого в предельном соотношении Хартмана—Винтнера[13]

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(\boldsymbol{b},x)}{x} = \sum_{k=1}^{\infty} kb_k \qquad \forall \boldsymbol{b}\in\mathcal{M} \tag{5}$$

можно заменить класс $\mathcal{M}$ на класс $\mathcal{M}_\Lambda$. Полагаем, что $\lambda = \lim_{k\to\infty}\lambda_k$.

Теорема 1.6. *Если*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(\lambda-\lambda_k) < +\infty,$$

то предельное соотношение (5) *выполняется, какова бы ни была последовательность* $\boldsymbol{b}\in\mathcal{M}_\Lambda$. *Если* $\sum_{k=1}^{\infty} k(\lambda-\lambda_k) = +\infty$, *то существует такая последовательность* $\widetilde{\boldsymbol{b}} = \{\widetilde{b}_k\}_{k=1}^{\infty}\in\mathcal{M}_\Lambda$, *что* $\sum_{k=1}^{\infty} k\widetilde{b}_k = +\infty$, *но* $\varliminf_{x\to+0} g(\widetilde{\boldsymbol{b}},x)/x = -\infty$.

Установлено, что отрицательная часть суммы ряда (1) с квазимонотонными коэффициентами, вообще говоря, не должна быть бесконечно малой при $x\to+0$.

Теорема 1.7. *Если*

$$\varlimsup_{k\to\infty} k(\lambda-\lambda_k) < +\infty,$$

то $\varliminf_{x\to+0} g(\boldsymbol{b},x)\geqslant 0$ $(\forall \boldsymbol{b}\in\mathcal{M}_\Lambda)$. *Если* $\varlimsup_{k\to\infty} k(\lambda-\lambda_k) = +\infty$, *то существует такая последовательность* $\widetilde{\boldsymbol{b}}\in\mathcal{M}_\Lambda$, *что* $\varliminf_{x\to+0} g(\widetilde{\boldsymbol{b}},x) = -\infty$.

В **§1.4** изучаются ряды по синусам (1), последовательности коэффициентов которых не только монотонно стремятся к нулю, но и принадлежат следующим двум специальным классам.

Первый класс — обозначим его $\mathcal{B}\downarrow$ — состоит из всех последовательностей $\boldsymbol{b}\in\mathcal{M}$ таких, что последовательность $\{kb_k\}_{k=1}^{\infty}$ не возрастает, то есть $(k+1)b_{k+1}\leqslant kb_k$, $k\in\mathbb{N}$.

Другой класс — обозначим его $\mathcal{B}\uparrow$ — состоит из всех последовательностей $\boldsymbol{b}\in\mathcal{M}$ таких, что последовательность $\{kb_k\}_{k=1}^{\infty}$ не убывает, то есть $kb_k\leqslant(k+1)b_{k+1}$, $k\in\mathbb{N}$.

Найдены оценки сумм рядов по синусам (1), последовательности коэффициентов $\boldsymbol{b}\in\mathcal{M}$ которых принадлежат классам $\mathcal{B}\downarrow$ и $\mathcal{B}\uparrow$, через функцию Салема $v(\boldsymbol{b},x)$. Доказана асимптотическая неулучшаемость найденных оценок на таких классах последовательностей коэффициентов.

[13] Hartman P., Wintner A. On sine series with monotone coefficients // J. London Math. Soc. – 1953. – V. 28, № 1. – P. 102–104.

Теорема 1.9. *Если $\boldsymbol{b} \in \mathcal{B}\downarrow$, то при любом $x \in (0, \pi/3]$ верна оценка снизу*

$$g(\boldsymbol{b}, x) \geqslant \left(\underline{I} - \frac{1}{m(x)}\right) v(\boldsymbol{b}, x) - \frac{3}{2}\, b_{m(x)+1} \sin\frac{x}{2}\,,$$

где

$$\underline{I} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt = 0.451\ldots.$$

В то же время существуют такие последовательности $\underline{\boldsymbol{b}} \in \mathcal{B}\downarrow$ и $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, что

$$x_n > 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}), \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = 0, \qquad g(\underline{\boldsymbol{b}}, x_n) \sim \underline{I}\, v(\underline{\boldsymbol{b}}, x_n), \quad n \to \infty.$$

Теорема 1.10. *Если $\boldsymbol{b} \in \mathcal{B}\uparrow$, то при любом $x \in (0, \pi)$ верна оценка сверху*

$$g(\boldsymbol{b}, x) \leqslant \overline{I}\left(1 + \frac{1}{m(x)}\right) v(\boldsymbol{b}, x) + \frac{1}{2}\, b_{m(x)+1} \operatorname{tg}\frac{x}{4}\,,$$

где

$$\overline{I} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt = 0.589\ldots.$$

В то же время существуют такие последовательности $\overline{\boldsymbol{b}} \in \mathcal{B}\uparrow$ и $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, что

$$x_n > 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}), \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = 0, \qquad g(\overline{\boldsymbol{b}}, x_n) \sim \overline{I}\, v(\overline{\boldsymbol{b}}, x_n), \quad n \to \infty.$$

Результаты главы 1 опубликованы в работах [2], [4], [5].

В **главе 2** изучается асимптотическое поведение в правой полуокрестности нуля сумм рядов по синусам (1) с выпуклыми коэффициентами.

В **§2.1** детально исследуется оценка снизу функции $g(\boldsymbol{b}, x)$ в правой окрестности нуля через мажоранту Салема $v(\boldsymbol{b}, x)$.

Уточняется следующий результат А. Ю. Попова.

Теорема 2.E (А. Ю. Попов). *Для любой выпуклой и стремящейся к нулю последовательности $\boldsymbol{b}$ выполняется неравенство*

$$g(\boldsymbol{b}, x) \geqslant \frac{2}{\pi^2}\, v(\boldsymbol{b}, x) - \frac{1}{\pi}\, b_{m(x)} - b_{m(x)}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right), \quad 0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Установлено, что функция Салема с точной константой $2\pi^{-2}$ не является, вообще говоря, минорантой для суммы ряда по синусам на классе всех выпуклых последовательностей $\boldsymbol{b}$.

Последовательность $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ называется *медленно меняющейся*, если для любого $\delta > 0$ имеет место равенство $\lim_{k\to\infty} \beta_{[\delta k]}/\beta_k = 1$.

Теорема 2.4. *Существует выпуклая, стремящаяся к нулю и медленно меняющаяся последовательность* $\boldsymbol{b}$*, для которой найдётся последовательность точек* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$*,* $x_n \to +0$*, такая, что*

$$g(\boldsymbol{b}, x_n) < \frac{2}{\pi^2}\, v(\boldsymbol{b}, x_n).$$

Показано, что в качестве альтернативы можно взять модифицированную функцию Салема

$$v_0(\boldsymbol{b}, x) = x\left(\sum_{k=1}^{m(x)-1} kb_k + \frac{m(x)}{2}\, b_{m(x)}\right).$$

Теорема 2.6. *Пусть* $\boldsymbol{b}$ *— положительная, выпуклая и стремящаяся к нулю последовательность. Тогда для некоторого* $x_0 > 0$ *выполняется неравенство*

$$g(\boldsymbol{b}, x) > \frac{2}{\pi^2}\, v_0(\boldsymbol{b}, x), \quad 0 < x < x_0.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ *существует выпуклая, медленно меняющаяся и стремящаяся к нулю последовательность* $\boldsymbol{b}$*, для которой найдётся последовательность точек* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$*,* $x_n \to +0$*, такая, что*

$$g(\boldsymbol{b}, x_n) < \frac{2}{\pi^2}\, x_n\left(\sum_{k=1}^{m(x_n)-1} kb_k + \left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) m(x_n) b_{m(x_n)}\right).$$

Иными словами, коэффициент $1/2$ перед слагаемым $m(x)b_{m(x)}$ в модифицированной мажоранте Салема точный. Тем самым, для оценки снизу суммы ряда по синусам с выпуклыми коэффициентами функция $v_0(\boldsymbol{b}, x)$ в некотором смысле оптимальна.

В **§2.2** найдены точные константы в двусторонней оценке С. А. Теляковского суммы ряда по синусам (1) с последовательностью коэффициентов $\boldsymbol{b} \in \mathcal{M}$ при дополнительном условии выпуклости.

С. А. Теляковский показал, что разность между суммой ряда (1) и главным членом её асимптотического разложения

$$g(\boldsymbol{b}, x) - \frac{b_{m(x)}}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$$

удобно сравнивать с функцией

$$\sigma(\boldsymbol{b}, x) = \frac{1}{m(x)} \sum_{k=1}^{m(x)-1} k^2 \Delta^1 b_k, \qquad \Delta^1 b_k = b_k - b_{k+1} > 0.$$

Теорема 2.F (С. А. Теляковский). *Существуют такие положительные абсолютные постоянные C_1 и C_2, что имеет место оценка*

$$C_1\,\sigma(\boldsymbol{b},x)\leqslant g(\boldsymbol{b},x)-\frac{b_{m(x)}}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\leqslant C_2\,\sigma(\boldsymbol{b},x),\quad 0<x\leqslant\frac{\pi}{11},$$

какова бы ни была выпуклая и стремящаяся к нулю последовательность $\boldsymbol{b}$.

Мы получили точные значения постоянных в теореме 2.F.

Теорема 2.10. *Справедливы равенства*

$$\sup_{\boldsymbol{b}}\varlimsup_{x\to+0}\frac{g(\boldsymbol{b},x)-(b_{m(x)}/2)\operatorname{ctg}(x/2)}{\sigma(\boldsymbol{b},x)}=\frac{\pi}{2},\tag{6}$$

$$\inf_{\boldsymbol{b}}\varliminf_{x\to+0}\frac{g(\boldsymbol{b},x)-(b_{m(x)}/2)\operatorname{ctg}(x/2)}{\sigma(\boldsymbol{b},x)}=\frac{3(\pi-1)}{\pi^2},\tag{7}$$

причём точная верхняя грань в (6) и точная нижняя грань в (7) достигаются на медленно меняющихся последовательностях.

В **§2.3** обсуждается вопрос, сколь велико отклонение между суммой ряда по синусам (1) и её асимптотически точными мажорантой и минорантой на классе всех выпуклых последовательностей коэффициентов.

Теорема 2.15. *Существует выпуклая, медленно меняющаяся и стремящаяся к нулю последовательность $\boldsymbol{b}$, для которой найдётся последовательность точек $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n\to+0$, такая, что*

$$0<g(\boldsymbol{b},x_n)-\frac{2}{\pi^2}\,v_0(\boldsymbol{b},x_n)<\frac{1}{2}\sqrt[3]{\pi^2b_1x_nb_{m(x_n)}^2}+\frac{9+\pi^2}{6\pi^2}x_nb_{m(x_n)}.$$

Теорема 2.16. *Для любого $\varepsilon>0$ существуют выпуклая, медленно меняющаяся и стремящаяся к нулю последовательность $\boldsymbol{b}$ и последовательность точек $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n\to+0$, такие, что*

$$0>g(\boldsymbol{b},x_n)-\frac{b_{m(x_n)}}{2}\operatorname{ctg}\frac{x_n}{2}-\sin\frac{x_n}{2}\sum_{k=1}^{m(x_n)-1}k(k+1)\Delta^1b_k>-b_1x_n^{3-\varepsilon}.$$

В **§2.4** уточняется асимптотика суммы ряда по синусам (1) с выпуклой, медленно меняющейся последовательностью коэффициентов $\boldsymbol{b}$, полученная С. Алянчичем, Р. Бояничем и М. Томичем, в случае, когда последовательность коэффициентов удовлетворяет дополнительному условию регулярности.

Теорема 1.B (С. Алянчич, Р. Боянич, М. Томич). *Пусть $\boldsymbol{b}$ — выпуклая, медленно меняющаяся, стремящаяся к нулю последовательность. Тогда верна асимптотика*

$$g(\boldsymbol{b}, x) \sim \frac{b_{m(x)}}{x}, \quad x \to +0.$$

При условии медленного изменения последовательности $k\Delta^1 b_k$, которое несколько сильнее условия медленного изменения самой последовательности $\boldsymbol{b}$, получен второй член асимптотики сумммы ряда (1).

Теорема 2.17. *Пусть последовательность $\boldsymbol{b}$ неотрицательна, выпукла и стремится к нулю, а последовательность $\{k\Delta^1 b_k\}_{k=1}^\infty$ медленно меняется. Тогда*

$$g(\boldsymbol{b}, x) - \frac{b_{m(x)}}{x} \sim (\gamma + \ln \pi)\frac{m(x)\Delta^1 b_{m(x)}}{x}, \quad x \to +0.$$

Через γ обозначена постоянная Эйлера.

Результаты главы 2 опубликованы в работах [3], [8], [13].

Глава 3 посвящена исследованию экстремальных задач, связанных со сходимостью почти всюду рядов по общим ортогональным системам.

Пусть $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ — ортонормированная система (будем писать ОНС). Неубывающая последовательность неотрицательных чисел $\{\omega_n\}_{n=1}^\infty$ называется *множителем Вейля* для $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$, если какова бы ни была последовательность коэффициентов $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ с условием $\sum_{n=1}^\infty c_n^2 \omega_n < +\infty$, ряд $\sum_{n=1}^\infty c_n \psi_n(x)$ сходится почти всюду. Теорема Меньшова—Радемахера утверждает, что последовательность $\omega_n = \log_2^2(n+1)$ является точным множителем Вейля на классе всех ОНС. Другими словами, какова бы ни была ОНС $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$, условие $\sum_{n=1}^\infty c_n^2 \log_2^2(n+1) < +\infty$ влечёт сходимость почти всюду ряда $\sum_{n=1}^\infty c_n \psi_n(x)$. Обратно, существует такая ОНС $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$, что для любой неубывающей последовательности неотрицательных чисел $\omega_n = o(\log_2^2(n+1))$ найдётся последовательность коэффициентов $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ со свойством $\sum_{n=1}^\infty c_n^2 \omega_n < +\infty$, такая, что ряд $\sum_{n=1}^\infty c_n \psi_n(x)$ расходится почти всюду. Эти результаты основаны на следующих леммах Меньшова.

Теорема 3.A (Д. Е. Меньшов). *Пусть номер N является степенью двойки, $\{\psi_n\}_{n=1}^N$ — ОНС. Тогда для любого набора коэффициентов $\{c_n\}_{n=1}^N$ выполняется неравенство*

$$\int_0^1 \max_{1 \leqslant j \leqslant N} \left|\sum_{n=1}^{j} c_n \psi_n(x)\right|^2 dx \leqslant (\log_2 N + 1)^2 \sum_{n=1}^{N} c_n^2.$$

Теорема 3.B (Д. Е. Меньшов). *Существует положительная постоянная C такая, что для каждого N найдётся ОНС $\{\psi_n\}_{n=1}^N$ определённых на отрезке $[0,1]$ функций, удовлетворяющая условию*

$$\int_0^1 \max_{1\leqslant j\leqslant N}\left|\sum_{n=1}^{j}\psi_n(x)\right|^2 dx > CN\log_2^2 N.$$

Эти теоремы тесно связаны со следующим утверждением о матрицах, установленным гораздо позднее[14,15] в функциональном анализе.

Для каждой матрицы A обозначим через A^s верхнюю треугольную матрицу, у которой элементы выше главной диагонали совпадают с соответствующими элементами матрицы A, а через $\|A\|$ — операторную норму матрицы A (как оператора в евклидовом пространстве).

Теорема 3.C (В. И. Мацаев). *Существуют положительные постоянные C_1 и C_2 такие, что для каждого номера $N \geqslant 2$ выполняется неравенство*

$$C_1\log_2 N \leqslant \sup\frac{\|A^s\|}{\|A\|} \leqslant C_2\log_2 N,$$

где супремум берётся по всем ненулевым $N\times N$ матрицам A.

Из теоремы 3.B вытекает, что для построенной Д. Е. Меньшовым системы норма *максимального оператора*

$$S^*\colon l_2^N \to L_2, \quad \text{где} \quad S^*\{a_n\} = \max_{1\leqslant j\leqslant N}\left|\sum_{n=1}^{j}a_n\psi_n(x)\right|,$$

оценивается снизу как $\log_2 N$. При построении системы функций, удовлетворяющих условиям теоремы 3.B, и в теореме 3.C используются свойства матрицы Гильберта $\{1/(i-j)\}_{i,j=1}^\infty$ (на главной диагонали, при $i=j$, элементы матрицы полагаем равными нулю). Эта тёплицева матрица, порождённая последовательностью $\{1/n\}_{n=1}^\infty$, имеет конечную операторную норму. В то же время сумма элементов над главной диагональю в N-м столбце имеет порядок $\log_2 N$. Позднее рядом авторов приводились другие доказательства теорем 3.B и 3.C, однако, все они так или иначе использовали конструкцию матрицы Гильберта. В связи с этим Б. С. Кашиным неоднократно ставилась задача о разработке новых подходов к построению матриц размера $N\times N$, для которых отношение норм $\|A^s\|/\|A\|$ имеет порядок $\log_2 N$ при $N\to\infty$.

[14]Мацаев В. И. Об одном классе вполне непрерывных операторов // Докл. АН СССР. – 1961. – Т. 139, № 3. – С. 548–551.

[15]Никольская Л. Н., Фарфоровская Ю. Б. Тёплицевы и ганкелевы матрицы как мультипликаторы Адамара—Шура // Алгебра и анализ. – 2003. – Т. 15, № 6. – С. 141–160.

Первый пример такой матрицы, состоящей из троичных блоков, был предложен А. Паскевичем[16]. Позднее А. Паскевич[17] использовал построенную им матрицу для получения теоремы типа Тандори об описании множества коэффициентов сходящегося почти всюду ряда по ОНС.

В **§3.1** предложен метод построения *обобщённых тёплицевых матриц,* удовлетворяющих условиям теоремы 3.C. Такие матрицы имеют вид $\{h_{i\ominus j}\}$, где $\{h_n\}$ — набор чисел, а '$\ominus$' — вычитание, порождённое группой характеров $\{\chi_n\}$ компактной абелевой группы X.

Следующее утверждение является обобщением классического результата о нормах тёплицевых матриц.

Теорема 3.1. *Пусть $\{h_k\}_{k=0}^{N-1}$ — конечный набор комплексных чисел. Тогда для операторной нормы матрицы $H = \{h_{m\ominus n}\}_{m,n=0}^{N-1}$ справедлива оценка*

$$\|H\| \leqslant \left\| \sum_{k=0}^{N-1} h_k \chi_k(x) \right\|_{L^\infty(X)}.$$

Показано, что как матрица Гильберта, так и матрица Паскевича являются частными случаями общей конструкции: матрица Гильберта строится по тригонометрической системе $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, а матрица Паскевича — по троичной системе Прайса. Таким образом, матрица Паскевича в определённом смысле аналогична матрице Гильберта.

При помощи теоремы 3.1 построен ряд других примеров обобщённых тёплицевых матриц, наибольший интерес среди которых представляет матрица, составленная из блоков 4×4.

В **§3.2**, применяя метод, разработанный в §3.1, строится обобщённая тёплицева матрица, порождённая группой характеров над прямым произведением групп $\mathbb{Z}_4$, удовлетворяющая условиям теоремы 3.C и имеющая улучшенные характеристики в сравнении с матрицами Гильберта и Паскевича.

А именно, строится система ортогональных $M \times M$ матриц ($M = 4^{N+1}$), удовлетворяющих условиям теоремы 3.C, у которых отношение максимального по модулю элемента к минимальному по модулю ненулевому элементу равно $\sqrt{M}/2$, что несколько лучше матрицы Гильберта, где соответствующее отношение равно M.

Для каждого $N \geqslant 1$ определим набор чисел $\{d_n\}_{n=0}^{4^{N+1}-1}$ следующим

[16] Paszkiewicz A. A new proof of the Rademacher—Menshov theorem // Acta Sci. Math. (Szeged). – 2005. – V. 71. – P. 631–642.

[17] Paszkiewicz A. A complete characterization of coefficients of a.e. convergent orthogonal series and majorizing measures // Invent. Math. – 2010. – V. 180, № 1. – P. 55–110.

образом:

$$d_n = \begin{cases} -2^{-k-1}, & \text{если} \quad n = 4^k + \sum\limits_{m=1}^{k} n_m 4^{m-1}, \quad n_m = 1,3, \\ & \qquad 0 \leqslant k < N-1, \\ 2^{-k-1}, & \text{если} \quad n = 3 \cdot 4^k + \sum\limits_{m=1}^{k} n_m 4^{m-1}, \quad n_m = 1,3, \\ & \qquad 0 \leqslant k < N-1, \\ -2^{-N-1}, & \text{если} \quad n = 4^{N-1} + \sum\limits_{m=1}^{N-1} n_m 4^{m-1}, \quad n_m = 1,3, \\ 3 \cdot 2^{-N-1}, & \text{если} \quad n = 3 \cdot 4^{N-1} + \sum\limits_{m=1}^{N-1} n_m 4^{m-1}, \quad n_m = 1,3, \\ -2^{-N-1}, & \text{если} \quad n = 4^{N} + \sum\limits_{m=1}^{N} n_m 4^{m-1}, \quad n_m = 1,3, \\ 2^{-N-1}, & \text{если} \quad n = p \cdot 4^{N} + \sum\limits_{m=1}^{N} n_m 4^{m-1}, \quad n_m = 1,3,\ p = 2,3, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{8}$$

Теорема 3.7. *Для матрицы* $B_N = \{d_{n\ominus m}\}_{n,m=0}^{4^{N+1}-1}$*, определяемой соотношением* (8)*, выполняется оценка*

$$\frac{\|B_N^s\|}{\|B_N\|} \geqslant \frac{N+3}{4}.$$

Заметим также, что как и в случае матрицы Гильберта, логарифмический рост нормы верхних треугольных матриц B_N^s достигается на векторах $2^{-N-1}\{1, 1, \ldots, 1\}$. Используя последнее соображение, явно предъявляется ОНС $\{\psi_n\}_{n=1}^{N}$, удовлетворяющая теореме 3.B.

Результаты главы 3 опубликованы в работах [1], [11].

Глава 4 посвящена нахождению областей однолистности на классах голоморфных в некоторой области функций.

Хорошо известно, что необходимым условием однолистности функции в некоторой окрестности точки, то есть *локальной однолистности*, является отличие от нуля её производной в этой точке. При оценке радиуса однолистности возникает труднопреодолимый зазор между необходимостью и достаточностью. Объясняется это тем, что однолистность может нарушаться не только из-за препятствия, связанного с нулевым значением производной, но и по другой причине: образ границы круга однолистности может иметь точку самосоприкосновения.

Совершенно иная ситуация возникает при оценке радиуса однолистности не для индивидуальной голоморфной функции, а на классе функций. В этом случае зазор между необходимыми и достаточными условиями оказывается существенно меньшим, а для некоторых классов нижняя и верхняя оценки вообще смыкаются. Э. Ландау рассмотрел класс ограниченных голоморфных отображений единичного круга со стандартной нормировкой и вычислил точное значение радиуса однолистности на этом классе.

Теорема 4.А (Э. Ландау). *Пусть f голоморфно отображает единичный круг с центром в нуле в круг с центром в нуле, радиус которого равен M, где M — некоторое число, большее единицы. Кроме того, $f(0) = 0$ и $f'(0) = 1$. Тогда f однолистна в круге с центром в нуле, радиус $R(M)$ которого равен $M - \sqrt{M^2 - 1}$.*

При этом функция

$$f(z) = Mz\,\frac{1 - Mz}{M - z}$$

удовлетворяет условиям $f(0) = 0$ и $f'(0) = 1$, ограничена числом M в единичном круге и имеет нулевую производную в точке $z = R(M)$.

Ж. Валирон[18] показал, что подобно тому, как голоморфная функция с отличной от нуля производной однолистна в некотором круге, функция, имеющая ненулевую угловую производную, однолистна в некотором секторе раствора сколь угодно близкого к π. Разумеется, радиус сектора однолистности зависит не только от величины угла, но и от самой функции.

В то же время, ситуация с выделением областей однолистности на классе функций с условием на производную в граничной точке кардинально отличается от случая внутренней точки. Даже для достаточно малого угла раствора сектора, указанного Ж. Валироном, выбрать единое значение радиуса сектора однолистности на классе, состоящем из функций, имеющих ограничение на угловую производную в граничной точке, вообще говоря, нельзя.

Теорема 4.6. *При любом $\alpha > 1$ на классе функций, отображающих единичный круг с центром в нуле в себя и удовлетворяющих условиям $f(1) = 1$ и $f'(1) < \alpha$ (в смысле углового предела), нет непустых областей однолистности.*

Сравнивая это утверждение с результатом Ландау (теорема 4.А), можно сделать вывод, что условие на угловую производную значительно слабее условия на производную во внутренней точке, а классы, содержащие лишь условие на угловую производную в граничной неподвижной точке, слишком обширны с точки зрения выделения областей

[18] Валирон Ж. Аналитические функции. – М. : ГИТТЛ, 1957. – 236 с.

однолистности. Тем самым, возникает естественная необходимость к ограничению на значение производной в граничной неподвижной точке добавить ещё некоторое условие. В качестве такого условия можно рассмотреть наличие дополнительной неподвижной точки.

В **§4.1** и **§4.2** исследуются классы голоморфных отображений единичного круга в себя, имеющих ограничение на значение производной в граничной неподвижной точке, а также дополнительное условие наличия и локализации внутренней неподвижной точки. Изучая влияние угловой производной на свойства функций внутри единичного круга, В. В. Горяйнов обнаружил на данных классах существование областей однолистности.

Теорема 4.E (В. В. Горяйнов). *Пусть $\alpha \in (1,2)$. Если f — голоморфная функция, отображающая единичный круг с центром в нуле в себя и удовлетворяющая условиям $f(0)=0$, $f(1)=1$ и $f'(1) \leqslant \alpha$ (в смысле углового предела), тогда f однолистна в области*

$$\mathscr{A}(\alpha) = \left\{ z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1 \quad \text{и} \quad \frac{|1-z|}{1-|z|} < \frac{1}{\sqrt{\alpha-1}} \right\}.$$

При этом функция

$$f(z) = z\,\frac{\alpha z + (2-\alpha)}{\alpha + (2-\alpha)z}$$

отображает единичный круг с центром в нуле в себя, удовлетворяет условиям $f(0)=0$, $f(1)=1$ и $f'(1) \leqslant \alpha$ и имеет нулевую производную в точке

$$z_\alpha = -\frac{1-\sqrt{\alpha-1}}{1+\sqrt{\alpha-1}},$$

расположенной на границе области $\mathscr{A}(\alpha)$.

В отличие от теоремы 4.A, результат которой окончателен, области в теореме 4.E точны лишь на классе областей конкретного вида.

В §4.1 метод, разработанный В. В. Горяйновым, применяется для нахождения более широких областей однолистности и получения оценок сверху. В §4.2 с помощью разработанного нового подхода экстремальная задача поиска области однолистности на классе функций с внутренней и граничной неподвижными точками и ограничением на значение угловой производной в граничной точке решается полностью. А именно, получена точная область однолистности на данном классе. Это приводит к аналогу теоремы Ландау (теорема 4.A) для соответствующего класса функций.

Теорема 4.7. *Пусть $\alpha \in (1,4]$. Если f — голоморфная функция, отображающая единичный круг с центром в нуле в себя и удовлетворяющая условиям $f(0)=0$, $f(1)=1$ и $f'(1) \leqslant \alpha$ (в смысле углового* *предела), тогда f однолистна в области*

$$\mathscr{D}(\alpha) = \left\{ z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1 \quad \text{и} \quad \frac{\left|1 - 2z + |z|^2\right|}{1 - |z|^2} < \frac{1}{\sqrt{\alpha - 1}} \right\}.$$

Какова бы ни была область $\mathscr{Y}$, содержащаяся в единичном круге с центром в нуле, $\mathscr{D}(\alpha) \subsetneq \mathscr{Y}$, найдётся голоморфная функция f, отображающая единичный круг с центром в нуле в себя, со свойствами $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ и $f'(1) \leqslant \alpha$, не однолистная в области $\mathscr{Y}$.

В **§4.3** рассматривается сужение класса функций, имеющих ограничение на значение производной в граничной неподвижной точке, посредством наличия второй неподвижной точки, расположенной на границе единичного круга. А именно, изучается класс голоморфных отображений единичного круга в себя с двумя диаметрально противоположными граничными неподвижными точками и инвариантным диаметром. Такие отображения образуют важный с точки зрения приложений класс функций. Получены асимптотически точные двусторонние оценки областей однолистности на рассматриваемом классе функций в зависимости от значения произведения угловых производных в граничных неподвижных точках.

Теорема 4.9. *Фиксируем $\alpha \in (1, 9)$. Для каждой точки z_0 границы области*

$$\overline{\mathscr{U}}(\alpha) = \left\{ z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1 \quad \text{и} \quad \frac{|1 - z^2|}{1 - |z|^2} < \frac{2\sqrt[4]{\alpha}}{\sqrt{(3 + \sqrt{\alpha})(\sqrt{\alpha} - 1)}} \right\}$$

найдётся голоморфная функция f_{z_0}, отображающая единичный круг с центром в нуле в себя, со свойствами $f((-1, 1)) = (-1, 1)$, $f(1) = 1$, $f(-1) = -1$ и $f'(1)f'(-1) \leqslant \alpha$ (в смысле углового предела), производная которой в точке z_0 обращается в нуль.

Теорема 4.11. *Пусть $\alpha \in (1, 9)$. Если f — голоморфная функция, отображающая единичный круг с центром в нуле в себя и удовлетворяющая условиям $f((-1, 1)) = (-1, 1)$, $f(1) = 1$, $f(-1) = -1$ и $f'(1)f'(-1) \leqslant \alpha$ (в смысле углового предела), тогда f однолистна в области*

$$\underline{\mathscr{U}}(\alpha) = \Bigg\{ z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1 \quad \text{и} \quad \frac{|1 - z^2|}{1 - |z|^2} < \sqrt{1 + \left(\sqrt{k(\alpha) + 1} + \operatorname{sign}(25 - 9\alpha)\sqrt{k(\alpha)}\right)^2} \Bigg\},$$

где

$$k(\alpha) = \frac{(9\alpha - 25)^2\,(183 - 37\sqrt{\alpha})}{128(\alpha - 1)(9 - \alpha)(85 - 12\sqrt{\alpha})}.$$

Области $\overline{\mathscr{U}}(\alpha)$, $\underline{\mathscr{U}}(\alpha)$ при каждом α, $1 < \alpha < 9$, содержат вещественный диаметр и ограничены двумя дугами окружностей, проходящих через неподвижные точки $z = \pm 1$.

Полученные оценки областей однолистности асимптотически точны как при $\alpha \to 1 + 0$, так и при $\alpha \to 9 - 0$. Пусть $\varphi_1(\alpha)$, $\varphi_2(\alpha)$ — углы, образованные границами областей $\overline{\mathscr{U}}(\alpha)$, $\underline{\mathscr{U}}(\alpha)$ с вещественной осью в точках $z = \pm 1$. Тогда справедливы порядковые соотношения:

$$\operatorname{tg}\varphi_1(\alpha) \sim \operatorname{tg}\varphi_2(\alpha) \sim \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha - 1}} \quad \text{при } \alpha \to 1 + 0;$$
$$\operatorname{tg}\varphi_1(\alpha) \sim \operatorname{tg}\varphi_2(\alpha) \sim \frac{\sqrt{9 - \alpha}}{3\sqrt{2}} \quad \text{при } \alpha \to 9 - 0.$$

Результаты главы 4 опубликованы в работах [6], [7], [9], [10], [12].

Автор искренне благодарен Борису Сергеевичу Кашину за ценные советы и постоянное внимание к работе, Антону Юрьевичу Попову и Ольге Сергеевне Кудрявцевой за полезные обсуждения и сотрудничество в подготовке совместных работ, а также своему учителю Валентину Анатольевичу Скворцову.

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] *Солодов, А. П.* Об одном примере Паскевича / А. П. Солодов // Матем. заметки. – 2005. – Т. 78, № 2. – С. 286–291.

[2] *Попов, А. Ю.* Точная оценка снизу верхнего предела отношения суммы ряда по синусам с монотонными коэффициентами к её мажоранте / А. Ю. Попов, А. П. Солодов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Матем. Мех. – 2014. – № 4. – С. 51–55.

[3] *Солодов, А. П.* Точная оценка снизу суммы ряда по синусам с выпуклыми коэффициентами / А. П. Солодов // Матем. сборник. – 2016. – Т. 207, № 12. – С. 124–158.

[4] *Попов, А. Ю.* Об отрицательной части сумм рядов по синусам с квазимонотонными коэффициентами / А. Ю. Попов, А. П. Солодов // Матем. сб. – 2017. – Т. 208, № 6. – С. 146–169.

[5] *Попов, А. Ю.* Оценки с точными константами сумм некоторых классов рядов по синусам с монотонными коэффициентами через мажоранту Салема / А. Ю. Попов, А. П. Солодов // Матем. заметки. – 2018. – Т. 104, № 5. – С. 725–736.

[6] *Кудрявцева, О. С.* Двусторонние оценки областей однолистности классов голоморфных отображений круга в себя с двумя неподвижными точками / О. С. Кудрявцева, А. П. Солодов // Матем. сб. – 2019. – Т. 210, № 7. – С. 120–144.

[7] *Кудрявцева, О. С.* Двусторонняя оценка областей однолистности голоморфных отображений круга в себя с инвариантным диаметром / О. С. Кудрявцева, А. П. Солодов // Изв. вузов. Матем. – 2019. – № 7. – С. 91—95.

[8] *Солодов, А. П.* Точные константы в двусторонней оценке С. А. Теляковского суммы ряда по синусам с выпуклой последовательностью коэффициентов / А. П. Солодов // Матем. заметки. – 2020. – Т. 107, № 6. – С. 906–921.

[9] *Солодов, А. П.* Усиление теоремы Ландау для голоморфных отображений круга в себя с неподвижными точками / А. П. Солодов // Матем. заметки. – 2020. – Т. 108, № 4. – С. 638–640.

[10] *Кудрявцева, О. С.* Асимптотически точная двусторонняя оценка областей однолистности голоморфных отображений круга в себя с инвариантным диаметром / О. С. Кудрявцева, А. П. Солодов // Матем. сб. – 2020. – Т. 211, № 11. – С. 96–117.

[11] *Солодов, А. П.* Об ортогональных системах с экстремально большой L_2-нормой максимального оператора / А. П. Солодов // Матем. заметки. – 2021. – Т. 109, № 3. – С. 436–451.

[12] *Солодов, А. П.* Точная область однолистности на классе голоморфных отображений круга в себя с внутренней и граничной неподвижными точками / А. П. Солодов // Изв. РАН. Сер. матем. – 2021. – Т. 85, № 5, в печати.

[13] *Solodov, A. P.* Sharp two-sided estimate for the sum of a sine series with convex slowly varying sequence of coefficients / A. P. Solodov // Anal. Math. – 2020. – V. 46, № 3. – P. 579–603.