

В диссертационный совет Д 002.022.02  
при ФГБУН Математический институт  
им. В.А.Стеклова РАН

### ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

на диссертационную работу Зеленова Евгения Игоревича  
«Некоторые вопросы  $p$ -адической математической физики», представленную  
на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по  
специальности 01.01.03 – математическая физика

**Актуальность исследования.**  $p$ -адические числа были открыты в теории чисел в начале прошлого века, и со временем стали развиваться и другие разделы  $p$ -адической математики. В конце 80-х годов появились первые работы, в которых  $p$ -адические поля стали использоваться в моделях математической физики. Надо отметить, что еще раньше были изобретены иерархические модели статистической физики, которые при определенных значениях параметров являются дискретными версиями  $p$ -адических моделей теории поля. Математические проблемы непрерывных и дискретных моделей евклидовой теории поля являются очень сложными и часто нет эффективных методов их исследования, кроме методов формальной теории возмущений. Совершенная иерархическая структура  $p$ -адического континуума приводит к упрощению математической структуры моделей и позволяет развивать строгие методы их анализа. В некоторых случаях удается получать точные решения, которые генерируют гипотезы для евклидовых моделей. Этим объясняется интерес к новым  $p$ -адическим моделям математической физики и смежных областей математики. Также интригующим является вопрос о связи евклидовых и  $p$ -адических моделей, или даже их объединении на языке аделей. В диссертации Зеленова Е.И. анализируются актуальные проблемы математической физики.

**Структура и содержание работы.** Содержание диссертации соответствует теме, а структура работы отражает основные положения, выносимые на защиту. Диссертация изложена на 145 страницах, и включает в себя введение, девять глав, список публикаций автора по теме диссертации из 16 наименований, список литературы из 90 наименований.

**Во введении** обоснована актуальность темы диссертации, сформулированы цель и основные положения работы, выносимые на защиту, ее научная новизна, описываются методы исследования, приводится краткое содержание по главам.

**В главе 1** строится  $p$ -адическая реализация стандартной статистической модели квантовой механики. В рамках этой модели дается определение  $p$ -адического линейного бозонного канала и изучаются его свойства. Получен критерий существования линейного гауссовского бозонного канала и описана его явная конструкция. Доказано, что  $p$ -адические гауссовские бозонные каналы обладают свойством аддитивности.

**В главе 2** исследуется унитарная динамика одномерной  $p$ -адической квантовой системы, которая описывается специальным представлением симплектической группы двумерного симплектического пространства над полем  $p$ -адических чисел. Дано определение  $p$ -адического индекса Маслова тройки самодвойственных решеток в двумерном симплектическом пространстве над полем  $p$ -адических чисел. Получена формула для коцикла представления Вейля симплектической группы через  $p$ -адический индекс Маслова.

**В главе 3** рассматривается конструкция Фредгольмова модуля на пространстве квадратично интегрируемых функций на проективной  $p$ -адической прямой. Изучены свойства  $p$ -адического аналога квантового дифференциала Конна.

**Глава 4** посвящена моделям  $p$ -адической квантовой механики, в которых волновые функции являются комплекснозначными функциями  $p$ -адического аргумента. Для операторов координаты и импульса предлагается процедура построения самосопряженного оператора по соответствующей однопараметрической унитарной группе. Показано, что спектр построенного таким образом оператора координаты является канторовым множеством.

**Глава 5** посвящена связи вещественной и  $p$ -адических моделей квантовой механики. Рассматривается двумерное симплектическое пространство над полем рациональных чисел — фазовое пространство классической системы. Для каждого из пополнений этого пространства (вещественного и  $p$ -адических) строятся представления коммутационных соотношений в форме Вейля. Доказано, что для любого конечного набора точек фазового пространства (с рациональными координатами) и для любого  $p$ -адического представления коммутационных соотношений существует такое представление коммутационных соотношений для вещественного пространства, что операторы этого вещественного представления и исходного  $p$ -адического представлений совпадают в выбранных точках.

**В главе 6** предлагается аделная модель декогеренции. Для этого представление коммутационных соотношений над модулем ранга 2 над кольцом аделей реализуется как тензорное произведение представлений Картье коммутационных соотношений одномерной квантовой механики для каждой компоненты адели (вещественной и  $p$ -адических). Строится представление коммутационных соотношений для двумерного векторного пространства над полем рациональных чисел. Доказано, что операторы построенного таким образом представления коммутируют, т.е. при

ограничении на рациональные числа система становится классической. Это интерпретируется как явление декогеренции.

**В главе 7** вводится класс иерархических динамических систем над полем  $p$ -адических чисел. Доказан усиленный вариант теоремы Пуанкаре о числе возвращений для таких систем. Показано, что иерархические динамические системы не обладают свойством перемешиваемости. Дано также описание иерархических динамических систем над проективной прямой. Приведен пример неиерархической  $p$ -адической системы, которая обладает перемешиванием –  $p$ -адическое преобразование пекаря.

**Глава 8** посвящена аналогу центрально предельной теоремы для случайных величин, принимающих значение в поле  $p$ -адических чисел. Показано, что пределом суммы ограниченных независимых случайных величин (при определенных естественных ограничениях на носитель распределения) является равномерное распределение (мера Хаара) на компактной подгруппе поля  $p$ -адических чисел. Этот результат (как отмечено в диссертации) является известным для более общего случая произвольной абелевой компактной группы. Проведена оценка скорости сходимости к равномерному распределению для случая случайных величин с локально постоянной плотностью.

**В главе 9** исследуются свойства  $p$ -адического аналога Винеровского процесса. Построено представление для траектории процесса в виде разложения в ряд по базису Ван дер Пута. Показано, что траектории процесса являются 1-Липшицевыми функциями, которые не имеют производной ни в одной точке. Дано определение  $p$ -адической меры Винера на пространстве непрерывных функций и исследованы ее свойства.

#### **Новизна проведенных исследований и полученных результатов.**

Все результаты, вынесенные на защиту, за исключением некоторых результатов главы 8, являются новыми.

**Обоснованность и достоверность результатов.** Все выводы и рекомендации, приведенные в диссертационной работе, строго обоснованы. Их достоверность объясняется корректностью математических постановок исследуемых проблем, а также строгими и корректными доказательствами всех утверждений.

**Автореферат** полностью соответствует диссертации и достоверно отражает ее содержание.

**Апробация результатов диссертации.** Основные результаты диссертационной работы докладывались на многих семинарах Математического института им. В.А. Стеклова РАН и различных Международных научных конференциях.

Результаты и положения диссертации отражены в 16 научных работах, в том числе в 1 монографии, опубликованных в изданиях из Перечня ВАК Минобрнауки России, а также входящих в систему цитирования Scopus и Web of Science.

#### **Недостатки и замечания по диссертационной работе.**

Основное замечание касается результатов главы 8. В ней обсуждается  $p$ -адический аналог центральной предельной теоремы. Частично результаты главы в более общей формулировке для абелевых компактных групп в той или иной форме ранее были получены различными авторами (это отмечено в диссертации). Автор диссертации использует свое доказательство в  $p$ -адическом случае. При этом он допускает неточность в лемме 2 и в одном утверждении, следующим из теоремы 8.3. В дальнейшем это утверждение не используется и не влияет на другие результаты главы.

Кроме того, есть опечатки, не влияющие на содержательную часть работы. Некоторые разделы диссертации изложены лаконично, что затрудняет их чтение.

Указанные замечания не снижают общей положительной оценки диссертационной работы.

**Соответствие диссертации паспорту научной специальности.** В целом диссертация Е.И. Зеленова «Некоторые вопросы  $p$ -адической математической физики» соответствует направлению Паспорта научной специальности 01.01.03 – «Математическая физика».

**Заключение по диссертации.** Представленная диссертация является завершенной научно-квалификационной работой, в которой введены новые модели математической физики и разработаны методы их исследований.

Все защищаемые автором положения диссертации имеют строгое обоснование и являются новыми. Е.И.Зеленов имеет достаточное количество публикаций по основным результатам диссертационной работы. Основные положения могут быть использованы в научно-исследовательской и образовательной деятельности по направлению «Математическая физика».

Считаю, что диссертационная работа Зеленова Евгения Игоревича «Некоторые вопросы  $p$ -адической математической физики» полностью соответствует требованиям ВАК Российской Федерации, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора наук, а ее автор, Зеленов Евгений Игоревич, заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.03 – математическая физика.

Официальный оппонент,  
заведующий кафедрой анализа данных  
и исследования операций  
ФГАОУВО «Казанский (Приволжский)

Федеральный университет»,  
доктор физико-математических наук,  
доцент  
31.10.2018

 М.Д. Миссаров

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Казанский (Приволжский) Федеральный университет  
Почтовый адрес: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская 18  
Телефон: +7 (843) 2926977.  
Эл. почта: moukadas.missarov@kpfu.ru

