ФГБОУ ВО

«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА»

На правах рукописи
УДК 515.143.5+514.74

Миллионщиков Дмитрий Владимирович

Когомологии положительно градуированных алгебр Ли и их приложения

01.01.04 – геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2019

Работа выполнена на кафедре высшей геометрии и топологии механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»

Официальные оппоненты:
ВЕРШИК Анатолий Моисеевич – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Лаборатории теории представлений и динамических систем ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук (специальность 01.01.04)
ТАЙМАНОВ Искандер Асанович — доктор физико-математических наук, академик РАН, профессор, главный научный сотрудник Лаборатории динамических систем ФГБУН Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук
(специальность 01.01.04)
ШЕЙНМАН Олег Карлович – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник отдела геометрии и топологии ФГБУН Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук
(специальность 01.01.04)

Ведущая организация:
ФГБУН Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук (ИММ УрО РАН)

Защита диссертации состоится “ 03” октября 2019 г. в 14 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 002.022.03 при Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук по адресу: 119991, г. Москва, ул. Губкина, д. 8, 9-ый этаж, конференц-зал.
С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Математического института им. В. А. Стеклова РАН и на сайте
`http://www.mi-ras.ru/dis/ref19/millionshchikov/dis.pdf`

Автореферат разослан «   » июня 2019 г.
Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 002.022.03 при МИАН,
д. ф.-м. н. Королев М. А. Королев

Актуальность темы

Положительно градуированные алгебры Ли – интересный и важный класс алгебр Ли, который находил и продолжает находить новые и новые приложения в самых разных областях математики, и особенно в геометрии, топологии и математической физике. Основной объект цикла исследований, выполненных в диссертации, — это узкие[1] по Зельманову и Шалеву положительно градуированные алгебры Ли, т.е. такие положительно градуированные алгебры Ли, у которых однородные подпространства не более, чем двумерны. Последовательное изучение именно узких алгебр Ли и их приложений в самых разных задачах, стало главной целью диссертационной работы. Отметим, что классификация узких положительно градуированных алгебр Ли является важной и трудной задачей и, как отметили Зельманов и Шалев, такую задачу вполне можно считать "потрясающим вызовом"[2]. Классификация положительно градуированных алгебр Ли отличается от привычных классификаций уже тем, что в ней не существуют простые объекты в том смысле, что в каждой положительно градуированной алгебре Ли есть несобственный идеал. С этой точки зрения, она будет отличаться, например, от классификации простых $\mathbb{Z}$-градуированных алгебр Ли Каца[3]-Матье[4] над полем комплексных чисел. В бесконечномерном случае Зельманов и Шалев при классификации положительно градуированных алгебр Ли предложили заменить понятие простой алгебры на понятие вполне бесконечной алгебры Ли — алгебры Ли без собственных идеалов бесконечной коразмерности.

Разумеется, что одна и та же алгебра Ли может быть снабжена разными градуировками, в частности, размерности однородных компонент могут быть разными у разных градуировок. Мы будем выделять среди всех положительных градуировок, одну выделенную, которая, в некотором смысле, имеет инвариантный смысл и называется естественной гра-

---

[1] *Shalev A., Zelmanov E.I.* Narrow Lie algebras: A coclass theory and a characterization of the Witt algebra. // J. Algebra. – 1977. – V. 189. – P. 294–331

[2] *Shalev A., Zelmanov E.I.* Narrow algebras and groups. // J. of Math. Sciences. – 1999. – V. 93, №6. – P. 951–963

[3] *Кац В.Г.* Простые неприводимые градуированные алгебры Ли конечного роста. // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1968. – Т. 32, №6. – С. 1323–1367

[4] *Mathieu O.* Classification of simple graded Lie algebras of finite growth. // Invent. Math. – 1990. – V. 108. – P. 455–519

дуировкой. Конечномерные естественно градуированные алгебры называются алгебрами Карно[5] и они давно находятся в фокусе внимания специалистов по субримановой геометрии и геометрической теории оптимального управления[6]. Алгебры Карно рассматривались Вершиком и Гершковичем под названием однородных[7] алгебр Ли в работах по неголономной геометрии.

Конечномерные положительно градуированные алгебры Ли являются нильпотентными. Обратное, конечно, не верно, хотя согласно классификации Морозова[8], все нильпотентные алгебры Ли размерности не выше 6 допускают положительную градуировку (не обязательно естественную). Для геометров нильпотентные алгебры Ли напрямую связаны с очень интересным классом многообразий — с нильмногообразиями G/Γ, где G — односвязная нильпотентная группа Ли, а $\Gamma \subset G$ – ее кокомпактная решетка. Согласно теореме Мальцева[9] всегда можно определить нильмногообразие по нильпотентной алгебре Ли с рациональными структурными константами. Возникает естественная инвариантная геометрия на таком нильмногообразии: изучаются левоинвариантные геометрические структуры: римановы метрики, симплектические, комплексные и гиперкомплексные структуры и т.д. В этом случае соответствующая геометрия сводится к чисто алгебраическим задачам на соответствующей алгебре Ли. Продвижения геометрических исследований в старших размерностях нильмногообразий носят разрозненный характер, главная причина этого – это отсутствие соответствующей классификации. Согласно теореме Номидзу[10] когомологии де Рама $H^*(G/\Gamma, \mathbb{R})$ нильмногообразия G/Γ изоморфны когомологиям $H^*(\mathfrak{g})$ нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{g}$. В когомологиях можно рассматривать и умножение и

---

[5] *Gromov M.* Carnot-Caratheodory spaces seen from within, Sub-Riemannian geometry. / Progr. Math. – 1996. – V. 144. Birkhäuser, Basel. – P. 79–323

[6] *Аграчев А.А.* Некоторые вопросы субримановой геометрии. // УМН. – 2016.– Т. 71, №6. – С. 3–36

[7] *Вершик А.М., Гершкович В.Я.* Расслоение нильпотентных алгебр Ли над неголономным многообразием (нильпотентизация). // Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. 10, Зап. научн. сем. ЛОМИ. – 1989. – Т. 172. Л.: "Наука". – С. 21–40.

[8] *Морозов В.В.* Классификация нильпотентных алгебр Ли шестого порядка. // Изв. вузов. Матем. –1958. – №. 4. – С. 161–171.

[9] *Мальцев А.И.* Об одном классе однородных пространств. // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1949. – Т. 13, №1.– С. 9–32.

[10] *Nomizu K.* On the cohomology of homogeneous spaces of nilpotent Lie groups. // Ann. of Math. – 1954.– V. 59. – P. 531–538.

другие операции, например, произведения Масси[11]. Крайне поучителен и важен пример положительной части W^+ алгебры Витта. Рассмотрев семейство конечномерных факторов $\mathcal{V}_{2k} = W^+/(W^+)^{2k}$ этой узкой положительно градуированной алгебры Ли, Бабенко и Тайманов построили[12] с их помощью семейство неформальных компактных односвязных симплектических многообразий. Ключевую роль в их конструкции играли нетривиальные произведения Масси в когомологиях нильмногообразий, "снятые"с произведений Масси в когомологиях $H^*(W^+)$ бесконечномерной алгебры Ли W^+. Семейство нильмногообразий, лежащее в основе конструкции Бабенко и Тайманова, и произведения Масси в когомологиях $H^*(W^+)$ обсуждались в работах Бухштабера 70-х годов. Бухштабер и Шокуров открыли[13] в 1978 г., что универсальная обертывающая $U(\hat{W}^+)$ про-нильпотентного пополнения $\hat{W}^+$ положительной части алгебры Витта W^+ изоморфна алгебре Ландвебера-Новикова S из теории комплексных кобордизмов, тензорно умноженной на вещественные числа. Еще раньше в 1970 г., Бухштабер построил[14] триградуированную спектральную последовательность для вычисления члена E_2 спектральной последовательности Адамса-Новикова. Ключевую роль в конструкции Бухштабера играли целочисленные когомологии алгебры S. Гончарова, отвечая на известную гипотезу Гельфанда[15], в 1973 г. вычислила[16] биградуированные числа Бетти алгебры W^+, из ее вычислений следует тривиальность кольцевого умножения в $H^*(W^+, \mathbb{Q})$. В ситу-

---

[11] *Massey W.S.* Some higher order cohomology operations. // Simposium International de topologia Algebraica, La Universidad National Autónoma de Mexico and UNESCO. Mexico City. – 1958. – P. 145–154.

[12] *Бабенко И.К., Тайманов И.А.* О существовании неформальных односвязных симплектических многообразий. // УМН. – 1998. – Т. 53, №5 (323). – С. 225–226; *Бабенко И.К., Тайманов И.А.* О неформальных односвязных симплектических многообразиях. // Сиб. матем. журн. – 2000. – Т. 41, №2. – С. 253–269; *Бабенко И.К., Тайманов И.А.* Произведения Масси в симплектических многообразиях. // Матем. сборник. – 2000. – Т. 191, №8. – С. 3–44.

[13] *Бухштабер В.М., Шокуров А.В.* Алгебра Ландвебера-Новикова и формальные векторные поля на прямой. // Функц. анализ и его прил. – 1978. – Т. 12, №3. – С. 1–11.

[14] *Бухштабер В.М.* Характер Чженя–Дольда в кобордизмах. I. Матем. сб. – 1970. – Т. 83(125), №4(12). – С. 575–595.

[15] *Gelfand I.M.* The cohomology of infinite dimensional Lie algebras: some questions of integral geometry. // Actes du Congres International des Mathematiciens (Nice, 1970), Tome 1, P. 95–111. Gauthier-Villars, Paris, 1971.

[16] *Гончарова Л.В.* Когомологии алгебр Ли формальных векторных полей на прямой. // Функц. анализ и его прил. – 1973. – Т. 7. №2. – С. 6–14; – 1973. – Т. 7, №3. – С. 33–44.

ации, когда кольцевая структура когомологий тривиальна, определены высшие умножения, т.н. произведения Масси. Бухштабер предположил, что все пространство когомологий $H^*(W^+)$ порождается итерированными нетривиальными высшими произведениями Масси двух одномерных коциклов. Ретах, Фейгин и Фукс в 1988 г. дали положительный ответ[17] на гипотезу Бухштабера. Позднее, в 1999 г. Бухштабер, разбирая конструкцию нетривиальных произведений Масси из работ Бабенко и Тайманова, обнаружил, что произведения Масси, построенные Ретахом, Фейгиным и Фуксом, тривиальны. Годом позднее Артельных смог представить часть коциклов Гончаровой нетривиальными произведениями Масси[18]. Общая гипотеза Бухштабера оставалась открытой, пока не были получены соответствующие результаты диссертации.

Вернемся к проблемам, связанным с классификацией нильпотентных алгебр Ли. В размерностях не выше шести имеется лишь конечное число попарно неизоморфных нильпотентных алгебр Ли, но уже в размерности 7 впервые появляется однопараметрическое семейство классов изоморфизма таких алгебр. В старших размерностях изучаются многообразия[19] нильпотентных алгебр Ли. При этом чаще всего имеется в виду многообразие нильпотентных скобок Ли, заданных на n-мерном пространстве $\mathbb{K}^n$ с фиксированным базисом $e_1, \dots, e_n$. В результате получается некоторое аффинное многообразие в $\mathbb{K}^{n^3}$ (координатами в $\mathbb{K}^{n^3}$ являются компоненты тензора c_{ij}^k, $[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k$, а полиномиальные уравнения на c_{ij}^k получаются из тождества Якоби и условия нильпотентности). Точками общего положения аффинного многообразия являются так называемые филиформные[20] алгебры Ли – нильпотентные алгебры Ли с макисмальным для данной размерности n нильиндексом $n-1$. Вернь показала, что всякая филиформная алгебра Ли изоморфна некоторой деформации $[,]+\Psi$ простейшей градуированной филиформной алгебры Ли $\mathfrak{m}_0(n)$ с коммутатором $[,]$. Для коцикла $\Psi \in H^2_+(\mathfrak{m}_0(n), \mathfrak{m}_0(n))$ усло-

---

[17] *Feigin B.L., Fuchs D.B., Retakh V.S.* Massey operations in the cohomology of the infinite dimensional Lie algebra L_1. // Lecture Notes in Math. – 1988. – V. 1346. – P. 13–31.

[18] *Артельных И.В.* Произведения Масси и спектральная последовательность Бухштабера. // УМН. – 2000. – Т. 55, №3. – С. 165–166.

[19] *Kirillov A.A., Neretin Yu.A. The variety A_n of structures of n-dimensional Lie algebras. // AMS Translations. –1987.– V. 137. P. 21–30.; Hakimjanov You.B.* Variété des lois d'algébres de Lie nilpotentes. // Geom. Dedicata. – 1991. – V. 40. – P. 269–295;

[20] *Vergne M.* Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes. // Bull. Soc. Math. France. –1970. – V. 98. – P. 81–116.

вие его интегрируемости, т.е. тождество Якоби для скобки $[,]+\Psi$, эквивалентно вырождению квадрата Нийенхейса-Ричардсона $[\Psi,\Psi]=0$. Алгебра $\mathfrak{m}_0(n)$ определяется базисом $e_1,\dots,e_n$ и нетривиальными коммутационными соотношениями: $[e_1,e_i]=e_{i+1}, i=2,\dots,n{-}1$. Вернь нашла размерности пространств $H^2_{\geq 0}(\mathfrak{m}_0(n),\mathfrak{m}_0(n))$ и явный вид его базисных коциклов $\Psi_{i,r}$. Позднее ее подход стал основой для исследований филиформных алгебр малых размерностей целого ряда авторов[21] Хакимджанова, Гоза, Анкочеа-Бермудез и др. Разложим коцикл $\Psi=\sum_{i,r}x_{i,r}\Psi_{i,r}$ по базису $\Psi_{i,r}$ пространства $H^2_{\geq 0}(\mathfrak{m}_0(n),\mathfrak{m}_0(n))$. Тогда условие интегрируемости $[\Psi,\Psi]=0$ эквивалентно некоторой системе квадратичных уравнений относительно неизвестных $\{x_{i,r}\}$. Аффинное многообразие, определенное данной системой, стало называться многообразием филиформных алгебр Ли. Однако явных формул всех уравнений для произвольной размерности n не выписывалось. В частности, был предложен некий компьютерный алгоритм[22] для явного нахождения таких уравнений. Задача по нахождению явных формул квадратичных уравнений, задающих многообразие филиформных алгебр Ли, оставалась долгое время нерешенной. Филиформные алгебры Ли стали весьма популярным объектом не только у алгебраистов. Напомним работу Бенуа[23], в которой он, используя специальную 11-мерную положительно градуированную филиформную алгебру Ли, построил пример нильмногообразия, не допускающего никакой полной левоинвариантной аффинной структуры (связности), тем самым предъявив контрпример к одной гипотезе Милнора[24].

Задача классификации нильпотентных алгебр Ли снова приводит нас к понятию алгебры Карно (естественно градуированной алгебры Ли в бесконечномерном случае). Дело в том, что всякая нильпотентная алгебра Ли является специальной фильтрованной деформацией некоторой

---

[21] *Gómez J.R., Jiménez-Merchán A., Khakimdjanov Y.* Low-dimensional filiform Lie algebras. // J.Pure Appl.Algebra. – 1998. – V. 130. – P. 133–158; *Goze M., Khakimdjanov Yu.* Nilpotent Lie algebras. / Kluwer Acad. Pub. MIA 361. – Dordrecht, Boston, London. – 1996; *Khakimdjanov Yu* Varieties of Lie Algebras Laws. / Handbook of Algebra. V. 2. (M.Hazewinkel, ed.).– Elsevier. – 2000. – P. 509–541.

[22] *Echarte F.G., Márquez M.C., Núnez J.* A constructive method to determine the variety of filiform Lie algebras. // Czechoslovak Math. Journal. – 2006. – V. 56. – P. 1281–1299.

[23] *Benoist Y.* Une nilvariété non affine. // J. Differential Geometry. –1995. – V. 41. – P. 21–52.

[24] *Milnor-J.* On fundamental groups of complete affinely flat manifolds. // Adv. Math. –1977. – V. 25. –P. 178–187.

алгебры Карно. Самые короткие (неабелевы) по длине градуировки алгебры Карно известны в литературе как метабелевы алгебры Ли, задача их классификации становится необозримой[25] начиная с размерности 10. Узкие алгебры Карно, наоборот, имеют длинные нижние центральные ряды и задача их классификации важна, интересна и, что самое главное, реалистична. Отметим здесь классификацию т.н. жестких алгебр Карно Аграчева и Мариго[26].

Предпринимались попытки расширить в каком-то разумном смысле класс естественно градуированных филиформных алгебр Карно. Дело в том, что их очень мало: одна такая алгебра имеется в четной размерности и две – в нечетной. Подобные обобщения чаще всего основывались на понятии длины нижнего центрального ряда, ведь для конечномерной филиформной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ длина $s(\mathfrak{g})$ ее нижнего центрального ряда является максимальной для заданной размерности алгебр Ли $s(\mathfrak{g}) = \dim \mathfrak{g} - 1$. Класс так называемых квазифилиформных алгебр Ли[27], для которых $s(\mathfrak{g}) = \dim \mathfrak{g} - 2$, не сильно расширил запас примеров алгебр Карно, близких по свойствам к филиформным. Узкие алгебры Карно – это естественный класс алгебр Ли на пути к содержательным обобщениям филиформных алгебр Ли.

Не менее интересны и приложения, связанные с бесконечномерными узкими естественно градуированными алгебрами Ли: такими свойствами обладают характеристические алгебры Ли некоторых гиперболических уравненений в частных производных, например, характеристическая алгебра Ли экспоненциальных систем. Если интегрируемость по Дарбу таких уравнений влечет конечномерность таких алгебр Ли, то интегрируемость в смысле метода обратной задачи рассеяния приводит к медленно растущим[28] бесконечномерным алгебрам Ли. Строго

---

[25] *Gauger M.* On classification of metabelian Lie algebras. // Trans. Amer. Math. Soc. – 1973. – V. 179. – P. 293–329; *Galitski L.Yu. , Timashev D.A.* On classification of metabelian Lie algebras. // Journal of Lie Theory. –1999. – V. 9. – P. 125–156.

[26] *Agrachev A., Marigo A.* Rigid Carnot algebras: a classification. // Journal of Dynamical and Control Systems. – 2005. – V. 11, №4. – P. 449–494.

[27] *Gómez J.R., Jiménez-Merchán A.* Naturally graded quasi-filiform Lie algebras. // J. of Algebra. – 2002. – V. 256. – P. 211–228; *García Vergnolle L.* Sur les algèbres de Lie quasi-filiformes admettant un tore de dérivations. // Manuscripta Math. – 2007. – V. 124. – P. 489–505.

[28] *Лезнов А.Н., Савельев М.В.* О двумерной нелинейной системе дифференциальных уравнений $x_{\alpha,z\bar{z}} = \exp kx_{\alpha}$. // Функц. анализ и его прил. – 1980. – Т. 14, №3. – С. 87–88; *Лезнов А.Н., Савельев М.В., Шабат А.Б.* Группа внутренних симметрий и условия

говоря, естественно градуированными будут не сами характеристические алгебры Ли, а их коммутанты. Характеристические алгебры будут про-разрешимыми алгебрами Ли, более того – они в наших обоих примерах являются неотрицательно градуированными алгебрами Ли. Неотрицательно градуированные алгебры Ли можно воспринимать как левые расширения положительно градуированных алгебр Ли. В этом смысле – это два тесно связанных между собой класса алгебр Ли.

Некоторым конечномерным разрешимым и, в частности, неотрицательно градуированным алгебрам Ли, отвечают группы Ли G, у которых имеется кокомпактная решетка Г. Возникает еще один интересный класс многообразий – т.н. солвмногообразия G/Γ. Классические результаты в теории солвмногообразий принадлежат Мостову[29]. При некоторых условиях на разрешимую группу Ли G вложение левоинвариантных форм на G в комплекс де Рама $\Lambda^*(G/\Gamma)$ индуцирует изоморфизм когомологий (теорема Хаттори[30]). Тем самым, когомологические вычисления для некоторых разрешимых алгебр Ли имеют топологическое применение. Именно это направление и развивалось в данной диссертации при изучении когомологий Морса-Новикова[31] компактных солвмногообразий.

В заключение стоит заметить, что задачи относящиеся к узким и медленно растущим алгебрам и супералгебрам Ли интенсивно изучались в случае поля положительной характеристики[32]. Интересный пример[33]: пусть G – группа Григорчука и $G = G_1 \supset G_2 \supset \dots \supset G_n \supset \dots$ –

интегрируемости двумерных динамических систем. // ТМФ. – 1982. – Т. 51, №1. – С. 10–21.

[29] *Mostow G.D.* Factor spaces of solvable groups. // Ann. of Math. – 1954. – V. 60. – P. 1–27; *Mostow G.D.* Cohomology of topological groups and solvmanifolds. // Ann. of Math. – 1961. – V. 73. – P. 20–48.

[30] *Hattori H.* Spectral sequence in the de Rham cohomology of fibre bundles. // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. 1. –1960. – V. 8, №4. – P. 289–331.

[31] *Новиков С.П.* Многозначные функции и функционалы. Аналог теории Морса. // ДАН. –1981. – Т. 260, №1. – С. 31–35; *Новиков С.П.* Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса. // УМН. – 1982. –Т. 37, №5. – С. 3–49.

[32] *Caranti A., Mattarei S., Newman M.F., Scoppola C.M.* Thin groups of prime-power order and thin Lie algebras. // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). – 1996. – V. 47, №187. – P. 279–296; *Caranti A., Mattarei S., Newman M.F.* Graded Lie algebras of maximal class. // Trans. Amer. Math. Soc. –1997. – V. 349, №170. – P. 4021–4051; *Petrogradsky V.* Nil Lie p-algebras of slow growth. // Commun. in Algebra. – 2016. – V. 45, №7. – P. 2912–2941.

[33] *Рожков А.В.* Нижний центральный ряд одной группы автоморфизмов деревьев. // Матем. Заметки. – 1996. – Т. 60, №2. – С. 225–237.

ее убывающий центральный ряд. Соответствующая алгебра Ли (кольцо Ли) $L_{\mathbb{Z}_2}(G)$ над $\mathbb{Z}_2$, определенная как

$$L_{\mathbb{Z}_2}(G) = \oplus_{i=1}^{\infty} (G_i/G_{i+1}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2, [a_i G_{i+1}, b_j G_{j+1}] = a_i^{-1} b_j^{-1} a_i b_j G_{i+j+1},$$

имеет ширину два, кроме самой первой своей компоненты $G_1/G_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$, которая трехмерна.

Узкие алгебры изучал Арнольд[34], правда он рассматривал не алгебры Ли, а ассоциативные, коммутативные градуированные алгебры ширины один. Арнольд называл такие алгебры A-алгебрами и выразил число неизоморфных A-алгебр с тремя образующими при помощи непрерывных дробей.

Цель работы

В рамках единой цели по изучению и классификации узких по Зельманову и Шалеву положительно градуированных алгебр Ли в их приложениях в геометрии, топологии и математической физике выделим ряд конкретных задач.

— Вычислить когомологии с различными коэффициентами для алгебр Вернь $\mathfrak{m}_0$ и $\mathfrak{m}_2$. Изучить различные мультипликативные структуры для таких когомологий с целью применения полученных результатов к теории деформаций алгебры $\mathfrak{m}_0$ и ее конечномерных факторов $\mathfrak{m}_0(n)$.

— Классифицировать узкие по Зельманову и Шалеву естественно градуированные алгебры Ли. Проанализировать связь алгебр из классификационного списка с интегрируемыми случаями уравнения Клейна-Гордона;

— Изучить когомологии Морса-Новикова компактных нильмногообразий и солвмногообразий, установить их связь с когомологиями соответствующих алгебр Ли;

— Получить явные формулы для всех дифференциалов резольвенты Роча-Кариди-Валлаха-Фейгина-Фукса одномерного тривиального модуля $\mathbb{C}$ над алгеброй Витта.

---

[34] *Arnold V.I.* A-graded algebras and continued fractions. // Communications on Pure and Applied Mathematics. – 1989. – V. 42, №7. – P. 993–1000.

— Изучить произведения Масси в когомологиях $H^*(W^+)$ положительной части алгебры Витта W^+ (алгебры Ли полиномиальных векторных полей) и найти нетривиальные высшие произведения Масси, представляющие базисные коциклы из $H^*(W^+)$

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно. Основные из них состоят в следующем.

1. Построена классификация узких по Зельманову и Шалеву естественно градуированных алгебр Ли $\mathfrak{g} = \oplus_{i=1}^{+\infty}\mathfrak{g}_i$ ширины $3/2$, т.е. алгебр Ли, удовлетворяющих условиям
$$[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_{i+1}, \dim\mathfrak{g}_i + \dim\mathfrak{g}_{i+1} \leq 3, i \in \mathbb{N}.$$
Задача решена как и в конечномерном, так и бесконечномерном случаях для поля вещественных и для поля комплексных чисел.

2. Доказано, что коммутанты характеристических алгебр Ли уравнений синус-Гордона и Цицейки являются узкими естественно градуированными алгебрами Ли ширины $3/2$, они изоморфны положительным частям аффинных алгебр Ли Каца-Муди $A_1^{(1)}$ и $A_2^{(2)}$ соответственно. Тем самым, обе характеристические алгебры Ли имеют медленный линейный рост.

3. Доказано, что для компактного солвмногообразия G/Γ с вполне разрешимой группой Ли G, его когомологии Морса-Новикова, т.е. когомологии комплекса де Рама с деформированным дифференциалом $d + \omega\wedge$, где ω – замкнутая 1-форма, нетривиальны тогда и только тогда, когда когомологический класс $[\omega]$ принадлежит некоторому конечному подмножеству в первых когомологиях $H^1(G/\Gamma, \mathbb{C})$ солвмногообразия.

4. Найдены явные формулы для всех дифференциалов резольвенты Роча-Кариди-Валлаха-Фейгина-Фукса в терминах особых векторов модулей Верма над алгеброй Витта. Найдены явные формулы для серии $S_{2,q}(t)$ особых векторов. Полученные формулы позволяют вычислять когомологии положительной части алгебры Витта с произвольными коэффициентами.

5. Доказана гипотеза Бухштабера о том, что когомологии положительной части алгебры Витта порождаются итерированными нетривиальными высшими произведениями Масси двух одномерных классов когомологий.

6. Вычислены когомологии двух бесконечномерных алгебр Вернь из классификационного списка Зельманова-Шалева-Фиаловски узких положительно градуированных алгебр Ли максимального класса.

7. В рамках теории фильтрованных деформаций положительно градуированных алгебр Ли над полем нулевой характеристики: 1) явно найдены уравнения, задающие многообразие алгебр Ли максимального класса (многообразие филиформных алгебр Ли); 2) описано пространство модулей фильтрованных деформаций конечномерной алгебры Ли, полученной факторизацией положительной части алгебры Витта по идеалу ее нижнего центрального ряда достаточно большой коразмерности.

Методы исследования

В работе применяются самые разные методы вычисления когомологий алгебр: от вычисления когомологий с помощью точной последовательности Диксмье и применения различных спектральных последовательностей, до вычислений с помощью свободной резольвенты. В построении такой резольвенты одномерного модуля над алгеброй Витта, применяется теория модулей Верма над алгеброй Вирасоро. Главное, что объединяет все эти методы гомологической алгебры – это существенное использование градуированной структуры изучаемых алгебр Ли. Основой изучения положительно градуированных и фильтрованных алгебр Ли является применение двойственного языка, свойственного аналитической теории гомотопий в алгебраической топологии, в данном случае – это замена алгебры Ли на двойственное ей пространство и, соответственно, замена скобки Ли $[,]$ на двойственный ей дифференциал d. В классификационных задачах применяются методы теории центральных расширений алгебр Ли, также основанные на разнообразных когомологических вычислениях.

Теоретическая и практическая ценность

Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в дифференциальной и симплектической геометрии и топологии, в комбинаторике, в алгебраической топологии, в математической физике и теории интегрируемых систем. Результаты диссертации могут быть интересны специалистам, работающим в МГУ им. М.В. Ломоносова, Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН, Институте математики им. С.Л. Соболева СО РАН, СПбГУ, НГУ и других высших учебных заведениях и научных центрах.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались автором на семинаре отдела геометрии и топологии «Геометрия, топология и математическая физика», семинаре «Комплексные задачи математической физики» Математического института им. В.А. Стеклова, на научно-исследовательском семинаре кафедры высшей алгебры МГУ им. М.В. Ломоносова, семинарах «Группы Ли и теория инвариантов» и «Избранные вопросы алгебры» кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, семинарах кафедры высшей геометрии и топологии механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова: «Алгебраическая топология и её приложения. Семинар им. М.М. Постникова»; «Некоммутативная геометрия и топология», «Геометрия и группы»; на семинаре «Римановы поверхности, алгебры Ли и математическая физика» Независимого Московского университета и Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»; на общеинститутском семинаре ИМВЦ УФИЦ РАН (Уфа), семинаре по алгебре под руководством М. Вернь и М. Дюфло университета Париж-Дидро-7 (Франция), семинаре GT3 IRMA и университета Страсбурга (Франция), семинаре по алгебре и математической физике университета Лион-1 (Франция), семинаре по геометрии имени Дарбу и семинаре «Группы и алгебры Ли» университета Монпелье (Франция), семинаре по алгебре университета Мюлуза (Франция), семинаре по алгебраической топологии университета Лилля (Франция), семинаре по математической физике университета Анже (Франция), семинаре по геометрии и топологии университета Нанта (Франция), семинаре по геометрии и математической физике университета Льежа (Бельгия), семинаре по геометрии Туринского политехнического университета (Италия), семинаре по алгебре и анализу университета им. Лоранда Этвеша (Будапешт, Венгрия),

а также на международных конференциях, в том числе:

– международная конференция «Геометрия и приложения», посвященная 70-летию профессора В.А. Топоногова, Институт математики СО РАН, Новосибирск, 2000;

– международная конференция «IXth Oporto meeting on Geometry, Topology and Physics», Порту, Португалия, 2000 г.;

– международная конференция «Топология, анализ и смежные вопросы», посвященная 60-летию А.С.Мищенко, Москва, 2001 г.;

– международная конференция «Geometry and Topology of Quotients», Тусон, США, 2002;

– международная конференция «Symplectic Topology and Complex Geometry», Лилль, Франция, 2002 г.;

– международная конференция «Topology in Condensed Matter Physics», Дрезден, Германия, 8 мая – 31 июля 2002 г.;

– международная конференция «Contemporary Geometry and Related Topics», Белград, Сербия и Черногория, 26 июня – 2 июля 2005 г.;

– международная конференция «Топология, анализ и приложения в математической физике», посвященная памяти профессора Ю.П. Соловьева, МГУ, Москва, 2005 г.;

– международная конференция «Groups, Homotopy and Configuration Spaces: Conference in honor of Fred Cohen», Токио, Япония, 2005 г.;

– международная конференция «VII Workshop on Symplectic and Contact Topology (GESTA 2006)», Гетафе, Испания, сентябрь 2006 г.;

– международная конференция «Groups in Geometry and Topology», Малага, Испания, 2006 г.;

– международная конференция «Transformation groups», посвященная 70-летию профессора Э.Б. Винберга, Независимый Московский университет, Москва, 2007 г.;

– международная конференция «Operator algebras and Topology», МГУ, Москва, Россия, 2007 г.;

– международная конференция «Algebraic Topology: old and new, M.M. Postnikov memorial Conference», Бедлево, Польша, 2007 г.;

– международная конференция «Дифференциальные уравнения и топология», посвященная 100-летию со дня рождения Л.С. Понтрягина, Москва, 2008 г.;

– международная конференция «New Horizons in Toric Topology», Манчестер, Великобритания, 2008 г.;

– международная конференция «Infinite dimensional Lie algebras: Geometry and Cohomology», Лион, Франция, 2009 г.;

– международный алгебраический симпозиум, посвященный 80-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ и 70-летию профессора А.В. Михалева, 15–18 ноября 2010 г.;

– международная конференция «Дни геометрии в Новосибирске, 2011», Новосибирск, 1–4 сентября 2011 г.;

– международная конференция «Analysis, Topology and Applications (in celebration of Professor A.Mishchenko's 70-th birthday)», Харбин, Китай, 2011 г.;

– международная конференция «Group actions and applications in geometry, topology and analysis», Куньмин, Китай, 21–29 июля 2012 г.;

– международная конференция «XVII Geometrical Seminar», Златибор, Сербия, 2012 г.;

– международная конференция «Taller de Geometria y Topologia», Оахаса, Мексика, 9–13 декабря 2013 г.;

– международная конференция «ICM 2014 Satelitte Conference on Algebraic Topology», Далянь, Китай, 9–12 августа 2014 г.;

– международная конференция AMSI Workshop «Differential Geometry, Complex Analysis and Lie Theory», La Trobe University, Мельбурн, Австралия, 5–7 декабря 2014 г.;

– международная конференция «8th Australian–New Zealand Mathematics Convention», университет г. Мельбурна, Австралия, 8–12 декабря 2014 г.;

– международная конференция «Systolic geometry, topology and beyond», Монпелье, Франция, 2014 г.;

– международная конференция «Probability, Analysis and Geometry», МГУ, Москва, Россия, 2014 г.;

– международная конференция «Workshop in memory of Sergio Console», Турин, Италия, 23–26 февраля 2015 г.;

– международная конференция «Open Chinese-Russian Conference

"Toric Topology, Geometry and Number Theory», Пекин, Китай, 26–29 октября 2015 г.;

– международная конференция «Torus Actions in Geometry, Topology, and Applications», Skoltech, Москва, 16–21 февраля 2015 г.,

– международная конференция«XIX Geometrical Seminar», Златибор, Сербия, Сербия, 28 августа – 4 сентября 2016 г.;

– международная конференция «XII Белорусская математическая конференция», Минск, Беларусь, 5–10 сентября 2016 г.;

– международная конференция «4-th International Workshop on Analysis, Probability and Geometry», Москва, Россия, 26 сентября – 1 октября 2016 г.;

– международная конференция по математической физике «Кезеной-Ам 2016», Грозный, 31 октября – 3 ноября 2016 г.;

– международная конференция «Dynamics in Siberia», Новосибирск, Россия, 26 февраля – 4 марта 2017 г.;

– международная конференция «Representation Theory at the crossroads of Modern Mathematics. In honor of Alexandre Kirillov», Реймс, Франция, 29 мая – 2 июня 2017 г.;

– международная конференция по математической физике«Кезеной-Ам 2017», Грозный, Россия, 8–12 августа 2017 г.;

– международная конференция «Дни геометрии в Новосибирске – 2017», Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия, 20–23 сентября 2017 г.;

– международная конференция «Dynamics and Integrability of nonholonomic and other non-Hamiltonian systems», Падуя, Италия, 24–28 января 2018 г.;

– международная конференция «Dynamics in Siberia», Новосибирск, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Россия, 26 февраля – 4 марта 2018 г.;

– международная конференция «XX Geometrical Seminar», Врнячка Баня, Сербия, 20–24 мая 2018 г.;

– международная алгебраическая конференция, посвященная 110-летию со дня рождения профессора А.Г. Куроша, МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва, Россия, 23–25 мая 2018 г.;

– международная конференция «Алгебраическая топология, комбинаторика и математическая физика», посвященная 75-летию со дня рождения чл.-корр. РАН В.М. Бухштабера, Москва, Россия, 24–30 мая 2018 г.;

– международная конференция «Дни геометрии в Новосибирске – 2018», Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, НГУ, Россия, 19–22 сентября 2018 г.;

– международная конференция по дифференциальным уравнениям с частными производными и приложениям, посвящённая памяти проф. Б.Ю. Стернина, РУДН, Москва, Россия, 6–9 ноября 2018 г.;

– конференция с международным участием «Декабрьские чтения в Томске», Томск, Россия, 11–16 декабря 2018 г.;

– международная конференция «Бесконечномерный анализ и математическая физика», Москва, 28 января – 1 февраля 2019 г.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 18 работах автора, список которых приведен в конце автореферата.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, 8 глав, разбитых на параграфы, заключения, двух приложений и списка литературы.

Содержание работы

Во введении приводится краткий обзор актуальности темы диссертации , ее разработанности, в том числе приводится обзор ранее известных результатов и формулируются основные результаты диссертации.

В первой главе приводятся все необходимые предварительные сведения, которые будут использоваться в остальных частях диссертации.

В параграфе 1.1 дается определение и приведены первые три важных примера бесконечномерных $\mathbb{N}$-градуированных алгебр Ли $\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}_2, W^+$. Первые две алгебры из этого списка называются в тексте диссертации как первая и вторая алгебры Вернь. Они играют важную роль в известной работе Вернь[35] о многообразии нильпотентных алгебр Ли. Алгебра

---

[35] *Vergne M.* Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes. // Bull. Soc. Math. France. –1970. – V. 98. – P. 81–116.

W^+ обозначает положительную часть алгебры Витта (W^+ совпадает с линейной оболочкой базисных векторов e_i только с положительными индексами i из стандартного базиса W, ее структурные соотношения – $[e_i, e_j] = (j - i)e_{i+j}$). Алгебра Ли W^+ изоморфна алгебре Ли полиномиальных векторных полей на прямой $\mathbb{R}^1$ с координатой t, обращающихся в ноль в начале координат $t = 0$ вместе с первой производной.

В параграфе 1.2 описываются важные примеры $\mathbb{N}$-градуированных алгебр Ли. В частности, разными эквивалентными способами определяются алгебры Ли $\mathfrak{n}_1$ и $\mathfrak{n}_2$ – положительные части аффинных алгебр Каца-Муди $A_1^{(1)}$ и $A_2^{(2)}$ соответственно.

В параграфе 1.3 говорится о теории нильпотентных и пронильпотентных алгебр Ли. В этом параграфе собран целый ряд важных для всей диссертации определений. В конце параграфа 1.3 приведены две классификации положительно градуированных алгебр Ли ширины один: первая – классификация Фиаловски[36], другая – Бенуа[37].

Необходимые сведения о когомологиях положительно градуированных алгебр Ли собраны в параграфе 1.4.

В параграфе 1.3 приведена конструкция точной последовательности Диксмье в когомологиях алгебр Ли. Она определяется для алгебр Ли с идеалом коразмерности один. При помощи точной последовательсности Диксмье будут вычисляться когомологии алгебр Ли в двух последующих главах. Параграф 1.6 посвящен центральным расширениям алгебр Ли. В параграфе 1.7 обсуждаются необходимые определения и сведения по росту алгебр Ли. В частности, приведено определение размерности Гельфанда-Кириллова алгебр Ли и сформулирована теорема Каца-Матье о простых $\mathbb{Z}$-градуированных алгебрах Ли конечного роста.

Во второй главе с помощью точной последовательности Диксмье вычисляются когомологии двух узких бесконечномерных положительно градуированных алгебр Ли $\mathfrak{m}_0$ и $\mathfrak{m}_2$, первой и второй алгебр Вернь. Ранее были вычислены подпространства вторых когомологий этих алгебр и числа Бетти их конечномерных аналогов[38]. Доказаны

---

[36] *Фиаловски А.* Классификация градуированных алгебр Ли с двумя образующими. // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем. мех. – 1983. – Т. 38. – С. 62–64.

[37] *Benoist Y.* Une nilvariété non affine. // J. Differential Geometry. –1995. – V. 41. – P. 21–52.

[38] *Armstrong G. F., Sigg S.* On the cohomology of a class of nilpotent Lie algebras. // Bull. Austral. Math. Soc. – 1996. – V. 54, №2. – P. 517–527; *Bordemann M.* Nondegenerate invariant bilinear forms on nonassociative algebras. // Acta Math. Univ. Comenianae. – 1997. – V. 66,

- **Теорема 2.1.1** о биградуированной структуре алгебры когомологий $H^*(\mathfrak{m}_0, \mathbb{K})$ со скалярными коэффициентами. Явно найдены базисные коциклы во всех размерностях и весах, а также формулы для их произведений. Выписана формула для ряда Гильберта чисел Бетти $b^q_k(\mathfrak{m}_0)$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{k} b^q_k(\mathfrak{m}_0)t^k x^q = t(1+x) + (1-t)\prod_{j=2}^{\infty}(1+xt^j).$$

- **Теорема 2.2.5** о биградуированной структуре пространства когомологий $H^*(\mathfrak{m}_2, \mathbb{K})$ со скалярными коэффициентами. Для этой алгебры также явно найдены базисные коциклы во всех размерностях и весах. Выписана формула для ряда Гильберта двухиндексных чисел Бетти $b^q_k(\mathfrak{m}_2)$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{k} b^q_k(\mathfrak{m}_2)t^k x^q = (1+x)(t+t^2-t^3+xt^5)+(1-t-t^2+t^3)\prod_{j=3}^{\infty}(1+xt^j).$$

Параграф 2.3 является справочным, в нем напоминается конструкция спектральной последовательности Фейгина-Фукса $E_r^{p,q}$, сходящаяся к когомологиям $H^*(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ с коэффициентами в присоединенном представлении некоторой положительно градуированной алгебры Ли $\mathfrak{g} = \oplus_{i=1}^{+\infty}\mathfrak{g}_i$ конечной ширины. Предложение 2.3.2 связывает первый член этой спектральной последовательности с когомологиями $H^*(\mathfrak{g})$ положительно градуированной алгебры Ли $\mathfrak{g} = \oplus_{i=1}^{+\infty}\mathfrak{g}_i$ с тривиальными коэффициентами

$$E_1^{p,q} = \mathfrak{g}_q \otimes H^{p+q}(\mathfrak{g}).$$

Параграфы 2.4 и 2.5 посвящены применению спектральной последовательности Фейгина-Фукса к вычислению когомологий $H^*(\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}_0)$ и $H^2(\mathcal{V}_n, \mathcal{V}_n)$. Символ $\mathcal{V}_n = W^+/(W^+)^n$ обозначает конечномерую факторалгебру Ли положительной части W^+ алгебры Витта по идеалу $(W^+)^n$ нижнего центрального ряда.

Третья глава является одной из центральных глав диссертации. В параграфе 3.1 определяются когомологии Морса-Новикова гладкого

№2. – P. 151–201.

многообразия M, как когомологии $H^*_{\lambda\rho}(M, \mathbb{C})$ комплекса дифференциальных форм $\Lambda^*(M) \otimes \mathbb{C}$ с деформированным дифференциалом $d + \lambda\omega$, где ω – гладкая замкнутая 1-форма на многообразии M, λ – комплексный скаляр. В параграфе 3.1 строится изоморфизм когомологий Морса-Новикова и когомологий $H^*_{\rho_{\lambda\omega}}(M, \mathbb{C})$ многообразия M с коэффициентами в локальной системе $\rho_{\lambda\omega}$ групп $\mathbb{C}$, $\rho_{\lambda\omega}(\gamma) = \exp \int_\gamma \lambda\omega$, где $\gamma \in \pi_1(M)$.

Параграф 3.2 посвящен когомологиям $H^*_{\lambda\omega}(\mathfrak{g})$ конечномерной разрешимой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с коэффициентами в одномерном представлении $\rho_{\lambda\omega} : \mathfrak{g} \to \mathbb{K}$. Определяется фильтрация соответствующего коцепного комплекса и строится спектральная последовательность E_r, которая вырождается в первом члене, если класс когомологий формы $-\lambda\omega$ не принадлежит некоторому непустому конечному множеству $\Omega_\mathfrak{g} \subset H^1(\mathfrak{g})$. Эти утверждения зафиксированы в тексте диссертации как **теорема 3.2.5** и **следствие 3.2.6**.

Параграф 3.3 посвящен применению теорем, доказанных в параграфе 3.2, к теории когомологий Морса-Новикова компактных солвмногообразий. Комплекс де Рама $\Lambda^*(G/\Gamma)$ солвмногообразия G/Γ может быть отождествлен с подкомплексом левоинвариантных относительно действия решетки Γ дифференциальных форм на группе G, а тот, в свою очередь, содержит подкомплекс $\Lambda^*(\mathfrak{g})$ левоинвариантных форм относительно уже полного действия всей группы G. Для вполне разрешимой группы Ли G соответствующее включение

$$\psi : \Lambda^*(\mathfrak{g}) \to \Lambda^*(G/\Gamma),$$

согласно теореме Хаттори, индуцирует изоморфизм в когомологиях. Основным результатом третьей главы и диссертации в целом является

Теорема 3.3.14 *Когомологии Морса-Новикова (когомологии с локальными коэффициентами) $H^*_{\lambda\omega}(G/\Gamma, \mathbb{C})$ компактного солвмногообразия G/Γ, где G – вполне разрешимая группа Ли, а $\Gamma \subset G$ – ее кокомпактная решетка, являются нетривиальными тогда и только тогда, когда $-\lambda[\omega] \in \tilde{\Omega}_\mathfrak{g}$, где $\tilde{\Omega}_\mathfrak{g}$ является конечным подмножеством в $H^1(G/\Gamma, \mathbb{C})$, корректно определенным в терминах алгебры Ли $\mathfrak{g}$.*

Четвертая глава также является одной из ключевых глав диссертации. Она посвящена классификации узких по Зельманову и Шалеву естественно градуированных алгебр Ли ширины 3/2. Конечномерные естественно градуированные алгебры Ли называются в субримановой геометрии и геометрической теории оптимального управления алгебрами Карно. В главе используется этот термин именно для выделения конечномерных алгебр Ли. Заметим также, что алгебры этого класса назывались однородными алгебрами Ли в работах Вершика и Гершковича[39]. Самой узкой из естественно градуированных алгебр Ли является алгебра Ли $\mathfrak{m}_0$ и ее конечномерные аналоги, филиформные алгебры Карно $\mathfrak{m}_0(n)$ и $\mathfrak{m}_1(2m-1)$. В параграфе 4.1 определяются важные серии алгебр Карно: $\mathfrak{m}_0^{R_n}(n), \mathfrak{m}_1^{R_{n-2}}(n), \mathfrak{m}_{0,2}^{R_{n-3}}(n), \mathfrak{m}_{0,3}^{R_{n-4}}(n)$.

Параграф 4.2 посвящен когомологическим вычислениям и центральным расширениям алгебр Карно. Вводится понятие расширения Карно, центрального расширения специального вида. Именно при помощи расширений Карно рекуррентно строятся все алгебры Карно. Ключевой леммой параграфа 4.2 и главы в целом является предложение 4.2.7, сводящее классификацию изоморфных расширений Карно $\tilde{\mathfrak{g}}(n{+}1)$ алгебры Карно $\mathfrak{g}(n)$ к описанию пространства орбит линейного действия группы градуированных автоморфизмов $\mathrm{Aut}_{gr}(\mathfrak{g})$ на грассманианах, связанных с подпространством вторых когомологий $H^2_{(n+1)}(\mathfrak{g}(n), \mathbb{K})$ веса $n{+}1$.

Группы градуированных автоморфизмов алгебр Карно изучаются в параграфе 4.3, а полученные результаты применяются к классификации расширений Карно нескольких важных серий алгебр Карно. В параграфе 4.4 показано, что две различные вещественные формы комплексной простой алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ порождают две неизоморфные вещественные алгебры полиномиальных петель $\mathfrak{n}_1^{\pm}$ (определение 4.4.2). В параграфе 4.4 мы определяем бесконечномерную алгебру Ли $\mathfrak{n}_2^3$ (определение 4.4.6), как некоторое одномерное центральное расширение $\mathfrak{n}_2$. Далее классифицируются расширения Карно конечномерных фактор-алгебр, полученных из $\mathfrak{n}_1^{\pm}, \mathfrak{n}_2$ и $\mathfrak{n}_2^3$. В конце четвертой главы доказываются две основные теоремы.

Теорема 4.5.1 (о классификации конечномерных естественно градуированных алгебр Ли (алгебр Карно) ширины 3/2). Классификационный список этой теоремы делится на четыре группы A, B, C, D.

A. Филиформные алгебры Ли и их центральные расширения (опре-

---

[39] *Вершик А.М., Гершкович В.Я.* Расслоение нильпотентных алгебр Ли над неголономным многообразием (нильпотентизация). // Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. 10, Зап. научн. сем. ЛОМИ. – 1989. – Т. 172. Л.: "Наука". – С. 21–40.

деления 4.1.2, 4.1.3, 4.1.5, 4.1.6):

$$\begin{array}{cc} \mathfrak{m}_0^{R_n}(n), n \geq 2, & \mathfrak{m}_1^{R_{n-2}}(n), n = 2m{-}1 \geq 5, \\ \mathfrak{m}_{0,2}^{R_{n-3}}(n), n = 2m \geq 8, & \mathfrak{m}_{0,3}^{R_{n-4}}(n), n = 2m{+}1 \geq 9. \end{array}$$

B. Конечномерные фактор-алгебры Ли двух типов, полученные факторизацией из бесконечномерной алгебры Ли $\mathfrak{n}_1^{\pm}$ (определение 4.4.2):

$$\mathfrak{n}_1^{\pm}(n), n \geq 4; \quad \mathfrak{n}_{1,1}^{\pm}(n), n = 2m{+}1 \geq 5;$$

C. Конечномерные фактор-алгебры Ли четырех типов, полученные факторизацией из бесконечномерной алгебры Ли $\mathfrak{n}_2$ (определение 4.4.10):

$$\mathfrak{n}_2(n), n \geq 7, \quad \mathfrak{n}_{2,s}(n), s = 1, 2, 3, \ n = 2m{+}1, 2m + 5, m \geq 3,$$

D. Конечномерные фактор-алгебры Ли четырех типов, полученные факторизацией из бесконечномерной алгебры Ли $\mathfrak{n}_2^3$ (определение 4.4.13):

$$\mathfrak{n}_2^3(n), n \geq 7; \quad \mathfrak{n}_{2,s}^3(n), s = 1, 2, 3, \ n = 2m + 1, 2m + 5, m \geq 3.$$

Переходя к пределу в теореме 4.5.1 мы получаем в качестве ее следствия вторую основную теорему данной главы и диссертации в целом

Теорема 4.6.1 *Пусть* $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{+\infty} \mathfrak{g}_i$ *– бесконечномерная вещественная естественно градуированная алгебра Ли, удовлетворяющая условию*

$$\dim \mathfrak{g}_i + \dim \mathfrak{g}_{i+1} \leq 3, i \in \mathbb{N}.$$

Тогда $\mathfrak{g}$ *изоморфна одной и только одной алгебре Ли из следующего списка:*

$$\mathfrak{n}_1^{\pm}, \mathfrak{n}_2, \mathfrak{n}_2^3, \mathfrak{m}_0, \{\mathfrak{m}_0^R, R \subset \{3, 5, 7, \dots\},$$

где R *обозначает подмножество (возможно бесконечное) множества нечетных натуральных чисел, строго больших единицы, а* $\mathfrak{m}_0^R$ *обозначает центральное расширение алгебры Вернь* $\mathfrak{m}_0$*, определенное набором попарно различных двумерных коциклов с весами* $r_i \in R$*, если* R *непусто.* Комплексная классификация таких алгебр отличается от вещественной лишь тем, что алгебры Ли $\mathfrak{n}_1^{\pm}$ изоморфны над $\mathbb{C}$ и мы заменяем их в списке одной комплексной алгеброй Ли $\mathfrak{n}_1$.

В приложении 1 диссертации, которое относится к этой главе, мы приводим таблицы с базисами и структурными константами всех конечномерных естественно градуированных алгебр Ли (алгебр Карно) ширины $\frac{3}{2}$. Приложение 2 посвящено т.н. квазифилиформным алгебрам Ли. В нем сравниваются результаты и обозначения диссертации с уже существующими классификациями естественно градуированных квазифилиформных алгебр Ли[40]

Задача классификации $\mathbb{N}$-градуированных алгебр Ли медленного роста представляется более сложной задачей, чем классификация простых $\mathbb{Z}$-градуированных алгебр Ли конечного роста. Например, список Каца[41] содержит счетное число различных алгебр Ли. Между тем, из результатов диссертации следует, что даже в случае естественно градуированных алгебр Ли, порожденных двумя образующими, имеется несчетное семейство попарно неизоморфных алгебр Ли медленного линейного роста.

В главе 5 исследуются характеристические алгебры Ли некоторых гиперболических уравнений в частных производных и их связь с узкими естественно градуированными алгебрами Ли.

Характеристической алгеброй уравнения $u_{xy} = f(u)$ называется алгебра Ли $\chi(f)$, порожденная двумя дифференциальными операторами X_0 и X_1:

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial u},\ X_1 = X(f) = f\frac{\partial}{\partial u_1} + D(f)\frac{\partial}{\partial u_2} + \dots + D^{n-1}(f)\frac{\partial}{\partial u_n} + \dots,$$

где дифференциальный оператор D определен формулой

$$D = u_1\frac{\partial}{\partial u} + u_2\frac{\partial}{\partial u_1} + u_3\frac{\partial}{\partial u_2} + \dots + u_{n+1}\frac{\partial}{\partial u_n} + \dots.$$

Данные оператораторы действуют в пространстве многочленов $C^{\omega}(u)[u_1, u_2, \dots]$ от счетного числа переменных $u_1, u_2, \dots$ с коэффициентами, аналитически зависящими от переменной u. Показано, в частности, что коэффициенты дифференциального оператора $X_1 = X(f)$ могут быть выражены при помощи многочленов Белла[42]. Кроме этого,

---

[40] *Gómez J.R., Jiménez-Merchán A.* Naturally graded quasi-filiform Lie algebras. // J. of Algebra. – 2002. – V. 256. – P. 211–228.

[41] *Кац В.Г.* Простые неприводимые градуированные алгебры Ли конечного роста. // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1968. – Т. 32, №6. – С. 1323–1367.

[42] *Andrews G.E.* The Theory of Partitions. Cambridge Mathematical Library (1st pbk ed.). Cambridge University Press, UK. 1998.

обсуждается понятие интегрируемости по Дарбу и интегралы уравнения Клейна-Гордона, в том числе и высшие симметрии. Алгебраическая лемма 5.1.8 показывает, что характеристические алгебра $\chi(f)$ уравнения Клейна-Гордона имеет тот же рост, что и ее коммутант $\chi(f)'$.

Известно[43], что есть только три уравнения Клейна-Гордона, допускающие нетривиальные высшие симметрии: а) уравнение Лиувилля $u_{xy} = e^u$; б) уравнение (гиперболического) синус-Гордона $u_{xy} = \sinh u$; в) равнение Цицейки $u_{xy} = e^u + e^{-2u}$.

Характеристическая алгебра Ли $\chi(e^u)$ уравнения Лиувилля является двумерной разрешимой алгеброй Ли. Она задается базисом X_0, X_1 и единственным соотношением $[X_0, X_1] = X_1$. Ее коммутант $\chi(e^u)'$ является одномерной абелевой алгеброй Ли. Мы исследуем два оставшихся случая и доказываем две ключевых теоремы главы 5.

Теорема 5.2.1. *Характеристическая алгебра Ли* $\chi(\sinh u)$ *уравнения синус-Гордона* $u_{xy} = \sinh u$ *изоморфна неотрицательной части алгебры петель* $\mathcal{L}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))$

$$\chi(\sinh u) \cong \mathcal{L}(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))^{\geq 0},$$

Ее коммутант $\chi(\sinh u)'$ *изоморфен максимальной пронильпотентной подалгебре* $\mathfrak{n}_1$ *алгебры Каца-Муди* $A_1^{(1)}$.

Теорема 5.3.1. *Характеристическая алгебра Ли* $\chi(e^u{+}e^{-2u})$ *уравнения Цицейки* $u_{xy} = e^u{+}e^{-2u}$ *изоморфна неотрицательной части скрученной алгебры полиномиальных петель* $\mathcal{L}(\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C}),\mu)^{\geq 0}$

$$\chi(e^u{+}e^{-2u}) \cong \mathcal{L}(\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C}),\mu)^{\geq 0} = \bigoplus_{j=0}^{+\infty} \mathfrak{g}_{j (\mathrm{mod}\ 2)} \otimes t^j, \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C}) = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$$

где μ *является диаграммным автоморфизмом алгебры Ли* $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})$ *порядка два* $\mu^2 = \mathrm{Id}$. *Подпространства* $\mathfrak{g}_0$ *и* $\mathfrak{g}_1$ *являются собственными подпространствами автоморфизма* μ, *соответствующими собственным значениям* 1 *и* -1, *причем*

$$[\mathfrak{g}_s, \mathfrak{g}_q] \subset \mathfrak{g}_{s+q\ (\mathrm{mod}\ 2)}.$$

Коммутант $\chi(e^u{+}e^{-2u})'$ *изоморфен максимальной пронильпотентной подалгебре Ли* $\mathfrak{n}_2$ *алгебры Каца-Муди* $A_2^{(2)}$.

---

[43] *Жибер А.В., Шабат А.Б.* Уравнения Клейна–Гордона с нетривиальной группой. // ДАН СССР. – 1979. – Т. 247, №5. – С. 1103–1107.

Ранее обсуждалось[44], что существует редукция двумерных гиперболических систем с матрицами $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$ к уравнениям синус-Гордона и Цицейки соответственно. Однако, явным образом характеристические алгебры Ли $\chi(\sinh u)$ и $\chi(e^u + e^{-2u})$ одномерных уравнений там не вычислялись. Это обстоятельство, а также некоторые пробелы в доказательствах, привело к появлению работ Жибера, Муртазиной, Хабибуллина, Муртазиной, Сакиевой[45], где проблема явного описания характеристических алгебр Ли $\chi(\sinh u)$ и $\chi(e^u{+}e^{-2u})$ была поставлена и решена. Задача решалась путем построения специальных бесконечных базисов, при этом, как это показывается в данной диссертации, чрезвычайно важная связь между характеристическими алгебрами Ли $\chi(\sinh u)$, $\chi(e^u{+}e^{-2u})$ уравнений синус-Гордона и Цицейки и аффинными алгебрами Каца-Муди $A_1^{(1)}$ и $A_2^{(2)}$ была упущена.

Глава 6 организована следующим образом: в параграфе 6.1 приводятся основные определения и факты, относящиеся к фильтрованным деформациям положительно градуированных алгебр Ли, в частности расматриваются степени (произведения) Масси в когомологиях положительно градуированных алгебр Ли. В параграфе 6.2 изучаются фильтрованные деформации бесконечномерной естественно градуированной алгебры Ли $\mathfrak{m}_0$, алгебры Ли максимального класса. Важную роль в таком изучении играют когомологии $H^2(\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}_0)$ с коэффициентами в присоединенном представлении, вычислению которых был посвящен параграф 2.4 второй главы диссертации. Произвольная фильтрованная деформация Ψ алгебры Ли $\mathfrak{m}_0$ может быть записана в виде формального ряда $\Psi = \sum_{s=0}^{+\infty} \sum_{j=2}^{+\infty} x_{j,s}\Psi_{j,s}$, где $\Psi_{j,s}$ обозначают двумерные коциклы, найденные Вернь[46]. Теорема 6.2.9 утверждает, что ряд Ψ определяет деформацию алгебры Ли $\mathfrak{m}_0$ тогда и только тогда, когда ко-

---

[44] *Лезнов А.Н., Савельев М.В.* О двумерной нелинейной системе дифференциальных уравнений $x_{\alpha,z\bar{z}} = \exp kx_\alpha$. // Функц. анализ и его прил. – 1980. – Т. 14, №3. – С. 87–88. *Лезнов А.Н., Савельев М.В., Шабат А.Б.* Группа внутренних симметрий и условия интегрируемости двумерных динамических систем. // ТМФ. – 1982. – Т. 51, №1. – С. 10–21.

[45] *Жибер А.В., Муртазина Р.Д., Хабибуллин И.Т., Шабат А.Б.* Характеристические кольца Ли и интегрируемые модели математической физики. // Уфимск. матем. журн. – 2012. – Т. 4, №3. – С. 17–85; *Сакиева А.У.* Характеристическое кольцо Ли уравнения Жибера-Шабата-Цицейки. // Уфимск. матем. журн. – 2012. – Т. 4, №3. – С. 155–160.

[46] *Vergne M.* Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes. // Bull. Soc. Math. France. –1970. – V. 98. – P. 81–116.

эффициенты $x_{j,s}$ в разложении Ψ удовлетворяют бесконечной системе кадратичных уравнений $F_{j,q,r}(x) = 0, 2 \leq j < q, r \geq 0$. Приведены явные формулы (6.2.11) этих уравнений. В их получении ключевую роль играет вычисление скобки Нийенхейса-Ричардсона $[\Psi_{m,s}, \Psi_{l,t}]$ двух произвольных базисных двумерных коциклов, ее разложения по бесконечному базису $\Psi_{j,q,r}$ пространства $H^3(\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}_0)$, найденному в параграфе 2.4 диссертации. В параграфе 6.3 полученные результаты применяются для описания аффинного многообразия филиформных алгебр Ли размерности n. Число неизвестных этой системы квадратичных уравнений $\dim H^2_{\geq 0}(\mathfrak{m}_0(n), \mathfrak{m}_0(n))$ было найдено Вернь. Формула в терминах чисел разбиений для для числа квадратичных уравнений, совпадающего с $\dim H^3_{\geq 0}(\mathfrak{m}_0(n), \mathfrak{m}_0(n))$, приведена в предложении 6.3.4. Параграф 6.4 посвящен пространству фильтрованных деформаций другой конечномерной положительно градуированной алгебры $\mathcal{V}_n = W^+/(W^+)^n$, т.е. положительной части W^+ алгебры Витта, профакторизованной по идеалу $(W^+)^n$ ее нижнего центрального ряда. Теорема 6.4.1 утверждает, что при $n \geq 16$ существует биекция между пространством модулей фильтрованных деформаций алгебры Ли $\mathcal{V}_n = W^+/(W^+)^n$ и взвешенным проективным пространством размерности 4.

Глава 7 является одной из самых технически сложных глав диссертации. В ней установлены и самостоятельно важные и интересные результаты, а также обосновываются технические методы подсчета когомологий $H^*(W^+, V)$ положительной части алгебры Витта W^+ с коэффициентами в произвольном модуле V. Эти технические методы применяются в доказательстве гипотезы Бухштабера из главы 8. К седьмой главе относится также и приложение В. Параграф 7.1 носит справочный характер, в нем собраны необходимые факты о модулях Верма над алгеброй Вирасоро и об их особых векторах. Важная, технически сложная, теорема Фейгина и Фукса о единственности особого вектора модуля Верма формулируется в этой главе, но сам текст доказательства вынесен как теорема В.1 в приложении В. Параграф 7.2 содержит необходимую справочную информацию. В параграфе 7.3 доказывается теорема о явной формуле для особых векторов модулей Верма над алгеброй Вирасоро серии $S_{2,p}(t)$. Этот результат, выносимый на защиту, важен, т.к. в задаче, поставленной Фейгиным и Фуксом о нахождении явной формулы для особых векторов[47], давно не было продвижений. Однако эта теорема вместе с теоремой Бенуа-Сент-Обана[48] об особых векторах серии $S_{1,p}(t)$ существенно упрощает доказательство[49] свойств свободной резольвенты Роча-Кариди-Валлаха-Фейгина-Фукса. Доказательство формулы Бенуа-Сент-Обана приведено в приложении В для полноты изложения. Параграф 7.4 посвящен построению системы подмодулей в модуле Верма $M(0,0)$. Собственно эта система и составит нужную нам резольвенту Роча-Кариди-Валлаха-Фейгина-Фукса одномерного тривиального модуля $\mathbb{C}$ над алгеброй Вирасоро. Ключевую роль в конструкции играют явные формулы вложений подмодулей в терминах особых векторов серий $S_{1,p}(t), S_{2,q}(t)$. В параграфе 7.5 мы применяем построенную резольвенту к вычислению когомологий $H^*(W^+)$. Эти когомологии ранее были вычислены Гончаровой[50].

В главе 8 мы доказываем гипотезу Бухштабера в ее первоначальной формулировке. Основным результатом главы и одним из основных результатов диссертации, является **теорема 8.3.1**, утверждающая, что алгебра когомологий $H^*(W^+, \mathbb{K})$ *порождается при помощи итерированных нетривиальных высших произведений Масси двумя базисными коциклами* из $H^1(W^+, \mathbb{K})$. Параграф 8.1 посвящен подходу Бабенко-Тайманова к определению высших произведений Масси в когомологиях. Бабенко и Тайманов предложили записывать определяющую систему произведения Масси в виде треугольной матрицы. Уравнение на элементы определяющей системы имеет форму Маурера-Картана. Данный подход существенно упрощает вычисление произведений Масси. В параграфе 8.2 обсуждается история гипотезы Бухштабера. Первым шагом в направлении ее доказательства стала теорема, доказанная Ретахом, Фейгиным и Фуксом[51]. Позднее Бухштабер обнаружил, что произведе-

---

[47] *Feigin B.L., Fuchs D.B.* Verma modules over Virasoro algebra. // Lecture Notes in Math. – 1984. – V. 1060. – P. 230–245.

[48] *Benoit L., Saint-Aubin Y.* Degenerate conformal field theories and explicit expressions for some null vectors. // Phys. Letters. –1988. – V. 215(B) – P. 517–522.

[49] *Rocha-Caridi A., Wallach N.R.* Characters of irreducible representations of the algebra of vector fields on the circle. // Invent. Math. – 1983. – V. 72. – P. 57–75., *Rocha-Caridi A., Wallach N.R.* Highest weight modules over graded Lie algebras: resolutions, filtrations and character formulas. // Trans. of AMS. – 1983. – V. 277, №1. – P. 133–162.

[50] *Гончарова Л.В.* Когомологии алгебр Ли формальных векторных полей на прямой. // Функц. анализ и его прил. – 1973. – Т. 7. №2. – С. 6–14; – 1973. – Т. 7, №3. – С. 33–44.

[51] *Feigin B.L., Fuchs D.B., Retakh V.S.* Massey operations in the cohomology of the infinite dimensional Lie algebra L_1. // Lecture Notes in Math. – 1988. – V. 1346. – P. 13–31.

ния Масси, построенные Ретахом, Фейгиным и Фуксом, являются *тривиальными.* Нетривиальность (тривиальность) высшего произведения Масси означает нетривиальность (тривиальность) некоторого дифференциала некоторой спектральной последовательности в когомологиях. Ретах, Фукс и Фейгин предложили оригинальный обходной маневр для исследования нетривиальности (тривиальности) дифференциалов спектральной последовательности в когомологиях положительной части алгебры Витта W^+. Они свели эту техническую задачу к подсчету когомологий с коэффициентами в некотором градуированном модуле над W^+ с помощью резольвенты Роча-Кариди-Валлаха-Фейгина-Фукса. Деталям построения этой резольвенты посвящена глава 7. Параграф 8.3 собственно и посвящен доказательству гипотезы Бухштабера, используется подход Бабенко-Тайманова к определению произведений Масси и техника Ретаха, Фейгина и Фукса вычисления когомологий алгебры Ли W^+ с коэффициентами в градуированном ленточном W^+-модуле. Отметим, что ключевую роль для построения определяющей системы играет специально построенный градуированный W^+-модуль (ранее неизвестный специалистам) и явные формулы для дифференциалов резольвенты Роча-Кариди-Валлаха-Фейгина-Фукса.

В приложении A собраны разнообразные таблицы, необходимые для работы с диссертацией: в параграфе A.1 приведены таблицы с базисами и структурными константами всех алгебр Карно ширины 3/2, они разбиты на группы; в параграфе A.2 сравниваются обозначения Гомеса и Хименеса-Мерчана[52] квазифилиформных алгебр Карно с обозначениями соответствующих алгебр Ли из диссертации; A.3 содержит две таблицы соответствия различных градуировок алгебр Ли $\mathfrak{n}_1$ и $\mathfrak{n}_2$, которые используются в диссертации.

В приложении B приведено: доказательство формулы Бенуа-Сент-Обана для особых векторов серии $S_{q,1}(t)v$, ее полное доказательство непросто извлечь из известных ссылок. Это формула играет существенную роль в доказательстве гипотезы Бухштабера; доказательство теоремы единственности особого вектора по монографии Иохары и Коги[53]. Последняя теорема крайне важна для построения свободной резоль-

---

[52] *Gómez J.R., Jiménez-Merchán A.* Naturally graded quasi-filiform Lie algebras. // J. of Algebra. – 2002. – V. 256. – P. 211–228.

[53] *Iohara K., Y. Koga Y.* Representation Theory of the Virasoro Algebra. / Springer Monographs in Mathematics. – 2011.

венты Роча-Кариди-Валлаха-Фейгина-Фукса; также приводится пример формулы для особого вектора $S_{2,3}(t)v$.

В заключении еще раз перечислены основные результаты диссертации и кратко обсуждаются возможные направления продолжения исследований, нерешенные вопросы и задачи.

Работы автора по теме диссертации

1. *Миллионщиков Д.В.* Когомологии нильмногообразий и теорема Гончаровой. // УМН. – 2001. – Т. 56, №4. – С. 153–154.
2. *Millionschikov D.V.* Cohomology of nilmanifolds and Gontcharova's theorem. // in "Global Differential geometry: The Mathematical Legacy of Alfred Gray". AMS CONM. – 2001. – V. 288. – P. 381–385. MR 1870993 53-06, ZbMATH 1019. 17006.
3. *Миллионщиков Д.В.* Филиформные $\mathbb{N}$-градуированные алгебры Ли. // УМН. – 2002. – Т. 57, №(344). – С. 197–198.
4. *Миллионщиков Д.В.* Когомологии с локальными коэффициентами солвмногообразий и задачи теории Морса–Новикова. // УМН. – 2002. – Т. 57, №(346). – С. 183–184.
5. *Миллионщиков Д.В.* Деформации градуированных алгебр Ли и симплектические структуры. // УМН. – 2003. – Т. 58, №6(354). – С. 157–158.
6. *Миллионщиков Д.В., Фиаловски А.* Когомологии некоторых $\mathbb{N}$-градуированных алгебр Ли. // УМН. – 2004. – Т. 59, №6 (360). – С. 205–206.
7. *Fialowski A., Millionschikov D.V.* Cohomology of graded Lie algebras of maximal class. // Journal of Algebra. – 2006. – V. 296, №1. – P. 157–176.
8. *Миллионщиков Д.В.* Когомологии разрешимых алгебр Ли и солвмногообразия. // Матем. заметки. – 2005. – Т. 77, №1. – С. 67–79.
9. *Миллионщиков Д.В.* Деформации филиформных алгебр Ли и симплектические структуры. // Тр. МИАН. – 2006. – Т. 252. – С. 194–216.

10. *Миллионщиков Д.В.* Когомологии градуированных алгебр Ли максимального класса с коэффициентами в присоединенном представлении. // Тр. МИАН. – 2008. – Т. 263. – С. 106–119.

11. *Миллионщиков Д.В.* Алгебра формальных векторных полей на прямой и гипотеза Бухштабера. // Функц. анализ и его прил. – 2009. – Т. 43, №4. – С. 26–44.

12. *Миллионщиков Д.В.* Многообразие алгебр Ли максимального класса. // Тр. МИАН. – 2009. – Т. 266. – С. 184–201.

13. *Миллионщиков Д.В.* Особые векторы модулей Верма над алгеброй Вирасоро. // Функц. анализ и его прил. – 2016. –Т. 50, №3. – С. 66–72.

14. *Миллионщиков Д.В.* Характеристические алгебры Ли уравнений синус-Гордона и Цицейки. // УМН. – 2017. – Т. 72, №6 (438). – С. 203–204.

15. *Миллионщиков Д.В.* Узкие положительно градуированные алгебры Ли. // Доклады Академии наук. – 2018. – Т. 483, №5. – С. 492–494.

16. *Millionshchikov Dmitry* Lie Algebras of Slow Growth and Klein–Gordon PDE. // Algebras and Representation Theory. – 2018. – 21, №5. – P. 1037–1069.

17. *Миллионщиков Д.В.* Полиномиальные алгебры Ли и рост их конечно порожденных подалгебр Ли. // Тр. МИАН. – 2018, –Т. 302. – С. 316–333.

18. *Миллионщиков Д.В.* Естественно градуированные алгебры Ли медленного роста. // Матем. сб. – 2019. – Т. 210, №6. – С. 111–160.