Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

На правах рукописи
УДК 517.5

Зеленов Евгений Игоревич

Некоторые вопросы p-адической математической физики

01.01.03 — математическая физика

Диссертация

на соискание ученой степени
доктора физико–математических наук

Москва — 2018

Содержание

Введение

p-Адическая математическая физика – раздел современной математической физики, основанный на использовании p-адических чисел, p-адического анализа для построения моделей физических явлений.

Одним из основных мотивов для развития этого направления послужила гипотеза о неархимедовой структуре пространства-времени на планковских масштабах. Первые работы, положившие начало p-адической математической физике, появились в 1987 году и были посвящены неархимедовому подходу к динамике струны на планковских масштабах ([88], [69]).

Другим существенным стимулирующим фактором явилось использование p-адических методов для построения моделей сложных иерархических систем. В частности, было показано, что модели p-адической теории поля есть естественный непрерывный аналог иерархических моделей статистической физики. ([30]. Такого рода модели нашли применение при описании динамики сложных белковых молекул, породив целое направление исследований по применению методов p-адической математической физики в биологии и теории сложных систем ([1], [2], [3],[23]).

Еще одним важным аргументом в пользу использования p-адических чисел для построения физических моделей является гипотеза о том, что результатом физического эксперимента является рациональное число. Вещественные и p-адические числа – это пополнение поля рациональных чисел по вещественной и p-адическим нормам соответственно. При этом, этими нормами исчерпываются все нетривиальные нормы на поле рациональных чисел с точностью до эквивалентности (теорема Островского). С этих позиций весьма естественно рассматривать модели над всеми пополнениями поля рациональных чисел в рамках как локальных теорий, так и адельного подхода ([75], [16]).

Для построения моделей p-адической математической физики был развит соответствующий математический аппарат, представляющий и самостоятельный интерес. В частности, теория обобщенных функций над полем p-адических чисел ([9]), теория p-адических псевдодифференциальных операторов ([10], [11], [28]), теория p-адических вейвлетов ([24], [25]) и многое другое.

Методы p-адического анализа и p-адических динамических систем оказались продуктивными в криптографии ([4]).

Обширная библиография по p-адической математической физике и современное состояние содержатся в книге [12] и обзоре [64].

Всюду в диссертации ограничиваемся случаем $p \neq 2$.

Целью настоящей работы является получение следующих результатов:

- Построение p-адического бозонного гауссовского канала и анализ его свойств.
- Определение p-адического индекса Маслова и изучение его свойств.
- Построение p-адического аналога квантования Конна и исследование свойств соответствующего квантового дифференциала.
- Анализ спектральных свойств оператора координаты и импульса в p-адической квантовой механике.
- Исследование связи p-адических и вещественных квантовых теорий.
- Построение модели декогеренции, основанной на адельном подходе.
- Изучение свойств p-адических динамических систем.
- Исследование скорости сходимости сумм p-адических случайных величин.
- Построение модели p-адического винеровского процесса.

Основные результаты перечислены ниже.

- В каждом из локальных расширений (вещественном или p-адическом) исходного фазового пространства (двумерного пространства на полем рациональных чисел) построена нетривиальная квантовая теория (модель Картье представления коммутационных соотношений). Доказано, что если в построенных таким образом квантовых моделях опять вернуться к рациональным числам, при этом учесть вклады всех квантовых теорий (вещественной и всех p-адических), то вклады различных теорий компенсируются, и система приобретает классические свойства.

- Дано определение p-адического индекса Маслова тройки самодвойственных решеток в двумерном симплектическом пространстве над полем p-адических чисел. С помощью разложения Ивасавы симплектического преобразование определены координаты на множестве решеток и проведены явные вычисления индекса в этих координатах. Доказано, что для двух троек самодвойственных решеток существует симплектическое преобразование, переводящее одну тройку в другую в том, и только в том случае, когда индексы Маслова этих решеток совпадают. Получена формула для коцикла представления Вейля симплектической группы через p-адический индекс Маслова.

- Предложена конструкция фредгольмова модуля, естественным образом связанного с деревом Брюа-Титса и действием группы $PSL_2(\mathbb{Q}_p)$ на этом дереве. В рамках квантового исчисления А .Конна построен квантовый дифференциал и изучены его свойства. В частности, доказано, что квантовый дифференциал от локально-постоянной функции является оператором конечного ранга (верно и обратное) и квантовый дифференциал от непрерывной функции есть компактный оператор.

- Предложено определение иерархической динамической системы как аналитического эндоморфизма p-адического аналитического многообразия в смысле Серра. Доказано, что такие системы не обладают свойством перемешиваемости. Изучены иерархические динамические системы на p-адической проективной прямой и вычислена энтропия таких систем. Построено p-адическое преобразование пекаря (пример не иерархической динамической системы) и доказано свойство перемешиваемости для этой системы.

- Предложена конструкция одномодового p-адического бозонного гауссовского канала. Получены необходимые и достаточные условия существования канала. Исследована структура таких каналов, доказана аддитивность.

- Доказано, что спектр оператора координаты и импульса в p-адической квантовой механике есть канторово множество на вещественной прямой.

- Доказано, что алгебры коммутационных соотношений p-адической и вещественной квантовых механик пересекаются на конечном множестве образующих.

- Исследована скорость сходимости суммы независимых одинаково распределенных случайных величин со значениями в группе $\mathbb{Z}_p$ целых p-адических чисел. Доказан экспоненциальный характер сходимости для величин с локально постоянной плотностью. Показатель экспоненты есть третья степень от параметра постоянности плотности.

- Дано определение p-адического винеровского процесса и построена его явная реализация с использованием базиса Ван дер Пута в пространстве непрерывных p-адичнозначных функций. Доказано, что траектории этого процесса есть липшицевы функции. Построена мера Винера на пространстве траекторий, описан носитель меры и получен аналог пространства Кэмерона-Мартина.

В диссертации используются методы p-адического анализа, теории представлений, статистической квантовой теории, квантовой теории информации, спектральной теории операторов, теории представлений коммутационных соотношений, теории динамических систем, теории вероятностей и случайных процессов.

Результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно.

Результаты диссертации расширяют круг моделей в рамках стандартной статистической квантовой теории. В частности, в рамках стандартной квантовой теории информации предложен новый тип бесконечномерных каналов – p-адические бозонные каналы. В рамках предлагаемого подхода рассматривается новый класс моделей – p-адические квантовые и классические модели. Данные модели находят применения в описании сложных систем типа турбулентности, спиновых стекол или динамики белковых молекул.

Краткое содержание диссертации.

В Главе 1 с использованием представлений канонических коммутационных соотношений в форме Вейля для p-адической квантовой механики предлагается следующая конструкция p-адического одномодового бозонного канала.

Пусть (W, H) – представление канонических коммутационных соотношений над двумерным симплектическим пространством (F, Δ) над полем $\mathbb{Q}_p$ p-адических чисел (F – двумерное векторное пространство над $\mathbb{Q}_p$, Δ — невырожденная симплектическая форма на F), то есть W – отображение из пространства F в множество унитарных операторов на пространстве H, удовлетворяющее соотношению

$$W(z)W(z') = \chi\left(\frac{1}{2}\Delta(z, z')\right) W(z + z')$$

для всех $z, z' \in F$. Здесь $\chi(x) = \exp(2\pi i \{x\}_p)$, где $\{x\}_p$ - p-адическая дробная часть числа $x \in \mathbb{Q}_p$. Дополнительно будем считать отображение W непрерывным в сильной операторной топологии.

По аналогии с вещественным случаем, линейным бозонным каналом (в представлении Шредингера) будем называть линейное вполне положительное сохраняющее след отображение на пространстве состояний Φ такое, что характеристическая функция π_ρ любого состояния ρ преобразуется по формуле

$$\pi_{\Phi[\rho]}(z) = \pi_\rho(Kz)k(z),$$

для некоторого линейного преобразования K пространства F и некоторой комплекснозначной функции k на F.

Основной результат Главы 1 состоит в следующем.

Теорема 0.1. *Пусть K – невырожденное линейное преобразование пространства F, L – произвольная решетка в пространстве F, $k(z) = h_L(z)$. В этом случае выражение $\pi_{\Phi[\rho]}(z) = \pi_\rho(Kz)k(z))$ определяет канал тогда, и только тогда, когда выполнено неравенство*

$$|1 - \det K|_p |L| \leq 1.$$

Другим существенным результатом Главы 1 является доказательство аддитивности построенного канала. Это непосредственно вытекает из полученного явного вида канала (канал является либо классически-квантовым, либо унитарно эквивалентен идеальному измерению фон Неймана).

Глава 2 посвящена унитарной динамике одномерной p-адической квантовой системы. Эта динамика описывается специальным представлением симплектической группы двумерного симплектического пространства над полем

p-адических чисел, так называемым метаплектическим представлением (см., например, [13], [73]) или представлением Вейля.

Вышеуказанное представление тесно связано с действием симплектической группы на дереве Брюа-Титса. Получены новые явные формулы для коцикла метаплектического представления симплектической группы и описаны орбиты действия этой группы на множестве троек вершин дерева Брюа-Титса через p-адический индекс Маслова.

Конструкция состоит в следующем. Для каждой самодвойственной решетки $L \subset F$ строится неприводимое представление канонических коммутационных соотношений (ККС) в форме Вейля (W_L, H_L). Пусть L_1 и L_2 две самодвойственные решетки. Соответствующие представления ККС неприводимы и, как следствие, унитарно эквивалентны. Следовательно, существует унитарный оператор $F_{12}\colon H_{L_1} \to H_{L_2}$, удовлетворяющий соотношению при всех $z \in F$:

$$F_{21} W_{L_1}(z) = W_{L_2}(z) F_{21},$$

который будем называть сплетающим оператором. Обозначим через $\rho_{21} = [L_2/\left(L_1 \cap L_2\right)]$ число элементов фактор-группы $[L_2/\left(L_1 \cap L_2\right)]$. Не сложно заметить, что ρ_{12} есть обратный объем решетки $L_1 \cap L_2$, следовательно, $\rho_{21} = \rho_{12}$ (мера самодвойственной решетки равна единице).

Теорема 0.2. *Оператор $F_{12}\colon H_{L_1} \to H_{L_2}$, определяемый формулой*

$$\left(F_{21} f\right)(u) = \frac{1}{\sqrt{\rho_{21}}} \sum_{\alpha \in L_2/(L_1 \cap L_2)} \chi\left(\frac{1}{2}\Delta(\alpha, u)\right) f(\alpha + u)$$

является сплетающим оператором.

Пусть L_1, L_2, L_3 – тройка самодвойственных решеток в пространстве,

$$\left(H_{L_1}, W_{L_1}\right), \left(H_{L_2}, W_{L_2}\right), \left(H_{L_3}, W_{L_3}\right)$$

– соответствующие этим решеткам неприводимые представления ККС и

$$F_{21}, F_{32}, F_{31}$$

– канонические сплетающие операторы соответствующих пар представлений. Тогда оператор $\mathcal{F}$, равный произведению сплетающих операторов, $\mathcal{F} =$

$F_{13}F_{32}F_{21}$, действующий на пространстве H_{L_1}, коммутирует со всеми операторами представления (H_{L_1}, W_{L_1}) и, следовательно, пропорционален тождественному оператору. Таким образом, справедливо равенство

$$\mathcal{F} = \mu\left(L_1, L_2, L_3\right) Id.$$

Комплексное число $\mu\left(L_1, L_2, L_3\right)$, равное по модулю единице, будем называть *индексом Маслова* тройки самодвойственных решеток.

Используя явный вид канонического сплетающего оператора, не сложно получить следующее выражение для индекса Маслова.

Теорема 0.3. *Пусть $L_1, L_2, L_3 \in \Lambda$. Справедлива следующая формула*

$$\mu\left(L_1, L_2, L_3\right) = \sqrt{\frac{\rho_{12}\rho_{23}}{\rho_{31}}} \sum_{\substack{\alpha \in L_2/(L_2 \cap L_3) \\ \beta \in L_3/(L_3 \cap L_1) \\ \alpha+\beta \in L_1}} \chi\left(\frac{1}{2}\Delta(\alpha,\beta)\right).$$

Рассмотрим множество $\mathcal{T}$ упорядоченных троек решеток с попарными расстояниями между решетками равными 2:

$$\mathcal{T} = \left\{L_1, L_2, L_3, d\left(L_i, L_j\right) = 2, i, j = 1, 2, 3\right\}.$$

Геометрическая интерпретация индекса Маслова дается следующей теоремой.

Теорема 0.4. *Пусть $\left[L_1, L_2, L_3\right], \left[L_1', L_2', L_3'\right] \in \mathcal{T}$. Симплектическое преобразование $g \in SL_2\left(\mathbb{Q}_p\right)$, переводящее одну тройку в другую $L_1' = gL_1, L_2' = gL_2, L_3' = gL_3$ существует тогда, и только тогда, когда индексы Маслова троек совпадают, $\mu\left(L_1, L_2, L_3\right) = \mu\left(L_1', L_2', L_3'\right)$.*

В Главе 3 в рамках квантового исчисления А. Конна ([61]), предложена конструкция Фредгольмова модуля, естественным образом связанного с деревом Брюа-Титса и действием группы $PSL_2(\mathbb{Q}_p)$ на этом дереве.

Определение 0.1. *Пусть $\mathcal{A}$ - инволютивная алгебра над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Фредгольмовым модулем над $\mathcal{A}$ назовем тройку (H, F, π), где H - сепарабельное гильбертово пространство, F - самосопряженный оператор на $\mathcal{H}$, удовлетворяющий условию $F^2 = 1$, а π - инволлютивное представление алгебры $\mathcal{A}$ в H. При этом, для всех $a \in \mathcal{A}$ коммутатор*

$$[F, \pi(a)] \tag{1}$$

является компактным оператором в H.

В нашем случае в качестве пространства H выступает пространство квадратично суммируемых функций на проективной прямой $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$; в качестве инволютивной алгебры $\mathcal{A} \subset L^\infty\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)\right)$ - подалгебра алгебры измеримых ограниченных функций на $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$. Оператор симметрии определяется формулой $F = P_+ - P_-$, где операторы $P_\pm$ – ортогональные проекторы на подпространства, естественным образом связанные с орбитами действия группы $PSL_2(\mathbb{Q}_p)$ на множестве вершин дерева Брюа-Титса.

Теорема 0.5. *Пусть $\mathcal{LC}$ - алгебра локально постоянных функций на $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$. Оператор ∂f является оператором конечного ранга тогда, и только тогда, когда $f \in \mathcal{LC}$.*

Следствие 0.1. *Пусть $\mathcal{C}$ - алгебра непрерывных функций на $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$. Если $f \in \mathcal{C}$, то оператор ∂f - компактен.*

В Главе 4 рассматриваются операторы координаты и инпульса для p-адической квантовой механики.

Классической p-адической системой назовем тройку (F, Δ, G), где F – двумерное векторное пространство над $\mathbb{Q}_p$, Δ – невырожденная симплектическая форма на F, G – подгруппа группы $SL_2(\mathbb{Q}_p)$, действующая на F линейными преобразованиями.

Квантование классической системы задается четверкой $(U, V, H, \mathcal{U})$, где H – комплексное Гильбертово пространство, U и V – сильно нерерывные унитарные представления аддитивной группы поля $\mathbb{Q}_p$ в H, удовлетворяющие соотношению $U(x)V(y) = \exp(i\pi\{xy\}_p)V(y)U(x)$ для всех $(x, y) \in F$; $\mathcal{U}$ – унитарное представление группы G в H, удовлетворяющее соотношениям $\mathcal{U}(g)W(z) = W(gz)\mathcal{U}(g)$, где $W(z) = U(x)V(y)$, $z = (x, y) \in F$.

Представление U в координатном представлении реализуется оператором умножения на аддитивный характер поля $\mathbb{Q}_p$.

Теорема 0.6. *Проекторнозначная мера Q для оператора координаты дается формулой*

$$(Q_\Omega f)(u) = h_\Omega(u) f(u),$$

где $f \in L_2(\mathbb{Q}_p)$, Ω – борелевское множество на $\mathbb{Q}_p$, h_Ω – индикаторная функция множества Ω.

Проекторнозначная мера для оператора импульса дается формулой

$$(P_\Omega f)(u) = \left(\widetilde{h_\Omega} * f\right)(u),$$

где $\tilde{h}$ – преобразование Фурье функции h, а $*$ – оператор свертки.

Следующим естественным шагом в построении p-адического оператора координаты является рассмотрение C^*-алгебры операторов, порожденной семейством проекторов $\{Q_\Omega\}$, где Ω пробегает семейство борелевских подмножеств $\mathbb{Z}_p$. Обозначим эту алгебру через $A_{\mathcal{Q}}$. Заметим, что в вещественном случае эта алгебра есть алгебра непрерывных функций на спектре оператора координаты.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 0.7. *Алгебра $A_{\mathcal{Q}}$ изоморфна алгебре $C(\mathbb{Z}_p)$ непрерывных функций на единичном шаре $\mathbb{Z}_p$.*

Непосредственно из теоремы следует, что спектр оператора координаты есть канторово множество (поскольку $\mathbb{Z}_p$ гомеоморфно канторову множеству на вещественной прямой).

В Главе 5 исследуется связь между p-адической и вещественной квантовыми теориями, делается попытка унификации теорий.

Пусть Ω – некотрое множество. Через $\mathbb{D}$ обозначим множество функций на Ω со значениями в поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$, отличных от нуля не более чем в конечном числе точек. $\mathbb{D}$ обладает естественной структурой векторного пространства над полем $\mathbb{Q}$. Существует взаимно однозначное соответствие между элементами пространства $\mathbb{D}$ и множеством конечных наборов рациональных чисел. *Поэтому естественно считать пространство $\mathbb{D}$ пространством результатов эксперимента.* Будем далее считать, что Ω – множество мощности континуум. В этом случае множество $\mathbb{D}$ также имеет мощность континуум. Пространство $\mathbb{D}$ снабдим дискретной топологией и структурой топологического векторного пространства над $\mathbb{Q}$. Через $\mathbb{Q}_p, p = 2, 3, 5, \ldots$ обозначим поля p-адических чисел, $\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}$ ("∞-адический"всюду будет означать "вещественный"). Пусть $\mathbb{Q}_p^d$ – аддитивная группа $\mathbb{Q}_p$, снабженная дискретной топологией. Справедлива следующая теорема.

Теорема 0.8. *Аддитивная группа пространства $\mathbb{D}$ изоморфна группе $\mathbb{Q}_p^d$ для всех простых p и $p = \infty$.*

Определение 0.2. *Функция β, определенная на множестве $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}^2$, принимающая значения в поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел, $\beta : \mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}^2 \mapsto \mathbb{C}$ и обладающая следующими свойствами:*

1. *$\beta(x,y) = \bar{\beta}(y,x)$ для всех $x \in \mathbb{D}^2, y \in \mathbb{D}^2$;*

2. *$\beta_y(x) = \beta(x,y)$ является характером группы $\mathbb{D}^2$ при любом фиксированном $y \in \mathbb{D}^2$;*

3. *если $\beta_y(x) = 1$ для всех $y \in \mathbb{D}^2$, то $x = 0$*

называется бихарактером группы $\mathbb{D}$.

Замечание. Легко увидеть, что если β непрерывна в p-адической топологии, то $\beta(x,y) = \chi_p(\Delta(x,y))$, где χ_p – некоторый нетривиальный аддитивный характер поля $\mathbb{Q}_p$ (например, $\chi_p(a) = \exp(2\pi i\{a\}_p), a \in \mathbb{Q}_p$), а Δ – невырожденная симплектическая билинейная форма на $\mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p$.

Определение 0.3. *Тройку (W, H, β), где H – комплексное гильбертово пространство, β – бихарактер группы $\mathbb{D}$, W – отображение из $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ в группу унитарных операторов на H, удовлетворяющее условию*

$$W(x)W(y) = \beta(x,y)W(y)W(x), x \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}, y \in \mathbb{D} \times \mathbb{D},$$

будем называть представлением коммутационных соотношений над группой $\mathbb{D}$.

Теорема 0.9. *Пусть $(W_p, H_p, \beta_p), p \neq \infty$ – представление коммутационных соотношений одномерной p-адической квантовой механики. Тогда для любого конечного набора $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ элементов из $\mathbb{D} \times \mathbb{D}, x_i \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}, i = 1, 2, \ldots, n$ найдется представление коммутационных соотношений вещественной квантовой механики $(W_\infty, H_\infty, \beta_\infty)$ такое, что $W_p(x_i) = W_\infty(x_i)$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Пусть (W, H, β) – произвольное представление коммутационных соотношений над $\mathbb{D}$. C^*-алгебра A_β, порожденная операторами $\{W(x), x \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}\}$ не зависит от выбора представления, а зависит только от бихарактера β. На этом языке теорему можно переформулировать следующим образом. Пусть A_{β_p} – C^*-алгебра p-адических коммутационных соотношений. Тогда для любого конечного числа образующих алгебры A_{β_p} найдется алгебра A_{β_∞} вещественных коммутационных соотношений, совпадающая с алгеброй A_{β_p} на этих образующих.

Глава 6 посвящена адельному подходу к проблеме декогеренции. В качестве квантовой системы выступает модель Картье представлений коммутационных соотношений.

Пусть L - решетка в пространстве F, то есть свободный $\mathbb{Z}_p$-модуль ранга 2. Заметим, что в случае $p = \infty$ - это дискретное подмножество F_∞, при $p \neq \infty$ - компактное подмножество F_p.

Пусть $L = L^*$ - самодвойственная решетка. Пространство представления Картье H^L состоит из комплекснозначных функций на F, обладающих следующими свойствами

$$f \in H^L \iff f \in L_2\left(F/L\right), f(s+u) = \chi\left(1/2B(s,u)\right) f(s) \forall u \in L.$$

Пространство H^L является Гильбертовым пространством относительно нормы $\|f\| = \int_{F/L} |f(s)|^2 ds$. В вещественном случае множество F/L компактно, в p-адическом - дискретно, в этом случае интеграл вырождается в сумму. Заметим также, что квадрат модуля волновой функции инвариантен относительно сдвигов на вектор решетки, поэтому представление Картье можно рассматривать как квантовую систему на множестве F/L.

Операторы представления задаются формулой

$$\left(W^L(z)f\right)(s) = \chi\left(1/2B(z,s)\right) f(s-z).$$

Можно показать, что пара $\left(W^L, H^L\right)$ задает неприводимое представление коммутационных соотношений для любой самодвойственной решетки L.

Теперь построим тензорное произведение представлений $\left(H_p^L, W_p^L\right)$ по всем p, включая $p = \infty$.

Для этого рассмотрим векторное пространство $\mathbb{H}'$ над полем комплексных чисел, натянутое на вектора вида

$$\phi(Z) = \phi_\infty(z_\infty) \prod_p \phi_p(z_p),$$

где $Z = (z_\infty, z_2, z_3, z_5, \ldots, z_p, \ldots) \in \mathbb{A}^2$, $\mathbb{A}$ - кольцо аделей, и не более чем конечное число сомножителей отлично от $\Omega_p(z_p)$ ($\Omega_p(z_p)$ – индикаторная функция $\mathbb{Z}_p$). На $\mathbb{H}'$ зададим естественным образом скалярное произведение

$$(\phi, \psi) = (\phi_\infty, \psi_\infty) \prod_p \left(\phi_p, \psi_p\right).$$

На пространстве $\mathbb{H}'$ определим операторы $\mathbb{W}(Z), Z \in \mathbb{A}^2$

$$\mathbb{W}(Z)\phi = W_\infty(z_\infty)\phi_\infty \prod_p W_p(z_p)\phi_p.$$

Поскольку справедливо равенство $W_p(z_p)\Omega_p = \Omega_p$ для всех $z_p \in L_p$, то операторы $\mathbb{W}(Z), Z \in \mathbb{A}^2$ отображают $\mathbb{H}'$ в $\mathbb{H}'$.

Пространство адельного представления $\mathbb{H}$ определим как замыкание предгильбертова пространства $\mathbb{H}'$ относительно естественной нормы, операторы $\mathbb{W}(Z)$ единственным образом продолжаются до унитарных операторов на $\mathbb{H}$. При этом, справедливы следующие коммутационные соотношения для всех $Z, Z' \in \mathbb{A}^2$:

$$\mathbb{W}(Z)\mathbb{W}(Z') = \chi_\infty\left(B_\infty(z_\infty, z'_\infty)\right) \prod_p \chi_p\left(B_p(z_p, z'_p)\right) \mathbb{W}(Z')\mathbb{W}(Z).$$

Пусть теперь F - двумерное векторное пространство над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, Δ - невырожденная симплектическая форма на F, принимающая рациональные значения. Для всякого простого p и $p = \infty$ пространство F пополняется до пространства F_p, форма Δ естественным образом продолжается до невырожденной симплектической формы Δ_p на F_p. Действительно, исходная форма Δ в силу линейности является непрерывной в p-адической топологии на F для всех p. Пусть L - самодвойственная $\mathbb{Z}$-решетка в F. Замыкание L в вещественной или p-адических топологиях на пространстве F дают соответствующие самодвойственные $\mathbb{Z}_p$-решетки L_p. Построим соответствующие представления Картье $\left(W_p^L, H_p^L\right)$ коммутационных соотношений и их тензорное произведение $(\mathbb{W}, \mathbb{H})$.

Рассмотрим произвольные векторы $r, r' \in F$. Через R, R' обозначим векторы в пространстве $\mathbb{A}^2$ вида $R = (r, r, \ldots, r, \ldots), R' = (r', r', \ldots, r', \ldots)$. Справедлива формула

$$\mathbb{W}(R)\mathbb{W}(R') = \mathbb{W}(R')\mathbb{W}(R).$$

Другими словами, операторы $\mathbb{W}(R)$ и $\mathbb{W}(R')$ коммутируют. Утверждение непосредственно вытекает из простой адельной формулы для характеров

$$\chi_\infty(q) \prod_p \chi_p(q) = 1, q \in \mathbb{Q}.$$

Таким образом, исходная квантовая системы при ограничении на рациональные числа приобретает классические свойства.

При этом происходит коллапс волновой функции. Рассмотрим для примера поведение вакуумного вектора при аналогичном ограничении на рациональные числа. Справедлива простая формула

$$\Omega(R) = \Omega_\infty(r) \prod_p \Omega_p(r) = \begin{cases} 1, r \in L, \\ 0, r \notin L. \end{cases}$$

Таким образом, при ограничении вакуумного состояния на рациональные числа в фундаментальной области решетки вакуумное состояние превращается в функцию, равную единице в начале координат и нулю во всех других точках фундаментальной области. Другими словами, состояние стало классическим (координата и импульс частицы определены однозначно).

В Главе 7 рассматриваются свойства иерархических динамических систем. В качестве фазового пространства такой системы выступает p-адическое компактное аналитическое многообразие, а в качестве динамического отображения – аналитические эндоморфизмы. Такие эндоморфизмы переводят шары в шары и при этом сохраняют иерархию вложенных шаров.

Для таких систем справедлива усиленная теорема Паункаре о числе возвращений.

Теорема 0.10. *Пусть (X, T) – иерархическая динамическая система, T сохраняет меру. Через $N_B^a(n)$ обозначим количество возвращений из точки $a \in B$ в шар B за время n. Тогда $N_B^a(n)$ не зависит от a. Если динамическая система (X, T) эргодична, то существует предел*

$$\lim_{n \to \infty} N_B(n)/n$$

и этот предел равен $\mu(B)$.

Следствие 0.2. *Пусть (X, T) – p-адическая динамическая системы, сохраняющая меру . Тогда существует такое натуральное число N, что динамическая система $\left(X, T^N\right)$ не является эргодической.*

Другими словами, такие системы не являются вполне эргодическими.

Теорема 0.11. *Иерархические динамические системы не обладают свойством перемешиваемости.*

В качестве примера изучены иерархические динамические системы на p-адической проективной прямой. Проективная прямая является границей дерева Брюа-Титса и преобразование T продолжается до автоморфизма T_G дерева.

Теорема 0.12. *Пусть $\left(P^1, T\right)$ – обратимая динамическая система такая, что автоморфизм T_G не имеет неподвижных вершин и инверсий. Тогда T имеет ровно две неподвижные точки, одна из которых – притягивающая, другая – отталкивающая. Пара неподвижных точек и энтропия определяют динамическую систему однозначно.*

В иерархических динамических системах шара переводятся в шары. Расширим класс динамических систем и позволим динамическому отображению переводить шары в объединения шаров. В качестве примера такого отображения рассмотрим p-адическое преобразования пекаря.

Пусть $(x, y) \in X$ представлены в виде канонического разложения:

$$(x, y) = (x_0 + x_1 p + \ldots + x_n p^n + \ldots, y_0 + y_1 p + \ldots + y_m p^m + \ldots),$$

где $x_i, y_i, i = 0, 1, \ldots$ принимают значения в множестве $0, 1, \ldots, p-1$. Преобразование пекаря T определим следующим образом:

$$T(x, y) = \left(\frac{x - x_0}{p}, x_0 + py\right).$$

Теорема 0.13. *Преобразование пекаря обладает свойством перемешиваемости.*

Глава 8 посвящена исследованию предельных теорем для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин со значениями в группе целых p-адических чисел. Хорошо известен результат, что такие суммы сходятся по распределению к равномерному распределению. Возникает вопрос об оценке скорости сходимости. Ответ дается следующей теоремой.

Теорема 0.14. *Пусть $\{\xi_n, n = 1, 2, \ldots\}$ последовательность независмых одинаково распределенных центрированных случайных величин с конечной дисперсией D. При этом, эти величины абсолютно непрерывны с плотностью p_ξ, плотность p_ξ локально постоянна с параметром постоянности*

Δ. *Через* $p_{S_n}, n = 1, 2, \ldots$ *обозначим плотность распределения вероятности случайной величины* $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n, n = 1, 2, \ldots$. *Тогда справедлива следующая оценка*

$$\sup_{x \in \mathbb{Q}_p} \left| p_{S_n}(x) - \frac{1}{D} h(0, D)(x) \right|_p \leq \left(\frac{D}{\Delta} - 1 \right) e^{-\lambda_\xi n},$$

где вещественное число λ_ξ *зависит только от распределения* p_ξ *и удовлетворяет неравенству*

$$\lambda_\xi \geq \inf_{\Delta \leq r < D} \{2 Q_\xi(r) \left(1 - Q_\xi(r)\right) \sin^2(\pi r / D)\} > 0.$$

Здесь $h(0, D)$ *– равномерное распределение с дисперсией* D *и* Q_ξ *– функция концентрации величины* ξ.

Из последней формулы также вытекает следующая оценка для параметра убывания λ:

$$\lambda_\xi \geq 2 Q_\xi(\Delta) \left(1 - 1/p\right) \sin^2(\pi \Delta / D) \geq \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta}{D} \right)^3.$$

В Главе 9 приводится конструкция p-адического винеровского процесса. Пусть для каждого $t \in \mathbb{Z}_p$ определена случайная величина ξ_t. Таким образом, задано семейство случайных величин, индексированное целыми p-адическими числами $\{\xi_t, t \in \mathbb{Z}_p\}$. Рассмотрим функцию двух переменных $X(t, \omega), t \in \mathbb{Z}_p, \omega \in \mathbb{Z}_p$, которая при каждом фиксированном $t \in \mathbb{Z}_p$ совпадает со случайной величиной ξ_t из нашего семейства, $X(t, \omega) = \xi_t(\omega)$. Функцию $X(t, \omega)$ будем называть p-адическим случайным процессом.

Пусть a, b – произвольные p-адические числа. Через $[a, b]$ обозначим минимальный шар в $\mathbb{Q}_p$, содержащий эти числа. Будем использовать обозначение $a < c < b$, если $c \in [a, b], c \neq a, c \neq b$.

Случайный процесс имеет независимые приращения, если для всех конечных наборов $\{0 = t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ целых p-адических чисел, $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, случайные величины $X(t_0, \cdot), X(t_1, \cdot) - X(t_0, \cdot), \ldots, X(t_n, \cdot) - X(t_{n-1}, \cdot)$ независимы в совокупности.

Определение 0.4. *p-адическим винеровским процессом* $W(t, \cdot) = W_t, t \in \mathbb{Z}_p$ *будем называть случайный процесс, удовлетворяющий условиям*

- $W_0 = 0$ *почти наверное;*

- *W_t – процесс с независимыми приращениями;*
- *случайные величины $W_t - W_s$ являются абсолютно непрерывными с плотностью $\frac{1}{|t-s|_p} h\left(0, |t-s|_p\right)$.*

Явная реализация процесса дается следующей теоремой.

Теорема 0.15. *Пусть $\xi_n(\omega), n \in \mathbb{Z}_+, \omega \in \mathbb{Z}_p$ – последовательность независимых одинаково распределенных абсолютно непрерывных случайных величин с плотностью $h(0,1)$. Тогда ряд*

$$W(\omega, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n(\omega) \gamma_n e_n(t) \tag{2}$$

сходится при каждом $t \in \mathbb{Z}_p$ почти наверное и определяет p-адический винеровский процесс.

Здесь $\{e_n, n = 0, 1, \dots\}$ – базис Ван дер Пута в пространстве непрерывных функций $C\left(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p\right)$.

Свойства траекторий построенного процесса даются теоремой.

Теорема 0.16. *Траектории p-адического винеровского процесса принадлежат пространству 1-липшицевых функций $Lip_1\left(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p\right)$ почти наверное.*

Траектории p-адического винеровского процесса не дифференцируемы ни в одной точке почти наверное.

Винеровский процесс определяет меру Винера на пространстве непрерывных функций $C\left(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p\right)$.

Обозначим через L_0 множество функций, удовлетворяющих условию Липшица порядка 1 с постоянной Липшица, равной 1, обращающихся в нуль в нуле. Доказывается, что L_0 есть компактный $\mathbb{Z}_p$-подмодуль пространства непрерывных функций.

Справедлива следующая Теорема.

Теорема 0.17. *Носитель p-адической меры Винера содержится в множестве L_0. При ограничении на L_0 p-адическая мера Винера совпадает с мерой Хаара на L_0.*

1 p-Адическая модель квантовой механики и бозонные каналы

1.1 Введение

Начиная с работы [87], неархимедов анализ активно применяется для построения физических моделей. Возникло целое направление в математической физике – p-адическая математическая физика. Библиографию по этому вопросу можно найти в книге [12], современное состояние – обзорах [63], [64].

В настоящей Главе методы p-адической математической физики используются для построения нового типа квантовых каналов в рамках стандартной квантовой теории информации.

В качестве основного рабочего инструмента выступает p-адическая реализация стандартной квантовой механики.

1.2 p-Адическая симплектическая геометрия

В настоящем разделе приводятся без доказательств ряд известных фактов относительно геометрии решеток в двумерном симплектическом пространстве над полем $\mathbb{Q}_p$ p-адических чисел. Большинство утверждений можно найти в [77], [33], [82]. Утверждения, касающиеся самодвойственных решеток, в частности, эквивалентное определение метрики на множестве решеток, можно найти в [17].

Пусть F – двумерное векторное пространство над полем $\mathbb{Q}_p$. На пространстве F задана невырожденная симплектическая форма Δ. Свободный модуль ранга 2 над кольцом $\mathbb{Z}_p$ целых p-адических чисел, рассматриваемый как подмножество F, будем называть решеткой в F. Решетка является компактным множеством в естественной топологии на пространстве F.

Назовем две решетки L_1 и L_2 эквивалентными, если существует $\lambda \in \mathbb{Q}_p^*$ такое, что выполнено равенство $L_2 = \lambda L_1$.

Пусть $\hat{L}_1$, $\hat{L}_2$ – два класса эквивалентности решеток с представителями L_1 и L_2 соответственно, причем $L_2 \subset L_1$. Тогда существуют целые числа m, n такие, что

$$L_1/L_2 = \mathbb{Z}_{p^m} \bigoplus \mathbb{Z}_{p^n}.$$

Неотрицательное целое число $d\left(\hat{L}_1, \hat{L}_2\right) = |m-n|$ не зависит от выбора представителей в классах эквивалентности и определяет метрику на множестве классов эквивалентности решеток.

С помощью метрики d можно построить граф Γ, вершинами которого являются классы эквивалентности решеток, а ребрами – пары вершин, расстояние d между которыми равно единице. Граф Γ является деревом, из каждой вершины которого выходит $p+1$ ребро.

На множестве решеток введем отношение двойственности. Пусть L – решетка, под двойственной решеткой L^* будем понимать подмножество пространства F следующего вида: $u \in L^*$ тогда, и только тогда, когда условие $\Delta(u, v) \in \mathbb{Z}_p$ выполнено для всех $v \in L$.

Если L совпадает с L^*, то решетку L будем называть самодвойственной. Если в классе эквивалентности решеток существует самодвойственная решетка, то она единственна. Это позволяет очевидным образом перенести метрику d на множество самодвойственных решеток. Определенное таким образом расстояние между двумя самодвойственными решетками всегда четно.

Пространство F является полным сепарабельным метрическим пространством относительно нормы $\|\cdot\|$, определяемой следующим соотношением

$$\|z\| = \max\{|x|_p, |y|_p\}, z = (x, y) \in F.$$

Для любой самодвойственной решетки L существует такой симплектический базис (e_1, e_2) в пространстве F, что решетка L имеет вид

$$L = \mathbb{Z}_p e_1 \bigoplus \mathbb{Z}_p e_2,$$

то есть L является единичным шаром в этом базисе. Более того, для любой пары самодвойственных решеток L_1 и L_2 существует такой симплектический базис (e_1, e_2), в котором решетки имеют вид

$$L_1 = \mathbb{Z}_p e_1 \bigoplus \mathbb{Z}_p e_2, L_2 = p^m \mathbb{Z}_p e_1 \bigoplus p^{-m} \mathbb{Z}_p e_2$$

для некоторого неотрицательного целого числа m, при этом $d\left(L_1, L_2\right) = 2m$.

Через $Sp(F, \Delta)$ обозначим симплектическую группу – группу невырожденных линейных преобразований пространства F, сохраняющих форму Δ. Группа $Sp(F, \Delta)$ изоморфна группе $SL_2\left(\mathbb{Q}_p\right)$. Естественным образом определяется действие симплектической группы на множестве классов эквивалентности решеток, это действие сохраняет метрику d. Таким образом, определено действие симплектической группы на графе Γ. Это действие не транзитивно на множестве вершин графа и имеет две орбиты – подмножества вершин графа, находящихся на четном расстоянии друг от друга. Симплектическая группа действует транзитивно на множестве самодвойственных решеток.

На пространстве F существует единственная с точностью до нормировки трансляционно-инвариантная мера (мера Хаара). Нормировать меру будем таким образом, что мера единичного шара равна единице. Действие симплектической группы сохраняет меру, следовательно, мера любой самодвойственной решетки равна единице. Меру решетки L будем обозначать через $|L|$. Если L – самодвойственная, то, как отмечалось, $|L| = 1$, верно и обратное, если $|L| = 1$, то решетка L – самодвойственная. Легко убедиться в справедливости соотношения $|L||L^*| = 1$. Действительно, существует симплектический базис (e_1, e_2), в котором L имет вид

$$L = p^m \mathbb{Z}_p e_1 \bigoplus p^n \mathbb{Z}_p e_2$$

для некоторых целых чисел m, n, при этом $|L| = p^{-m-n}$. Двойственная решетка L^* в этом же базисе имеет вид

$$L^* = p^{-n} \mathbb{Z}_p e_1 \bigoplus p^{-m} \mathbb{Z}_p e_2,$$

при этом $|L^*| = p^{m+n}$.

Пусть $S \in Sp(F, \Delta)$, $L \subset F$ – произвольная решетка. Как уже отмечалось, действие симплектической группы сохраняет меру, то есть $|SL| = |L|$. Верно и обратное, если L_1, L_2 – произвольные решетки в F одинаковой меры, $|L_1| = |L_2|$, то существует симплектическое преобразование $S \in Sp(F, \Delta)$, такое, что $SL_1 = L_2$.

1.3 p-Адическая модель квантовой механики

В настоящем разделе с помощью представления канонических коммутационных соотношений над полем p-адических чисел строится p-адическая модель стандартной квантовой механики и исследуются ее свойства.

Пусть $\mathcal{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Скалярное произведение в $\mathcal{H}$ будем обозначать $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и будем считать его антилинейным по первому аргументу.

Состояние системы описывается матрицей плотности ρ в пространстве $\mathcal{H}$. Множество всех состояний обозначим через $\mathfrak{S}$.

Через $\mathcal{B}(F)$ обозначим σ-алгебру борелевских подмножеств пространства F, через $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ – алгебру ограниченных операторов на пространстве $\mathcal{H}$. Квантовая наблюдаемая $M : \mathcal{B}(F) \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ есть проекторно-значная мера на $\mathcal{B}(F)$. Множество квантовых наблюдаемых обозначим через $\mathfrak{M}$.

Распределение вероятностей наблюдаемой M в состоянии ρ задается формулой Борна-фон Неймана

$$\mu_\rho^M = \mathrm{Tr}\left(\rho M(B)\right), B \in \mathcal{B}(F).$$

По существу, мы не выходим за рамки стандартной статистической модели квантовой механики ([43]), поскольку множество вещественных чисел и множество p-адических чисел борелевски изоморфны. Более подробно этот вопрос рассматривался в [18], [19].

1.3.1 Представления ККС

Пусть W – отображение из пространства F в множество унитарных операторов на пространстве $\mathcal{H}$, удовлетворяющее соотношению

$$W(z)W(z') = \chi\left(\frac{1}{2}\Delta(z,z')\right)W(z+z')$$

для всех $z, z' \in F$. Здесь $\chi(x) = \exp\left(2\pi i\{x\}_p\right)$, где $\{x\}_p$ - p-адическая дробная часть числа $x \in \mathbb{Q}_p$. Дополнительно будем считать отображение W непрерывным в сильной операторной топологии. Отображение W называется представлением канонических коммутационных соотношений (ККС) в форме Вейля.

В качестве примера такого представления рассмотрим представление в пространстве $L^2(F)$ следующего вида

$$\left(W(z)f\right)(s) = \chi\left(\frac{1}{2}\Delta(z,s)\right)f(s-z), z, s \in F, f \in L^2(F). \tag{3}$$

Легко убедиться в том, что определенные таким образом операторы удовлетворяют соотношениям Вейля, и отображение $z \to W(z)$ сильно непрерывно.

1.3.2 Алгебра ККС

Пусть $\mathcal{D} = \mathcal{D}(F)$ – пространство комплексно-значных локально постоянных функций на F с компактным носителем. Каждой функции $f \in \mathcal{D}$

поставим в соответствие оператор $O_f \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ по формуле

$$O_f = \int_F f(z) W(z) dz.$$

Алгеброй ККС $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\mathcal{H})$ будем называть C^*-алгебру, порожденную семейством операторов $\{O_f, f \in \mathcal{D}\}$.

Справедлива следующая Теорема.

Теорема 1.1. *Пусть W – неприводимое представление ККС в пространстве $\mathcal{H}$. Тогда алгебра ККС $\mathfrak{D}(\mathcal{H})$ есть алгебра компактных операторов на пространстве $\mathcal{H}$.*

Заметим, что аналогичное утверждение справедливо и для алгебры ККС над полем вещественных чисел ([79]).

Прежде всего докажем следующую Лемму.

Лемма 1.1. *Пусть W – представление ККС, L – решетка в пространстве F такая, что выполнено условие $|L| \leq 1$. Тогда оператор P_L, определяемый выражением*

$$P_L = \frac{1}{|L|} \int_L W(z) dz$$

есть ортогональный проектор. Если представление W неприводимо, то ранг проектора P_L равен $|L|^{-1}$.

В силу инвариантности решетки L относительно преобразования $z \to -z$ и справедливости соотношения $W^*(z) = W(-z), z \in F$, оператор P_L является самосопряженным.

Поскольку $|L| \leq 1$, то справедливо условие $L \subseteq L^*$. Следовательно, для всех $z, z' \in L$ выполнено равенство

$$\chi\left(\frac{1}{2}\Delta(z, z')\right) = 1.$$

Таким образом, принимая во внимание соотношение Вейля, для всех таких z и z' верно соотношение $W(z)W(z') = W(z + z')$. Таким образом

$$P_L^2 = \frac{1}{|L|^2} \int_L dz W(z) \int_L dz' W(z') = \frac{1}{|L|^2} \int_L W(z) dz \int_L dz' = P_L.$$

Пусть теперь представление W неприводимо. Рассмотрим сначала случай $|L| = 1$, то есть когда решетка L – самодвойственная. Семейство операторов $\{W(u), u \in L\}$ – сужение представления W на решетку L – образует непрерывное унитарное представление компактной коммутативной группы L в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. У этого представления существует инвариантный вектор ϕ_L ([47]), $W(u)\phi_L = \phi_L, u \in L$, $\|\phi_L\| = 1$. Очевидно, что этот вектор лежит в области значений проектора P_L.

Рассмотрим характеристическую функцию h_L представления W, $h_L(z) = \langle \phi_L, W(z)\phi_L \rangle, z \in F$. Справедлива следующая формула

$$h_L(z) = \begin{cases} 1, z \in L \\ 0, z \notin L. \end{cases}$$

Действительно, в случае $z \in L$ утверждение следует из единичности нормы вектора ϕ_L. Пусть $z \notin L$, выберем произвольное $u \in L$. Тогда, в силу унитарности оператора $W(u)$, инвариантности вектора ϕ_L относительно действия оператора $W(u)$ и соотношений Вейля, справедливы равенства

$$h_L(z) = \langle W(u)\phi_L, W(u)W(z)\phi_L \rangle = \chi\left(\Delta(u, z)\right) h_L(z).$$

В силу произвольности выбора $u \in L$ последнее равенство может выполняться только в случае $h_L(z) = 0$.

Обозначим через $\mathcal{H}_L$ подпространство в $\mathcal{H}$, являющееся замыканием линейной оболочки семейства векторов $\{W(z)\phi_L, z \in F\}$. Поскольку представление W неприводимо, то подпространство $\mathcal{H}_L$ совпадает с пространством $\mathcal{H}$.

На пространстве F введем отношение эквивалентности следующим образом. Будем говорить, что точки $z, z' \in F$ эквивалентны относительно решетки L, если выполнено условие $z - z' \in L$. Из каждого класса эквивалентности выберем по одному представителю и обозначим через $I = I_L$ множество таких представителей.

Рассмотрим семейство векторов в пространстве $\mathcal{H}_L$ следующего вида $\{\phi_L^a = W(a)\phi_L, a \in I\}$. Из выражения для характеристической функции h_L следует, что это семейство векторов образует ортонормированный базис пространтва H_L. Этот базис будем называть *базисом когерентных состояний* представления W. Заметим, что когерентное состояние ϕ_L^a является собственным вектором представления $\{W(u), u \in L\}$ группы L, который соответствует собственному значению $\chi\left(\Delta(u, a)\right)$.

Поскольку оператор P_L коммутирует с операторами $\{W(u), u \in L\}$, то когерентные состояния являются собственными векторами оператора P_L.

Как уже отмечалось, вектор ϕ_L лежит в области значений проектора P_L, $P_L\phi_L = \phi_L$. Покажем, что $P_L\phi_L^a = 0, a \neq 0$. Действительно, при $a \notin L$ справедливы равенства

$$P_L\phi_L^a = \frac{1}{|L|}\int_L dzW(z)W(a)\phi_L = \phi_L^a\frac{1}{|L|}\int_L dz\chi\left(\Delta(z,a)\right) = 0.$$

Таким образом, доказано, что в случае самодвойственной решетки оператор P_L является одномерным проектором.

Пусть теперь решетка L не является самодвойственной, то есть $|L| < 1$. Выберем самодвойственную решетку L_s такую что выполнено условие $L \subset L_s$, при этом, как легко убедиться, $L_s \subset L^*$.

Как и в случае самодвойственной решетки, оператор P_L коммутирует с операторами представления $\{W(u), u \in L\}$ и когерентные состояния $\{\phi_{L_s}^a, a \in I_{L_s}\}$ являются собственными векторами проектора P_L. При этом, как легко убедиться, справедливы равенства

$$P_L\phi_{L_s}^a = \begin{cases} \phi_{L_s}^a, a \in L^* \\ \quad 0, a \notin L^*. \end{cases}$$

Таким образом, ранг проектора P_L совпадает с числом элементов множества $\{a \in I_{L_s}, a \in L^*\}$, которое равно $|L^*|/|L_s| = |L^*| = |L|^{-1}$. Лемма доказана.

Пусть $b \in F$ – произвольный вектор в пространстве F, L – произвольная решетка в этом пространстве. Через L^b обозначим сдвиг решетки L на вектор b, $L^b = b + L$. В силу инвариантности меры относительно сдвига выполнено равенство $|L^b| = |L|$. Рассмотрим оператор S_L^b следующего вида

$$S_L^b = \frac{1}{|L|}\int_{L^b} W(z)dz.$$

Лемма 1.2. *Пусть W – неприводимое представление ККС, L – решетка в пространстве F такая, что $|L| \leq 1$, $b \in F$ – произвольный вектор в пространстве F. Тогда оператор S_L^b является частичной изометрией ранга $|L|^{-1}$.*

Применяя соотношения Вейля, легко получить следующее равенство

$$W\left(\frac{b}{2}\right)W(z)W\left(\frac{b}{2}\right) = W(z+b).$$

Из последнего равенства и из определения оператора S_L^b немедленно следует следующее соотношение:

$$S_L^b = W\left(\frac{b}{2}\right) P_L W\left(\frac{b}{2}\right),$$

из которого непосредственно следует равенство

$$S_L^b \left(S_L^b\right)^* = W\left(\frac{b}{2}\right) P_L W\left(-\frac{b}{2}\right).$$

Следовательно, оператор $S_L^b \left(S_L^b\right)^*$ является проектором, унитарно эквивалентным проектору P_L, откуда и следует утверждение Леммы.

Дальнейшее доказательство Теоремы 1.1 не представляет большой сложности. Действительно, пусть $f \in \mathcal{D}$ – локально постоянная функция с компактным носителем. Тогда найдется такая решетка $L, |L| \leq 1$ и такой конечный набор B точек пространства F, что функцию f можно представить в виде конечной линейной комбинации характеристических функций множеств $L^b, b \in B$. Принимая во внимание леммы 1.1 и 1.2, оператор O_f есть конечная линейная комбинация проекторов и изометрий конечного ранга. При этом, алгебра $\mathfrak{O}$ содержит все конечномерные проекторы. Следовательно, $\mathfrak{O}$ является алгеброй компактных операторов.

1.4 Неприводимые представления ККС

Для построения семейства неприводимых представлений ККС воспользуемся представлением (3). Представление (3) приводимо, мы построим семейство его неприводимых подпредставлений, которое параметризуется самодвойственными решетками в пространстве F.

Пусть L – самодвойственная решетка в пространстве F. Как легко заметить, характеристическая функция этой решетки лежит в области значений проектора P_L, обозначим эту функцию через ϕ_L. Рассмотрим замкнутое подпространство $\mathcal{H}_L$ пространства $\mathcal{H} = L^2(F)$, натянутое на вектора $\{W(z)\phi_L, z \in F\}$. Пространство $\mathcal{H}_L$ инвариантно относительно действия операторов представления $W(z), z \in F$, множество когерентных состояний $\{\phi_L^a = W(a)\phi_L, a \in I\}$ образуют ортонормированный базис в $\mathcal{H}_L$. Таким образом, сужение представления (15) на подпространство $\mathcal{H}_L$ является неприводимым представлением ККС.

Для того, чтобы описать неприводимые представления в более явном виде, определим в пространстве $L^2(F)$ оператор Z_L по следующе формуле:

$$\left(Z_L f\right)(s) = \int_L \chi\left(-\frac{1}{2}\Delta(s,u)\right) f(s+u)du.$$

Справедлива следующая Теорема.

Теорема 1.2. *Оператор Z_L является ортогональным проектором на подпространство $\mathcal{H}_L$.*

Легко проверить непосредственными вычислениями, что оператор Z_L является ортогональным проектором, и что когерентные состояния лежат в области значений этого проектора, $Z_L\phi_L^a = \phi_L^a, a \in I$.

Кроме того, для любых $f \in L^2(F)$ и $a \in I$ справедлива формула

$$\langle \phi_L^a, f\rangle = \left(Z_L f\right)(a),$$

из которой немедленно следует, что функция $f \in L^2(F)$ лежит в ортогональном дополнении к подпространству $\mathcal{H}_L$ тогда, и только тогда, когда $Z_L f \equiv 0$. Доказательство последней формулы проводится прямыми вычислениями:

$$\langle \phi_L^a, f\rangle = \int_F \chi\left(-\frac{1}{2}\Delta(a,s)\right)\phi_L(s-a)f(s)ds =$$
$$= \sum_{b\in I}\phi_L(b-a)\chi\left(-\frac{1}{2}\Delta(a,b)\right)\int_L \chi\left(-\frac{1}{2}\Delta(a,u)\right) f(b+u)du = \left(Z_L f\right)(a).$$

1.4.1 Состояния

Как отмечалось ранее, состояние квантовой системы описывается матрицей плотности ρ в гильбертовом пространтсве $\mathcal{H}$. Пусть в этом пространстве задано неприводимое представление ККС $W(z), z \in F$. Каждому оператору плотности можно поставить в соответствие функцию π_ρ на пространстве F по следующей формуле:

$$\pi_\rho(z) = \mathrm{Tr}\left(\rho W(z)\right).$$

Функция π_ρ называется характеристической функцией квантового состояния ρ и определяет это состояние однозначно. Состояние ρ однозначно восстанавливается по своей характеристической функции с помощью соотношения

$\rho = \int_F \pi_\rho(z) W(-z) dz$. Характеристическая функция квантого состояния обладает свойством Δ-положительной определенности: для любых конечных наборов $z_1, z_2, \ldots, z_n$ точек пространства F и $c_1, c_2, \ldots, c_n$ комплексных чисел выполнено неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i \bar{c}_j \pi_\rho(z_i - z_j) \chi\left(-\frac{1}{2}\Delta(z_i, z_j)\right) \geq 0.$$

Как и в случае представления ККС над вещественным симплектическим пространством, для p-адического случая справедлив некоммутативный аналог теоремы Бохнера-Хинчина, которая устанавливает взаимно однозначное соответствие между состояниями и Δ-положительно определенными функциями (для вещественного случая см. [44], p-адический случай рассмотрен в [90]).

Теорема 1.3. *Для того, чтобы функция $\pi : F \to \mathbb{C}$ была характеристической функцией квантового состояния, необходимо и достаточно выполнение условий:*

- $\pi(0) = 1$, $\pi(z)$ *– непрерывна в нуле,*
- $\pi(z)$ *является Δ-положительно определенной.*

В рассматриваемом нами случае представлений ККС над p-адическим симплектическим пространством Теорема 1.3 может быть усилена – вместо Δ-положительно определенных функций можно рассматривать положительно определенные функции на самодвойственных решетках.

Функцию $\pi : F \to \mathbb{C}$ будем называть положительно определенной функцией на самодвойственной решетке $L \subset F$, если носитель π лежит в L и для любых конечных наборов $z_1, z_2, \ldots, z_n$ точек решетки L и $c_1, c_2, \ldots, c_n$ комплексных чисел выполнено неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i \bar{c}_j \pi_\rho(z_i - z_j) \geq 0.$$

Справедлива следующая Теорема.

Теорема 1.4. *Пусть W – неприводимое представление ККС в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, L – самодвойственная решетка в F. Тогда, для любой* *непрерывной в нуле положительно определенной на решетке L функции π, равной в нуле единице, существует единственное состояние ρ_π в пространстве $\mathcal{H}$ такое, что выполнено равенство*

$$\pi(z) = \mathrm{T}r\left(\rho_\pi W(z)\right).$$

Для любого состояния ρ в пространстве $\mathcal{H}$ существует унитарный оператор U в $\mathcal{H}$ такой, что функция $\pi_\rho(z) = \mathrm{T}r\left(U\rho U^{-1}W(z)\right)$ является положительно определенной функцией на решетке L.

Поскольку π есть непрерывная в нуле и равная в нуле единице положительно определенная функция на компактной коммутативной группе L, по теореме Бохнера-Хинчина она является Фурье-образом вероятностной меры на дискретной группе $\hat{L} = F/L$, $\hat{L}$ – двойственная по Понтрягину группа к группе L. Следовательно, при $u \in L$ $\pi(u)$ может быть представлена в следующем виде:

$$\pi(u) = \sum_{a\in I} \chi\left(\Delta(u,a)\right)\rho_a,$$

где $\rho_a, a \in I$ – неотрицательные целые числа, удовлетворяющие условию $\sum_{a\in I}\rho_a = 1$.

Пусть $\{\phi_L^a, a \in I\}$ – ортонормированный базис когерентных состояний представления W, P^a – проектор на состояние ϕ_L^a. Искомый оператор плотности ρ_π определим по формуле

$$\rho_\pi = \sum_{a\in I}\rho_a P^a.$$

С учетом соотношения

$$\left\langle \phi_L^a, \rho_\pi \phi_L^b \right\rangle = \rho_a \delta_{ab}$$

(здесь δ_{ab} – символ Кронекера на множестве I) и соотношений Вейля для $u \in L$ получаем

$$\mathrm{T}r\left(\rho_\pi W(u)\right) = \sum_{a\in I}\langle \phi_L^a, \rho_\pi W(u)\phi_L^a\rangle = \sum_{a\in I}\chi\left(\Delta(u,a)\right)\rho_a = \pi(u).$$

Пусть $z \notin L$. В этом случае справедливы равенства

$$\mathrm{T}r\left(\rho_\pi W(z)\right) = \sum_{a\in I}\langle \phi_L^a, \rho_\pi W(z)\phi_L^a\rangle = \sum_{a\in I}\chi\left(\frac{1}{2}\Delta(z,a)\right)\left\langle \phi_L^a, \rho_\pi \phi_L^{z+a}\right\rangle = 0.$$

Первое утверждение Теоремы доказано.

Пусть $\{\varphi_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ – ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{H}$, содержащий все собственные векторы оператора плотности ρ, соответствующие собственные значения оператора обозначим через ρ_k. В пространстве $\mathcal{H}$ рассмотрим ортонормированный базис когерентных состояний $\{\phi_L^a, a \in I\}$ и произвольное взаимно однозначное отображение $i : \mathbb{Z}_+ \to I$. По построению, оператор $U : U\varphi_k \to \phi_L^{i(k)}, k \in \mathbb{Z}_+$ является унитарным оператором.

Если P_k – проектор на состояние φ_k, то оператор UP_kU^{-1} есть проектор на состояние $\phi_L^{i(k)}$. Следовательно, справедлива формула

$$U\rho U^{-1} = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \rho_{i(k)} P^{i(k)}.$$

Дальнейшее доказательство повторяет доказательство первой части Теоремы.

1.4.2 p-Адические гауссовские состояния

Дадим следующее определение.

Определение 1.1. *Состояние ρ будем называть p-адическим гауссовским состоянием, если его характеристическая функция π_ρ есть характеристическая функция некоторой решетки, то есть*

$$\pi_\rho = \mathrm{Tr}\left(\rho W(z)\right) = h_L.$$

Определение является естественным в следующем смысле. Пусть $\mathcal{F}$ – преобразование Фурье в $L^2(F)$, определяемое формулой

$$\mathcal{F}\left[f\right](z) = \int_F \chi\left(\Delta(z,s)\right) f(s)ds,$$

L – решетка в F. Тогда справедлива формула ([12])

$$|L|^{-1/2}\mathcal{F}\left[h_L\right] = |L^*|^{-1/2} h_{L^*}.$$

Другими словами, преобразование Фурье переводит характеристическую функцию решетки в характеристическую функцию двойственной решетки с точностью до множителя. В частности, характеристическая функция самодвойственной решетки инфариантна относительно действия преобразования Фурье. В этом смысле характеристическая функция решетки является аналогом гауссовской функции в вещественном анализе.

p-Адические гауссовские состояния устроены очень просто. А именно, справедлива Теорема.

Теорема 1.5. *Для того, чтобы характеристическая функция h_L решетки L определяла квантовое состояние, необходимо и достаточно выполнение условия $|L| \leq 1$.*

Гауссовское состояние ρ, имеющее характеристическую функцию $\pi_\rho = h_L$ есть $|L|P_L$, где P_L – ортогональный проектор ранга $1/|L|$.

Достаточность условий теоремы и представление для гауссовского состояния вытекают из Леммы 1.1.

Докажем необходимость. Предположим противное, то есть, что характеристическая функция $\pi_\rho = h_L, |L| > 1$ определяет квантовое состояние ρ. Состояние ρ представляется в виде

$$\rho = \int_F \pi_\rho(z) W(-z) dz = \int_L W(z) dz.$$

Не сложно вычислить, чему равен квадрат оператора ρ:

$$\rho^2 = \int_L dz \int_L dz' W(z) W(z') = \int_L \int_L \chi\left(\Delta(z, z')\right) W(z + z') =$$
$$= \int_L dz W(z) \int_L dz' \chi\left(\Delta(z, z')\right) = |L| \int_{L^*} W(z) dz = P_{L^*}.$$

Таким образом, $\mathrm{T}r\left(\rho^2\right) = |L| > 1$, что невозможно, поскольку ρ по определнию является состоянием.

Некоторые очевидные свойства гауссовских состояний приведены в следующей теореме.

Теорема 1.6. *Справедливы следующие утверждения.*

- *Гауссовское состояние является чистым тогда, и только тогда, когда соотвествующая ему решетка является самодвойственной.*

- *Энтропия гауссовского состояния, определяемого решеткой L, равна $-\log|L|$.*

- *Гауссовские состояния ρ_1 и ρ_2 унитарно эквивалентны тогда, и только тогда, когда соответсвующие им решетки L_1 и L_2 имеют одинаковую меру.*

- *Энтропия гауссовского состояния определяет это состояние однозначно с точностью до унитарной эквивалентности.*

- *Гауссовское состояние имеет максимальную энтропию среди всех состояний фиксированного ранга $p^m, m \in \mathbb{Z}_+$.*

Будем использовать обозначение $\gamma(L)$ для оператора плотности гауссовского состояния, определяемого решеткой L. Мы рассмотрели только центрированные гауссовские состояния. Можно аналогичным образом рассмотреть гауссовские состояния $\gamma(L, \alpha)$ общего вида, которые задаются характеристической функцией вида

$$\pi_{\gamma(L,\alpha)} = \chi\left(\Delta(\alpha, z)\right) h_L(z).$$

Легко заметить, что

$$\gamma(L, \alpha) = W(\alpha)\gamma(L)W(-\alpha).$$

1.5 Линейные бозонные каналы

Пусть W – неприводимое представление ККС в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ – множество состояний.

По аналогии с вещественным случаем ([45]), линейным бозонным каналом (в представлении Шредингера) будем называть линейное вполне положительное сохраняющее след отображение $\Phi : \mathfrak{S}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ такое, что характеристическая функция π_ρ любого состояния $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ преобразуется по формуле

$$\pi_{\Phi[\rho]}(z) = \pi_\rho(Kz)k(z), \tag{4}$$

для некоторого линейного преобразования K пространства F и некоторой комплекснозначной функции k на F.

Вообще говоря, выражение (4) далеко не всегда определяет канал, для этого необходимы дополнительные условия на преобразование K и функцию k.

1.5.1 p-Адические гауссовские каналы

p-Адическим гауссовским каналом будем называть линейный бозонный канал, для которого функция k есть характеристическая функция некоторой решетки $L \subset F$, то есть $k(z) = h_L(z), z \in F$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.7. *Пусть K – невырожденное линейное преобразование пространства F, L – произвольная решетка в пространстве F, $k(z) = h_L(z)$. В этом случае выражение (4) определяет канал тогда, и только тогда, когда выполнено неравенство*

$$|1 - \mathrm{det}K|_p |L| \leq 1. \tag{5}$$

Заметим, что в случае $\mathrm{det}K = 1$ преобразование K является симплектическим и, следовательно, унитарно представимым. Поэтому далее рассматриваем случай $\mathrm{det}K \neq 1$.

Справедлива следующая Лемма.

Лемма 1.3. *Для того, чтобы линейное преобразование K и функция k определяли линейный бозонный канал, необходимо, чтобы функция k была $(1 - \mathrm{det}K)\Delta$-положительно определенной.*

В силу положительности двойственного канала Φ^*, определямого выражением

$$\Phi^* \left[W(z)\right] = W(Kz)k(z), z \in F,$$

для любых конечных наборов $z_1, \dots, z_n$ точек пространства F и $\psi_1, \dots, \psi_n$ векторов из пространства $\mathcal{H}$ выполнено неравенство

$$\sum_{i,j} \langle \psi_i, \Phi^* \left[W^*(z_i)W(z_j)\right] \psi_j \rangle \geq 0.$$

Выбрав векторы ψ_i следующего вида $\psi_i = \lambda_i W(-Kz_i)\psi$, $\psi \in \mathcal{H}, \|\psi\| = 1$, получаем

$$0 \leq \sum_{i,j} \langle \psi_i, \Phi^* \left[W^*(z_i)W(z_j)\right] \psi_j \rangle =$$

$$= \sum_{i,j} \chi \left(-\frac{1}{2}\Delta(z_i, z_j)\right) \langle \psi_i, \Phi^* \left[W(-z_i + z_j)\right] \psi_j \rangle =$$

$$\sum_{i,j} \chi \left(-\frac{1}{2}\Delta(z_i, z_j)\right) \langle \psi_i, W(-Kz_i + Kz_j)\psi_j \rangle \, k(z_j - z_i) =$$

$$= \sum_{i,j} \bar{\lambda}_i \lambda_j \chi \left(-\frac{1}{2}\Delta(z_i, z_j) + \frac{1}{2}\Delta(Kz_i, Kz_j)\right) k(z_j - z_i). \tag{6}$$

Фиксируем симплектический базис, в котором форма Δ имеет вид

$$\Delta(z,z') = z^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} z'.$$

Представим в этом базисе преобразование K в следующем виде

$$K = K_s \begin{pmatrix} \det K & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\det K_s = 1$. Тогда в силу инвариантности формы Δ относительно преобразования K_s формула (6) примет вид

$$\sum_{i,j} \bar{\lambda}_i \lambda_j \chi \left(-\frac{1}{2}(1-\det K)\Delta(z_i,z_j) \right) k(z_j - z_i) \geq 0.$$

Лемма доказана.

Как легко заметить, из Леммы 1.3 следует необходимость условий Теоремы 1.7. Действительно, поскольку $\det K \neq 1$, симплектическая форма $\tilde{\Delta} = (1-\det K)\Delta$ не вырождена. Перенормируем меру в пространстве F таким образом, чтобы самодвойственная относительно формы $\tilde{\Delta}$ решетка имела меру 1, $d\tilde{\mu} = |1-\det K|_p d\mu$. Согласно Теореме 1.5, характеристическая функция решетки L является $\tilde{\Delta}$-положительно определенной (т.е. определяет состояние) тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\int_L d\tilde{\mu} = |1-\det K|_p |L| \leq 1.$$

Необходимость условия Теоремы 1.7 доказана.

Обозначим через $B_{-1}(1) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |1-x|_p \leq p^{-1}\}$ шар в $\mathbb{Q}_p$ радиуса p^{-1} с центром в точке 1. Заметим, что $B_{-1}(1)$ является мультипликативной подгруппой в $\mathbb{Z}_p$.

Перейдем к доказательству достаточности. Для этого рассмотрим сначала случай $\det K \notin B_{-1}(1)$. Легко заметить в силу неархимедовости нормы, что в этом случае неравенство (5) эквивалентно выполнению одновременно двух условий $|L| \leq 1$ и $|KL| \leq 1$. Пусть L_s - самодвойственная решетка, содержащая решетку L, $\{\phi^a, a \in I\}$ - базис когерентных состояний, соответствующий решетке L_s. Через $\rho_a = \langle \phi^a, \rho\phi^a \rangle, a \in I$ обозначим матричные элементы матрицы плотности исходного состояния ρ. Справедливы равенства

$$\Phi\left[\rho\right] = \int_F \pi_{\Phi[\rho]}(z)W(-z)dz = \int_F \pi_\rho(Kz)h_L(z)W(-z)dz = \\ = \int_L \pi_\rho(Kz)W(-z)dz = \int_L \mathrm{T}r\left(\rho W(Kz)\right)W(-z)dz. \quad (7)$$

Вычислим след в подинтегральном выражении формулы (7) в базисе когерентных состояний $\{\phi^a, a \in I\}$.

$$\mathrm{T}r\left(\rho W(Kz)\right) = \sum_{a\in I} \langle \phi^a, \rho W(Kz)\phi^a\rangle = \sum_{a\in I}\langle \phi^a, \rho W(Kz)W(a)\phi\rangle = \\ = \sum_{a\in I}\chi\left(\Delta(Kz,a)\right)\langle\phi^a,\rho\phi^a\rangle = \sum_{a\in I}\chi\left(\Delta(z,K'a)\right)\rho_a. \quad (8)$$

Здесь через K' обозначено преобразование, симплектически сопряженное к преобразованию K.

Подставляя формулу (8) в формулу (7) и используя результаты Теоремы 1.5, получаем следующее представление для отображения Φ:

$$\Phi\left[\rho\right] = \sum_{a\in I}\rho_a\gamma(L, K'a). \quad (9)$$

Другими словами, отображение Φ переводит произвольное состояние в выпуклую линейную комбинацию гауссовских состояний. Очевидно, что выражение (9) действительно определяет канал. Таким образом, достаточность условий Теоремы 1.7 для случая $\det K \notin B_{-1}(1)$ доказана.

Докажем достаточность условий Теоремы 1.7 для случая $\det K \in B_{-1}(1)$. Для начала разберем ситуацию для тождественного преобразования K и решетки L такой, что выполнено условие $|L| > 1$. Пусть $L_s \subset L$ – самодвойственная решетка, лежащая в L. Через $\{\phi^a, a \in I\}$ обозначим базис когерентных состояний относительно решетки L_s. Для произвольного состояния ρ справедливы следующие равенства:

$$\Phi[\rho] = \int_F \pi_{\Phi[\rho]}(z) W(-z) dz =$$
$$= \int_L \pi_\rho(z) W(-z) dz = \sum_{b \in L \cap I} \int_{L_s} \pi_\rho(b+u) W(-b-u) du =$$
$$= \sum_{b \in L \cap I} W(-b) \int_{L_s} \chi\left(\frac{1}{2}\Delta(u,b)\right) \pi_\rho(b+u) W(-u) du. \quad (10)$$

Здесь мы воспользовались соотношениями Вейля. Вычисляя след в базисе из когерентных состояний и пользуясь соотношениями Вейля, получаем следующую цепочку равенств.

$$\pi_\rho(b+u) = \mathrm{T}r\left(\rho W(b+u)\right) = \sum_{a \in I} \langle \phi^a, \rho W(b+u) \phi^a \rangle =$$
$$= \chi\left(\frac{1}{2}\Delta(u,b)\right) \sum_{a \in I} \langle \phi^a, \rho W(b) W(u) \phi^a \rangle =$$
$$= \chi\left(\frac{1}{2}\Delta(u,b)\right) \sum_{a \in I} \chi\left(\Delta(u,a)\right) \langle \phi^a, \rho W(b) \phi^a \rangle \quad (11)$$

С учетом формул (10) и (11), получаем следующее выражение.

$$\Phi[\rho] =$$
$$= \sum_{a \in I} \sum_{b \in I \cap L} W(-b) \langle \phi^a, \rho W(b) \phi^a \rangle \int_{L_s} \chi\left(\Delta(u,b)\right) \chi\left(\Delta(u,a)\right) W(-u) du =$$
$$= \sum_{a \in I} \sum_{b \in I \cap L} \langle \phi^a, \rho W(b) \phi^a \rangle \int_{L_s} \chi\left(\Delta(u,a)\right) W(-u) du W(-b) =$$
$$= \sum_{a \in I} \sum_{b \in I \cap L} P^a \rho W(b) P^a W(-b) = \sum_{a \in I} \sum_{b \in I \cap L} P^a \rho W(a) P^b W(-a) =$$
$$= \sum_{a \in I} P^a \rho W(a) \left(\sum_{b \in L \cap I} P^b \right) W(-a) = \sum_{a \in I} P^a \rho W(a) P(L) W(-a). \quad (12)$$

В последней формуле введены обозначения $P^a, a \in I$ – ортогональный проектор на когерентное состояние ϕ^a, $P(L)$ – ортогональный проектор на подпространство, натянутое на когерентные состояния $\{\phi^a, a \in I \cap L\}$. На множестве I введем отношение эквивалентности: $a, a' \in I$ эквивалентны, если $a - a' \in L$. Множество I, таким образом, может быть представлено в виде объединения непересекающихся классов эквивалентности $I = \cup_\alpha I_\alpha, \alpha \in F/L$ (множество классов эквивалентности совпадает с множеством F/L). Через $P^\alpha(L)$ обозначим ортогональный проектор, натянутый на следующее множество когерентных состояний: $\{\phi^a, a \in I_\alpha\}$. Очевидно, что проекторы $P^\alpha(L)$ имеют одинаковый ранг $|L|$ и взаимно ортогональны при различных α, $\sum_\alpha P^\alpha(L) = 1$. С учетом введенных обозначений, из формулы (12) получаем

$$\Phi\left[\rho\right] = \sum_{\alpha \in F/L} \sum_{a \in I_\alpha} P^a \rho W(a) P(L) W(-a) = \sum_{\alpha \in F/L} P^\alpha(L) \rho P^\alpha(L). \qquad (13)$$

В последнем равенстве мы воспользовались тем фактом, что

$$W(a)P(L)W(-a) = P^\alpha(L)$$

для всех $a \in I_\alpha$.

Осталось рассмотреть случай $\det K \in B_{-1}(1)$, $|L| > 1$. Пусть $W(z), z \in F$ – неприводимое представление ККС. Поскольку решетка L является подгруппой аддитивной группы пространства F, можно рассмотреть сужение W^L представления W на подгруппу L: $W^L(z) = W(z), z \in L$. Пусть, как и ранее, L_s – самодвойственная решетка, $L_s \subset L$, $\{\phi^a, a \in I\}$ – соответствующий базис когерентных состояний. Как легко заметить, неприводимое представление коммутационных соотношений W^L реализуется в конечномерном пространстве, натянутом на когерентные состояния $\{\phi^a, a \in I \cap L\}$, причем сами эти состояния являются собственными векторами представления. Отсюда немедленно вытекает, что два любых неприводимых представления коммутационных соотношений над решеткой L унитарно эквивалентны. Пусть K – преобразование пространства F, удовлетворяющее условию (5). Введем обозначения $W_K(z) = W(Kz), W_K^L(z)$ – сужение представления W_K на решетку. Операторы $W_K(z), z \in F$ удовлетворяют соотношению

$$W_K(z)W_K(z') = \chi\left(\frac{1}{2}\Delta(Kz, Kz')\right) W_K(z + z').$$

Соотношение (5) обеспечивает выполнение следующего условия

$$\Delta(Kz, Kz') - \Delta(z, z') \in \mathbb{Z}_p$$

для всех $z, z' \in L$. Следовательно, операторы $W_K^L(z), z \in L$ удовлетворяют соотношению

$$W_K^L(z)W_K^L(z') = \chi\left(\frac{1}{2}\Delta(z,z')\right)W_K^L(z+z').$$

В силу единственности с точностью до унитарной эквивалентности неприводимого представления коммутационных соотношений над решеткой L существует унитарный оператор $U(K)$ такой, что выполнено соотношение

$$U(K)W^L(z)U^{-1}(K) = W_K^L(z)$$

для всех $z \in L$.

Переходя, если необходимо, к унитарно эквивалентному представлению ККС, можно выбрать решетку $L_s \in L$ таким образом, что L_s будет инвариантна относительно действия преобразования K. В этом случае когерентные состояния $\{\phi^a, a \in I \cap L\}$ будут являться собственными векторами оператора $U(K)$. Оператор $U(K)$ определен на подпространстве, натянутом на векторы $\{\phi^a, a \in I \cap L\}$. Продолжим его на все пространство, определив действие на когерентных состояниях по формуле

$$\tilde{U}(K)\phi^a = W(\alpha)U(K)W(-\alpha)\phi^a, a \in I_\alpha, \alpha \in F/L.$$

Определенный таким образом оператор $\tilde{U}(K)$ коммутирует со всеми проекторами $P^\alpha(L), \alpha \in F/L$.

Таким образом, принимая во внимание соотношение (13), получаем следующее выражение

$$\Phi\left[\rho\right] = \sum_{\alpha \in F/L} P^\alpha(L)\tilde{U}^{-1}(K)\rho\tilde{U}(K)P^\alpha(L). \tag{14}$$

Теорема доказана. Из Теоремы 1.7 вытекают следующие простые следствия.

Следствие 1.1. *p-Адический гауссовский канал разрушает сцепленность тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из условий: либо* $\det K \notin B_{-1}(1)$, *либо* $|L| = 1$.

Действительно, в случае $\det K \notin B_{-1}(1)$ канал является классически-квантовым. В случае же $\det K \in B_{-1}(1)$ канал является идеальным измерением фон Неймана (с точностью до унитарной эквивалентности), при этом измерение является полным только в случае $|L| = 1$.

Следствие 1.2. *p-Адический гауссовский канал обладает свойством аддитивности.*

Это непосредственно вытекает из явного вида канала (канал является либо классически-квантовым, либо унитарно эквивалентен идеальному измерению фон Неймана).

2 p-Адический индекс Маслова

2.1 Введение

В предыдущей главе была предложена конструкция p-адического квантового бозонного канала. Эта конструкция соответствует открытой квантовой системе и не унитарной динамике (есть нетривиальное взаимодействие с окружением системы).

Настоящая глава посвящена унитарной динамике одномерной p-адической квантовой системы. Эта динамика описывается специальным представлением симплектической группы двумерного симплектического пространства над полем p-адических чисел, так называемым метаплектическим представлением (см., например, [13], [73]).

Вышеуказанное представление тесно связано с действием симплектической группы на дереве Брюа-Титса. Получены новые явные формулы для коцикла метаплектического представления симплектической группы и описаны орбиты действия этой группы на множестве троек вершин дерева Брюа-Титса через p-адический индекс Маслова.

2.2 Геометрия пространства решеток

Определение решетки в двумерном векторном пространстве над полем $\mathbb{Q}_p$ и конструкция дерева Брюа-Титса приведены в предыдущей главе. Здесь рассмотрим некоторые дополнительные свойства множества решеток. Напомним соответствующие определения.

Пусть F – двумерное векторное пространство над полем $\mathbb{Q}_p$. На пространстве F задана невырожденная симплектическая форма Δ. Свободный модуль ранга 2 над кольцом $\mathbb{Z}_p$ целых p-адических чисел, рассматриваемый как подмножество F, будем называть решеткой в F. Решетка является компактным множеством в естественной топологии на пространстве F.

Назовем две решетки L_1 и L_2 эквивалентными, если существует $\lambda \in \mathbb{Q}_p^*$ такое, что выполнено равенство $L_2 = \lambda L_1$.

Пусть $\hat{L}_1$, $\hat{L}_2$ – два класса эквивалентности решеток с представителями L_1 и L_2 соответственно, причем $L_2 \subset L_1$. Тогда существуют целые числа m, n такие, что

$$L_1/L_2 = \mathbb{Z}_{p^m} \bigoplus \mathbb{Z}_{p^n}.$$

Неотрицательное целое число $d\left(\hat{L}_1, \hat{L}_2\right) = |m-n|$ не зависит от выбора представителей в классах эквивалентности и определяет метрику на множестве классов эквивалентности решеток.

С помощью метрики d можно построить граф Γ, вершинами которого являются классы эквивалентности решеток, а ребрами – пары вершин, расстояние d между которыми равно единице. Граф Γ является деревом, из каждой вершины которого выходит $p+1$ ребро.

На множестве решеток введем отношение двойственности. Пусть L – решетка, под двойственной решеткой L^* будем понимать подмножество пространства F следующего вида: $u \in L^*$ тогда, и только тогда, когда условие $\Delta(u,v) \in \mathbb{Z}_p$ выполнено для всех $v \in L$.

Если L совпадает с L^*, то решетку L будем называть самодвойственной. Если в классе эквивалентности решеток существует самодвойственная решетка, то она единственна. Это позволяет очевидным образом перенести метрику d на множество самодвойственных решеток. Определенное таким образом расстояние между двумя самодвойственными решетками всегда четно. Множество самодвойственных решеток обозначим через Λ.

Напомним, что для любой самодвойственной решетки L существует такой симплектический базис (e_1, e_2) в пространстве F, что решетка L имеет вид

$$L = \mathbb{Z}_p e_1 \bigoplus \mathbb{Z}_p e_2,$$

то есть L является единичным шаром в этом базисе. Более того, для любой пары самодвойственных решеток L_1 и L_2 существует такой симплектический базис (e_1, e_2), в котором решетки имеют вид

$$L_1 = \mathbb{Z}_p e_1 \bigoplus \mathbb{Z}_p e_2, L_2 = p^m \mathbb{Z}_p e_1 \bigoplus p^{-m} \mathbb{Z}_p e_2$$

для некоторого неотрицательного целого числа m, при этом $d\left(L_1, L_2\right) = 2m$.

С учетом последнего замечания, расстояние d на множестве самодвойственных решеток можно записать в виде:

$$d\left(L_1, L_2\right) = 2\log_p\left[L_1/\left(L_1 \cup L_2\right)\right] = 2\log_p\left[L_2/\left(L_1 \cup L_2\right)\right].$$

Здесь квадратными скобками обозначено число элементов соответствующей фактор-группы.

Введем «координаты» на множестве Λ.

Лемма 2.1. *Пусть $\{e, f\}$ – симплектический базис в пространстве (F, Δ). Для любой самодвойственной решетки $L \in \Lambda$ существует пара $(m, \mu), m \in \mathbb{Z}, \mu \in \mathbb{Q}_p$ (которую будем называть координатами решетки в базисе $\{e, f\}$) такая, что L имеет вид*

$$L = \mathbb{Z}_p p^m \bigoplus \mathbb{Z}_p \left(\mu p^m e + p^{-m} f\right).$$

Решетки L и L' с координатами (m, μ) и (m', μ') соответственно совпадают тогда, и только тогда, когда выполнены условия $m = m'$, $\mu - \mu' \in \mathbb{Z}_p$.

Доказательство следует непосредственно из разложения Ивасавы для группы $SL_2(\mathbb{Q}_p)$. Действительно, пусть $L_0, L \in \Lambda$, при этом решетка L_0 имеет вид

$$L_0 = \mathbb{Z}_p e \bigoplus \mathbb{Z}_p f.$$

В силу транзитивности действия симплектичекой группы на Λ существует такой элемент $g \in SL_2(\mathbb{Q}_p)$, что $L = gL_0$. Разложение Ивасавы для элемента g имеет вид

$$g = \begin{pmatrix} p^m & 0 \\ 0 & p^{-m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_0, g_0 \in SL_2(\mathbb{Z}_p).$$

Последняя формула дает искомые координаты. В дальнейшем будем считать $|\mu|_p \geq 1$.

Лемма 2.2. *Расстояние между решетками L_0 и L с координатами $(0, 0)$ и (m, μ) (в базисе $\{e, f\}$) соответственно дается формулой*

$$d(L_0, L) = 2 \max\left\{-m + \log_p |\mu|_p, |m|\right\}.$$

Пусть $m \geq 0$. Множество $L_0 \cap L$ состоит из элементов $\alpha e + \beta f$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_p$, $p^m \beta \mu \in \mathbb{Z}_p$, $\beta \in p^m \mathbb{Z}_p$, откуда следует утверждение леммы. Для случая $m < 0$ перейдем к симплектическому базису $\{p^m e, p^{-m} f + \mu p^m e\}$, в котором решетки L_0 и L имеют координаты $\left(-m, p^{2m}\mu\right)$ и $(0, 0)$ соответственно. Дальнейшее доказательство очевидно.

Для примера вычислим координаты решеток, ближайших к $L_0 = (0, 0)$, то есть, лежащих на расстоянии 2 от L_0.

Лемма 2.3. *Координаты решеток, лежащих на расстоянии 2 от начала координат, даются таблицей*

m	-1	0	1	1	1
μ	0	μ_0/p	0	μ_0/p	$\mu_0/p^2+\mu_1/p$

Здесь $\mu_0 = 1, \dots p-1$ *и* $\mu_1 = 0, 1, \dots p-1$.

Принимая во внимание лемму 2.1, легко заметить, что все решетки, координаты которых приведены в таблице, различны. Кроме того, из леммы 2.2 видно, что расстояния до начала координат равны 2. Остается заметить, что всего решеток в таблице $p(p+1)$, то есть это все самодвойственные решетки, ближайшие к началу координат.

2.3 Сплетающий оператор

В предыдущей главе было построено неприводимое представление канонических коммутационных соотношений, ассоциированное с самодвойственной решеткой L в пространстве (F, Δ). Напомним конструкцию.

Пусть W – отображение из пространства F в множество унитарных операторов на пространстве H, удовлетворяющее соотношению

$$W(z)W(z') = \chi\left(\frac{1}{2}\Delta(z,z')\right)W(z+z')$$

для всех $z, z' \in F$. Здесь $\chi(x) = \exp\left(2\pi i \{x\}_p\right)$, где $\{x\}_p$ - p-адическая дробная часть числа $x \in \mathbb{Q}_p$. Дополнительно будем считать отображение W непрерывным в сильной операторной топологии. Отображение W называется представлением канонических коммутационных соотношений (ККС) в форме Вейля.

В качестве примера такого представления рассмотрим представление в пространстве $L^2(F)$ следующего вида

$$\left(W(z)f\right)(s) = \chi\left(\frac{1}{2}\Delta(z,s)\right)f(s-z), z, s \in F, f \in L^2(F). \tag{15}$$

Легко убедиться в том, что определенные таким образом операторы удовлетворяют соотношениям Вейля, и отображение $z \to W(z)$ сильно непрерывно.

Пусть L – самодвойственная решетка в пространстве F. Характеристическую функцию этой решетки обозначим через ϕ_L. Рассмотрим замкнутое подпространство H_L пространства $H = L^2(F)$, натянутое на вектора

$\{W(z)\phi_L, z \in F\}$. Пространство H_L инвариантно относительно действия операторов представления $W(z), z \in F$, множество когерентных состояний $\{\phi_L^a = W(a)\phi_L, a \in I = F/L\}$ образуют ортонормированный базис в H_L. Таким образом, сужение представления (15) на подпространство H_L является неприводимым представлением ККС. Обозначим это представление через (W_L, H_L).

Пусть L_1 и L_2 две самодвойственные решетки. Соответствующие представления ККС неприводимы и, как следствие, унитарно эквивалентны. Следовательно, существует унитарный оператор $F_{12}\colon H_{L_1} \to H_{L_2}$, удовлетворяющий соотношению при всех $z \in F$:

$$F_{21}W_{L_1}(z) = W_{L_2}(z)F_{21},$$

который будем называть сплетающим оператором. Введем обозначение $\rho_{21} = [L_2/\left(L_1 \cap L_2\right)]$. Не сложно заметить, что ρ_{12} есть обратный объем решетки $L_1 \cap L_2$, следовательно, $\rho_{21} = \rho_{12}$.

Теорема 2.1. *Оператор $F_{12}\colon H_{L_1} \to H_{L_2}$, определяемый формулой*

$$\left(F_{21}f\right)(u) = \frac{1}{\sqrt{\rho_{21}}} \sum_{\alpha \in L_2/(L_1 \cap L_2)} \chi\left(\frac{1}{2}\Delta(\alpha, u)\right) f(\alpha + u)$$

является сплетающим оператором.

Прежде всего, заметим, что выражение под знаком суммы в последней формуле не зависит от выбора представителя α в классе $L_1/\left(L_1 \cap L_2\right)$.

Перепишем выражение для оператора F_{21} в виде

$$F_{21} = \frac{1}{\sqrt{\rho_{21}}} \sum_{\alpha \in L_2/(L_1 \cap L_2)} \chi\left(\Delta(\alpha, u)\right) W_{L_1}(-\alpha) f(u).$$

Из последней формулы, принимая во внимание ортогональность когерентных состояний, следует изометричность оператора F_{21}:

$$\|F_{21}f\|_{L_2}^2 = \frac{1}{\rho_{21}} \sum_{\alpha \in L_2/(L_1 \cap L_2)} \|W_{L_1}(-\alpha)f\|_{L_1}^2 = \|f\|_{L_1}^2.$$

Поскольку группа $L_1/\left(L_1 \cap L_2\right)$ есть прямая сумма двух конечных циклических групп, то справедлива формула

$$\sum_{\beta \in L_1/(L_1 \cap L_2)} \chi\left(\Delta(\alpha, \beta)\right) = \begin{cases} \rho_{21}, & \text{если } \alpha \in L_1 \cap L_2; \\ 0, & \text{если } \alpha \notin L_1 \cap L_2. \end{cases}$$

Покажем, что $F_{12}F_{21}$ есть тождественный оператор в пространстве H_{L_1}. Действительно, с учетом последнего равенства,

$$
\begin{aligned}
&F_{12}F_{21}f(u)\\
&\qquad = \frac{1}{\rho_{12}} \sum_{\substack{\alpha\in L_2/(L_1\cap L_2)\\ \beta\in L_1/(L_1\cap L_2)}} \chi\left(\frac{1}{2}\Delta(\beta,u)+\frac{1}{2}\Delta(\alpha,u+\beta)\right) f(u+\alpha+\beta)\\
&= \frac{1}{\rho_{12}} \sum_{\substack{\alpha\in L_2/(L_1\cap L_2)\\ \beta\in L_1/(L_1\cap L_2)}} \chi\left(\frac{1}{2}\Delta(\beta,u)+\frac{1}{2}\Delta(\alpha,u+\beta)+\frac{1}{2}\Delta(u+\alpha,\beta)\right) f(u+\alpha)\\
&\quad = \frac{1}{\rho_{12}} \sum_{\alpha\in L_2/(L_1\cap L_2)} \chi\left(\frac{1}{2}\Delta(\alpha,u)\right) f(u+\alpha) \sum_{\beta\in L_1/(L_1\cap L_2)} \chi\left(\Delta(\alpha,\beta)\right) = f(u).
\end{aligned}
$$

Во второй строке последней цепочки равенств воспользовались тем, что $f \in H_{L_1}$. Теорема доказана. Оператор F_{21} будем называть каноническим сплетающим оператором.

2.4 p-Адический индекс Маслова

Пусть L_1, L_2, L_3 – тройка самодвойственных решеток в пространстве (F,Δ), (H_{L_1}, W_{L_1}), (H_{L_2}, W_{L_2}), (H_{L_3}, W_{L_3}) – соответствующие этим решеткам неприводимые представления ККС и F_{21}, F_{32}, F_{31} – канонические сплетающие операторы соответствующих индексам пар представлений. Тогда оператор $\mathcal{F}$, равный произведению сплетающих операторов, $\mathcal{F} = F_{13}F_{32}F_{21}$, действующий на пространстве H_{L_1}, коммутирует со всеми операторами представления (H_{L_1}, W_{L_1}) и, следовательно, пропорционален тождественному оператору. Таким образом, справедливо равенство

$$\mathcal{F} = \mu\left(L_1, L_2, L_3\right) Id.$$

Комплексное число $\mu\left(L_1, L_2, L_3\right)$, равное по модулю единице, будем называть *индексом Маслова* тройки самодвойственных решеток.

Используя явный вид канонического сплетающего оператора, не сложно получить следующее выражение для индекса Маслова.

Лемма 2.4. *Пусть* $L_1, L_2, L_3 \in \Lambda$. *Справедлива следующая формула*

$$\mu(L_1, L_2, L_3) = \sqrt{\frac{\rho_{12}\rho_{23}}{\rho_{31}}} \sum_{\substack{\alpha \in L_2/(L_2 \cap L_3) \\ \beta \in L_3/(L_3 \cap L_1) \\ \alpha+\beta \in L_1}} \chi\left(\frac{1}{2}\Delta(\alpha, \beta)\right).$$

Действительно, пользуясь формулой для сплетающего оператора, получаем равенства

$$\sqrt{\rho_{12}\rho_{23}\rho_{31}}\mathcal{F}f(u)$$
$$= \sum_{\substack{\alpha \in L_2/(L_1 \cap L_2) \\ \beta \in L_3/(L_2 \cap L_3) \\ \gamma \in L_1/(L_3 \cap L_1)}} \chi\left(\frac{1}{2}\Delta(\gamma, u) + \frac{1}{2}\Delta(\beta, u+\gamma) + \frac{1}{2}\Delta(\alpha, u+\beta+\gamma)\right) f(u+\alpha+\beta+\gamma)$$
$$= \sum_{\substack{\alpha \in L_2/(L_1 \cap L_2) \\ \beta \in L_3/(L_2 \cap L_3) \\ \gamma \in L_1/(L_3 \cap L_1)}} \chi\left(\frac{1}{2}\Delta(\alpha, \beta) + \Delta(\alpha+\beta, \gamma)\right) f(u+\alpha+\beta).$$

Применяя последнюю формулу при $f = \phi_{L_1}$, получаем утверждение леммы:

$$\mu(L_1, L_2, L_3) = (\mathcal{F}\phi_{L_1}, \phi_{L_1}) = \sqrt{\frac{\rho_{12}\rho_{23}}{\rho_{31}}} \sum_{\substack{\alpha \in L_2/(L_2 \cap L_3) \\ \beta \in L_3/(L_3 \cap L_1) \\ \alpha+\beta \in L_1}} \chi\left(\frac{1}{2}\Delta(\alpha, \beta)\right).$$

Не составляет труда получить следующие свойства индекса.

Лемма 2.5. *Пусть* $L_1, L_2, L_3, L_4 \in \Lambda$. *Индекс Маслова обладает следующими свойствами:*

- $\mu(L_1, L_2, L_3) = \mu(gL_1, gL_2, gL_3), g \in Sp(F)$;
- $\mu(L_1, L_2, L_3) = 1$, *если хотя бы две решетки в тройке совпадают;*
- $\mu(L_1, L_2, L_3)$ *не меняется при четных перестановках решеток в тройке и переходит в сопряженное число при нечетных;*
- $\mu(L_1, L_2, L_3)\,\mu(L_1, L_3, L_4) = \mu(L_2, L_3, L_4)\,\mu(L_2, L_4, L_1)$.

Первое утверждение леммы прямо следует из явной формулы для индекса. Остальные утверждения доказываются непосредственно из определения.

Для примера докажем последнее утверждение (свойство коцикла):

$$\begin{aligned}\mu\left(L_1, L_2, L_3\right) \mu\left(L_1, L_3, L_4\right) Id &= F_{14}F_{43}F_{32}F_{21} \\ &= F_{21}^{-1}F_{21}F_{14}F_{42}F_{24}F_{43}F_{32}F_{21} \\ &= \mu\left(L_2, L_3, L_4\right) \mu\left(L_2, L_4, L_1\right) Id\end{aligned}$$

2.5 Вычисление индекса

Любое ненулевое p-адическое число $x \in \mathbb{Q}_p^*$ представляется в виде

$$x = p^{\operatorname{ord}_p(x)}\epsilon(x),$$

где $\operatorname{ord}_p \colon \mathbb{Q}_p^* \to \mathbb{Z}, |x|_p = p^{-\operatorname{ord}_p(x)}$ и $\epsilon(x) = x_0 + x_1 p + \ldots, x_j = 0, 1, \ldots, p-1, x_0 \neq 0$.

Через $\lambda_p \colon \mathbb{Q}_p \to \mathbb{T}$ обозначим следующую функцию:

$$\lambda_p(x) = \begin{cases} 1, & x = 0; \\ 1, & \operatorname{ord}_p(x) = 2k, k \in \mathbb{Z}; \\ \left(\frac{\epsilon(x)}{p}\right), & \operatorname{ord}_p(x) = 2k+1, k \in \mathbb{Z}, p \equiv 1 \pmod 4; \\ i\left(\frac{\epsilon(x)}{p}\right), & \operatorname{ord}_p(x) = 2k+1, k \in \mathbb{Z}, p \equiv 3 \pmod 4). \end{cases}$$

Здесь $\left(\frac{\epsilon(x)}{p}\right)$ – символ Лежандра p-адической единицы $\epsilon(x)$. Функция λ_p была введена в работе [13].

Лемма 2.6. *Функция λ_p обладает следующими свойствами ([13]).*

- $\lambda_p(-x) = \overline{\lambda_p(x)}$;
- $\lambda_p(a^2 x) = \lambda_p(x), a \in \mathbb{Q}_p^*$;
- $\lambda_p(x)\lambda_p(y) = \lambda_p\left(\frac{x+y}{xy}\right)\lambda_p(x+y)$;
- $\lambda_p(x)\lambda_p(y) = (x, y)\lambda_p(xy)$, *где (x, y) – символ Гильберта;*
- $\sum_{k=0}^{p^n-1} \exp\left(2\pi i a \frac{k^2}{p^n}\right) = p^{n/2}\lambda_p\left(ap^n\right), a \in \mathbb{Z}, p \nmid a, n \in \mathbb{Z}_+$.

Для тройки решеток L_1, L_2, L_3 с координатами $(0,0), (k,\kappa), (n,\nu)$ соответственно, введем обозначение $\mu\left(L_1, L_2, L_3\right) = M(k,\kappa; n,\nu)$.

Используя лемму 2.6 можно вычислить индекс Маслова в явном виде. А именно, справедлива теорема.

Теорема 2.2. *Справеливы следующие формулы:*

- $M(k,0;n,0)=1, k,n\in\mathbb{Z}$;
- $M(k,0;0,\nu)=\begin{cases}1, & k\geq 0 \text{ или } \nu\in\mathbb{Z}_p;\\ \lambda_p(-2\nu), & k<0, 1<|\nu|_p<p^{-2k};\\ 1, & k<0, |\nu|_p\geq p^{-2k};\end{cases}$
- $M(0,\kappa;0,\nu)=\begin{cases}1, & \kappa\in\mathbb{Z}_p \text{ или } \nu\in\mathbb{Z}_p \text{ или } \kappa-\nu\in\mathbb{Z}_p;\\ \lambda_p(2\kappa\nu(\kappa-\nu)), & \text{в других случаях.}\end{cases}$

Поскольку индекс Маслова по модулю равен единице, все вычисления будем производить с точностью до умножения на положительное вещественное число и вместо знака равенства использовать знак подобия. Используя лемму 2.4:

$$\mu\left(L_1,L_2,L_3\right)=M(k,\kappa;n,\nu)\sim\sum_{\substack{\alpha\in L_2/(L_2\cap L_3)\\ \beta\in L_3/(L_3\cap L_1)\\ \alpha+\beta\in L_1}}\chi\left(\frac{1}{2}\Delta(\alpha,\beta)\right).$$

В первом утверждении теоремы, принимая во внимание лемму 2.5, можно ограничиться рассмотрением случаев $k\neq 0, n\neq 0, k\neq n$. Можно также считать $k>n, k>0$, в противном случае просто изменим порядок решеток в тройке и сделаем замену базиса $e\to f, f\to -e$. Поскольку $\alpha\in L_2$ и $\beta\in L_3$, их можно записать в виде $\alpha=\alpha_1 p^k e+\alpha_2 p^{-k} f$, $\beta=\beta_1 p^n e+\beta_2 p^{-n} f$, где $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\in\mathbb{Z}_p$. Учитавая $k>0$, условие $\alpha+\beta\in L_1$ принимает вид $p^n\beta_1\in\mathbb{Z}_p, p^{-k}\alpha_2+p^{-n}\beta_2\in\mathbb{Z}_p$. Учитывая также, что $k>n$, получим цепочку равенств

$$\begin{aligned}\chi\left(\frac{1}{2}\Delta(\alpha,\beta)\right)&=\chi\left(\frac{1}{2}p^{k-n}\alpha_1\beta_2-\frac{1}{2}p^{n-k}\alpha_2\beta_1\right)\\ &=\chi\left(\frac{1}{2}p^{n-k}\alpha_2\beta_1\right)=\chi\left(-\frac{1}{2}p^n\beta_1\left(p^{-n}\beta_2-p^{-k}\alpha_2-p^{-n}\beta_2\right)\right)\\ &=\chi\left(-\frac{1}{2}p^n\beta_1\left(p^{-n}\beta_2-p^{-k}\alpha_2\right)+\frac{1}{2}\beta_1\beta_2\right)=1.\end{aligned}$$

Во втором утверждении теоремы, принимая во внимание лемму 2.5, можно ограничиться рассмотрением случаев $k\neq 0, \nu\notin\mathbb{Z}_p$. Представим параметры суммирования в виде $\alpha=\alpha_1 p^k e+\alpha_2 p^{-k} f$, $\beta=\beta_1 p^n e+\beta_2(\nu e+f)$, где

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{Z}_p$. Условие $\alpha + \beta \in L_1$ принимает вид

$$p^k \alpha_1 + \nu \beta_2 \in \mathbb{Z}_p, p^{-k} \alpha_2 \in \mathbb{Z}_p. \tag{16}$$

С учетом этого, получаем цепочку равенств

$$\begin{aligned}\chi\left(\frac{1}{2}\Delta(\alpha,\beta)\right) &= \chi\left(\frac{1}{2}p^k\alpha_1\beta_2 - \frac{1}{2}p^{-k}\nu\alpha_2\beta_2\right) \\ &= \chi\left(\frac{1}{2}p^k\alpha_1\beta_2 - \frac{1}{2}p^{-k}\alpha_2\left(p^k\alpha_1 + \nu\beta_2 - p^k\alpha_1\right)\right) \\ &= \chi\left(\frac{1}{2}p^k\alpha_1\beta_2 - \frac{1}{2}p^{-k}\alpha_2\left(p^k\alpha_1 + \nu\beta_2\right) + \frac{1}{2}\alpha_1\alpha_2\right) = \chi\left(\frac{1}{2}p^k\alpha_1\beta_2\right).\end{aligned} \tag{17}$$

Из последнего равенства немедленно следует справедливость второго утверждения теоремы для первой области параметров. Так же просто второе утверждение теоремы доказывается для третьей области параметров. Действительно

$$p^k\alpha_1\beta_2 = p^k\alpha_1\frac{1}{\nu}\left(p^k\alpha_1 + \nu\beta_2 - p^k\alpha_1\right) = p^k\alpha_1\frac{1}{\nu}\left(p^k\alpha_1 + \nu\beta_2\right) - p^{2k}\alpha_1^2.$$

Видно, что при выполнении условий $k < 0$ и $|\nu|_p \geq p^{-2k}$ оба слагаемых в последней сумме есть целые p-адические числа и $\chi\left(\frac{1}{2}\Delta(\alpha,\beta)\right) = 1$.

Для завершения доказательства второго утверждения теоремы осталось рассмотреть вторую область значений параметров, $k < 0, 1 < |\nu|_p < p^{-2k}$. Докажем утверждение для случая $k < 0, 1 < |\nu|_p \leq p^{-k}$, случай $k < 0, p^{-k} < |\nu|_p < p^{-2k}$ рассматривается аналогично. Введем новые обозначения: $\alpha_1 = a, \beta_2 = b, \mathrm{ord}_p(\nu) = n, \epsilon(\nu) = \epsilon$. В новых обозначениях условия (16) приобретают вид

$$p^k\left(a_0 + a_1 p + \dots\right) + p^n\left(b_0 + b_1 p + \dots\right)\epsilon \in \mathbb{Z}_p.$$

Следовательно

$$\begin{gathered}a_0 = a_1 = \dots = a_{n-k-1} = 0 \\ a_{n-k} + (b\epsilon)_0 = 0 \\ \vdots \\ a_{-k-1} + (b\epsilon)_{-n-1} = 0.\end{gathered}$$

Таким образом, учитывая (17), получаем равенство

$$\chi\left(\frac{1}{2}\Delta(\alpha,\beta)\right) = \chi\left(\frac{1}{2}p^n\left(a_{n-k}+a_{n-k+1}p+\dots\right)\left(b_0+b_1p+\dots\right)\right)$$
$$= \chi\left(-p^n\left((b\epsilon)_0+\dots+(b\epsilon)_{-n-1}p^{-n-1}\right)\left(b_0+\dots+b_{-n-1}p^{-n-1}\right)\right)$$
$$= \chi\left(-\frac{1}{2}p^n\left(\left(b_0+b_1p+\dots+b_{-n-1}p^{-n-1}\right)^2\eta\right)\right).$$

Здесь $\eta = \epsilon_0+\epsilon_1p+\dots+\epsilon_{-n-1}p^{-n-1}$.

Из последней формулы получаем:

$$M(k,0;0,\nu) \sim \sum_{b_0,b_1,\dots,b_{-n-1}=0}^{p-1}\chi\left(-\frac{1}{2}p^n\left(\left(b_0+b_1p+\dots+b_{-n-1}p^{-n-1}\right)^2\eta\right)\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{p^{-n}-1}\exp\left(2\pi i\left(\frac{-\eta}{2}\right)\frac{k^2}{p^{-n}}\right).$$

Таким образом, $M(k,0;0,\nu) = \lambda_p\left(-1/2p^{-n}\eta\right) = \lambda_p(-2\nu)$.

Докажем третье утверждение теоремы. Первый случай области параметров непосредственно вытекает из простейших свойств индекса Маслова (лемма 2.5). По существу, доказательство воспроизводит доказательство предыдущего утверждения теоремы. Доказательство приведем для случая $|\kappa|_p \neq |\nu|_p$ и положим, для определенности, $|\nu|_p < |\kappa|_p$. Случай $|\kappa|_p = |\nu|_p$ доказывается аналогично. Пусть $\alpha \in L_2, \beta \in L_3, \alpha+\beta \in L_1$. Справедливы соотношения:

$$\alpha = \alpha_1 e + a(\kappa e + f),$$
$$\beta = \beta_1 e + b(\nu e + f),$$
$$\kappa a + \nu b \in \mathbb{Z}_p.$$

Здесь $\alpha_1, \beta_1, a, b \in \mathbb{Z}_p$. Следовательно

$$\chi\left(\frac{1}{2}\Delta(\alpha,\beta)\right) = \chi\left(\frac{1}{2}(\kappa-\nu)ab\right).$$

Пусть $\mathrm{ord}_p(\kappa) = -k, \mathrm{ord}_p(\nu) = -n, k > n \geq 1$. Условие

$$p^{-k}\epsilon(\kappa)\left(a_0+a_1p+\dots\right)+p^{-n}\epsilon(\nu)\left(b_0+b_1p+\dots\right) \in \mathbb{Z}_p$$

эквивалентно цепочке равенств

$$(\epsilon(\kappa)a)_0 = (\epsilon(\kappa)a)_1 = \cdots = (\epsilon(\kappa)a)_{k-n-1} = 0,$$
$$(\epsilon(\kappa)a)_{k-n} + (\epsilon(\nu)b)_0 = 0,$$
$$\vdots$$
$$(\epsilon(\kappa)a)_{k-1} + (\epsilon(\nu)b)_{n-1} = 0.$$

Таким образом, учитывая равенство $\mathrm{ord}_p(\kappa - \nu) = \mathrm{ord}_p(\kappa)$,

$$\begin{aligned}\chi\left(\frac{1}{2}\Delta(\alpha,\beta)\right) &= \chi\left(-\frac{1}{2}(\kappa-\nu)\frac{\epsilon(\nu)}{\epsilon(\kappa)}p^{k-n}\left(b_0 + b_1 p + \cdots + b_{n-1}p^{n-1}\right)^2\right)\\ &= \chi\left(\frac{1}{2}p^{-n}\eta\left(b_0 + b_1 p + \cdots + b_{n-1}p^{n-1}\right)^2\right),\end{aligned}$$

где

$$\eta = \left(\epsilon(\kappa-\nu)\frac{\epsilon(\kappa)}{\epsilon(\nu)}\right)_0 + \left(\epsilon(\kappa-\nu)\frac{\epsilon(\kappa)}{\epsilon(\nu)}\right)_1 p + \cdots + \left(\epsilon(\kappa-\nu)\frac{\epsilon(\kappa)}{\epsilon(\nu)}\right)_{n-1} p^{n-1}.$$

Повторяя рассуждения из доказательства второго утверждения теоремы, получаем выражение для индекса

$$M(0,\kappa;0,\nu) = \lambda_p\left(\frac{1}{2}p^n\eta\right).$$

Используя свойства функции λ_p и равенство $\mathrm{ord}_p(\kappa - \nu) = \mathrm{ord}_p(\kappa)$,

$$\begin{aligned}M(0,\kappa;0,\nu) &= \lambda_p\left(\frac{1}{2}p^n\epsilon(\kappa-\nu)\frac{\epsilon(\nu)}{\epsilon(\kappa)}\right)\\ &= \lambda_p\left(\frac{1}{2}p^n\epsilon(\kappa-\nu)\frac{p^k\epsilon(\nu)}{p^k\epsilon(\kappa)}\right)\\ &= \lambda_p\left(\frac{1}{2}(\kappa-\nu)\frac{\nu}{\kappa}\right) = \lambda_p(2\kappa\nu(\kappa-\nu).\end{aligned}$$

Теорема доказана.

2.6 Геометрическая интерпретация индекса

Как уже отмечалось, симплектическая группа пространства (F, Δ) действует транзитивно на множестве $\mathcal{L} = \{L\}$ самодвойственных решеток в (F, Δ). Это действие также транзитивно на множестве пар самодвойственных решеток с одинаковым расстоянием между решетками в парах (например, расстояние равно 2), $\mathcal{P} = \{L_1, L_2, d\left(L_1, L_2\right) = 2\}$. Рассмотрим множество упорядоченных троек решеток с попарными расстояниями между решетками равными 2: $\mathcal{T} = \{L_1, L_2, L_3, d\left(L_i, L_j\right) = 2, i, j = 1, 2, 3\}$. Элемент этого множества будем обозначать квадратными скобками: $[L_1, L_2, L_3] \in \mathcal{T}$. Действие симплектической группы на множестве $\mathcal{T}$ не является транзитивным, орбиты действия параметризуются значениями индекса Маслова. А именно, справедлива теорема.

Теорема 2.3. *Пусть $\left[L_1, L_2, L_3\right], \left[L_1', L_2', L_3'\right] \in \mathcal{T}$. Симплектическое преобразование $g \in SL_2\left(\mathbb{Q}_p\right)$, переводящее одну тройку в другую $L_1' = gL_1, L_2' = gL_2, L_3' = gL_3$ существует тогда, и только тогда, когда индексы Маслова троек совпадают, $\mu\left(L_1, L_2, L_3\right) = \mu\left(L_1', L_2', L_3'\right)$.*

Пусть L, L' решетки с координатами $(0, 0)$ и $(-1, 0)$ соотвественно. Стабилизатор решетки L $Sp(L)$ есть группа $SL_2\left(\mathbb{Z}_p\right)$, стабилизатор решекти L' $Sp(L')$ – сопряженная к $Sp(L)$ подгруппа:

$$Sp(L') = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1/p \end{pmatrix} SL_2\left(\mathbb{Z}_p\right) \begin{pmatrix} 1/p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix},$$

откуда следует, что стабилизатор пары решеток имеет вид

$$Sp(L, L') = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2\left(\mathbb{Z}_p\right) : c \equiv 0(\mod p^2) \right\}.$$

Как легко увидеть, пользуясь леммой 2.3, все решетки, лежащие на расстоянии 2 от решеток L и L' имеют координаты $\left(0, /p\right), k = 1, 2, \ldots, p-1$, обозначим эти решетки через $L(k), k \in \mathbb{F}_p^*$. Если $k, k' \in \mathbb{F}_p^*$ лежат в одном классе в $\mathbb{F}_p^* / \mathbb{F}_p^{*2}$, то есть существует такое $a \in \mathbb{F}_p^*$: $k' = a^2 k$, что матрица

$$g = \begin{pmatrix} (k'/k)^{1/2} & 0 \\ 0 & (k/k')^{1/2} \end{pmatrix}$$

принадлежит $Sp(L, L')$ и удовлетворяет условию

$$g \begin{pmatrix} 1 & k/p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k'/p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g$$

и, таким образом, $gL(k) = L(k')$.

Пусть теперь $k, k' \in \mathbb{F}_p^*$ и существует такое $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in Sp(L, L')$, что $gL(k) = L(k')$. Тогда,

$$\begin{pmatrix} 1 & -k'/p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k/p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL_2\left(\mathbb{Z}_p\right).$$

Следовательно,

$$b + \frac{1}{p}(ak - dk') - \frac{c}{p^2} kk' \in \mathbb{Z}_p.$$

Принимая во внимание, что $c \equiv 0(\mod p^2)$, из последнего условия следует $ak \equiv dk'(\mod p)$, следовательно $k' \equiv a^2 k(\mod p)$ (в последнем равенстве мы воспользовались условием $ad \equiv 1(\mod p)$).

Таким образом, мы показали, что преобразование $g \in Sp(L, L') \colon gL(k) = L(k')$ существует тогда, и только тогда, когда k и k' лежат в одном классе в $\mathbb{F}_p^* / \mathbb{F}_p^{*2}$, то есть, когда соответствующие символы Лежандра совпадают, $\left(\frac{k}{p}\right) = \left(\frac{k'}{p}\right)$. Для завершения доказательства теоремы осталось заметить:

$$\begin{aligned} \mu\left[(0,0), (-1,0)(0,k/p)\right] &= M(-1,0;0,k/p) = \lambda_p(-2k/p) \\ &= (-1)^{\frac{(p-1)(p+5)}{8}} \left(\frac{k}{p}\right) \begin{cases} 1, & p \equiv 1(\mod 4); \\ i, & p \equiv 3(\mod 4). \end{cases} \end{aligned}$$

В последнем равенстве мы воспользовались мультипликативностью символа Лежандра и формулами

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}, \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$$

. Теорема доказана.

2.7 Коцикл представления Вейля

Пусть (F, Δ) – двумерное симплектическое пространство над полем $\mathbb{Q}_p$ p-адических чисел. Динамика классической системы задается элементом g симплектической группы $Sp(F)$ пространтва (F, Δ).

Рассмортим неприводимое представление канонических коммутационных соотношений (ККС) (W, H) над пространством F. Поскольку преобразование g не вырождено и сохраняет симплектическую форму, то представление ККС вида $(W_g, H), W_g(z) = W(gz), z \in F$ также неприводимо. Следовательно, представления W и W_g унитарно эквивалентны и существует унитарный оператор $U(g)$ на пространстве H, удовлетворяющий условию $U(g)W(z)U^{-1}(g) = W_g(z) = W(gz), z \in F$.

Операторы $U(g), g \in Sp(F)$ задают динамику квантовой системы.

Легко заметить, что операторы $U\left(g^{-1}\right)U(g)$ коммутируют со всеми операторами $W(z), z \in F$ и, следовательно, $U\left(g^{-1}\right) = U^{-1}(g), g \in Sp(F)$. Операторы $U(g)U(g')U^{-1}(gg'), g, g' \in Sp(F)$ коммутируют со свеми операторами $W(z), z \in F$ и, следовательно, справедливо соотношение

$$U(g)U(g') = c(g, g')U(gg').$$

Последнее равенство задает проективное унитарное представление симплектической группы (представление Сигала-Шейла-Вейля). Коцикл c этого представления не тривиален, однако, его квадрат является кограницей (см., например, [73], [17]).

Предложенная в предудущих разделах главы конструкция p-адического индекса Маслова позволяет вычислять коцикл представления Вейля. А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.4. *Пусть $g, g' \in Sp(F)$ и L – самодвойственная решетка в пространстве (F, Δ). Выражение для коцикла $c(g, g')$ представления Вейля дается формулой*

$$c(g, g') = \mu(L, gL, g'gL).$$

Для доказательства достаточно заметить, что если мы обозначим самодвойственную решетку L через L_1, а самодвойственную решетку gL через L_2, то в этих обозначениях оператор $U(g)$ есть канонический сплетающий оператор F_{21} из раздела 2.3. Дальше просто воспользуемся определением индекса Маслова через канонический сплетающий оператор.

3 p-Адический квантовый дифференциал

3.1 Введение

В работе [70] была предложена конструкция фредгольмова модуля, естественным образом связанного с действием локально компактной группы на дереве Брюа-Титса. Авторы предложили конструкцию в рамках операторной K-теории. Одним из основных результатов статьи явилось доказательство аменабельности класса групп, действующих на деревьях, в частности, группы $SL_2(\mathbb{Q}_p)$.

В настоящей Главе предложена другая конструкция фредгольмова модуля, также естественным образом связанного с деревом Брюа-Титса и действием группы $PSL_2(\mathbb{Q}_p)$ на этом дереве. Мы будем работать в рамках квантового исчисления, предложенного А. Конном [61]. Основной целью будет построение квантового дифференциала и изучение его свойств.

3.2 Оператор симметрии

Через Δ обозначим бесконечное дерево, из каждой вершины которого исходит $p+1$ ребро (дерево Брюа-Титса), Δ_0 - множество вершин дерева Δ. Множество Δ_0 снабдим дискретной топологией и дискретной мерой (мера каждой точки равна 1). Пусть D - естественная метрика на множестве вершин дерева Δ. Ведем на Δ_0 отношение эквивалентности: будем говорить, что две вершины эквивалентны, если расстояние между ними четно. Таким образом, все множество вершин представляется в виде несвязного объединения двух бесконечных подмножеств (классов эквивалентности), которые обозначим Δ^+ и Δ^-, $\Delta_0 = \Delta^+ \cup \Delta^-$.

Группа $G = PSL_2(\mathbb{Q}_p)$ действует на множестве вершин Δ_0, $g \in G, u \in \Delta_0, u \to gu$, множества Δ^+ и Δ^- являются орбитами этого действия ([82]).

Через H_Δ обозначим Гильбертово пространство $L^2(\Delta_0), H_\Delta = L^2(\Delta_0)$. Характеристические функции $e_a, a \in \Delta_0$ точек множества Δ_0 образуют ортонормированный базис пространства H_Δ. Естественным образом задается регулярное действие группы G на пространстве H_Δ, $\psi(u) \to \psi_g(u) = \psi(g^{-1}u), \psi \in H, g \in G$. Пространство H_Δ представляется в виде прямой суммы подпространств H^+ и H^-, где подпространства H^+ и H^- состоят из функций с носителями в Δ^+ и Δ^- соответственно. Пусть P^+ и P^- - ортогональные проекторы на подпространства H^+ и H^- соответственно. Определим оператор F по формуле $F = P^+ - P^-$.

Справедлива следующая Лемма.

Лемма 3.1. *Оператор F обладает следующими свойствами:*

- *F - самосопряженный оператор;*
- *$F^2 = 1$;*
- *F коммутирует с регулярным действием группы $PSL_2(\mathbb{Q}_p)$ на пространстве H_Δ.*

Первые два свойства очевидны, третье следует из инвариантности подпространств H^+ и H^- относительно действия группы G. Отметим, что перечисленными выше свойствами оператор F на H_Δ определяется однозначно с точностью до знака (если не учитывать тривиальный случай тождественного оператора).

Построенный оператор F является аналогом оператора Гильберта в вещественном анализе.

3.3 Пространство $L^2\left(\mathbb{P}^1\left(\mathbb{Q}_p\right)\right)$

Целью настоящего раздела является построение базиса в пространстве $L^2\left(\mathbb{P}^1\left(\mathbb{Q}_p\right)\right)$, элементы которого параметризуются вершинами дерева Δ. Для начала установим взаимно однозначное соответствие между множеством Δ_0 вершин дерева Δ и множеством шаров в $\mathbb{Q}_p$.

Обозначим через I_0 множество всех шаров в $\mathbb{Q}_p$, множество I_0 - счетно, радиус шара $B \in I_0$ будем обозначать через $r(B)$. На множестве I_0 определим метрику ρ следующим образом. Пусть B_1 и B_2 - шары в $\mathbb{Q}_p$, $B_1 \in I_0, B_2 \in I_0$. В множестве шаров, содержащих одновременно шары B_1 и B_2 существует единственный шар B минимального радиуса. Положим

$$\rho\left(B_1, B_2\right) = \left|\log_p \frac{r^2(B)}{r(B_1)r(B_2)}\right|. \tag{18}$$

Отметим, что метрика ρ принимает только целые неотрицательные значения. Видно, что каждый шар $B \in I_0$ имеет ровно $p+1$ шаров, находящихся от него на расстоянии 1, из них p шаров содержатся в B и один содержит B.

На множестве I_0 построим граф, вершинами которого являются элементы из I_0, а ребрами - пары элементов из I_0, расстояние между которыми равно 1. Легко увидеть, что построенный граф изоморфен дереву Δ. Построенное дерево шаров будем обозначать через I, а изоморфизм графов I и Δ через $\gamma, \gamma : I \to \Delta$. Изоморфизм γ, очевидно, определен не единственным образом.

Далее выберем изоморфизм γ определенным образом. Для этого выберем произвольное ребро на дереве Δ, то есть пару вершин $s_0 \in \Delta_0, s_1 \in \Delta_0, D(s_0, s_1) = 1$. Разрежем граф Δ по ребру $[s_0, s_1]$ на два изоморфных подграфа Γ_0 и Γ_1, Γ_0 начинается с вершины s_0, Γ_1 - с s_1. Для определенности будем считать, что $s_0 \in \Delta^+$. Выберем γ таким образом, что $\gamma\left(\mathbb{Z}_p\right) = s_0$, где $\mathbb{Z}_p$ - множество целых p-адических чисел, то есть единичный шар в $\mathbb{Q}_p$. При этом, Γ_0 переходит в подграф I, вершинами которого служат подшары в $\mathbb{Z}_p$.

Таким образом, граф Γ_0 изоморфен графу подшаров в $\mathbb{Z}_p$, а граница графа Γ_0 есть множество $\mathbb{Z}_p$. Аналогичные рассуждения можно провести и для графа Γ_1. Следовательно, граф Δ изоморфен объединению двух графов подшаров в $\mathbb{Z}_p$, а граница графа Δ гомеоморфна несвязному объединению двух экземпляров $\mathbb{Z}_p$. Граница графа Δ естественным образом ([82], [33]) отождествляется с проективной прямой $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^1\left(\mathbb{Q}_p\right)$, следовательно, $\mathbb{P}^1$ гомеоморфно несвязному объединению двух экземпляров $\mathbb{Z}_p$. С помощью этого отображения, которое, как легко видеть, является гомеоморфизмом, определим меру μ на $\mathbb{P}^1$ (на $\mathbb{Z}_p$ задана мера Хаара). Меру μ нормируем таким образом, что $\mu\left(\mathbb{Z}_p\right) = 1$, $\mu\left(\mathbb{P}^1\right) = 2$.

С помощью меры μ определим пространство $H = L^2\left(\mathbb{P}^1\right)$, при этом, $H = L^2\left(\mathbb{Z}_p\right) \bigoplus L^2\left(\mathbb{Z}_p\right)$. Разложение пространства H в прямую сумму двух экземпляров $L^2\left(\mathbb{Z}_p\right)$ сводит задачу построения искомого базиса в H к задаче построения базиса в $L^2\left(\mathbb{Z}_p\right)$. Таким образом, требуется построить базис в пространстве $L^2\left(\mathbb{Z}_p\right)$, элементы которого параметризуются вершинами дерева подшаров в $\mathbb{Z}_p$. В качестве искомого базиса в $L^2\left(\mathbb{Z}_p\right)$ выберем множество аддитивных характеров группы $\mathbb{Z}_p$. В явном виде этот базис выглядит следующим образом. Введем обозначение $\chi(x) = \exp(2\pi i\{x\}_p)$, где $\{x\}_p$ обозначает дробную часть $x \in \mathbb{Q}_p$. Аддитивные характеры группы $\mathbb{Z}_p$ имеют вид $\chi(ax), a \in \mathbb{Q}_p, x \in \mathbb{Z}_p$. Множество аддитивных характеров $\{\chi_a(x) = \chi(ax), a \in \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, x \in \mathbb{Z}_p\}$ образует ортонормированный базис в пространстве $L^2\left(\mathbb{Z}_p\right)$. В данном случае a обозначает произвольного представителя в соответствующем смежном классе, выражение не зависит от выбора представителя. В дальнейшем удобно представителей выбирать канонически образом, а именно, a будет иметь вид

$$a = p^{-n}\left(a_0 + a_1 p + \cdots + a_{n-1}p^{n-1}\right), n \in \mathbb{N}, a_j = 0, 1, \ldots, p-1, a_0 \neq 0. \quad (19)$$

Множество p-адических чисел вида (19) будем обозначать через J_p. Число n в формуле (19) будем называть порядком характера χ_a.

Определим отображение α множества характеров $\{\chi_a, a \in J_p\}$ в множество шаров в $\mathbb{Z}_p$.

Определение 3.1. *Пусть $\{\chi_a, a \in J_p\}$ - множество характеров. Каноническим отображением множества характеров в множество подшаров в $\mathbb{Z}_p$ назовем отображение α, при котором характер χ_a переходит в шар радиуса p^{-n} с центром в точке $a_0 + a_1 p + \cdots + a_{n-1}p^{n-1}$, где a определяется формулой (19).*

Легко увидеть, что построенное отображение α является вложением. Образом отображения α является множество подшаров единичной окружности $\{x \in \mathbb{Q}_p\colon |x|_p = 1\}$. Будем считать, что единичный характер переходит при отображении α в единичный шар, то есть в $\mathbb{Z}_p$.

Проведя аналогичные рассуждения для графа Γ^1, получим вложение пространства $L^2\left(\mathbb{P}^1\right)$ в пространство $L^2\left(\Delta_0\right)$.

3.4 Фредгольмов модуль

Следуя [61], дадим следующее определение.

Определение 3.2. *Пусть $\mathcal{A}$ - инволютивная алгебра над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Фредгольмовым модулем над $\mathcal{A}$ назовем тройку $(\mathcal{H}, F, \pi)$, где $\mathcal{H}$ - сепарабельное Гильбертово пространство, F - самосопряженный оператор на $\mathcal{H}$, удовлетворяющий условию $F^2 = 1$, а π - инволлютивное представление алгебры $\mathcal{A}$ в $\mathcal{H}$. При этом, для всех $a \in \mathcal{A}$ коммутатор*

$$[F, \pi(a)] \quad (20)$$

является компактным оператором в $\mathcal{H}$.

В качестве алгебры $\mathcal{A}$ выберем некоторую подалгебру $\mathcal{B}$ алгебры $L^\infty\left(\mathbb{P}^1\right)$ ограниченных измеримых функций на $\mathbb{P}^1\left(\mathbb{Q}_p\right)$. Пусть $f \in \mathcal{B}$. Через M_f обозначим оператор умножения на функцию f, то есть, для $g \in \mathcal{H}$, $\left(M_f g\right)(x) =$

$f(x)g(x)$. Таким образом определено искомое представление $\pi : f \to M_f$ алгебры $\mathcal{B}$.

В разделе 3.2 был построен оператор симметрии F на пространстве $L^2(\Delta_0)$. С помощью вложения пространства $L^2\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)\right)$ в пространство $L^2(\Delta_0)$, построенного в явном виде в разделе 3.3, определим оператор F на пространстве $\mathcal{H}$. Действительно, пусть $\{\chi_a, a \in J_p\}$ ортонормированный базис пространства $\mathcal{H}$, построенный в предыдущем разделе. $\mathcal{H}^+$ и $\mathcal{H}^-$ - подпространства в $\mathcal{H}$, натянутые на базисные векторы $\{\chi_a, \alpha(a) \in \Delta^+\}$ и $\{\chi_a, \alpha(a) \in \Delta^-\}$ соответственно. Через P^+ и P^- обозначим проекторы на подпространства $\mathcal{H}^+$ и $\mathcal{H}^-$. Искомый оператор F определяется по формуле

$$F = P^+ - P^-. \tag{21}$$

Таким образом, все компоненты фредгольмова модуля – гильбертово пространство $\mathcal{H}$, представление $\pi : f \to M_f$, оператор симметрии F - построены. Осталось проверить условие компактности коммутатора (20).

3.5 Квантовый дифференциал

На алгебре $\mathcal{B}$ определим оператор ∂, принимающий значение в алгебре $B(\mathcal{H})$ ограниченных операторов на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ по формуле

$$\partial f = [F, M_f]\,. \tag{22}$$

Как легко заметить из формулы (22) и свойств оператора симметрии F, оператор ∂ является дифференцированием на алгебре $\mathcal{B}$ (со значениями в $B(\mathcal{H})$). Другими словами, оператор ∂ линеен, и для него справедлива формула Ньютона-Лейбница $\partial(fg) = (\partial f)g + f(\partial g), f \in \mathcal{B}, g \in \mathcal{B}$ ([61]). Условие компактности оператора ∂ - это своего рода условие "малости"оператора. Это делает естественным следующее определение.

Определение 3.3. *Пусть $\mathcal{B} \subset L^\infty\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)\right)$ - подалгебра алгебры измеримых ограниченных функций на $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$, $\mathcal{H} = L^2\left(\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)\right)$ - Гильбертово пространство квадратично суммируемых функций на $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$, F - оператор на $\mathcal{H}$, задаваемый формулой (21). Оператор $\partial\colon \mathcal{B} \to B(\mathcal{H})$ называется квантовым p-адическим дифференциалом на алгебре $\mathcal{B}$, если ∂f - компактный оператор для всех $f \in \mathcal{B}$.*

Данное выше определение является точным аналогом соответствующего определения для алгебры измеримых ограниченных функций на единичной окружности в поле комплексных чисел ([61]).

Отметим, что условие компактности оператора $\partial f, \forall f \in \mathcal{B}$ есть в действительности условие на алгебру $\mathcal{B}$.

3.6 Операторы конечного ранга

В качестве первого результата в этом направлении сформулируем следующую теорему.

Теорема 3.1. *Пусть $\mathcal{LC}$ - алгебра локально постоянных функций на $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$. Оператор ∂f является оператором конечного ранга тогда, и только тогда, когда $f \in \mathcal{LC}$.*

Следствие 3.1. *Пусть $\mathcal{C}$ - алгебра непрерывных функций на $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$. Если $f \in \mathcal{C}$, то оператор ∂f - компактен.*

Доказательство. Отметим, что утверждение носит локальный характер, поэтому достаточно провести доказательство для алгебры $\mathcal{LC}(\mathbb{Z}_p)$ локально постоянных функций на $\mathbb{Z}_p$. Напомним (см. раздел 3.3), что множество характеров $\{\chi_a(x) = \chi(ax), a \in J_p\}$ образует ортонормированный базис в $L^2(\mathbb{Z}_p)$. Кроме того, было построено отображение α вышеуказанного множества характеров в множество вершин графа Γ^0. Справедливы следующее простые утверждения.

Лемма 3.2. *Пусть χ_a - базисный вектор, α - каноническое отображение множества характеров в множество шаров (Определение 3.1). $\alpha(a) \in \Delta^+$ тогда, и только тогда, когда порядок характера χ_a четный.*

Действительно, пусть $a = p^{-n}\left(a_0 + a_1 p + \cdots + a_{n-1}p^{n-1}\right)$. По формуле (9.6) вычислим расстояние от единичного шара $\mathbb{Z}_p$ до шара $\alpha(a)$.

$$\rho(\mathbb{Z}_p, \alpha(a)) = \left|\log_p \frac{1}{p^{-n}}\right| = n.$$

Таким образом, порядок характера равен расстоянию от $\mathbb{Z}_p$ до образа характера при отображении α, откуда и следует справедливость леммы.

Лемма 3.3. *$f \in \mathcal{LC}(\mathbb{Z}_p)$ тогда и только тогда, когда f представляется в виде конечной линейной комбинации базисных векторов χ_a.*

Действительно, если функция f есть конечная линейная комбинация характеров, то она локально постоянна, поскольку характеры локально постоянны. Пусть теперь f функция, постоянная на всех шарах радиуса p^{-n} и пусть $\xi \in \mathbb{Z}_p$: $|\xi|_p \le p^{-n}$. Вычислим скалярное произведение функции f и характера χ_a:

$$(f, \chi_a) = \int_{\mathbb{Z}_p} f(u)\chi(au)du = \int_{\mathbb{Z}_p} f(u+\xi)\chi(au + a\xi)d(u+\xi) =$$
$$= \chi(a\xi)\int_{\mathbb{Z}_p} f(u)\chi_a(u)du = \chi_a(\xi)\,(f, \chi_a)\,.$$

Если порядок характера χ_a больше n, найдется такое ξ: $|\xi|_p \le p^{-n}$, что будет справедливо равенство $\chi_a(\xi) \ne 1$. Следовательно, для таких характеров скалярное произведение (f, χ_a) равно нулю. Таким образом, в разложении функции f по базису, состоящему из характеров, будут присутствовать только характеры, порядки которых меньше или равны n.

Для локально постоянной функции f определим максимальный порядок функции $\mathrm{Ord}(f)$ как максимум из порядков характеров, входящих в разложение функции f и минимальный порядок функции $\mathrm{ord}(f)$ как минимум из порядков характеров, входящих в это разложение. Как следует из леммы 3.3, порядки определены корректно. Определение порядка функции можно дать для любой функции $g \in L^2(\mathbb{Z}_p)$. Будем говорить, что $\mathrm{Ord}(g) = \infty$, если $\forall k \in \mathbb{N}$ в разложении g найдется характер порядка большего k, $\mathrm{ord}(g)$ всегда корректно определен и конечен.

Лемма 3.4. *Пусть $f \in \mathcal{LC}(\mathbb{Z}_p)\,, g \in L^2(\mathbb{Z}_p)$ такие, что $\mathrm{ord}(g) > \mathrm{Ord}(f)$. Тогда g принадлежит ядру оператора ∂f:*

$$(\partial f)(g) = 0. \tag{23}$$

Действительно, в силу неархимедовости p-адической нормы, $\mathrm{ord}(\chi_a\chi_b) = \mathrm{ord}(\chi_a)$, если $\mathrm{ord}(\chi_a) > \mathrm{ord}(\chi_b)$. Следовательно, если f и g такие, как в лемме 3.4, порядки характеров, входящих в разложение g не меняются при умножении на характеры из разложения f, что и обеспечивает справедливость формулы (23).

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.5. *Пусть $f \in \mathcal{LC}(\mathbb{Z}_p)$, тогда ранг оператора ∂f дается формулой*

$$Rank(\partial f) = p^{\mathrm{Ord}(f)}.$$

Таким образом, мы доказали несколько более сильное утверждение, чем Теорема 3.1, а именно, если f - локально постоянная функция, то ∂f есть оператор ранга $p^{\mathrm{Ord}(f)}$.

Докажем вторую часть Теоремы 3.1 - необходимость. Пусть f - ограниченная измеримая функция на $\mathbb{Z}_p$ такая, что оператор ∂f - конечного ранга. Требуется доказать, что f - локально постоянная функция. Допустим, что это не так. Тогда в разложении f найдется характер сколь угодно большого ранга. Пусть для определенности ранг этого характера нечетный. Поскольку по предположению образ ∂f конечномерен, в ядре ∂f существуют базисные векторы как четного, так и нечетного рангов. Выберем базисный вектор $\mathrm{ord}\,(\chi_a)$ четного ранга. Тогда $F\chi_a = P^+\chi_a - P^-\chi_a = \chi_a$ и

$$[F, M_f]\,(\chi_a) = FM_f\chi_a - M_f\chi_a = 0.$$

То есть вектор $M_f\chi_a$ является собственным вектором оператора симметрии F с собственным значением единица, следовательно, порядки всех характеров в разложении $M_f\chi_a$ - четные числа, что противоречит существованию в разложении f характера сколь угодно большого нечетного порядка.

Теорема доказана.

Докажем следствие из Теоремы 3.1. Пусть $f \in \mathcal{C}$ - непрерывная функция на $\mathbb{Z}_p$. Тогда существует последовательность $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$, локально постоянных функций, сходящаяся по норме к f. Легко видеть, что последовательность операторов $\{\partial f_n, n \in \mathbb{N}\}$ сходится по операторной норме к ∂f. Следовательно, ∂f - предел по операторной норме операторов конечного ранга и, таким образом, компактен.

Условие непрерывности функции f является достаточным условием компактности оператора ∂f, однако, это условие не является необходимым.

4 Операторы координаты и импульса в p-адической квантовой механике

4.1 Введение

В настоящей Главе рассматривается вариант p-адической квантовой механики, в которой волновые функции – функции p-адического аргумента, принимающие значения в поле комплексных чисел. Естественная формулировка для такого подхода - квантование Вейля ([13]). При этом, вместо наблюдаемых (самосопряженных операторов) рассматриваются соответствующие однопараметрические унитарные группы операторов. Связь с привычной формулировкой в вещественном случае вполне естественна - от однопараметрических (сильно непрерывных) унитарных групп необходимо перейти к их самосопряженным генераторам, воспользовавшись теоремой Стоуна. В p-адическом случае такой переход невозможен.

На простейших, но содержательных примерах - операторы координаты и импульса, предлагается процедура построения самосопряженного оператора по соответствующей однопараметрической унитарной группе для случая p-адической квантовой механики. Оказывается, что спектр таким образом построенного оператора координаты (вернее, его ограниченного аналога) есть канторово множество.

С позиций настоящей статьи, p-адическая квантовая механика по сути есть часть вещественной квантовой механики. Однако, типичные операторы в p-адической квантовой механике имеют в качестве спектра множества типа канторовых.

4.2 Операторы координаты и импульса

Состояние классической системы есть точка в фазовом пространстве F. Будем рассматривать случай одномерной классической механики. В этом случае $F = \mathbb{Q}_p^2$ – двумерное векторное пространство над полем p-адических чисел. На пространстве F задана симплектическая форма $\Delta(z, z') = xy' - x'y, z = (x, y) \in F, z' = (x', y') \in F$. Динамика классической системы задается семейством линейных преобразований F, сохраняющих симплектическую форму. В случае двумерного пространства F, который мы рассматриваем, эти преобразования образуют группу $SL_2(\mathbb{Q}_p)$.

Определение 4.1. *Классической p-адической системой (одномерной) назовем тройку (F, Δ, G), где F – двумерное векторное пространство над $\mathbb{Q}_p$, Δ – невырожденная симплектическая форма на F, G – подгруппа группы $SL_2(\mathbb{Q}_p)$, действующая на F линейными преобразованиями.*

В качестве подгруппы G обычно выбирается однопараметрическая подгруппа, параметр при этом играет роль времени. Мы будем рассматривать произвольные подгруппы. Для $(x, y) \in F$ будем считать x – координатой классической частицы, y – импульсом классической частицы.

Определение 4.2. *Квантование предложенной классической системы задается четверкой $(U, V, H, \mathcal{U})$, где H – комплексное гильбертово пространство, U и V – сильно нерерывные унитарные представления аддитивной группы поля $\mathbb{Q}_p$ в H, удовлетворяющие соотношению*

$$U(x)V(y) = \exp(i\pi\{xy\}_p)V(y)U(x)$$

для всех $(x, y) \in F$; $\mathcal{U}$ – унитарное представление группы G в H, удовлетворяющее соотношениям $\mathcal{U}(g)W(z) = W(gz)\mathcal{U}(g)$, где $W(z) = U(x)V(y)$, $z = (x, y) \in F$.

Состояние квантовой системы описывается волновой функцией – элементом пространства H единичной нормы. Предложенное определение дает квантование в форме Вейля.

Приведем пример квантования (координатное представление). В качестве пространства H выберем пространство $L_2(\mathbb{Q}_p)$. Операторы U и V зададим соотношениями

$$(U(x)f)(u) = \exp(i\pi\{xu\}_p)f(u), \tag{24}$$

$$(V(y)f)(u) = f(u - y), \tag{25}$$

$(x, y) \in F$.

Далее будем использовать обозначение $\exp(2i\pi\{x\}_p) = \chi(x)$.

Представление $\mathcal{U}$ задается интегральными операторами, примеры для различных подгрупп G можно найти в [12].

В случае вещественной квантовой механики U и V образуют сильно непрерывные однопараметрические унитарные группы. Воспользовавшись теоремой Стоуна, можно перейти к самосопряженным генераторам этих групп и получить представление Шредингера, при котором операторы координаты и импульса есть замыкания операторов умножения и дифференцирования соответственно. В рассматриваемой нами p-адической квантовой механике нет аналога теоремы Стоуна, поскольку представление реализуется в комплексном пространстве, а параметр p-адический. Отсутствие генераторов создает определенные сложности при интерпретации p-адической квантовой механики.

Предлагается следующий выход из ситуации. Справедлива следующая теорема (см., например [37]).

Теорема 4.1. *Всякое унитарное представление $g \to T_g$ коммутативной локально компактной группы G задается формулой*

$$T_g = \int \overline{\lambda(g)} dP(\lambda), \tag{26}$$

где P – некоторая проекторнозначная мера на группе характеров $\hat{G}$ группы G.

В случае $G = \mathbb{R}$, а T_g – представление $\mathbb{R}$ в $L_2(\mathbb{R})$ операторами сдвига, вышеуказанная проекторнозначная мера есть проекторнозначная мера, соответствующая оператору дифференцирования (т.е. опрератору импульса в представлении Шредингера).

Возвращаясь к p-адической квантовой механике, задача ставится следующим образом. Для представлений аддитивной группы поля $\mathbb{Q}_p$, задаваемых формулами (24), (25) построить разложения вида (26). Соответствующие проекторнозначные меры будем называть *проекторнозначными мерами операторов координаты и импульса* соответственно.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.2. *Проекторнозначная мера Q для оператора координаты дается формулой*

$$\left(Q_\Omega f\right)(u) = h_\Omega(u) f(u),$$

где $f \in L_2(\mathbb{Q}_p)$, Ω – борелевское множество на $\mathbb{Q}_p$, h_Ω – индикаторная функция множества Ω.

Проекторнозначная мера для оператора импульса дается формулой

$$\left(P_\Omega f\right)(u) = \left(\widetilde{h_\Omega} * f\right)(u),$$

где $\tilde{h}$ – преобразование Фурье функции h, а $*$ – оператор свертки.

Доказательство теоремы элементарно. Поскольку пространство $\mathcal{D}$ локально постоянных комплекснозначных функций на $\mathbb{Q}_p$ с компактным носителем плотно в $L_2(\mathbb{Q}_p)$, а любая функция из $\mathcal{D}$ есть конечная линейная комбинация характеристических функций шаров, доказательство достаточно провести для характеристической функции произвольного шара. Для шара $B \in \mathbb{Q}_p$ через $\mu(B)$ обозначим его меру. В качестве f возмем функцию $f = h_B/\sqrt{\mu(B)}$. Представим интеграл по проекторнозначной мере как предел сумм Римана. Для этого представим $\mathbb{Q}_p$ как объединение счетного числа непересекающихся шаров $B_i, i = 1, 2, \ldots$ одинакового радиуса.

$$
\begin{aligned}
1/\mu(B) \int \chi(xu)(h_B, Q_\Omega h_B) d\mu(\Omega) = \\
= 1/\mu(B) \lim_{\mu(B_i)\to 0} \sum_{B_i} \chi(xu_i)\,(h_B, h_{B_i} h_B)\,\mu(B_i) = \\
= \lim_{\mu(B_i)\to 0} \sum_{B_i \subset B} \chi(xu_i)\mu(B_i) = \int_B \chi(xu)du = 1/\mu(B)(h_B, \chi(xu)h_B).
\end{aligned}
$$

Приведенные выкладки доказывают первую часть теоремы. Вторая часть следует непосредственно из того факта, что проекторнозначные меры Q_Ω и P_Ω связаны преобразованием Фурье F: $P_\Omega = F^{-1} Q_\Omega F$.

$$
P_\Omega f = F^{-1}\left[\widetilde{h}_\Omega * F[f]\right] = h_\Omega f.
$$

Проекторнозначные меры P_Ω и Q_Ω не позволяют построить самосопряженные операторы импульса и координаты, однако они позволяют вычислять распределение вероятностей координаты и импульса. Кроме того, мы можем построить самосопряженные операторы, которые являются функциями от операторов координаты и импульса.

4.3 Примеры

Пример 1. Пусть частица (в координатном представлении) находится в состоянии $f \in L_2(\mathbb{Q}_p)$, Ω - борелевское множество в $\mathbb{Q}_p$. Вероятность того, что координата частицы лежит в области Ω дается формулой:

$$
\mathcal{P}\,(x \in \Omega) = \int_\Omega |f(x)|^2 dx.
$$

Пример 2. Через $B_n, n \in \mathbb{Z}$ обозначим шар радиуса p^n с центром в нуле. Пусть состояние частицы описывается волновой функцией $f = p^{-n/2} h_{B_n}$. Выберем целое m таким образом, чтобы выполнялись неравенства $m \leq n \leq -m$. Найдем вероятность $\mathcal{P}(x \in B_m)$ того, что координата частицы принимает значения в шаре B_m. В соответствии с нашим подходом

$$\mathcal{P}(x \in B_m) = p^{-n} \left(h_{B_n}, h_{B_m} h_{B_n}\right) = p^m / p^n.$$

Вероятность $\mathcal{P}(y \in B_m)$ того, что импульс частицы принимает значение в шаре B_m дается формулой:

$$\mathcal{P}(y \in B_m) = p^{-n} \left(h_{B_n}, \widetilde{h_{B_m}} * h_{B_n}\right) = \\ = p^{-n} \int h_{B_n}(\xi) p^m \int h_{B_{-m}}(\xi - \eta) h_{B_n}(\eta) d\xi d\eta = p^n / p^{-m}.$$

Заметим, что если $n = 0$ (т.е. частица находится в вакуумном состоянии, см. [12]) и $m = 0$, то частица с вероятностью 1 находится в области фозового пространства $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.

Как уже отмечалось, предлагаемый подход не дает возможности построить операторы координаты и импульса, однако позволяет строить функции от таких операторов.

4.4 p-Адическая спектральная мера

Предлагаемый подход позволяет несколько по другому посмотреть на p-адическую механику и ее связь с вещественной квантовой механикой.

Мы рассматривали проекторнозначные меры на $\mathbb{Q}_p$, при этом операторы проектирования действовали на пространстве $L_2(\mathbb{Q}_p)$. Однако, выбор пространства не принципиален. Легко построить проекторнозначную меру на $\mathbb{Q}_p$, при этом проекторы будут действовать в $L_2(\mathbb{R})$. Можно воспользоваться изоморфизмом сепарабельных Гильбертовых пространств, но мы построим явный пример. Для простоты рассуждений приведем пример для случая $p = 2$, для произвольного p рассуждения аналогичны. В пространстве $L_2(\mathbb{R})$ выберем ортонормированный базис $\{\phi_n, n \in \mathbb{N}\}$. Разложим пространство в ортогональную прямую сумму пространств H_0 и H_1, где H_0 натянуто на вектора с четными номерами, H_1 – с нечетными. Проекторы на H_0 и H_1 обозначим через P_0 и P_1. Проектору P_0 поставим в соответствие единичный шар B_0 в $\mathbb{Q}_2$ с центром в нуле, а проектору P_1 – дополнение в $\mathbb{Q}_2$ к этому шару. Теперь пространство H_0 разложим в ортогональную прямую сумму подпространств H_{00} и H_{01}, натянутые на вектора, номера которых имеют остатки 0 и 2 при делении на 4 сответственно. Шар единичного радиуса в $\mathbb{Q}_2$ есть объединение двух не пересекающихся шаров B_{00} и B_{01} радиуса 1/2. Поставим этим шарам проекторы P_{00} и P_{01} на подпространства H_{00} и H_{01} соответственно. Аналогично поступим с пространством H_1, рассмотрев подпространства, натянутые на вектора с номерами имеющими остатки 1 и 3 при делении на 4 соответственно. Проектору P_{10} поставим в соответствие единичный шар $B_{10} \subset \mathbb{Q}_2 \backslash B_0$, а проектору P_{11} – дополнение в $\mathbb{Q}_2$ к множеству $B_0 \cup B_{10}$. Легко увидеть, что продолжая эту процедуру, каждому шару в $\mathbb{Q}_2$ мы поставим в соответствие проектор в $L_2(\mathbb{R})$. Это соответствие задает требуемую проекторнозначную меру.

Далее заметим, что, поскольку $\mathbb{Q}_p$ и $\mathbb{R}$ – полные метрические пространства одинаковой мощности, то они изоморфны как борелевские пространства, через $\beta\colon \mathbb{Q}_p \to \mathbb{R}$ обозначим этот изоморфизм. С помощью β меру на $\mathbb{Q}_p$ можно перенести на $\mathbb{R}$, $\nu_{\mathbb{R}}(\Omega) = \mu_{\mathbb{Q}_p}(\beta^{-1}\Omega)$, где Ω – борелевское подмножество $\mathbb{R}$, а $\mu_{\mathbb{Q}_p}$ – борелевская мера на $\mathbb{Q}_p$. Таким же образом построенная проекторнозначная мера на $\mathbb{Q}_p$ задает некоторую проекторнозначную меру на $\mathbb{R}$. Эта мера позволяет строить самосопряженные операторы (наблюдаемые) вещественной квантовой механики, соответствующие наблюдаемым в p-адической квантовой механике. В следующем разделе попытаемся уточнить предложенную идею.

4.5 Спектр оператора координаты

Рассмотрим более подробно оператор p-адической координаты. Для простоты ограничимся случаем, когда волновые функции имеют носитель в единичном шаре в $\mathbb{Q}_p$. В пространстве $H_p = L_2(\mathbb{Z}_p)$ определим проекторнозначную меру Q как в Теореме 2:

$$\left(Q_\Omega \psi\right)(u) = h_\Omega(u)\psi(u), \psi \in L_2(\mathbb{Z}_p),$$

где Ω – борелевское множество в $\mathbb{Z}_p$.

Как уже отмечалось, построенная проекторнозначная мера Q не позволяет получить оператор p-адической кординаты $\mathcal{Q}$ путем простого интегрирования функции $f(x) = x, x \in \mathbb{Z}_p$ по этой мере, поскольку f принимает значения в поле p-адических чисел, однако мы можем построить аналог функций от оператора координаты.

Действительно, пусть $F : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}$ - измеримая по Борелю комплексно-значная функция. Тогда

$$F(\mathcal{Q}) = \int_{\mathbb{Z}_p} F(\lambda) dQ(\lambda)$$

задает ограниченный оператор на H_p. Эсли функция F принимает вещественные значения, то оператор $F(\mathcal{Q})$ - самосопряженный. Легко видеть, что оператор $F(\mathcal{Q})$ имеет вид

$$\left(F(\mathcal{Q})\psi\right)(x) = F(x)\psi(x), \psi \in H_p,$$

другими словами, это оператор умножения на функцию F.

Рассмотрим следующий пример.

Пример 3. Пусть $x = x_0 + x_1 p + \dots + x_n p^n + \dots$ - каноническое разложение целого p-адического числа x и N - натуральное число. Рассмотрим функцию $F_N(x) = x_0 + x_1 + \dots + x_{N-1}p^{N-1}$. Функция F_N непрерывна, локально-постоянна (постоянна на каждом шаре радиуса p^{-N}) и принимает значения в множестве целых чисел $\{0, 1, 2, \dots, p^N - 1\}$. Справедливо равенство:

$$\lim_{N\to\infty} |F_N(x) - x|_p = 0,$$

в этом смысле функция F_N аппроксимирует линейную функцию.

Оператор $F_N(\mathcal{Q})$ обладает следующими свойствами:

- $F_N(\mathcal{Q})$ - самосопряженный оператор,
- собственные значения оператора $F_N(\mathcal{Q})$ пробегают множество целых чисел от 0 до $p^N - 1$,
- все собственные значения имеют бесконечную кратность.

Следующим естественным шагом в построении p-адического оператора координаты является рассмотрение C^*-алгебры операторов, порожденной семейством проекторов $\{Q_\Omega\}$, где Ω пробегает семейство борелевских подмножеств $\mathbb{Z}_p$. Обозначим эту алгебру через $A_{\mathcal{Q}}$. Заметим, что в вещественном случае эта алгебра есть алгебра непрерывных функций на спектре оператора координаты.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.3. *Алгебра $A_{\mathcal{Q}}$ изоморфна алгебре $C(\mathbb{Z}_p)$ непрерывных функций на единичном шаре в $\mathbb{Z}_p$.*

Доказательство есть простое следствие того факта, что любая функция из $C(\mathbb{Z}_p)$ есть равномерный предел конечных линейных комбинаций характеристических функций шаров в $\mathbb{Z}_p$.

Заметим, что алгебра $C(\mathbb{Z}_p)$ изоморфна алгебре $C(\mathcal{C})$ непрерывных функций на канторовом множестве $\mathcal{C}$ (поскольку $\mathbb{Z}_p$ гомеоморфно $\mathcal{C}$).

Гомеоморфизм $\alpha\colon \mathbb{Z}_p \to \mathcal{C}$ строится следующим образом. Пусть $a = a_0 + a_1 p + \dots a_n p^n + \dots$ – целое p-адическое число. Определим

$$\alpha(a) = \frac{p}{p-1}\left(a_0 + a_1/(p+1) + \dots + a_n/(p+1)^n + \dots\right).$$

Видно, что α есть непрерывное вложение $\mathbb{Z}_p$ в отрезок $[0,1]$ вещественной прямой. Образом этого отображения являются вещественные числа, у которых в $(p+1)$-ичном разложении отсутствует цифра p, а это – канторово множество, которое мы обозначили через $\mathcal{C}$ (см., например [29]).

Построенное отображение α позволяет перенести меру Хаара (и, соответственно, проекторнозначную меру Q) с $\mathbb{Z}_p$ на отрезок $[0,1]$. Действительно, пусть μ_p – мера Хаара на $\mathbb{Z}_p$. Через μ_p^α обозначим меру на $[0,1]$, которая задается следующим образом:

$$\mu_p^\alpha\left([a,b]\right) = \mu_p\left(\alpha^{-1}\left(\mathcal{C}\cap[a,b]\right)\right).$$

Построенная мера μ_p^α на $[0,1]$ непрерывна и сингулярна по отношению к мере Лебега, носитель этой меры – канторово множество $\mathcal{C}$. Аналогичным образом определим пректорнозначную меру Q^α на $[0,1]$:

$$Q^\alpha\left([a,b]\right) = Q\left(\alpha^{-1}\left(\mathcal{C}\cap[a,b]\right)\right).$$

Построенная мера Q^α делает естественным следующее определение.

Определение 4.3. *Оператором $\mathcal{Q}^\alpha$ координаты в p-адической квантовой механике (или просто p-адическим оператором координаты) назовем следующий оператор:*

$$\mathcal{Q}^\alpha = \int_0^1 \lambda dQ^\alpha(\lambda).$$

Оператор $\mathcal{Q}^\alpha$ выглядит довольно сложно в вещественном представлении. В действительности, это весьма простой оператор.

Лемма 4.1. *p-Адический оператор координаты $\mathcal{Q}^\alpha$ есть оператор умножения на функцию α.*

Доказательство. В силу построения меры Q^α справедлива следующая формула:

$$\mathcal{Q}^\alpha = \int_0^1 \lambda dQ^\alpha(\lambda) = \int_{\mathbb{Z}_p} \alpha(\lambda) dQ(\lambda),$$

а последний оператор есть оператор умножения на α в силу свойств проекторнозначной меры Q.

Как легко заметить, спектр оператора $\mathcal{Q}^\alpha$ есть канторово множество на отрезке $[0,1]$.

Из доказанной Леммы вытекает довольно любопытное следствие.

Теорема 4.4. *Любую непрерывную комплекснозначную функцию на $\mathbb{Z}_p$ можно равномерно приблизить полиномами от функции α.*

Действительно, как следует из Леммы, функция α порождает алгебру $C(\mathbb{Z}_p)$.

В дальнейшем удобно будет использовать в качестве отображения α другую функцию. Пусть d – вещественное число, $0 < d < 1$. Для целого p-адического числа $a = a_0 + a_1 p + \cdots + a_n p^n + \ldots$ определим вещественнозначную функцию α_d по формуле

$$\alpha_d(a) = \frac{p^{1/d} - 1}{(p-1)p^{1/d}} \left(a_0 + \frac{a_1}{p^{1/d}} + \cdots + \frac{a_n}{p^{n/d}} + \ldots \right).$$

Как было показано в [68], отображение α_d – непрерывное вложение $\mathbb{Z}_p$ в $[0,1]$, образом этого отображения является канторово множество $\mathcal{C}_d$, хаусдорфова размерность этого множества равна d. Все построения, сделанные ранее для отображения α верны и для α_d. Кроме того, легко заметить, что α совпадает с α_d при $d = 1/\log_p(1+p)$.

Для построения оператора p-адической координаты мы использовали непрерывное вложение $\mathbb{Z}_p$ в отрезок $[0,1]$. Посмотрим теперь, какой оператор мы получим, если вместо непрерывного вложения будем использовать борелевский изоморфизм $\mathbb{Z}_p$ и $[0,1]$. В некотором смысле, построенный ниже изоморфизм будет пределом отображений α_d при $d \to 1$.

Обозначим через $\mathcal{Z}_p$ множество целых p-адических чисел с выколотыми целыми рациональными точками (т.е. точками с конечными каноническими разложениями). Множество $\mathcal{Z}_p$ – локально компактно и снабжается естественной борелевской структурой как подмножество $\mathbb{Z}_p$.

Определим отображение $\beta\colon \mathcal{Z}_p \to [0,1]$ по формуле:

$$\beta(a) = \frac{1}{p}\left(a_0 + a_1 p^{-1} + a_2 p^{-2} + \dots + a_n p^{-n} + \dots\right),$$

где $a = a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n + \dots$ – каноническое разложение $a \in \mathcal{Z}_p$.

Обратное отображение $\beta^{-1}\colon [0,1] \to \mathcal{Z}_p$ определяется очевидным образом.

Справедлива следующая очевидная лемма.

Лемма 4.2. *Отображение β отображает $\mathcal{Z}_p$ на $[0,1]$ взаимнооднозначно. Отображение β непрерывно, обратное отображение β^{-1} разрывно в счетном числе точек.*

Из Леммы 1 вытекает, что β является борелевским изоморфизмом $\mathcal{Z}_p$ и $[0,1]$ (более того, β является обобщенным гомеоморфизмом класса $(0,1)$, см. [29]).

С помощью изоморфизма β определим меру μ на отрезке $[0,1]$ по формуле $\mu(\Omega) = \mu_p\left(\beta^{-1}(\Omega)\right)$, где Ω – борелевское подмножество отрезка $[0,1]$, а μ_p – мера на $\mathcal{Z}_p$, индуцированная мерой Хаара на $\mathbb{Z}_p$.

Непосредственно из построения меры μ вытекает следующая Теорема.

Теорема 4.5. *Мера μ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега.*

Отображение β очевидным образом продолжается до непрерывного отображения $\mathbb{Z}_p \to [0,1]$, которое будем обозначать тем же символом β. Аналогично оператору $\mathcal{Q}^\alpha$ (определение 3) построим оператор $\mathcal{Q}^\beta$, который есть оператор умножения на функцию β. Из теоремы 5 непосредственно следует, что спектр оператора $\mathcal{Q}^\beta$ есть отрезок $[0,1]$. Заметим, что в отличие от оператора $\mathcal{Q}^\alpha$, оператор $\mathcal{Q}^\beta$ не порождает алгебру $C(\mathbb{Z}_p)$ непрерывных функций на $\mathbb{Z}_p$. Как легко заметить, оператор $\mathcal{Q}^\beta$ порождает подалгебру B в $C(\mathbb{Z}_p)$, состоящую из функций, обладающих следующим свойством. Пусть $a = a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n$ - целое рациональное число. Непрерывная функция f лежит в алгебре B тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$f(a) = f\left(a - p^{n+1}\right)$ для всех целых рациональных a. Отметим также, что адгебра B изоморфна алгебре $C\left([0,1]\right)$ непрерывных функций на отрезке $[0,1]$. Поэтому «правильным» оператором координаты следует считать оператор $\mathcal{Q}^{\alpha}$.

Одна из целей настоящей главы – попытка глубже понять связь между вещественной и p-адической квантовыми механиками. С позиций излагаемого подхода, p-адическая квантовая механика по сути есть часть вещественной квантовой механики. Однако, «типичные» операторы в p-адической квантовой механике имеют в качестве спектра множества типа канторовых, а «типичные» меры - непрерывны и сингулярны относительно меры Лебега. В этом смысле p-адическая квантовая механика может выступать инструментом описания некоторого класса «сложных» квантовомеханических систем. Заметим, что эта идея высказывалась в ранних работах по p-адической математической физике (библиографию см. в [12], [63], [64]).

5 Унификация p-адической и вещественной квантовых теорий

5.1 Пространство результатов эксперимента

Начиная с работы [14] является распространенной точка зрения, что результатом физического измерения является рациональное число. Поскольку эксперимент это всегда конечная серия измерений, естественно считать, что результатом физического эксперимента является конечная последовательность рациональных чисел. Введем соответствующий математический объект. Пусть Ω – произвольное множество. Через $\mathbb{D}$ обозначим множество функций на Ω со значениями в поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$, отличных от нуля не более чем в конечном числе точек. $\mathbb{D}$ обладает естественной структурой векторного пространства над полем $\mathbb{Q}$. Существует взаимно однозначное соответствие между элементами пространства $\mathbb{D}$ и множеством конечных наборов рациональных чисел. *Поэтому естественно считать пространство $\mathbb{D}$ пространством результатов эксперимента.* Будем далее считать, что Ω – множество мощности континуум. В этом случае множество $\mathbb{D}$ также имеет мощность континуум. Пространство $\mathbb{D}$ снабдим дискретной топологией и превратим, таким образом, в топологическое векторное пространство над $\mathbb{Q}$. Через $\mathbb{Q}_p, p = 2, 3, 5, \ldots$ обозначим поля p-адических чисел, $\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}$ («∞-адический» всюду будет означать «вещественный»). Пусть $\mathbb{Q}_p^d$ – аддитивная группа $\mathbb{Q}_p$, снабженная дискретной топологией. Справедлива следующая теорема.

Теорема 5.1. *Аддитивная группа пространства $\mathbb{D}$ изоморфна группе $\mathbb{Q}_p^d$ для всех простых p и $p = \infty$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть $\mathbb{Q}_p^d$ как векторное пространство над $\mathbb{Q}$. В этом случае множество Ω – базис Гамеля вышеуказанного пространства.

Замечание. Доказанная теорема позволяет в ряде случаев не рассматривать отдельно p-адические и вещественные теории, а формулировать утверждения для пространства $\mathbb{D}$. При этом, объекты, обладающие дополнительным свойством непрерывности в p-адической или вещественной топологиях, будут, соответственно, объектами p-адической или вещественной теорий. В действительности, мы доказали больше, чем просто изоморфизм групп – мы доказали изоморфизм векторных пространств, из которого следует изоморфизм их аддитивных групп. Вышеуказанный изоморфизм векторных пространств конечно же не единственный. Однако, мы можем выбрать для каждого p (включая ∞) фиксированный изоморфизм и с его помощью отождествить элементы пространства $\mathbb{D}$ с элементами пространства $\mathbb{Q}_p^d$.

В настоящей главе попытаемся ответить на следующий вопрос. Пусть задан результат эксперимента, то есть задана функция $f \in \mathbb{D}$. Является ли функция f результатом классического или квантового эксперимента. Другими словами, можно ли по каким-либо свойствам функции f определить, является ли измеряемая система квантовой. Этот вопрос нуждается в ясной математической постановке (см., также, [50]). Постараемся конкретизировать задачу для одномерной квантовой механики – точнее, для представлений коммутационных соотношений одномерной квантовой механики.

5.2 Представления коммутационных соотношений

Пусть G-локально-компактная абелева группа, $\hat{G}$ - группа характеров группы G (двойственная по Понтрягину). Группу G будем записывать аддитивно, группу $\hat{G}$ - мультипликативно.

Определение 5.1. *Представлением коммутационных соотношений над G назовем пару $(\mathcal{W}, \mathcal{H})$, где $\mathcal{H}$ - гильбертово пространство над $\mathbb{C}$, $\mathcal{W}$ - отображение из $G \times \hat{G}$ в множество унитарных операторов в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ($\mathcal{B}(\mathcal{H})$ - алгебра ограниченных операторов на $\mathcal{H}$), удовлетворяющее следующим условиям:*

1. $\mathcal{W}(0, 1) = Id_{\mathcal{H}}$;
2. *отображение* $(g, \hat{g}) \mapsto \mathcal{W}(g, \hat{g})$ *- непрерывно в слабой операторной топологии;*
3. $\mathcal{W}(g, \hat{g})\mathcal{W}(h, \hat{h}) = \hat{g}(h)\overline{\hat{h}(g)}\mathcal{W}(h, \hat{h})\mathcal{W}(g, \hat{g})$.

Понятия цикличности, неприводимости, унитарной эквивалентности и прямой суммы представлений коммутационных соотношений определяются естественным образом. Известно (Теорема единственности Стоуна-фон

Неймана-Маки) [74], что существует единственное с точностью до унитарной эквивалентности неприводимое представление коммутационных соотношений и любое представление коммутационных соотношений есть прямая сумма неприводимых представлений.

В дальнейшем мы также будем рассматривать разрывные представления коммутационных соотношений (то есть представления, для которых свойство непрерывности из определения 5.1 нарушается).

Для случая $\mathbb{Q}_p, p = 2, 3, 5, ..., \infty$ группы $\mathbb{Q}_p$ и $\hat{\mathbb{Q}}_p$ изомофны. Изоморфизм задается формулой $\mathbb{Q}_p \ni y \to \hat{y}(x) = \chi_p(yx) \in \hat{\mathbb{Q}}_p, x \in \mathbb{Q}_p$, где χ_p - произвольный (фиксированный) невырожденный характер группы $\mathbb{Q}_p$.

В качестве χ_p можно выбрать характер $\chi_p(x) = \exp(2\pi i\{x\}_p)$, где $\{x\}_p$ - p-адическая дробная часть x. В случае $G = \mathbb{Q}_p$ коммутационные соотношения приобретают более привычный вид:

$$\mathcal{W}(x, y)\mathcal{W}(x', y') = \chi_p(xy' - yx')\mathcal{W}(x', y')\mathcal{W}(x, y).$$

Удобно ввести обозначение. Пусть $z = (x, y), z' = (x', y')$, обозначим через B симплектическую форму на $\mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p$, $B(z, z') = xy' - yx'$. В дальнейшем мы будем рассматривать именно этот случай.

Определение 5.2. *Комплекснозначную функцию μ, определенную на пространстве $\mathbb{D}^2$, $\mu : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{C}$, удовлетворяющую условию*

$$\sum_{i,j}^{n} \lambda_i \bar{\lambda}_j \mu(x_j - x_i)\chi_p(1/2B(x_i, x_j)) \geq 0,$$

для любых конечных наборов $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ комплексных чисел и $x_1, \ldots, x_n$ элементов из $\mathbb{D}^2$, будем называть положительно определенной функцией.

Тройку (W, H, ϕ), где (W, H) – представление коммутационных соотношений над $\mathbb{Q}_p$, а ϕ – циклический вектор этого представления будем называть циклическим представлением коммутационных соотношений. Два циклических представления (W_1, H_1, ϕ_1) и (W_2, H_2, ϕ_2) называются эквивалентными, если существует унитарный оператор $U : H_1 \to H_2$, удовлетворяющий условиям

1. $UW_1(z)U^{-1} = W_2(z)$ для всех $z \in \mathbb{Q}_p^2$,

2. $U\phi_1 = \phi_2$.

Следующая теорема (см., например, [59]) задает взаимнооднозначное соответствие между множеством положительно определенных на $\mathbb{Q}_p^2$ функций и множеством классов эквивалентности циклических представлений коммутационных соотношений.

Теорема 5.2. *Для любой положительно определенной на $\mathbb{Q}_p^2$ функции μ существует единственное с точностью до эквивалентности циклическое представление коммутационных соотношений (W, H, ϕ) такое, что справедливо равенство $\mu(z) = (\phi, W(z)\phi)$ для всех $z \in \mathbb{Q}_p^2$, $(\ ,\ )$ – скалярное произведение в H.*

Если μ – непрерывная функция, то соответствующее циклическое представление коммутационных соотношений непрерывно.

Приведем примеры положительно определенных функций. Пусть $p < \infty$. Через μ_p обозначим характеристическую функцию множества

$$\{z = (x, y) \in \mathbb{Q}_p^2, |x|_p \leq 1, |y|_p \leq 1\}.$$

Несложно показать, что μ_p – непрерывная положительно определенная функция. Соответствующее циклическое представление коммутационных соотношений является неприводимым ([20]).

Для вещественного случая ($p = \infty$) примером непрерывной положительно определенной функции является функция

$$\mu_\infty(x, y) = \exp\left(-\frac{\pi}{2}(x^2 + y^2)\right).$$

Соответствующее представление коммутационных соотношений неприводимо (см., например, [6]).

С циклическими представлениями коммутационных соотношений связано понятие когерентных состояний.

Определение 5.3. *Пусть (W, H, ϕ) – циклическое представление коммутационных соотношений. Следующее множество векторов в H*

$$\{W(z)\phi, z \in \mathbb{Q}_p^2\}$$

называется множеством когерентных состояний представления (W, H, ϕ).

5.3 Классическая частица

В предыдущем разделе мы рассмотрели примеры непрерывных положительно определенных функций. Ниже мы построим пример положительно определенной функции (и соответствующего представления коммутационных соотношений), которые не являются непрерывными.

Справедлива следующая очевидная Лемма.

Лемма 5.1. *Функция* $\Delta : \mathbb{D}^2 \to \mathbb{C}$ *следующего вида*

$$\Delta(z) = \begin{cases} 1, z = 0; \\ 0, z \neq 0. \end{cases}$$

является положительно определенной.

Построим соответствующее циклическое представление коммутационных соотношений. В качестве пространства представления H выберем пространство $l_2(\mathbb{D}^2)$ квадратично суммируемых функций на $\mathbb{D}^2$ отличных от нуля не более чем в счетном числе точек. Заметим, что пространство H не является сепарабельным. В качестве циклического вектора выберем функцию $\phi_0(z) = \Delta(z)$. Операторы представления зададим соотношением

$$(W(z)f)(u) = \chi_p(1/2B(z,u))f(u-z). \tag{27}$$

Легко проверить, что определенные таким образом операторы являются унитарными и удовлетворяют коммутационным соотношениям. Заметим, что построенное представление не является неприводимым.

Теорема 5.3. *Представление* $\big(W, l_2(\mathbb{D}^2), \phi_0\big)$ *обладает следующими свойствами:*

1. *для когерентных состояний справедливо равенство*

$$\left(W(z)\phi_0\right)(u) = \phi_z(u) = \begin{cases} 1, u = z, \\ 0, u \neq z; \end{cases}$$

2. *множество когерентных состояний образует ортонормированный базис в пространстве представления;*

3.

$$(\phi_u, W(z)W(z')\phi_u) = (\phi_u, W(z')W(z)\phi_u)\,, z \in \mathbb{D}^2, z' \in \mathbb{D}^2,$$

для всех $u \in \mathbb{D}^2$, то есть операторы представления коммутируют в любом когерентном состоянии;

Утверждения теоремы непосредственно следуют из определения представления.

Представление такого вида рассматривлось в работе [84]. Отметим также, что представление коммутационных соотношений, обладающее свойствами, указанными в Теореме 5.3, единственно с точностью до эквивалентности.

Когерентное состояние $\phi_z, z \in \mathbb{D}^2$ естественно интерпретировать как *волновую функцию классической частицы.* Действительно, в этом состоянии координата и импульс частицы точно определены, то есть соотношения неопределенности Гейзенберга не выполняются. При этом в соответствии с теоремой 5.3, операторы представления коммутируют в этом состоянии.

Заметим, что определение операторов представления (формула (27)) зависит от выбора топологии на пространстве $\mathbb{D}^2$ (то есть от p), однако пространство представления и основные свойства представления (Теорема 5.3) не зависят от p. Другими словами, волновая функция классической частицы не содержит информации о том, в рамках какой (p-адической или вещественной) теории мы находимся.

5.4 Когерентные состояния и квантование

Под процедурой квантования (фазового пространства) будем понимать процедуру построения неприводимого представления коммутационных соотношений. В предыдущем разделе мы построили циклическое представление коммутационных соотношений, которое будем называть почти классическим. Это представление не является неприводимым, более того, это представление реализуется в не сепарабельном гильбертовом пространстве. Задача квантования, таким образом, сводится к выделению неприводимого подпредставления почти классического представления.

Пусть μ – положительно определенная функция на пространстве $\mathbb{Q}_p^2$. Через H_μ^0 обозначим замыкание подпространства в $l_2(\mathbb{D}^2)$, состоящее из фукнций, удовлетворяющих условию

$$\sum_{i,j}^{n} f(x_i)\bar{f}(x_j)\mu(x_j - x_i)\chi_p(1/2B(x_i, x_j)) = 0 \tag{28}$$

для любых конечных наборов $x_1, \ldots, x_n$ элементов из $\mathbb{D}^2$. Легко видеть, что H_μ^0 инвариантно относительно действия операторов (27). Пусть H_μ – фактор-пространство $l_2(\mathbb{D}^2)/H_\mu^0$, снабженное новым скалярным произведением $\langle\ ,\ \rangle$

$$f, g \in H_\mu, \langle f, g\rangle = \sum_{x,y} f(x)\bar{g}(y)\mu(y - x)\chi_p(1/2B(x, y)).$$

Из определения положительно определенной функции и конструкции пространства H_μ следует, что H_μ – Гильбертово пространство. Через $\tilde{\phi}_0$ обозначим элемент пространства H_μ, соответствующий элементу ϕ_0 пространства $l_2(\mathbb{D}^2)$. Справедлива следующая Теорема.

Теорема 5.4. *Циклическое представление коммутационных соотношений* $\left(W, H_{\mu_p}, \tilde{\phi}_0\right)$*, где операторы* W *задаются формулой (27), неприводимо при всех* $p = 2, 3, 5, \ldots, \infty$.

Доказательство для вещественного случая можно найти в книге [6], для p-адического – в работе [20].

Дадим интерпретацию полученных результатов на языке колмогоровской сложности конечных объектов ([26]). Для этого заметим, что существует естественное взаимно-однозначное соответствие между классическими волновыми функциями $\phi_u, u \in \mathbb{D}^2$ и результатами эксперимента (функции сопоставляется ее носитель).

Конечной серии экспериментов поставим в соответствие набор классических волновых функций $\phi_{u_i}, i = 1, \ldots, n$. Если мы находимся в ситуации классической системы, то конечная последовательность рациональных чисел, определяемая носителями классических волновых функций, будет случайной в силу ортогональности классических волновых функций (Теорема 3). (Случайный разброс результатов классического эксперимента возникает в силу неидеальности условий эксперимента. В случае идеальной серии экспериментов результатом будет являться стационарная последовательность, т.е. состоящая из одинаковых членов.) Если же в этой последовательности появляются закономерности, определяемые соотношениями вида (28) для некоторого p, это означает появление квантового эффекта (то есть p-адической квантовой механики). Наличие закономерностей в конечной последовательности означает нетривиальную сложность этой последовательности.

5.5 Квантовая аппроксимация

Определение 5.4. *Функция β, определенная на множестве $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}^2$, принимающая значения в поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел, $\beta : \mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}^2 \mapsto \mathbb{C}$ и обладающая следующими свойствами:*

1. $\beta(x, y) = \bar{\beta}(y, x)$ *для всех* $x \in \mathbb{D}^2, y \in \mathbb{D}^2$*;*
2. $\beta_y(x) = \beta(x, y)$ *является характером группы* $\mathbb{D}^2$ *при любом фиксированном* $y \in \mathbb{D}^2$*;*
3. *если* $\beta_y(x) = 1$ *для всех* $y \in \mathbb{D}^2$*, то* $x = 0$

называется бихарактером группы $\mathbb{D}$.

Замечание. Легко увидеть, что если β непрерывна в p-адической топологии, то $\beta(x, y) = \chi_p(B(x, y))$, где χ_p – некоторый нетривиальный аддитивный характер поля $\mathbb{Q}_p$ (например, $\chi_p(a) = \exp(2\pi i\{a\}_p), a \in \mathbb{Q}_p$), а B – невырожденная симплектическая билинейная форма на $\mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p$.

Определение 5.5. *Тройку (W, H, β), где H – комплексное гильбертово пространство, β – бихарактер группы $\mathbb{D}$, W – отображение из $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ в группу унитарных операторов на H, удовлетворяющее условию*

$$W(x)W(y) = \beta(x, y)W(y)W(x), x \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}, y \in \mathbb{D} \times \mathbb{D},$$

будем называть представлением коммутационных соотношений над группой $\mathbb{D}$.

Представление коммутационных соотношений над локально-компактными группами рассматривались многими авторами, наиболее близкое определение можно найти в работе [84].

Замечание. В случае, когда бихарактер β непрерывен в p-адической топологии, а отображение W слабо непрерывно, мы получим стандартное определение коммутационных соотношений в форме Вейля для одномерной p-адической квантовой механики. В этом случае мы будем использовать обозначение (W_p, H_p, β_p), при этом мы не будем требовать непрерывности отображения W_p.

Сформулируем основную теорему настоящей статьи.

Теорема 5.5. *Пусть* $(W_p, H_p, \beta_p), p \neq \infty$ *– представление коммутационных соотношений одномерной p-адической квантовой механики. Тогда для любого конечного набора* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *элементов из* $\mathbb{D} \times \mathbb{D}, x_i \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}, i = 1, 2, \ldots, n$ *найдется представление коммутационных соотношений вещественной квантовой механики* $(W_\infty, H_\infty, \beta_\infty)$ *такое, что*

$$W_p(x_i) = W_\infty(x_i)$$

для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Заметим, что представления W_p и W_∞ вообще говоря, не являются непрерывными.

Одним из основных элементов доказательства теоремы является следующая лемма.

Лемма 5.2. *Пусть* χ *– характер группы* $\mathbb{D}$. *Тогда для любого конечного набора* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *элементов из* $\mathbb{D}, x_i \in \mathbb{D}, i = 1, 2, \ldots, n$ *найдется характер* χ_∞ *группы* $\mathbb{D}$, *непрерывный в вещественной топологии, такой что* $\chi(x_i) = \chi_\infty(x_i)$ *для всех* $i = 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство. Лемма является простым обобщением известной аппроксимационной теоремы для характеров аддитивной группы поля $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. Известно ([47]), что если ϕ – произвольный характер аддитивной группы поля $\mathbb{Q}$, а $r_1, r_2, \ldots, r_m$ – произвольные элементы из $\mathbb{Q}$, то существует непрерывный в вещественной топологии характер ψ группы $\mathbb{Q}$ такой, что $\psi(r_i) = \phi(r_i)$ для всех $i = 1, 2, \ldots, m$. Это утверждение очевидным образом обобщается на случай группы $\mathbb{Q}^n$ (прямое произведение конечного числа групп $\mathbb{Q}$).

Далее, группа $\mathbb{D}$ является прямой суммой несчетного количества групп $\mathbb{Q}, \mathbb{D} = \bigoplus_\Omega \mathbb{Q}$. Однако, если мы рассматриваем конечный набор $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ элементов из $\mathbb{D}$, то все $x_i, i = 1, 2, \ldots, n$ лежат в $\mathbb{Q}^N$ для достаточно большого N. Следовательно, существует характер χ_∞^N группы $\mathbb{Q}^N$ такой, что $\chi(x_i) = \chi_\infty^N(x_i), i = 1, 2, \ldots, n$. Характер χ_∞^N можно продолжить с $\mathbb{Q}^N$ до характера χ_∞ всей группы $\mathbb{D}$, положив его равным тождественному характеру на остальных компонентах в прямой сумме $\bigoplus_\Omega \mathbb{Q}$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть β_p – бихарактер группы $\mathbb{D}$, непрерывный в p-адической топологии. Воспользовавшись определением бихарактера и леммой 5.2 легко увидеть, что для любого конечного набора $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ элементов из $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ существует бихарактер β_∞ группы $\mathbb{D}$, непрерывный в вещественной топологии такой, что $\beta_\infty(x_i, x_j) = \beta_p(x_i, x_j)$ для всех $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Таким образом, если (W_p, H_p, β_p) – представление коммутационных соотношений одномерной p-адической квантовой механики, то операторы $W_p(x_i), i = 1, 2, \ldots, n$ удовлетворяют "вещественным"коммутационным соотношениям

$$W_p(x_i)W_p(x_j) = \beta_\infty(x_i, x_j)W_p(x_j)W_p(x_i), i = 1, 2, \ldots, n.$$

Следовательно, существует представление коммутационных соотношений одномерной вещественной квантовой механики $(W_\infty, H_\infty, \beta_\infty)$ такое, что

$$W_\infty(x_i) = W_p(x_i), i = 1, 2, \ldots, n$$

. Теорема доказана.

В настоящей главе предпринята попытка определенным образом унифицировать p-адические и вещественную теорию. На первом этапе унификация проводится на классическом уровне. Предлагается в качестве координат и импульсов одномерной классической системы использовать не вещественные или p-адические числа, а элементы группы $\mathbb{D}$. Путем введения различных топологий на $\mathbb{D}$, получаем вещественные или p-адические координаты и импульсы. Группа $\mathbb{D}$ имеет естественную структуру векторного пространства на полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел.

Пусть (W, H, β) – произвольное представление коммутационных соотношений над $\mathbb{D}$. В работе [84] показано, что C^*-алгебра A_β, порожденная операторами $\{W(x), x \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}\}$ не зависит от выбора представления, а зависит только от бихарактера β. На этом языке основную теорему статьи можно переформулировать следующим образом. Пусть A_{β_p} – C^*-алгебра p-адических коммутационных соотношений. Тогда для любого конечного числа образующих алгебры A_{β_p} найдется алгебра A_{β_∞} вещественных коммутационных соотношений, совпадающая с алгеброй A_{β_p} на этих образующих.

Теорема имеет одно любопытное следствие. Если мы ограничимся рамками теории представлений коммутационных соотношений и работаем с конечным набором точек фазового пространства, мы, вообще говоря, не можем определить в рамках какой теории (p-адической или вещественной) мы находимся.

6 Адельная декогеренция

6.1 Введение

В контексте настоящей Главы декогеренция понимается в самом общем виде как процесс появления классических свойств в квантовой системе. В стандартном подходе классические свойства в квантовой системе появляются в процессе взаимодействия этой системы со своим окружением [81]. Особенностью предлагаемого подхода является рассмотрение квантовомеханической системы одновременно во всех пополнениях поля рациональных чисел, то есть над полем вещественных чисел и над полями p-адических чисел.

Идея рассмотрения физических систем над различными числовыми полями была предложена в работе [88]. Обширную библиографию по этому вопросу можно найти в книге [12] и обзорах [63], [64].

Идея адельного подхода была предложена и развита в работах [75], [69], [86], [8], [15], [62] и многих других авторов.

6.2 Классическая система

Через $\mathbb{Q}$ обозначим поле рациональных чисел, $\mathbb{Q}_p$ - поле p-адических чисел, $\mathbb{Q}_\infty$ - поле вещественных чисел.

Рассмотрим простейший случай классической системы – одномерную частицу. Фазовым пространством F_p этой системы является двумерное пространство над $\mathbb{Q}_p$ с заданной невырожденной симплектической формой B_p. На форму B_p наложим дополнительное условие рациональности: $B_p(z, z') \in \mathbb{Q}$ для всех $z \in \mathbb{Q}^2, z' \in \mathbb{Q}^2$. Динамика системы задается линейным симплектическим преобразованием пространтсва (F_p, V_p), то есть элементом из $SL_2(\mathbb{Q}_p)$.

6.3 Квантовая система

В качестве квантового объекта будем рассматривать представление коммутационных соотношений в форме Вейля.

Пусть H_p - комплексное Гильбертово пространство, W_p - сильно непрерывное отображение фазового пространства F_p в семейство унитарных операторов на H_p, удовлетворяющее соотношению

$$W_p(z)W_p(z') = \chi_p(B(z,z'))W_p(z')W_p(z),$$

где $\chi_\infty(x) = \exp(-2\pi i x)\,, \chi_p(x) = \exp(2\pi i\{x\}_p)$, $\{x\}_p$ - p-адическая дробная часть числа $x \in \mathbb{Q}_p$. Далее будем рассматривать только неприводимые представления.

Далее индекс p будем опускать, поскольку формулы единообразны для всех p. Если преобразование классической системы дается симплектическим преобразованием T, то преобразование квантовой системы определяется унитарным оператором $U(T)$:

$$U(T)W\left(T^{-1}z\right) = W(z)U(T).$$

6.4 Представление Картье

Наиболее широко используются координатное и импульсное представления коммутационных соотношений (представление Шредингера). Мы будем использовать представление Картье. [60], [20]

Пусть L - решетка в пространстве F, то есть свободный $\mathbb{Z}_p$-модуль ранга 2. Заметим, что в случае $p = \infty$ - это дискретное подмножество F_∞, при $p \neq \infty$ - компактное подмножество F_p.

Определим двойственную решетку L^* по следующему правилу

$$z \in L^* \iff B_p(z,z') \in \mathbb{Z}_p \, \forall z' \in L.$$

Пусть $L = L^*$ - самодвойственная решетка. Пространство представления Картье H^L состоит из комплекснозначных функций на F, обладающих следующими свойствами

$$f \in H^L \iff f \in L_2\left(F/L\right), f(s+u) = \chi\left(1/2B(s,u)\right)f(s) \, \forall u \in L.$$

Пространство H^L является гильбертовым пространством относительно нормы $\|f\| = \int_{F/L} |f(s)|^2 ds$. В вещественном случае множество F/L компактно, в p-адическом - дискретно, в этом случае интеграл вырождается в сумму. Заметим также, что квадрат модуля волновой функции инвариантен относительно сдвигов на вектор решетки, поэтому представление Картье можно рассматривать как квантовую систему на множестве F/L.

Операторы представления задаются формулой

$$\left(W^L(z)f\right)(s) = \chi\left(1/2B(z,s)\right)f(s-z).$$

Можно показать ([60], [20]), что пара $\left(H^L, W^L\right)$ задает неприводимое представление коммутационных соотношений для любой самодвойственной решетки L.

6.5 Когерентные состояния

Прежде всего определим вакуумный вектор для нашей квантовой системы. Поскольку мы рассматриваем неприводимые представления, любой ненулевой вектор из пространства представления является циклическим вектором и может быть выбран в качестве вакуумного вектора. Поэтому в данной задаче выбор вакуумного вектора - просто вопрос удобства.

Для случая $p \neq \infty$ вакуумный вектор определим по формуле

$$\Omega_p(s) = \begin{cases} 1, s \in L, \\ 0, s \notin L. \end{cases}$$

Легко проверить, что функция Ω_p лежит в пространстве H^L, при этом имеет компактный носитель.

В случае $p = \infty$ через $F_u, u \in L$ обозначим элемент множества F/L, содержащий элемент u решетки L, $F = \cup_{u \in L} F_u$, $F_u \cap F_v = \emptyset, u \neq v$. Вакуумный вектор определим по формуле

$$\Omega_\infty\big|_{F_u}(s) = \chi_\infty\left(\frac{1}{2}B(s,u)\right).$$

Несложно проверить, что $\Omega_\infty \in H^L$. В отличие от p-адического случая, Ω_∞ не является непрерывной функцией и ее носитель - все пространство F.

Когерентным состоянием (см., например, [39]) будем называть вектор Ω_p^z в H_p^L вида

$$\Omega_p^z = W_p^L(z)\Omega_p.$$

Справедливы следующие утверждения. В случае $p \neq \infty$

$$\left(\Omega_p^z, \Omega_p^{z'}\right) = \begin{cases} 1, z - z' \in L, \\ 0, z - z' \notin L; \end{cases}$$

$$\left(\Omega_\infty^z, \Omega_\infty^{z'}\right) = 0 \iff z - z' \in L.$$

Семейства когерентных состояний вида $\{\Omega_p^z, z \in F_p/L_p, p \neq \infty\}$ и $\{\Omega_\infty^u, u \in L_\infty\}$ образуют ортонормированные базисы в соответствующих пространствах H_p^L.

6.6 Адельное представление

Теперь построим тензорное произведение представлений $\left(H_p^L, W_p^L\right)$ по всем p, включая $p = \infty$.

Для этого рассмотрим векторное пространство $\mathbb{H}'$ над полем комплексных чисел, натянутое на вектора вида

$$\phi(Z) = \phi_\infty(z_\infty) \prod_p \phi_p(z_p),$$

где $Z = (z_\infty, z_2, z_3, z_5, \ldots, z_p, \ldots) \in \mathbb{A}^2$, $\mathbb{A}$ - кольцо аделей, и не более чем конечное число сомножителей отлично от $\Omega_p(z_p)$. На $\mathbb{H}'$ зададим естественным образом скалярное произведение

$$(\phi, \psi) = (\phi_\infty, \psi_\infty) \prod_p (\phi_p, \psi_p)\,.$$

На пространстве $\mathbb{H}'$ определим операторы $\mathbb{W}(Z), Z \in \mathbb{A}^2$

$$\mathbb{W}(Z)\phi = W_\infty(z_\infty)\phi_\infty \prod_p W_p(z_p)\phi_p.$$

Поскольку справедливо равенство $W_p(z_p)\Omega_p = \Omega_p$ для всех $z_p \in L_p$, то операторы $\mathbb{W}(Z), Z \in \mathbb{A}^2$ отображают $\mathbb{H}'$ в $\mathbb{H}'$.

Пространство адельного представления $\mathbb{H}$ определим как замыкание предгильбертова пространства $\mathbb{H}'$ относительно естественной нормы, операторы $\mathbb{W}(Z)$ единственным образом продолжаются до унитарных операторов на $\mathbb{H}$. При этом, справедливы следующие коммутационные соотношения для всех $Z, Z' \in \mathbb{A}^2$:

$$\mathbb{W}(Z)\mathbb{W}(Z') = \chi_\infty\left(B_\infty(z_\infty, z'_\infty)\right) \prod_p \chi_p\left(B_p(z_p, z'_p)\right) \mathbb{W}(Z')\mathbb{W}(Z).$$

6.7 Декогеренция и коллапс волновой функции

Пусть теперь F - двумерное векторное пространство над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, B - невырожденная симплектическая форма на F, принимающая рациональные значения. Для всякого простого p и $p = \infty$ пространство

F пополняется до пространства F_p, форма B естественным образом продолжается до невырожденной симплектической формы B_p на F_p. Действительно, исходная форма B в силу линейности является непрерывной в p-адической топологии на F для всех p. Пусть L - самодвойственная $\mathbb{Z}$-решетка в F. Замыкание L в вещественной или p-адических топологиях на пространстве F дают соответствующие самодвойственные $\mathbb{Z}_p$-решетки L_p. Построим соответствующие представления Картье $\left(H_p^L, W_p^L\right)$ коммутационных соотношений и их тензорное произведение $(\mathbb{H}, \mathbb{W})$.

Рассмотрим произвольные векторы $r, r' \in F$. Через R, R' обозначим векторы в пространстве $\mathbb{A}^2$ вида $R = (r, r, \dots, r, \dots), R' = (r', r', \dots, r', \dots)$. Справедлива формула

$$\mathbb{W}(R)\mathbb{W}(R') = \mathbb{W}(R')\mathbb{W}(R).$$

Другими словами, операторы $\mathbb{W}(R)$ и $\mathbb{W}(R')$ коммутируют. Утверждение непосредственно вытекает из простой адельной формулы для характеров

$$\chi_\infty(q) \prod_p \chi_p(q) = 1, q \in \mathbb{Q}.$$

Таким образом, исходная квантовая системы при ограничении на рациональные числа приобретает классические свойства.

При этом происходит коллапс волновой функции. Рассмотрим для примера поведение вакуумного вектора при аналогичном ограничении на рациональные числа. Справедлива простая формула

$$\Omega(R) = \Omega_\infty(r) \prod_p \Omega_p(r) = \begin{cases} 1, r = 0, \\ 0, r \neq 0. \end{cases}$$

Таким образом, при ограничении вакуумного состояния на рациональные числа в фундаментальной области решетки вакуумное состояние превращается в функцию, равную единице в начале координат и нулю во всех других точках фундаментальной области. Другими словами, состояние стало классическим (координата и импульс частицы определены однозначно).

В заключение дадим краткую физическую интерпретацию полученных результатов. Поскольку результат измерения представляется всегда рациональным числом, фазовое пространство одномерной классической частицы можно рассматривать как двумерное пространство на полем рациональных чисел.

Далее, в каждом из локальных расширений фазового пространства строится нетривиальная квантовая теория. Оказывается, что если в построенных таким образом квантовых моделях опять вернуться к рациональным числам, при этом учесть вклады всех квантовых теорий (вещественной и всех p-адических), то вклады различных теорий компенсируются, и система опять проибретает классические свойства.

7 Качественная теория p-адических динамических систем

7.1 Классическая механика

При построении формальной модели классической системы будем следовать подходу Макки [32]. Среди общих классических систем будет выделен класс ультраметрических классических систем. Для ультраметрических динамических систем доказано свойство неперемешиваемости и усиленный вариант теоремы Пуанкаре о возвращении.

В качестве отправной точки построения модели классической системы примем понятие множества результатов эксперимента $\mathcal{E}$. Дргими словами - это множество показаний регистрирующего прибора. В традиционном подходе в качестве множества $\mathcal{E}$ рассматривается множество вещественных чисел $\mathbb{R}$, со всеми присущими этому множеству дополнительными структурами (полное нормированное упорядоченное коммутативное поле). Начиная с работы [87] возникла содержательная критика такого подхода. Основным постулатом выступило утверждение, что показание прибора - всегда рациональное число, и пополнение поля $\mathbb{Q}$ рациональных чисел до поля $\mathbb{R}$ вещественных чисел - это вопрос удобства. Более того, это не единственная возможность. В качестве возможной альтернативы было предложено использовать другое пополнение поля $\mathbb{Q}$ - поля $\mathbb{Q}_p$ p-адических чисел. Уместно заметить, что вещественными и p-адическими числами исчерпываются по существу все возможности пополнения поля рациональных чисел до полного нормированного поля (теорема Островского).

Еще один подход к проблематике множества результатов экспериментов рассматривался в работе [21]. Предлагалось использовать в качестве множества $\mathcal{E}$ векторное пространство над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел с континуальным базисом Гамеля (такую структуру имеют как поле $\mathbb{R}$ вещественных чисел, так и поля $\mathbb{Q}_p$ p-адических чисел). Элемент такого пространства - конечный набор рациональных чисел - интерпретировался как результат серии экспериментов.

В контексте настоящей Главы в качестве пространства $\mathcal{E}$ будет выступать измеримое пространство. Заметим, что множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел и множества $\mathbb{Q}_p$ p-адических чисел, снабженные соответствующими сигмаалгебрами борелевских подмножеств, изоморфны как измеримые пространства. Таким образом, если мы будем рассматривать $\mathcal{E}$ только как измеримое пространство, мы можем использовать в качестве модели $\mathcal{E}$ как вещественные, так и p-адические числа равноправным образом.

7.2 Множество параметров и наблюдаемые величины

В качестве базового постулата при построении модели классической системы служит представление о том, что классическая физическая система обладает набором предустановленных параметов, и задача эксперимента состоит в определении численных значений этих параметров. Например, классическая частица обладает координатой и импульсом. Эксперимент состоит в определении численных значений координаты и импульса. Множество таких параметров будем обозначить через $\mathcal{P}$.

Наблюдаемая величина, или просто наблюдаемая, - это функция, определенная на множестве параметров $\mathcal{P}$ и принимающая значение в пространстве результатов $\mathcal{E}$. Еще раз отметим, что именно предположение о существовании априорно предписанных параметров классической системе позволяет определить наблюдаемую как функцию на множестве параметров. Наличие дополнительной структуры на пространтве $\mathcal{E}$ - структуры измеримого пространства - позволяет для каждой наблюдаемой $f \in \mathcal{P}$ определить структуру измеримого пространства на $\mathcal{P}$. А именно, соответствующая сигма-алгебра на $\mathcal{P}$ задается как минимальная сигма-алгебра подмножеств множества параметров $\mathcal{P}$, для которой наблюдаемая f является измеримой функцией.

Если имеется семейство $\mathcal{O}$ наблюдаемых, то сигма-алгебру на $\mathcal{P}$ определяем как минимальную сигма-алгебру подможеств $\mathcal{P}$, относительно которой все наблюдаемые из семейства $\mathcal{O}$ измеримы. К примеру, если мы требуем, чтобы наблюдаемой являлась любая функция, определенная на $\mathcal{P}$, то в качестве соответствующей сигма-алгебры будет выступать алгебра всех подмножеств множества параметров $\mathcal{P}$.

7.3 Состояние системы

Как отмечалось в предыдущем разделе - множество $\mathcal{P}$ параметров классической системы - измеримое пространство.

Состоянием системы будем называть вероятностную меру на пространстве $\mathcal{P}$. Множество состояний будем обозначать через $\mathcal{S}$.

Пусть $f \in \mathcal{O}$ - наблюдаемая, $E \subset \mathcal{E}$ - подмножество пространства результатов и $\mu \in \mathcal{S}$ - состояние системы. Физический смысл придается величине $\mu\left(f^{-1}(E)\right)$. Это вероятность того, что значение наблюдаемой f системы в состоянии μ лежит в множестве E.

Мы используем стандартную колмогоровскую вероятность. Подход, связанный с p-адической вероятностью, был предложен и развит в [46]. Заметим, что в отличие от наблюдаемых величин, нет веских аргументов в пользу того, что вероятность должна принимать значения в поле рациональных чисел. Вероятность в данном контексте - математический инструмент обработки статистических данных эксперимента.

7.4 Динамика классической системы

Динамика классической системы задается измеримым эндоморфизмом T пространства параметров $\mathcal{P}$. Множество измеримых эндоморфизмов $End(\mathcal{P})$ пространства параметров образуют полугруппу относительно композиции. Обратимые (измеримые) эндоморфизмы образуют группу $Aut(\mathcal{P})$ автоморфизмов пространства параметров. Измеримое пространство $\mathcal{P}$ с заданным на нем измеримым эндоморфизмом T образуют динамическую систему.

Пусть теперь задана полугруппа G и ее представление $g \ni G \to T^g \in End(\mathcal{P})$ измеримыми эндоморфизмами пространства параметров. Элементы полугруппы G интерпретируем как моменты времени. В частности, если в качестве G выбрать пулугруппу $\mathbb{R}_+$ неотрицательных вещественных чисел, то получим обычное понятие времени. В случае, когда G есть полугруппа $\mathbb{Z}_+$ неотрицательных целых чисел, получим динамическую систему с дискретным временем. Динамические системы с p-адическим временем возникают естественным образом из систем с дискретным временем, если помимо измеримости потребовать непрерывность представления в p-адической топологии на $\mathbb{Z}_+$.

7.5 Логика классической модели

Как уже отмечалось, фундаментальным постулатом классической модели служит представление о наличии предустановленных параметров у классической системы. Это позволяет рааасматривать наблюдаемые величины как функции на пространстве параметров. Поскольку физический смысл придается величине $\mu\left(f^{-1}(E)\right)$, где $E \in \mathcal{E}$ - подмножества пространства результатов эксперимента, $f \in \mathcal{O}$ - наблюдаемая величина, $\mu \in \mathcal{S}$ - состояние системы, можно абстрагироваться от самого пространства $\mathcal{P}$ и рассматривать только сигма-алгебру Σ измеримых подмножеств пространства параметров. Это нисколько не огрубляет рассматриваемую картину, поскольку точки $\mathcal{P}$ могут рассмариваться как одноэлементные подмножества $\mathcal{P}$. Кроме того, будем считать, что выполнены условия $\emptyset \in \Sigma, \mathcal{P} \in \Sigma$.

Ключевым моментом является тот факт, что семейство подмножеств Σ образует дистрибутивную решетку с дополнением. Другими словами, на множестве Σ задано отношение частичного порядка (вложение множеств): $A \leq B \iff A \subseteq B, A \in \Sigma, B \in \Sigma$ и две операции: $\wedge$ - пересечение множеств и $\vee$ - объединение множеств, удовлетворяющие свойствамдля всех $A \in \Sigma, B \in \Sigma, C \in \Sigma$:

- $A \vee B = B \vee A, A \wedge B = B \wedge A$ (коммутативность);
- $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C, A \wedge (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge C$ (ассоциативность);
- $A \vee A = A, A \wedge A = A$ (идемпотентность);
- $A = A \vee (A \wedge B), A = A \wedge (A \vee B)$ (поглощение);
- $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ (дистрибутивность);
- $\forall A\, \exists B : A \wedge B = \emptyset, A \vee B = \mathcal{P}$ (дополнительность).

Множество Σ снабжается естественным образом структурой булевой алгебры, если в качестве нулевого элемента выбрать пустое множество, в качестве единиченого элемента - все пространство параметров $\mathcal{P}$, а в качестве операции отрицания - операцию дополнения $\neg A = \mathcal{P} \backslash A$. Ключевым свойством, определяющим классичность системы, является свойство дистрибутивности.

7.6 p-Адические классические системы

Было бы весьма интересно выделить класс p-адических (или ультраметрических) моделей на языке формальной логики классической системы. Однако, понятно, что это сделать не удастся. Как уже отмечалось, вещественные и p-адические числа изоморфны уже как измеримые пространства. Более того, ультраметрические пространства дают универсальный пример булевых алгебр.

Действительно, согласно теореме Стоуна (см., например, [40]), всякая булева алгебра изоморфна булевой алгебре открыто-замкнутых подмножеств компактного вполне несвязного топологического пространства (пространства Стоуна). Пространство Стоуна для данной булевой алгебры определяется однозначно с точностью до гомеоморфизма. Если булева алгебра счетна, то ее пространство Стоуна метризуемо (это верно и в обратную сторону). При этом метрика, задающая топологию на пространстве Стоуна будет являться ультраметрикой.

Для определения класса ультраметрических классических систем ограничим исходное определение классической системы. Далее будем считать, что пространство параметров $\mathcal{P}$ снабжено метрикой d и является полным сепарабельным метрическим пространством. Алгебру измеримых подмножеств образуют борелевские подмножества относительно топологии на $\mathcal{P}$, порожденной метрикой d.

Под ультраметрической классической моделью будем понимать описанную выше модель при условии того, что метрика d является ультраметрикой.

Отметим, что полные сепарабельные метрические пространства борелевски изоморфны. Тем не менее, наличие ультраметрики приводит к особым свойствам модели. В качестве примера приведем следующее утверждение.

Теорема 7.1. *Пусть $\mathcal{P}$ - пространство состояний ультраметрической классической системы с ультраметрикой d, μ - состояние системы (вероятностная мера на $\mathcal{P}$) и T - преобразование пространства $\mathcal{P}$, сохраняющее метрику d. Тогда T не является перемешивающим преобразованием.*

Действительно, по определению перемешивающего преобразования, для любых измеримых множеств A и B должно выполняться равенство

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(T^n A \cap B\right) = \mu(A)\mu(B).$$

Выберем в качестве множества A - произвольный шар в $\mathcal{P}$, $0 < \mu(A) < 1$, множество B выберем совпадающим с A. Поскольку T сохраняет метрику, то $T^n A$ - шар в $\mathcal{P}$, причем его радиус совпадает с радиусом шара A. В силу ультраметричности метрики d шары A и $T^n A$ либо не пересекаются, либо совпадают. Следовательно, если предел

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(T^n A \cap A\right)$$

существует, то он равен либо 0, либо $\mu(A)$, что противоречит определению перемешиваемости.

На самом деле, приведенного выше предела не существует, однако, для эргодических преобразований он существует в смысле Чезаро.

Приведем еще одно утверждение про ультраметрические динамические системы - усиленную теорему Пуанкаре о возвращении.

Теорема 7.2. *Пусть $\mathcal{P}$, μ и T - как в Теореме 7.1 и потребуем дополнительно эргодичность преобразования T и инвариантность меры μ относительно преобразованиия T. Через $N_A^a(n)$ обозначим количество возвращений из точки $a \in A$ в шар A за время n. Тогда $N_A^a(n)$ не зависит от a, существует предел $\lim_{n\to\infty} N_A(n)/n$ и этот предел равен $\mu(A)$.*

Доказательство опирается на ультраметричность метрики d и эргодическую теорему фон Неймана. Докажем сначала независимость функции $N_A^a(n)$ от a. Будем следить не за траекторией точки a под действием преобразований T^n, а за траекторией всего шара A. Поскольку преобразование T изометрично, то $T^n A$ - шар такого же радиуса, как и шар A, следовательно, $T^n A$ и A либо не пересекаются, либо совпадают. Если $T^n a \in A$, то $T^n A = A$, откуда и следует независимость $N_A^a(n)$ от a.

Рассмотрим унитарный оператор U на просторанстве $L^2(\mathcal{P}, \mu)$ следующего вида: $(Uf)(x) = f(Tx), f \in L^2(\mathcal{P}, \mu)$. В соотвествии с эргодической теоремой фон Неймана, справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U^n f = (f, 1).$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu\left(T^k A \cap A\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(U^{-k} h_A, h_A\right) = (h_A, 1)\,(h_A, 1) = \mu^2(A).$$

Здесь h_A - характеристическая функция шара A. С другой стороны,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mu\left(T^k A \cap A\right) = N_A(n)\mu(A),$$

откуда и следует утверждение Теоремы.

7.7 Иерархические динамические системы

В ряде моделей, построенных с применением аппарата p-адичекой математичекой физики (например, динамика белка ([58])), было отмечено явление медленной релаксации к равновесному состоянию. Причиной является наличие иерархической структуры в пространстве состояний системы.

В настоящем разделе вводится понятие иерархичекой динамической системы и делается попытка построить качественную теорию такого рода систем. В частности, показано, что иерархические динамические системы не обладают свойством перемешиваемости. С качественной точки зрения, именно свойство перемешиваемости обеспечивает быструю релаксацию к равновесному состоянию динамической системы, отсутствие же этого свойства у иерархических систем объясняет явление медленной релаксации.

Динамические системы над неархимедовыми полями исследовались в работах многих авторов. Библиографию по этому вопросу можно найти в монографии [53].

Будем рассматривать обратимые динамические системы с дискретным временем. В качестве фазового пространства изучаемых динамических систем будет выступать p-адическое аналитическое компактное многообразие в смысле Серра ([83]). Структура таких многообразий дается следущей теоремой.

Теорема 7.3. *Пусть k – локально компактное ультраметрическое поле, q – количество элементов поля вычетов поля k, X – аналитическое, компактное, непустое многообразие, имеющее всюду одинаковую размерность $d \geq 1$ над k. Тогда X – несвязное объединение конечного числа N шаров. Число $n(X) = N \mod (q-1)$ является инвариантом многообразия X.*

Число $n(X)$ будем называть индексом многообразия X. Далее будет рассматриваться случай $k = \mathbb{Q}_p$, тогда $q = p$, хотя результаты верны и для общего случая поля k.

Пример 7.1. $X = \mathbb{Z}_p$. *В этом случае* $n(X) = 1$.

Пример 7.2. $X = S = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p = 1\}$. *В этом случае* $n(X) = 0$.

Пример 7.3. $X = P^1$ *– проективная прямая над* $\mathbb{Q}_p$. *В этом случае* $n(X) = 2$.

В качестве динамических отображений будут выступать аналитические автоморфизмы фазового пространства.

Замечание. *В действительности, будет рассматриваться более общий случай, когда от динамического преобразования* T *будем требовать, чтобы шар отображался в шар и при отображении* T *сохранялась иерархия вложенных шаров. Такого типа отображения рассматривались, например, в [38].*

Существует удобное геометрическое представление иерархических динамических систем в виде древесного графа шаров. Вершинами этого графа являются подшары фазового пространства. Два шара $A, B \subset X$ являются соседними (образуют ребро графа), если один из них строго содержится в другом (например $A \subset B$), и не существует такого шара $C \subset X$, который бы строго содержал вложенный шар и при этом строго содержался в большем шаре $A \subset C \subset B$. Два полубесконечных пути без возвращений на таком графе будем считать эквивалентными, если они отличаются не более чем конечным числом вершин. Классы эквивалентности полубесконечных путей находятся во взаимно однозначном соответствии с точками фазового пространства X. Сохранение иерархии шаров динамическим отображением T эквивалентно условию продолжимости автоморфизма T до автоморфизма графа.

7.8 Динамические системы с инвариантной мерой

Поскольку наше фазовое пространство есть объединение конечного числа шаров, на нем естественным образом определена мера μ (мера шара равна его радиусу). Рассмотрим класс динамических систем, сохраняющих эту меру. К такого рода системам, например, относятся обратимые иерархические системы над $\mathbb{Z}_p$, то есть системы вида $(\mathbb{Z}_p, T)$, где T – автоморфизм. Это легко увидеть из геометрического представления этой динамической системы.

Пример 7.4. *Рассмотрим динамическую систему* $(\mathbb{Z}_p, T)$, *где динамическое преобразование* T *– единичный сдвиг,* $Tx = x + 1, x \in \mathbb{Z}_p$. *Эта система является эргодической, топологически транзитивной и минимальной. Топологическая транзитивность следует из того факта, что целые рациональные числа плотны в* $\mathbb{Z}_p$, *а топологически транзитивный сдвиг на группе – минимален. Заметим, что p-я степень этой динамической системы, то есть система* $(\mathbb{Z}_p, T^p)$ *не является эргодической (шар радиуса* $1/p$ *инвариантен относительно сдвига на p).*

иерархических динамических систем в следующем смысле.

Теорема 7.4. *Пусть* (X, T) *– иерархическая динамическая система,* T *сохраняет меру. Через* $N_B^a(n)$ *обозначим количество возвращений из точки* $a \in B$ *в шар* B *за время* n. *Тогда* $N_B^a(n)$ *не зависит от* a. *Если динамическая система* (X, T) *эргодична, то существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} N_B(n)/n$$

и этот предел равен $\mu(B)$.

Докажем сначала независимость функции $N_B^a(n)$ от a. Будем следить не за траекторией точки a под действием преобразований T^n, а за траекторией всего шара B. Поскольку преобразование T сохраняет меру, то $T^n B$ – шар такого же радиуса, как и шар B, следовательно, $T^n B$ и B либо не пересекаются, либо совпадают. Если $T^n a \in B$, то $T^n B = B$, откуда и следует независимость $N_B^a(n)$ от a.

Рассмотрим унитарный оператор U на просторанстве $L^2(X, \mu)$ следующего вида: $(Uf)(x) = f(Tx), f \in L^2(X, \mu)$. В соотвествии с эргодической теоремой фон Неймана, справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U^n f = (f, 1).$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mu\left(T^k B \cap B\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(U^{-k} h_B, h_B\right) = (h_B, 1)\,(h_B, 1) = \mu^2(B).$$

Здесь h_B - характеристическая функция шара B. С другой стороны,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \mu\left(T^k B \cap B\right) = N_B(n)\mu(B),$$

откуда и следует утверждение Теоремы. Отметим, что задача о числе возвращений для p-адических систем рассматривалась в ряде работ, например, [57]. Как легко заметить, доказательство почти дословно повторяет доказательство аналогичного утверждения для ультраметрических динамических систем.

Из Теоремы 7.4 вытекает важное следствие, характеризующее иерархические динамические системы, сохраняющие меру.

Следствие 7.1. *Пусть (X, T) – иерархическая динамическая системы, сохраняющая меру . Тогда существует такое натуральное число N, что динамическая система $\left(X, T^N\right)$ не является эргодической.*

Другими словами, такие системы не являются вполне эргодическими. Действительно, если исходное преобразование T не является эргодическим, то утверждение очевидно верно при $N = 1$. Пусть T является эргодическим преобразованием. Выберем произвольный шар $B \subset X$ и $a \in B$. Согласно Теореме 7.4, число возвращений $N_B^a(n) = N_B(n)$ из точки a в шар B за время n не равно нулю для некоторого n. Обозначим через N время первого возвращения, т.е. $N_B(N) = 1$. Тогда $T^N B = B$, откуда и следует утверждение.

Замечание. *Теорема 7.4 является усиленным вариантом теоремы Пуанкаре о числе возвращений для рассматриваемого класса динамических систем.*

Пусть $B \subset X$ – шар в X. Рассмотрим последовательность $M_n(B) = \mu\left(T^n B \cap B\right), n = 1, 2, \ldots$. Эта последовательность имеет вид

$$\underbrace{0, 0, \ldots, 0, \mu(B)}_{N}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0, \mu(B)}_{N}, \ldots$$

где N – время первого возвращения. Видно, что если система эргодическая (в этом случае $N \neq 1$ для любого шара B), то последовательность $M_n(B)$ не имеет предела. Таким образом, p-адические динамические системы, сохраняющие меру, не являются перемешивающими.

Среднее по Чезаро последовательности $M_n(B)$ равно $\mu(B)/N$, следовательно (Теорема 7.4), время первого возвращения в шар B равно $1/\mu(B)$. Таким образом, справеливо утверждение.

Следствие 7.2. *Время первого возвращения из шара B в шар B равно $1/\mu(B)$.*

Из последнего утверждения, в частности, вытекает следующее.

Следствие 7.3. *Иерархические динамические системы не имеют периодических орбит.*

Действительно, допустим, что существует $x \in X$ и $n > 1$ такие, что $T^n x = x, T^k x \neq x, 0 < k < n$. Выберем достаточно маленький шар B с центром в точке x, чтобы выполнялось условие $TB \cap B = \emptyset$. Тогда время возвращения из шара B в шар B равно n и не зависит от размера шара, что противоречит выражению для времени первого возвращения.

Эргодические иерархические динамические системы, сохраняющие меру, не имеют неподвижных точек. Утверждение очевидно. Действительно, пусть $x \in X$ – неподвижная точка, $B \subset X$ – шар с центром в x. Тогда, TB – шар того же радиуса и, следовательно, совпадает с B, что противоречит предположению об эргодичности системы.

Следствие 7.4. *Динамическое преобразование, сохраняющее меру μ, равную радиусу шара является строго эргодическим.*

Действительно, пусть ν – нормированная инвариантная мера на X. Тогда либо $\nu = \mu$, либо ν и μ взаимно сингулярны ([27]). Следовательно, найдется такой шар $B \subset X$, что выполнены условия $\mu(B) \neq 0, \nu(B) = 0$. Из доказанного выше следует, что $X = \cup_{n=0}^{N-1} T^n B$, где $N = 1/\mu(B)$. Но тогда $\nu(X) = 0$, следовательно, $\mu = \nu$.

Очевидно, что иерархические динамические системы, которые сохраняют меру, имеют нулевую энтропию. Действительно, преобразование T сохраняет меру, соответственно, действие преобразования T на разбиение на шары равного радиуса не приводит к измельчению этого разбиения.

7.9 Динамические системы общего вида

Часть свойств иерархических динамических систем с инвариантной мерой переносится на общий случай иерархических динамических систем. В силу того, что динамическое отображение T сохраняет иерархию шаров, иерархическая динамическая система всегда обладает квазиинвариантной мерой μ. Действительно, мера, которая ставит в соответствие шару его радиус, квазиинвариантна относительно иерархических преобразований.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 7.5. *Иерархические динамические системы не обладают свойством перемешиваемости.*

При доказательстве будем использовать только два факта – шары в фазовом пространстве либо не пересекаются, либо один вложен в другой, динамическое отображение переводит шар в шар. Пусть A, B – шары в фазовом пространстве. Рассмотрим последовательность $M_n(A, B) = \mu\left(T^n A \cap B\right)$. В силу ультраметричности фазового пространства члены последовательности могут принимать только одно из трех значений:

$$M_n(A, B) = \begin{cases} 0, \\ \mu\left(T^n A\right), \\ \mu(B). \end{cases}$$

Предположим теперь, что наша динамическая система является перемешивающей. Это означает, что существует предел

$$\lim_{n\to\infty} M_n(A, B) = \mu(A)\mu(B)$$

для любых шаров A и B в X. Следовательно, начиная с некоторого номера N все члены последовательности равны $\mu\left(T^n A\right), n > N$ (в противном случае существовали бы бесконечные подпоследовательности, состоящие из нулей или $\mu(B)$ и, в силу предположения о сходимости последовательности, ее предел был бы равен либо нулю, либо $\mu(B)$). Следовательно, предел последовательности равен

$$\lim_{n\to\infty} M_n(A, B) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(T^n A\right)$$

и не зависит от меры шара B, что противоречит исходному предположению. Полученное противоречие доказывает, что иерархические системы не обладают свойством перемешиваемости.

7.10 Динамические системы $\left(P^1, T\right)$

Рассмотрим класс обратимых динамических систем, фазовым пространством которых является проективнная прямая над $\mathbb{Q}_p$. Этот случай представляет интерес, поскольку имеет непосредственное отношение к динамике линейных гамильтоновых систем – существует естественное действие линейной симплектической группы на P^1. Неархимедовы гамильтоновы системы рассматривались, например, в работе [55].

Воспользуемся геометрическим представлением – известной конструкцией дерева Брюа-Титса. Это древесный граф G, из каждой вершины которого выходит ровно $p+1$ ребро. Естественное расстояние на графе G обозначим через d. Границей G является проективная прямая P^1, множество вершин $VertG$ графа G находится во взаимно однозначном соответствии с множеством подшаров в P^1. Автоморфизм проективной прямой, сохраняющий иерархию шаров, однозначно продолжается до автоморфизма дерева G и, в свою очередь, каждый автоморфизм дерева G однозначно определяет автоморфизм P^1. (см., например, [38]). Пусть $\left(P^1, T\right)$ – обратимая динамическая система. Автоморфизм T проективной прямой продолжим до автоморфизма дерева G (соответствующий автоморфизм дерева G будем обозначать символом T_G).

Воспользуемся известной теоремой Титса для автоморфизмов дерева G. ([82]).

Теорема 7.6. *Пусть автоморфизм T_G не имеет неподвижных вершин и не имеет инверсий. Обозначим*

$$m = \inf_{P \in VertG} d\left(P, T_G P\right), L = \{P \in VertG : d\left(P, T_G P\right) = m\}.$$

Тогда L есть бесконечный в обе стороны путь в G, а преобразование T_G есть сдвиг вдоль L на расстояние m.

Из преведенной выше теоремы непосредственно вытекает следующее утверждение.

Теорема 7.7. *Пусть (P^1, T) – обратимая динамическая система такая, что автоморфизм T_G не имеет неподвижных вершин и инверсий. Тогда T имеет ровно две неподвижные точки, одна из которых – притягивающая, другая – отталкивающая. Пара неподвижных точек и энтропия η определяют динамическую систему однозначно.*

Действительно, бесконечный в обе стороны путь L на графе G однозначно определяется двумя граничными точками на P^1. Покажем, что энтропия η совпадает с числом m из теоремы 7.6 с точностью до знака. Рассмотрим разбиение $\xi = \cup_i B_k^i$ фазового пространства P^1 на $n(X)p^k$ шаров радиуса p^{-k}, $k \geq 0$ (мера μ нормирована таким образом, что $\mu(X) = n(X)$, где $n(X) = 2$ – индекс многообразия $X = P^1$). Под действием преобразования T^N шар радиуса p^{-k} перейдет в шар радиуса p^{-k-mN}. Следовательно,

$$\xi \vee T\xi \vee T^2\xi \vee \ldots \vee T^N\xi = T^N\xi = \bigcup_j B_{k+mN}^j.$$

Количество шаров в разбиении $T^N\xi$ равно $n(X)p^{k+mN}$. По определению числа m, $\mu\left(T^N B_k\right) = p^{-k-mN}$. Следовательно,

$$\eta = \frac{1}{n(X)} \frac{1}{N} \sum_j \mu\left(T^N B_k^j\right) \log_p\left(\mu\left(T^N B_k^j\right)\right) \xrightarrow[N\to\infty]{} -m.$$

Преобразование T не сохраняет меру, при этом, производная Радона-Никодима преобразования T постоянна и равна p^η.

Заметим, что построенная динамическая система не является эргодической. Описать инвариантные подсистемы можно следующим образом. Пусть s – положительное целое число. Рассмотрим множество D_s вершин графа G, находящихся на расстоянии s от неподвижного пути L. $D_s = \{P \in VertG : d(P, L) = s\}$. Объединение шаров, соответствующих всем таким вершинам есть вся проективная прямая P^1 с выколотыми неподвижными точками. Поскольку T сохраняет расстояние на дереве, то множество D_s инвариантно относительно T при всех s. В свою очередь, действие преобразования T на множестве D_s не является транзитивным – D_s распадается на $(n-1)(p-1)p^{s-1}$ орбиты. Соответствующие точкам орбиты множества шаров в P^1 образуют инвариантные подсистемы нашей динамической системы.

Рассмотрим случай, когда преобразование T_G имеет неподвижную вершину (очевидно, такая система не является эргодической). Легко заметить, что в этом случае динамическая система сохраняет меру μ. Действительно, пусть $P \in VertX$ – неподвижная точка. Нормируем меру μ таким образом, что $\mu\left(P^1\right) = p+1$. Тогда мера шара B равна $p^{-d(B)}$, где $d(B)$ есть расстояние от P до вершины графа, соответствующей шару B. Поскольку преобразование T_G сохраняет метрику на дереве G, то $\mu(TB) = \mu(B)$ для любого шара $B \subset P^1$.

Осталось рассмотреть случай преобразования T, когда T_G не имеет неподвижных вершин, но имеет неподвижное ребро, которое обозначим через $[u, v]$, где $u, v \in VertX, d(u, v) = 1$. При этом, поскольку T_G не имеет неподвижных вершин, то $T_G u = v, T_G v = u$, то есть T_G является инверсией. Как отмечалось ранее, проективная прямая имеет индекс 2. Разрежем дерево G по ребру $[u, v]$, при этом G распадается на два поддерева, граница каждого из этих поддеревьев является многообразием индекса 1 и может быть отождествлена с $\mathbb{Z}_p$. Динамическое преобразование T, соответсвующее инверсии T_G, есть суперпозиция автоморфизма многообразия $\mathbb{Z}_p$ и перестановки двух экземпляров $\mathbb{Z}_p$, образующих проективную прямую P^1.

7.11 Преобразование пекаря

Как видно из предыдущих разделов, иерархические динамические системы образуют довольно узкий класс, к примеру, такие системы не обладают свойством перемешиваемости. В настоящем разделе мы расширим класс динамических преобразований. Выберем фазовое пространство в виде $X = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$, метрику на этом пространстве зададим стандартным образом $\|z\| = \max\{|x|_p, |y|_p\}, z = (x, y) \in X$. Шарами в такой метрике являются прямое произведение одномерных шаров одинакового радиуса. Мера μ определяется как прямое произведение мер на $\mathbb{Z}_p$. Динамическое преобразование иерархических систем переводит шар в шар. Расширим класс динамических преобразований и разрешим переводить прямое произведение одномерных шаров в конечное объединение прямых произведений одномерных шаров.

В качестве примера такого рода системы рассмотрим p-адическое преобразование пекаря.

Пусть $(x, y) \in X$ представлены в виде канонического разложения:

$$(x, y) = \left(x_0 + x_1 p + \ldots + x_n p^n + \ldots, y_0 + y_1 p + \ldots + y_m p^m + \ldots\right),$$

где $x_i, y_i, i = 0, 1, \ldots$ принимают значения в множестве $0, 1, \ldots, p-1$. Преобразование пекаря T определим следующим образом:

$$T(x, y) = \left(\frac{x - x_0}{p}, x_0 + py \right).$$

Будем использовать обозначение $B_k(a)$ для одномерного шара радиуса $p^{-k}, k \geq 0$ с центром в точке $a \in \mathbb{Z}_p$, $B_k(0) = B_k$.

Видно, что преобразование T переводит прямое произведение шаров в объединение конечного числа прямых произведений шаров.

В качестве упражнения найдем образ множества $B_0 \times B_1$. Прямое применение определения преобразования пекаря дает:

$$T\left(B_0 \times B_1\right) = B_0 \times \bigcup_{a=0}^{p-1} B_2(a).$$

Видно, что слой толщиной $1/p$ по координате y преобразовался в объединение p штук слоев толщиной $1/p^2$. Справедливо утверждение.

Теорема 7.8. *Преобразование пекаря обладает свойством перемешиваемости.*

Найдем образ множества $I_{m,n}^{a,b} = B_m(a) \times B_n(b)$ под действием преобразования T^N при достаточно большом N. Множество $B_m(a)$ можно описать следующим образом:

$$B_m(a) = \{a_0 + a_1 p + \ldots + a_{m-1} p^{m-1} + x_m p^m + x_{m+1} p^{m+1} + \ldots\},$$

где $a_0, \ldots a_{m-1}$ фиксированы, а $x_m, x_{m+1}, \ldots$ пробегают всевозможные значения $0, 1, \ldots, p-1$.

Аналогичным образом представим шар $B_n(b)$:

$$B_n(b) = \{b_0 + b_1 p + \ldots + b_{n-1} p^{n-1} + y_n p^n + y_{n+1} p^{n+1} + \ldots\},$$

где $b_0, \ldots b_{n-1}$ фиксированы, а $y_n, y_{n+1}, \ldots$ пробегают всевозможные значения $0, 1, \ldots, p-1$. Выберем N таким образом, что выполнено неравенство $N \geq \max\{m, n\}$. Из определения преобразования пекаря видно, что шар $B_m(a)$ (координата x) перейдет в шар B_0. Шар $B_n(b)$ (координата y) перейдет в множество следующего вида

$$\{x_{N-1} + x_{N-2} p + \ldots + x_m p^{N-m-1} + a_{m-1} p^{N-m} + \ldots + a_0 p^{N-1} + \\ + b_0 p^N + b_1 p^{N+1} + \ldots + b_{n-1} p^{N+n-1} + y_n p^{N+n} + y_{n+1} p^{N+n+1} + \ldots\},$$

где $a_0, \dots a_{m-1}, b_0, \dots b_{n-1}$ фиксированы, а x_i, y_i пробегают всевозможные значения из множества $0, 1, \dots p-1$. Видно, что это объединение p^{N-m} различных шаров радиуса p^{-N-n}. Центры этих шаров образуют множество J. Легко увидеть, что для произвольного шара $B_l(c)$ число элементов множества $J \cap B_l(c)$ равно p^{-l}/p^{-N+m} при $N \geq l$. Отсюда вытекает следующая формула:

$$\mu\left(T^N I_{m,n}^{a,b} \cap I_{k,l}^{c,d}\right) = p^{-m-n-k-l} = \mu\left(I_{m,n}^{a,b}\right) \mu\left(I_{k,l}^{c,d}\right),$$

при $N \geq \max\{m, n, l\}$. Теорема доказана.

8 Предельная теорема для p-адических случайных величин

8.1 Введение

Предлагаемая Глава диссертации в существенном мотивирована следующей физической задачей. Рассмотрим некоторую физическую систему, обладающую p-адическим параметром. В качестве примера такого рода систем выступают, например, спиновые стекла ([78], [76], [56]) или модели белка ([58], [1], [3]). Пусть есть статистический ансамбль, состоящий из такого рода систем по p-адическому параметру. Возникают следующие естественные вопросы – какое распределение соответствует равновесному состоянию ансамбля, что считать малым отклонением от равновесного распреджеления и какова схорость сходимости неравновесного распределения к равновесному. В качестве моделирования поведения такого ансамбля рассматривается задача о случайном блуждании со значениями в поле p-адических чисел или, другими словами – задача о распределении сумм случайных независимых величин со значениями в поле p-адических чисел. Ответ на первый вопрос дается Теоремой 8.1. При некоторых естественных ограничениях на носитель распределения, распределение суммы независимых одинаково распределенных величин сходится к равномерному распределению (мере Хаара) на носителе исходного распределения. Этот результат хорошо известен в теории случайных блужданий со значениями в компактной группе ([22], [89], [85]). Ответ на второй вопрос дается Теоремой 8.2 – исходное распределение естественно считать «близким» к равновесному, если выпуклая оболочка его носителя содержит точку ноль. Если это условие выполнено, то распределение суммы величин сходится к равновесному распределению. В противном случае существуют только пределы по подпоследовательностям. Результат о существовании пределов по подпоследовательностям был получен в работе ([65]) в более общей ситуации (для произвольных перестановочных событий). Наиболее интересный результат – о скорости сходимости неравновесного распределения к равновесному – удается получить только для распределений, имеющих локально постоянную плотность. Ответ дается Теоремой 8.3. Вопросы скорости сходимости сверток случайных мер на компактных группах, имеющие непосредственное отношение к этому результату, рассматривались в работах [22], [34].

Случайным процессам со значениями в поле p-адических чисел, либо имеющими p-адические числа в качестве параметра, посвящено обширное количество работ (см., например, [51],[12], [5], [72], [66], [71]).

Другим интереснм аспектом рассматриваемой задачи является тот факт, что p-адические статистические модели есть естественный непрерывный аналог иерархических моделей статистической физики. Это было отмечено в работе [30] и получило дальнейшее развитие в работах [31], [35], [36].

Введем необходимые понятия и обозначения. Через $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{Z}_p$ будем обозначать поле p-адических чисел и кольцо целых p-адических чисел соответственно. Будем рассматривать случай $p \neq 2$. Пусть $\mathbb{P}$ - мера Хаара на $\mathbb{Q}_p$, нормированная таким образом, что мера $\mathbb{Z}_p$ равна 1, $\mathbb{P}\left(\mathbb{Z}_p\right) = 1$. p-Адичнозначной случайной величиной ξ называется $\mathbb{P}$-измеримое отображение $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$. В стандартной теории вероятностей для такого рода объектов используется термин «случайный элемент со значениями в $\mathbb{Q}_p$». Всюду далее под случайными величинами будут пониматься p-адичнозначные случайные величины.

Распределением случайной величины ξ называется вероятностная мера $\mathbb{P}_\xi$ на $\mathbb{Q}_p$, определяемая формулой

$$\mathbb{P}_\xi(A) = \mathbb{P}\{\omega\colon \xi(\omega) \in A\}$$

для любого измеримого множества $A \subset \mathbb{Q}_p$. Далее вместо $\mathbb{P}\{\omega\colon \xi(\omega) \in A\}$ будем писать $\mathbb{P}\{\xi \in A\}$ для краткости.

Если мера $\mathbb{P}_\xi$ абсолютно непрерывна относительно меры Хаара $\mathbb{P}$, то существует измеримая вещественнозначная неотрицательная функция p_ξ такая, что для любого измеримого множества $A \subset \mathbb{Q}_p$ выполнено равенство

$$\mathbb{P}_\xi(A) = \int_A p_\xi(x)\mathbb{P}(dx).$$

Функция p_ξ называется плотностью случайной величины ξ. Такие случайные величины будем называть абсолютно непрерывными.

Последовательность случайных величин ξ_n сходится по распределению к случайной величине ξ, $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, если для любой ограниченной непрерывной функции $f\colon \mathbb{Q}_p \to \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{Q}_p} f(x)\mathbb{P}_{\xi_n}(dx) = \int_{\mathbb{Q}_p} f(x)\mathbb{P}_\xi(dx).$$

8.2 Характеристики случайной величины

Пусть $x, y \in \mathbb{Q}_p$. Обозначим через $[x, y]$ минимальный шар в $\mathbb{Q}_p$, содержащий точки x и y. Множество $X \subset \mathbb{Q}_p$ называется выпуклым, если для любых точек x и y этого множества выполнено условие $[x, y] \subseteq X$. Если выпуклое множество не совпадает с $\mathbb{Q}_p$, то оно является шаром в $\mathbb{Q}_p$.

Характеристическим множеством H_ξ случайной величины ξ назовем выпуклую оболочку носителя распределения вероятности $\mathbb{P}_\xi$. Меру этого множества будем обозначать d_ξ, $d_\xi = \mathbb{P}(H_\xi)$. Легко заметить, что H_ξ либо совпадает с $\mathbb{Q}_p$ (в этом случае $d_\xi = \infty$), либо является минимальным шаром, содержащим носитель меры $\mathbb{P}_\xi$. Если случайная величина не вырождена (то есть не равна константе почти наверное), то $d_\xi > 0$.

Замечание. *Характеристическое множество случайной величины обладает следующим любопытным свойством ([67]). Пусть случайная величина ξ принадлежит пространству $L^\infty = L^\infty(\mathbb{Z}_p)$, то есть является почти всюду ограниченной измеримой функцией на $\mathbb{Z}_p$, норма задается равенством*

$$\|\xi\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{Z}_p} |\xi(x)|_p.$$

Через $\epsilon(\xi)$ обозначим расстояние от ξ до подпространства постоянных функций в L^∞:

$$\epsilon(\xi) = \inf_{c \in \mathbb{Q}_p} \{\|\xi - c\|_\infty\}.$$

Тогда характеристическое множество H_ξ есть множество p-адических чисел c, обладающих свойством $\|\xi - c\|_\infty = \epsilon(\xi)$. Другими словами, элементы характеристического множества дают наилучшее приближение случайной величины константами в пространстве L^∞. По этой причине в [67] характеристическое множество случайной величины рассматривается как естественный аналог математического ожидания.

Через B_ξ обозначим выпуклую оболочку множества $\operatorname{supp} \mathbb{P}_\xi \cup \{0\}$. Другими словами, B_ξ – минимальный шар, содержащий носитель меры $\mathbb{P}_\xi$ и точку 0. Дисперсией случайной величины ξ будем называть число D_ξ, равное мере шара B_ξ, $D_\xi = \mathbb{P}(B_\xi)$. Очевидно, что $D_\xi \geq d_\xi$. Если для случайной величины ξ выполнено равенство $D_\xi = d_\xi$, такую величину будем называть центрированной случайной величиной. Заметим, что D_ξ есть степень числа p (рациональное число), поэтому $|D_\xi|_p = 1/D_\xi$.

8.3 Предельная теорема

Всюду далее будем рассматривать невырожденные случайные величины. Через $h(a,r)$ обозначим индикаторную функцию шара $B(a,r)$ радиуса r с центром в точке $a \in \mathbb{Q}_p$. Напомним, что r есть степень числа p. Справедливы следующие Теоремы.

Теорема 8.1. *Пусть $\{\xi_n, n = 1, 2, \dots\}$ – последовательность центрированных независимых одинаково распределенных случайных величин с дисперсией $0 < D < \infty$. Тогда последовательность $\{S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n\}$ сходится по распределению к случайной величине ξ. При этом, случайная величина ξ является абсолютно непрерывной и имеет плотность $\frac{1}{D}h(0, D)$.*

Замечание. *Результат Теоремы 8.1 хорошо известен в теории случайных блужданий на компактных группах ([22], [85]).*

Теорема 8.2. *Пусть $\{\xi_n, n = 1, 2, \dots\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с дисперсией $D < \infty$ и мерой характеристического множества d, $0 < d \leq D$. Тогда для любого числа $a = 0, 1, 2, \dots, D/d - 1$ подпоследовательность $\{S_{n_k} = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{n_k}, n_k = a + \frac{D}{d}k, k = 1, 2, \dots\}$ сходится по распределению к случайной величине ξ. При этом, случайная величина ξ является абсолютно непрерывной и имеет плотность $\frac{1}{d}h\left(\frac{b}{D}, d\right)$, для некоторого $b = b(a) \in \{0, 1, \dots D/d - 1\}$.*

Очевидно, что Теорема 8.1 есть частный случай Теоремы 8.2.

8.4 Скорость сходимости

В настоящем разделе рассматриваются центрированные абсолютно непрерывные случайные величины ξ с плотностью p_ξ, которая является локально постоянной функцией с компактным носителем. Такие случайные величины характеризуются дисперсией D и параметром локальной постоянности Δ. Параметр постоянности Δ однозначно определяется следующим выражением

$$\Delta = \max_B \{\mathbb{P}(B) : p_\xi(x + x') = p_\xi(x) \, \forall x \in \mathbb{Q}_p, \, \forall x' \in B\},$$

где $B \subset \mathbb{Q}_p$ – шар в $\mathbb{Q}_p$. Легко заметить, что всегда выполнено неравенство $\Delta \leq D$.

Закономерным является вопрос – какие случайные величины имеют такую плотность. Этим свойством обладают, например, непрерывно дифференцируемые функции. Справедлива следующая Лемма.

Лемма 8.1. *Если случайная величина $\xi\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ является непрерывно дифференцируемой функцией, производная которой нигде не обращается в* 0 *на $\mathbb{Z}_p$, то ее плотность p_ξ есть локально постоянная функция с компактным носителем.*

Замечание. *Для функций $f\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ понятие непрерывной дифференцируемости отличается от соответствующего понятия для вещественнозначных функций. А именно, функция $f\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ называется непрерывно дифференцируемой в точке $a \in \mathbb{Z}_p$, если предел*

$$\lim_{(x,y)\to(a,a)} \left| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} - A \right|_p$$

существует и равен нулю для некоторого $A \in \mathbb{Q}_p$. При этом число A есть производная функции f в точке a ([80]).

Утверждение Леммы 8.1 следует из следующего свойства непрерывно дифференцируемых функций ([80]). Пусть $f\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ непрерывно дифференцируема в точке $a \in \mathbb{Z}_p$ и имеет в этой точке ненулевую производную, $f'(a) \neq 0$. Тогда существует шар $B(a,r)$ радиуса r с центром в точке a такой, что функция f отображает этот шар на шар $B\left(f(a), |f'(a)|_p r\right)$ взаимно однозначно, при этом функция $\frac{f(x)}{f'(a)}$ является изометрией в этом шаре. Таким образом,

$$p_\xi(x) = \lim_{r\to 0} \frac{\mathbb{P}_\xi(B(x,r))}{r} = \frac{1}{|f'(x)|_p}$$

является локально постоянной функцией. Компактность носителя плотности p_ξ следует из ограниченности непрерывной функции ξ на $\mathbb{Z}_p$.

Функция концентрации Q_ξ случайной величины ξ определяется следующим выражением:

$$Q_\xi(r) = \max_{x\in\mathbb{Z}_p}\{\mathbb{P}_\xi(B(x,r)\}.$$

Справедлива следующая Теорема.

Теорема 8.3. *Пусть $\{\xi_n, n = 1,2,\dots\}$ последовательность независмых одинаково распределенных центрированных случайных величин с конечной* *дисперсией D. При этом, эти величины абсолютно непрерывны с плотностью p_ξ, плотность p_ξ локально постоянна с параметром постоянности Δ. Через $p_{S_n}, n = 1, 2, \dots$ обозначим плотность распределения вероятности случайной величины $S_n = \xi_1+\xi_2+\dots+\xi_n, n = 1, 2, \dots$. Тогда справедлива следующая оценка*

$$\sup_{x\in\mathbb{Q}_p}\left|p_{S_n}(x) - \frac{1}{D}h(0, D)(x)\right|_p \le \left(\frac{D}{\Delta} - 1\right) e^{-\lambda_\xi n},$$

где вещественное число λ_ξ зависит только от распределения p_ξ и удовлетворяет неравенству

$$\lambda_\xi \ge \inf_{\Delta\le r<D}\{2Q_\xi(r)\,(1 - Q_\xi(r))\sin^2(\pi r/D)\} > 0.$$

Из последней формулы также вытекает следующая оценка для параметра убывания λ:

$$\lambda_\xi \ge 2Q_\xi(\Delta)\,(1 - 1/p)\sin^2(\pi\Delta/D) \ge \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta}{D}\right)^3.$$

8.5 Не одинаково распределенные величины

Справедлива следующая Теорема.

Теорема 8.4. *Пусть $\{\xi_n, n = 1, 2, \dots\}$ – последовательность центрированных независимых случайных величин с конечными дисперсиями $D_n, n = 1, 2, \dots$. При этом, пусть последовательность дисперсий D_n равномерно ограничена, $D_n \le D < \infty, n = 1, 2, \dots$ и существует бесконечное число членов последовательности ξ_n, дисперсии которых удовлетворяют условию $D_n = D$.*

Тогда последовательность случайных величин $\{S_n = \xi_1+\xi_2+\dots+\xi_n, n = 1, 2, \dots\}$ сходится по распределению к абсолютно непрерывной случайной величине с плотностью $\frac{1}{D}h(0, D)$.

Условия Теоремы есть аналог условия Линдеберга для вещественно значных случайных величин. Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины с дисперсиями D_{ξ_1} и D_{ξ_2} соответственно. Тогда дисперсия $D_{\xi_1+\xi_2}$ случайной величины $\xi_1 + \xi_2$ удовлетворяет равенству $D_{\xi_1+\xi_2} = \max\{D_{\xi_1}, D_{\xi_2}\}$. Следовательно, при всех достаточно больших n дисперсия суммы $\xi_1+\dots+\xi_n$ есть D.

Условия Теоремы требуют, чтобы в последовательности $\{\xi_n, n = 1, 2, \dots,\}$ было достаточное количество (а именно, бесконечно много) членов с дисперсией D.

8.6 Доказательства Теорем

Прежде всего заметим, что если случайная величина имеет конечную дисперсию D, то случайная величина $D\xi$ имеет единичную дисперсию, поэтому далее рассматриваем случайные величины с единичной дисперсией.

При доказательствах будет использован метод характеристических функций.

Характеристической функцией ϕ_ξ случайной величины ξ называется преобразование Фурье распределения вероятности этой величины:

$$\phi_\xi(s) = \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(sx) \mathbb{P}_\xi(dx),$$

где через $\chi(x) = \exp(2\pi i \{x\}_p)$ обозначен аддитивный характер поля $\mathbb{Q}_p$.

Как и в вещественном случае существует взаимно однозначное соответствие между распределениями случайных величин и их характеристическими функциями. Справедливо также и следующее утверждение. Пусть ξ_n – последовательность случайных величин и ϕ_n – соответствующая последовательность характеристических функций. Если при каждом $s \in \mathbb{Q}_p$ существует предел $\phi(s) = \lim_{n\to\infty} \phi_n(s)$ и функция $\phi(s)$ непрерывна в точке $s = 0$, то $\phi(s)$ является характеристической функцией некоторой случайной величины ξ и $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$. Доказательство этого утверждения полностью аналогично доказательству для вещественного случая ([49]).

Перейдем к доказательству Теоремы 8.1. Как уже отмечалось ранее, утверждение Теоремы 8.1 известно в теории случайных блужданий на компактных группах. Интерес может представлять метод доказательства. Пусть $\{\xi_n, n = 1, 2, \dots\}$ – последовательность независимых одинаково распределеныых центрированных случайных величин с единичной дисперсией, $\mathbb{P}_{\xi_n} = \mathbb{P}_\xi$ – распределение случайной величины ξ_n.

Первое простое наблюдение заключается в том, что характеристическая функция ϕ_ξ распределения $\mathbb{P}_\xi$ локально постоянна с параметром постоянности 1 и равна 1 в нуле и, следовательно, на всем единичном шаре $\mathbb{Z}_p$.

Дейсвительно, поскольку носитель меры $\mathbb{P}_\xi$ лежит в единичном шаре, то $sx \in \mathbb{Z}_p \forall x \in \operatorname{supp} \mathbb{P}_\xi$, $\forall s \in \mathbb{Z}_p$ и, следовательно, $\chi(sx) = 1$ для таких s и x.

Пусть теперь $|s|_p = r > 1$. Представим единичный шар в виде несвязного объединения шаров радиуса $1/r$. Центры этих шаров можно выбрать таким образом, чтобы они пробегали множество целых рациональных чисел $\{0, 1, 2, \ldots, r-1\}$. Значение характеристической функции в точке s можно вычислить по формуле

$$\phi_\xi(s) = \sum_{k=0}^{r-1} \int_{B(k,1/r)} \chi(sx)\mathbb{P}_\xi(dx) = \sum_{k=0}^{r-1} \chi(sk)\mathbb{P}_\xi\left(B(k,1/r)\right). \qquad (29)$$

Поскольку $1/r < 1$, положительное вещественное число $\mathbb{P}_\xi\left(B\left(k, 1/r\right)\right)$ строго меньше единицы для всех $k = 0, 1, 2, \ldots, r-1$. В противном случае носитель меры $\mathbb{P}_\xi$ лежал бы в одном из шаров $B\left(k, 1/r\right)$, что противоречит равенству единице дисперсии величины ξ. Кроме того, справедливо очевидное равенство

$$\sum_{k=0}^{r-1} \mathbb{P}_\xi\left(B(k,1/r)\right) = \mathbb{P}_\xi\left(\mathbb{Z}_p\right) = 1.$$

Таким образом, $\phi_\xi(s), |s|_p > 1$ есть выпуклая линейная комбинация векторов $\chi(ks)$ на комплексной плоскости, равных по модулю 1, при этом как минимум два слагаемых в этой линейной комбинации отличны от нуля. Заметим также, что все векторы $\chi(ks), k = 0, 1, \ldots, r-1$ различны. Отсюда немедленно вытекает неравенство $|\phi_\xi(s)| < 1$ при всех $s\colon |s|_p > 1$. Поскольку по условию Теоремы 1 величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы, то характеристическая функция ϕ_{S_n} суммы $\xi_1 + \cdots + \xi_n$ есть ϕ_ξ^n, $\phi_{S_n}(s) = \phi_\xi^n(s)$. Из предыдущих рассуждений следует существование предела при всех $s \in \mathbb{Q}_p$

$$\lim_{n\to\infty} \phi_{S_n}(s) = h(0,1)(s).$$

Функция $h(0,1)$ есть характеристическая функция абсолютно непрерывной случайной величины с плотностью $h(0,1)$ (это вытекает из инвариантности функции $h(0,1)$ относительно преобразования Фурье). Поточечная сходимость последовательности характеристических функций влечет сходимость соответствующей последовательности случайных величин по распределению. Следовательно, последовательность $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ сходится по распределению к случайной величине с плотностью $h(0,1)$. Это завершает доказательство Теоремы 8.1.

Аналогичные рассуждения применим для доказательства Теоремы 8.2. Вернемся к формуле (29). Как и в случае Теоремы 8.1 характеристическая функция $\phi_\xi(s)$ равна 1 на $\mathbb{Z}_p$, поскольку носитель меры $\mathbb{P}_\xi$ лежит в единичном шаре (дисперсию D полагаем равной единице). В случае, когда мера $d = d_\xi$ характеристического множества случайных величин $\xi_n, n = 1, 2, \ldots$ совпадает с дисперсией (то есть случайные величины являются центрированными), Теорема 8.2 вытекает непостредственно из Теоремы 8.1, поэтому далее рассматриваем случай $d < 1$. Это означает, что характеристичекое множество H_ξ есть шар радиуса d с центром в точке K, где K имеет вид $K = k_0 + k_1 p + \cdots k_{m-1}p^{m-1}, d = p^{-m}, k_0 = 1, 2, \ldots, p-1, k_i = 0, 1, \ldots, p-1, i > 0$. При всех $s\colon 1 < |s|_p \le 1/d$ справедливо равенство

$$\mathbb{P}_\xi\left(B(k, 1/s)\right) = \begin{cases} 0, k \ne K, \\ 1, k = K. \end{cases}$$

Последняя формула вытекает из того факта, что носитель меры $\mathbb{P}_\xi$ лежит в шаре радиуса d с центром в точке K. Для всех $s\colon |s|_p > 1/d$ рассуждениями, аналогичными рассуждениям при доказательстве Теоремы 8.1 можно доказать справедливость неравенства $|\phi_\xi(s)| < 1$. Таким образом, справедливо соотношение для всех $s \in \mathbb{Q}_p$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\phi_\xi^n(s) - \chi(nKs)h(0, 1/d)(s)\right| = 0. \tag{30}$$

Из последней формулы вытекает, что $\phi_\xi^n(s)$ не имеет предела при $n \to \infty$ в точках $s\colon 1 < |s|_p \le 1/d$, поскольку $\chi(Ks) \ne 1$ в этих точках. Однако, если выбрать подпоследовательность $n_k(a)$ вида $n_k(a) = a + \frac{1}{d}k, a \in \{0, 1, \ldots, 1/d - 1\}, k = 1, 2, \ldots$, то справедливо равенство $\chi\left(n_k(a)Ks\right) = \chi(bs)$, где $b \in \{0, 1, \ldots 1/d - 1\}, b = aK \mod 1/d$. Действительно, $n_k(a)Ks = aKs + \frac{1}{d}kKs$ и при всех $s\colon |s|_p \le 1/d$ справедливо неравенство $\left|\frac{s}{d}kK\right|_p \le d|s|_p \le 1$. Таким образом, имеем $\chi\left(n_k(a)Ks\right) = \chi(aKs) = \chi(bs), b = aK \mod 1/d$ при всех $|s|_p \le 1/d$. С учетом этих рассуждений и из формулы (30) следует равенство

$$\lim_{k\to\infty} \phi_\xi^{n_k(a)}(s) = \chi(bs)h(0, 1/d)(s), s \in \mathbb{Q}_p.$$

Функция $\chi(bs)h(0, 1/d)(s)$ есть преобразование Фурье функции $\frac{1}{d}h(b, d)$. Дальнейшее доказательство повторяет рассуждения, использованные при доказательстве Теоремы 8.1.

Перейдем к доказательству Теоремы 8.4. Будем считать, что максимальная дисперсия D равна единице. Для доказательства опять воспользуемся формулой (29) для центрированной случайной величины ξ с единичной дисперсией. Из этой формулы следует, что при $|s|_p = r > 1$ значение характеристической функции в точке s есть комплексное число, которое принадлежит правильному r-угольнику на комплексной плоскости, вершины которого есть точки вида $\exp(2\pi i/r)$. При этом, поскольку как мимнимум два члена в сумме (29) отличны от нуля, число $\phi_\xi(s)$ не совпадает с вершиной многоугольника (то есть эта сумма всегда меньше единицы). Из геометрических соображений легко заметить, что максимальное значение модуля суммы достигается в том случае, если в сумме (29) отлично от нуля ровно два слагаемых, при этом коэффициент при одном из слагаемых достигает максимального значения, и угол между соответствующими векторами на комплексной плоскости равен $2\pi/r$. По определению функции концентрации $\max_k \mathbb{P}_\xi\left(B(k, 1/r)\right) = Q_\xi(1/r)$. Следовательно, максимальное значение коэффициента есть $Q_\xi(1/r)$, соответственно, минимальное значение – $1 - Q_\xi(1/r)$. Применяя теорему косинусов и простейшие тригонометрические преобразования, получаем соотношения

$$\begin{aligned} |\phi_\xi(s)|^2 \leq \\ = Q_\xi(1/r)^2 + \left(1 - Q_\xi(1/r)\right)^2 - 2Q_\xi(1/r)\left(1 - Q_\xi(1/r)\right)\cos\left(\pi - 2\pi/r\right) = \\ = 1 - 4Q_\xi(1/r)\left(1 - Q_\xi(1/r)\right)\sin^2\left(\pi/r\right). \quad (31) \end{aligned}$$

Для дальнейшего доказательства нам потребуются некоторые свойства функции концентрации. Справедлива следующая лемма.

Лемма 8.2. *Пусть ξ –центрированная случайная величина с дисперсией D. Тогда справедливы утверждения:*

- $Q_\xi(D) = 1;$
- $Q_\xi(r) \leq \frac{1}{p}, r < D;$
- $Q_\xi(r) \geq \frac{r}{D}, r \leq D.$

Первое утверждение Леммы вытекает из того факта, что носитель меры $\mathbb{P}_\xi$ лежит в шаре $B(0, D)$. В силу того, что $B(0, D)$ – минимальный шар, содержащий ниситель меры $\mathbb{P}_\xi$ выполнено неравенство $Q_\xi(r) < 1$ при всех

$r < D$ (в противном случае носитель меры содержался бы в шаре радиуса r). Поскольку функция концентрации принимает дискретные значения, равные степеням числа p, получаем второе утверждение Леммы. Последнне утверждение Леммы следует из соотношений

$$1 = \sum_{k=0}^{D/r-1} \mathbb{P}_\xi \left(B(k,r) \right) \le Q_\xi(r) \frac{D}{r}.$$

С учетом соотношений (31) и Леммы 8.2 получаем следующую оценку для модуля характеристической функции $\phi_\xi(s)$ при всех $s\colon |s|_p > 1$:

$$|\phi_\xi(s)| \le \sqrt{1 - 4\left(1 - \frac{1}{p}\right) \frac{1}{|s|_p} \sin^2 \frac{\pi}{|s|_p}} \le \sqrt{1 - \frac{4(p-1)}{p^2} \sin^2 \frac{\pi}{|s|_p}}. \qquad (32)$$

Последняя оценка показывает, что при всех $s\colon |s|_p > 1$ модуль характеристической функции $\phi_\xi(s)$ строго меньше единицы и, что существенно для доказательства Теоремы 8.4, оценка не зависит от явного вида функции ξ. Единственное предположение относительно случайной величины ξ, которое использовалось при выводе (32) это центрированость и единичность дисперсии величины ξ. Поскольку по условиям Теоремы 8.4 все случайные величины имеют дисперсию не более D (D положили равной единице), то характеристическая функция ϕ_{S_n} суммы случайных величин $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ тождественна равна единице на $\mathbb{Z}_p$ и при всех $s\colon |s|_p > 1$ удовлетворяет оценке

$$|\phi_{S_n}(s)| \le \left(1 - \frac{4(p-1)}{p^2} \sin^2 \frac{\pi}{|s|_p}\right)^{k(n)/2},$$

где $k(n)$ – количество случайных величин из множества $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, имеющих единичную дисперсию. По условию Теоремы 8.4, $k(n) \to \infty$ при $n \to \infty$. Следовательно, при всех $s\colon |s|_p > 1$ справедливо соотношение

$$|\phi_{S_n}(s)| \to 0, n \to \infty.$$

Дальнейшее доказательство повторяет доказательство Теоремы 8.1.

Для доказательства Теоремы 8.3 используем те же соображения (формулу (31). При всех $s\colon |s|_p > 1$ имеем

$$|\phi_\xi(s)| \le \sqrt{1 - 4Q_\xi\left(1/|s|_p\right)\left(1 - Q_\xi\left(1/|s|_p\right)\right) \sin^2\left(\pi/|s|_p\right)}. \qquad (33)$$

Поскольку плотность p_ξ случайной величины ξ есть по условию Теоремы локально постоянная функция (с параметром постоянности Δ) и имеет носитель в шаре $B(0,1)$, то характеристическая функция ϕ_ξ – локально постоянная функция с параметром постоянности 1 и компактным носителем (носитель лежит в шаре $B(0,1/\Delta)$. Введем обозначение

$$\lambda_\xi = \inf_{\Delta \le r < 1} 2Q_\xi\left(r\right)\left(1 - Q_\xi\left(r\right)\right)\sin^2\left(\pi r\right).$$

С учетом последней формулы получаем оценку при всех $s\colon 1 < |s|_p \le 1/\Delta$:

$$|\phi_\xi(s)| \le \sqrt{1 - 2\lambda_\xi} \le e^{-\lambda_\xi}.$$

С учетом последней оценки справедлива цепочка соотношений

$$\begin{aligned} &|p_{S_n}(s) - h(0,1)(s)| = \\ &\qquad \left| \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(-sx)\left(\phi_\xi^n(x) - h(0,1)(x)\right)\mathbb{P}(dx) \right| \le \\ &\qquad\qquad \le \left(\frac{1}{\Delta} - 1\right) \sup_{1<|s|_p\le 1/\Delta} |\phi_\xi(s)|^n \le \left(\frac{1}{\Delta} - 1\right) e^{-\lambda_\xi n}. \end{aligned}$$

Поскольку r строго меньше дисперсии (дисперсия равна единице), то $Q_\xi(r) \le 1/p$ для таких r. Далее, справедливы неравенства $Q_\xi(r) \ge r \ge \Delta$. Следовательно, для степени убывания λ_ξ справедлива оценка

$$\lambda_\xi \ge \frac{2(p-1)}{p} Q_\xi(\Delta)\sin^2(\pi\Delta).$$

Легко заметить, что справедливо равенство $Q_\xi(\Delta) = \Delta \sup_{x \in B(0,1)} p_\xi(x)$. Если обозначить через $\|\cdot\|$ стандартную норму в пространстве комплекснозначных непрерывных функций на $\mathbb{Q}_p$ с компактным носителем, то оценку для скорости сходимости можно переписать таким образом

$$\|p_{S_n} - h(0,1)\| \le \left(\frac{1}{\Delta} - 1\right) e^{-\frac{4}{3}\Delta\sin^2(\pi\Delta)\|p_\xi\| n} \le \left(\frac{1}{\Delta} - 1\right) e^{-\frac{\Delta^3}{3} n}.$$

В последнем равенстве использовались очевидные оценки $\|p_\xi\| \ge 1, \sin(\pi x) \ge x/2, \forall x \in [0,1]$, $2(p-1)/p \ge 4/3, \forall p \ge 3$. Теорема 8.3 доказана.

8.7 Вероятности больших уклонений

В силу неархимедовости нормы, если последовательность $\{\xi_n\}$ случайных величин равномерно ограничена $|\xi_n|_p \leq C$, то и суммы этих величин равномерно ограничены, $|S_n|_p \leq C$ при всех n. Тем не менее, задача о вероятности больших уклонений имеет смысл для не центрированных случайных величин. Рассмотрим следующую задачу. Пусть $\{\xi_n, n = 1, 2, \dots,\}$ – последовательность одинаково распределенных независимых случайных величин с дисперсией $D = 1$ и мерой характеристического множества $d < 1$. Через $S_n, n = 1, 2, \dots,$ обозначим сумму первых n элементов этой последовательности, $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Пусть $B(a, r), a \in \mathbb{Z}_p, r \leq 1$ – шар с центром в точке a радиуса r. Через $P_n(a, r)$ обозначим следующую вероятность:

$$P_n(a, r) = \mathbb{P}\{S_n \in B(a, r)\}$$

и рассмотрим поведение величины $P_n(a, r)$ при больших n. Как следует из Теоремы 8.2 последовательность $P_n(a, r)$ не имеет предела при $n \to \infty$, поскольку существуют подпоследовательности, пределы по которым равны 1 и подпоследовательности, пределы по которым равны 0. Однако, справедлива следующая Теорема.

Теорема 8.5. *При всех $a \in \mathbb{Z}_p$ и $r \leq 1$ справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P_k(a, r) = r.$$

Теорема 8.5 является простым следствием Теоремы 8.2. Действительно, в силу Теоремы 8.2, последовательность $P_n(a, r)$ имеет тот же предел средних по Чезаро, что и последовательность $p_n(a, r)$ следующего вида:

$$p_n(a, r) = \begin{cases} 0, & n \neq a \mod 1/d; \\ r/d, & n = a \mod 1/d, r \leq d; \\ 1, & n = a \mod 1/r, r \geq d. \end{cases}$$

Легко увидеть, что предел средних по Чезаро последовательности $p_n(a, r)$ равен r.

9 p-Адическое броуновское движение

9.1 Введение

Случайным процессам со значениями в поле p-адических чисел, либо имеющими p-адические числа в качестве параметра, посвящено значительное количество работ (см., например, [51], [72], [58]). Следует также отметить, что p-адические методы и, в частности, p-адические случайные процессы, находят эффективное применение в криптографии (см., например, [53], [52], [54]).

Наиболее близко к рассматриваемым ниже проблемам находится работа [66], к которой мы еще будем обращаться в дальнейшем.

Введем необходимые понятия и обозначения. Через $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{Z}_p$ будем обозначать поле p-адических чисел и кольцо целых p-адических чисел соответственно. Будем использовать стандартные обозначения $|\cdot|_p$, $\{\cdot\}_p$ для p-адической нормы и p-адической дробной части соответственно.

Пусть $\mathbb{P}$ - мера Хаара на $\mathbb{Q}_p$, нормированная таким образом, что мера $\mathbb{Z}_p$ равна 1, $\mathbb{P}\left(\mathbb{Z}_p\right) = 1$. p-Адичнозначной случайной величиной ξ называется $\mathbb{P}$-измеримое отображение $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$. Всюду далее под случайными величинами будут пониматься p-адичнозначные случайные величины.

Распределением случайной величины ξ называется вероятностная мера $\mathbb{P}_\xi$ на $\mathbb{Q}_p$, определяемая формулой

$$\mathbb{P}_\xi(A) = \mathbb{P}\{\omega \colon \xi(\omega) \in A\}$$

для любого измеримого множества $A \subset \mathbb{Q}_p$. Далее вместо $\mathbb{P}\{\omega \colon \xi(\omega) \in A\}$ будем писать $\mathbb{P}\{\xi \in A\}$ для краткости.

Если мера $\mathbb{P}_\xi$ абсолютно непрерывна относительно меры Хаара $\mathbb{P}$, то существует измеримая вещественнозначная неотрицательная функция p_ξ такая, что для любого измеримого множества $A \subset \mathbb{Q}_p$ выполнено равенство

$$\mathbb{P}_\xi(A) = \int_A p_\xi(x)\mathbb{P}(dx).$$

Функция p_ξ называется плотностью случайной величины ξ. Такие случайные величины будем называть абсолютно непрерывными.

Характеристической функцией ϕ_ξ случайной величины ξ называется преобразование Фурье распределения вероятности этой величины:

$$\phi_\xi(s) = \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(sx)\mathbb{P}_\xi(dx),$$

где через $\chi(x) = \exp(2\pi i\{x\}_p)$ обозначен аддитивный характер поля $\mathbb{Q}_p$.

Через $B(a,r)$ обозначим шар в $\mathbb{Q}_p$ с центром в точке $a \in \mathbb{Q}_p$ радиуса r, $h(a,r)$ – его индикаторная функция. Если случайная величина ξ абсолютно непрерывна с плотностью $1/rh(0,r)$, то характеристическая функция ϕ_ξ этой величины есть $h(0,1/r)$.

9.2 p-Адический винеровский процесс

Пусть для каждого $t \in \mathbb{Z}_p$ определена случайная величина ξ_t. Таким образом, задано семейство случайных величин, индексированное целыми p-адическими числами $\{\xi_t, t \in \mathbb{Z}_p\}$. Рассмотрим функцию двух переменных $X(t,\omega), t \in \mathbb{Z}_p, \omega \in \mathbb{Z}_p$, которая при каждом фиксированном $t \in \mathbb{Z}_p$ совпадает со случайной величиной ξ_t из нашего семейства, $X(t,\omega) = \xi_t(\omega)$. Функцию $X(t,\omega)$ будем называть p-адическим случайным процессом.

Пусть a, b – произвольные p-адические числа. Через $[a,b]$ обозначим минимальный шар в $\mathbb{Q}_p$, содержащий эти числа. Будем использовать обозначение $a < c < b$, если $c \in [a,b], c \neq a, c \neq b$.

Случайный процесс имеет независимые приращения, если для всех конечных наборов $\{0 = t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ целых p-адических чисел, $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, случайные величины $X(t_0,\cdot), X(t_1,\cdot) - X(t_0,\cdot), \ldots, X(t_n,\cdot) - X(t_{n-1},\cdot)$ независимы в совокупности.

Определение 9.1. *p-адическим винеровским процессом $W(t,\cdot) = W_t, t \in \mathbb{Z}_p$ будем называть случайный процесс, удовлетворяющий условиям*

- $W_0 = 0$ *почти наверное;*
- W_t *– процесс с независимыми приращениями;*
- *случайные величины $W_t - W_s$ являются абсолютно непрерывными с плотностью $\frac{1}{|t-s|_p} h(0, |t-s|_p)$.*

Как и в вещественном случае (см. [7]), для доказательства существования p-адического винеровского процесса достаточно проверить справедливость формулы (условие независимости приращений)

$$\phi_{s,t}(x) = \phi_{s,u}(x)\phi_{u,t}(x), x \in \mathbb{Q}_p \tag{34}$$

для всех $s < u < t$, где $\phi_{s,t}(x)$ – характеристическая функция случайной величины $W_t - W_s$.

Характеристическая функция случайной величины $W_t - W_s$ есть преобразование Фурье плотности $\frac{1}{|t-s|_p} h\left(0, |t-s|_p\right)$, следовательно

$$\phi_{s,t}(x) = h\left(0, \frac{1}{|t-s|_p}\right)(x).$$

В силу неархимедовости нормы справедливо неравенство

$$|t-s|_p = |u-s+t-u|_p \leq \max\{|u-s|_p, |t-u|_p\}. \tag{35}$$

Поскольку $u \in [s,t]$, выполнены одновременно два условия $[s,u] \subseteq [s,t]$ и $[u,t] \subseteq [s,t]$, откуда немедленно вытекает неравенство

$$\max\left\{|u-s|_p, |t-u|_p\right\} \leq |t-s|_p. \tag{36}$$

Из неравенств (35), (36) следует равенство

$$\frac{1}{|t-s|_p} = \min\left\{\frac{1}{|u-s|_p}, \frac{1}{|t-u|_p}\right\}, \tag{37}$$

следовательно,

$$h\left(0, \frac{1}{|t-s|_p}\right)(x) = h\left(0, \frac{1}{|u-s|_p}\right)(x) h\left(0, \frac{1}{|t-u|_p}\right)(x).$$

Таким образом, справедливость соотношения (34) доказана.

9.3 Реализация винеровского процесса

Нам потребуются некоторые дополнительные сведения из p-адического анализа.

Каждое целое p-адическое число $x \in \mathbb{Z}_p$ однозначно представляется в виде ряда

$$x = x_0 + x_1 p + \cdots + x_k p^k + \ldots, x_i = 0, 1, \ldots, p-1.$$

Этот ряд будем называть каноническим представлением числа x. Каноническое представление неотрицательного целого рационального числа всегда конечная сумма.

С помощью канонического представления построим последовательность $\{x^{(n)}, n \in \mathbb{Z}_+\}$ неотрицательных целых рациональных чисел

$$x^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} x_k p^k,$$

которую будем называть стандартной последовательностью. Стандартная последовательность сходится к x.

Для $x \in \mathbb{Z}_p$ и $m \in \mathbb{Z}_+$ будем говорить, что x начинается с m и обозначать $m \triangleleft x$, если выполнено равенство $m = x^{(n)}$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}_+$.

Если $m \in \mathbb{Z}_+$, то последовательность $\{m^{(n)}, n \in \mathbb{Z}_+\}$ конечна и, следовательно, множество неотрицательных целых рациональных чисел n, удовлетворяющих условию $n \triangleleft m, n \neq m$ имеет максимальный элемент, который будем обозначать m_-. Для $m \in \mathbb{Z}_+$ введем обозначение $\gamma_m = m - m_-, \gamma_0 = 1$.

Через $C(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p)$ обозначим банахово пространство непрерывных на $\mathbb{Z}_p$ функций со значениями в $\mathbb{Q}_p$ и нормой

$$\|f(x)\| = \sup_{x \in \mathbb{Z}_p} |f(x)|_p, f \in C(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p).$$

Справедлива следующая Теорема ([80]).

Теорема 9.1. *Множество функций $\{e_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$, определяемых соотношениями*

$$e_n(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } n \triangleleft x, \\ 0, \text{ в остальных случаях}, \end{cases}$$

образует ортонормированный базис (базис Ван дер Пута) пространства $C(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p)$.

Если $f \in C(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p)$ имеет разложение

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n(x),$$

при этом, $a_0 = f(0), a_n = f(n) - f(n_-)$.

Сформулируем основную Теорему настоящего раздела.

Теорема 9.2. *Пусть $\xi_n(\omega), n \in \mathbb{Z}_+, \omega \in \mathbb{Z}_p$ – последовательность независимых одинаково распределенных абсолютно непрерывных случайных величин с плотностью $h(0,1)$. Тогда ряд*

$$W(\omega,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\xi_n(\omega)\gamma_n e_n(t) \tag{38}$$

сходится при каждом $t \in \mathbb{Z}_p$ почти наверное и определяет p-адический винеровский процесс.

Для $t=0$ из формулы (38) следует, что $W(\omega,0)=0$ почти наверное. Пусть теперь $t \in \mathbb{Z}_p\backslash\{0\}$. Формулу (38) можно переписать в виде

$$W(\omega,t)=\sum_{k=0}^{\infty}t_k p^k \xi_{t^{(k)}}(\omega),$$

где $t=\sum_{k=0}^{\infty}t_k p^k$ – каноническое разложение числа t, $t^{(k)}$ – его стандартная последовательность. Случайные величины $t_k p^k \xi_{t^{(k)}}(\omega)$ независимы и имеют плотности $p^k h\left(0,p^{-k}\right)$ при всех k при которых $t_k \neq 0$. Следовательно, при $t_k \neq 0$ характеристическая функция случайной величины $t_k p^k \xi_{t^{(k)}}(\omega)$ есть $\phi_k(x)=h\left(0,p^k\right)(x)$. Отсюда немедленно следует, что характеристическая функция случайной величины $W(\omega,t)$ есть $h\left(0,p^m\right)$, где $m=\min\{k \in \mathbb{Z}_+ \colon t_k \neq 0\}$ и $p^m=1/|t|_p$. Таким образом, мы показали, что ряд (38) сходится почти наверное к абсолютно непрерывной случайной величине с плотностью $1/|t|_p h\left(0,|t|_p\right)$.

Пусть теперь s и t таковы,что $s,t,s-t \in \mathbb{Z}_p\backslash\{0\}$. Обозначим через $A=A(s,t)$ множество неотрицательных целых рациональных чисел, удовлетворяющих хотя бы одному из условий $k \lhd t, k \not\lhd s$, либо $k \not\lhd t, k \lhd s$. В этом случае из формулы (38) следует равенство

$$W(\omega,t)-W(\omega,s)=\sum_{k\in A}\pm\xi_k(\omega)\gamma_k.$$

Из последней формулы следует, что характеристическая функция случайной величины $W(\omega,t)-W(\omega,s)$ есть $h\left(0,p^m\right)$, где $m=\min\{k \colon k \in A\}$. Легко заметить, что выполнено равенство $|t-s|_p=p^{-m}$. Следовательно, случайная величина $W(\omega,t)-W(\omega,s)$ имеет плотность

$$\frac{1}{|t-s|_p}h\left(0,|t-s|_p\right).$$

Теорема доказана.

9.4 Траектории винеровского процесса

Прежде чем перейти к изучение траекторий, приведем дополнительные сведения из p-адического анализа ([80]).

Функция $f\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha > 0$, если существует постоянная M (константа Липшица функции f) такая, что для всех $x, y \in \mathbb{Z}_p$ выполнено неравенство

$$|f(x) - f(y)|_p \leq M|x - y|_p^\alpha.$$

Линейное пространство всех функций на $\mathbb{Z}_p$, удовлетворяющих условию Липшица порядка α обозначим $\mathrm{Lip}_\alpha\left(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p\right)$. Заметим, что в p-адическом анализе пространство $\mathrm{Lip}_\alpha\left(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p\right)$ не является тривиальным при любых $\alpha > 0$, в том числе и при $\alpha > 1$.

Пусть $f\colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ – произвольная функция. Через $\Phi f(x,y)$ обозначим конечно разностное отношение, то есть функцию, определенную на множестве $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \backslash \Delta, \Delta = \{(x,x)\colon x \in \mathbb{Z}_p\}$, определяемую формулой

$$\Phi f(x,y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

Функция f называется непрерывно дифференцируемой в точке $a \in \mathbb{Z}_p$, если существует предел

$$\lim_{(x,y)\to(a,a)} \Phi f(x,y).$$

Функция непрерывно дифференцируема на множестве $\mathbb{Z}_p$, если она непрерывно дифференцируема в каждой его точке. Линейное пространство всех таких функций обозначим через $C^1\left(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p\right)$. Это пространство является банаховым относительно нормы

$$\|f\|_1 = \|f\| \vee \sup\left\{\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right|_p : x, y \in \mathbb{Z}_p, x \neq y\right\}.$$

Пространство $\mathrm{Lip}_1\left(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p\right)$ также является банаховым пространством относительно нормы $\|\cdot\|_1$, пространство $C^1\left(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p\right)$ является его замкнутым подпространством, при этом вложение

$$C^1\left(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p\right) \subset \mathrm{Lip}_1\left(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p\right)$$

является строгим.

Функция f удовлетворяет условию Липшица порядка 1 тогда и только тогда, когда функция Φf ограничена на $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \backslash \Delta$ (по определению). Функция f является непрерывно дифференцируемой тогда и только тогда, когда функция Φf имеет непрерывное продолжение $\bar{\Phi} f$ на множество $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.

Через $N^1 (\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p)$ обозначим пространство непрерывно дифференцируемых функций, производная которых равна нулю всюду на $\mathbb{Z}_p$. Справедлива следующая цепочка вложений

$$\bigcup_{\alpha>1} \mathrm{Lip}_\alpha (\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p) \subset N^1 (\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p) \subset C^1 (\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p) \subset$$
$$\subset \mathrm{Lip}_1 (\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p) \subset \bigcap_{\alpha<1} \mathrm{Lip}_\alpha (\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p) \subset C (\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p) . \quad (39)$$

Все вложения в формуле (39) являются строгими.

Рассмотрим свойства траекторий винеровского процесса относительно шкалы пространств (39). Справедлива следующая Теорема.

Теорема 9.3. *Траектории p-адического винеровского процесса принадлежат пространству* $\mathrm{Lip}_1 (\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p)$ *почти наверное.*

Траектории p-адического винеровского процесса не дифференцируемы ни в одной точке почти наверное.

В отличие от вещественного винеровского процесса, доказательство Теоремы в p-адическом случае почти тривиально. Действительно, пусть $s, t \in \mathbb{Z}_p, s \neq t$, тогда по определению, $W(t) - W(s)$ есть случайная величина с плотностью $\frac{1}{|t-s|_p} h (0, |t-s|_p)$, следовательно, случайная величина $\frac{W(t)-W(s)}{t-s}$ абсолютно непрерывна и имеет плотность $h(0,1)$. Отсюда немедленно вытекает, что неравенство

$$\left| \frac{W(t) - W(s)}{t-s} \right|_p \leq 1$$

почти наверное выполняется. Следовательно, $W(t) \in \mathrm{Lip}_1 (\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p)$ почти наверное, при этом константа Липшица равна 1.

Для доказательства второго утверждения Теоремы нам необходимо показать, что для любой точки $a \in \mathbb{Z}_p$ вероятность того, что траектория $W(t)$ винеровского процесса имеет в этой точке производную, равна нулю. По определению, $W(t)$ имеет производную A в точке $a \in \mathbb{Z}_p$, если $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0$: $\frac{W(t)-W(a)}{t-a} \in B(A, \epsilon) \; \forall t \in B(a, \delta) \backslash \{a\}$. Поскольку случайная величина

$\frac{W(t)-W(a)}{t-a}$ имеет плотность $h(0,1)$, справедливо неравенство

$$\mathbb{P}\left\{\frac{W(t)-W(a)}{t-a} \in B(A,\epsilon)\right\} \leq \epsilon,$$

из которого немедленно следует, что вероятность того, что $W(t)$ имеет производную в точке a, равна нулю. Из Теоремы 9.3, в частности, следует, что p-адический винеровский процесс не имеет модификаций с разрывными траекториями.

Замечание. *Утверждения Теоремы 9.3 можно также получить, воспользовавшись утверждениями о характеризации пространств функций в терминах коэффициентов разложения в ряд Ван дер Пута ([80]). Известно, что непрерывная функция f принадлежит пространству* Lip_α *тогда и только тогда, когда справедливо условие*

$$\sup_n \left\{ |a_n|_p \, |\gamma_n|_p^{-\alpha} \right\} < \infty.$$

Непрерывная функция f является дифференцируемой в точке $a \in \mathbb{Z}_p$ тогда и только тогда, когда существует предел

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|_p \min\{|\gamma_n|_p^{-1}, |n-a|_p^{-1}\}.$$

Здесь $a_n, n \in \mathbb{Z}_+$ – коэффициенты разложения функции f в ряд Ван дер Пута. Нетрудно заметить, что для ряда (38) первое условие выполнено только при $\alpha \leq 1$, второе же условие не выполняется ни при каких $a \in \mathbb{Z}_p$.

Заметим, что в вещественном случае функция, удовлетворяющая условию Липшица с показателем 1, $f \in \mathrm{Lip}_1((0,1) \to \mathbb{R})$ дифференцируема почти всюду. Верно и обратное, если функция имеет производную в каждой точке интервала и производная ограничена, то эта функция удовлетворяет условию Липшица с показателем 1.

Как видно из Теоремы 9.3, в p-адическом случае это не так. Существует класс функций, удовлетворяющих условию Липшица с показателем 1, не имеющих производную ни в одной точке. Можно также построить пример функции, которая имеет производную в каждой точке $\mathbb{Z}_p$ равную 1, при этом эта функция не удовлетворяет условию Липшица (см., например, [80]).

9.5 Эквивалентность процессов

Мы определили p-адический винеровский процесс путем явного задания его конечномерных распределений. Таким образом, фактически определен класс эквивалентных в широком смысле процессов. Вообще говоря, два любых p-адических винеровских процесса не являются стохастически эквивалентными. Однако, не сложно описать классы неразличимых p-адических винеровских процессов.

Прежде всего, установим взаимно однозначное соответствие между последовательностями одинаково распределенных случайных величин и p-адическими винеровскими процессами. Как следует из Теоремы 9.2, произвольная последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с плотностями $h(0,1)$ определяет p-адический винеровский процесс по формуле (38). Верно и обратное.

Теорема 9.4. *Пусть $W(\omega,t)$ – p-адический винеровский процесс. Тогда случайный ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^W(\omega)\gamma_n e_n(t),$$

где

$$\xi_n^W(\omega) = \frac{W(\omega,n) - W(\omega,n_-)}{n-n_-}, n = 1,2,\dots$$

сходится при каждом ω к функции $W(\omega,t)$ равномерно по t. При этом случайные величины $\xi_n^W, n = 1,2,\dots$ независимы, одинаково распределены и имеют плотности $h(0,1)$.

Доказательство теоремы непосредственно следует из равномерной сходимости ряда Ван дер Пута и определения p-адического винеровского процесса.

Следствие 9.1. *p-Адический винеровский процесс однозначно определяется своими значениями в целых рациональных точках.*

Впрочем, это утверждение очевидно и без Теоремы 9.4, поскольку траектории винеровского процесса непрерывны, а целые рациональные числа всюду плотны в $\mathbb{Z}_p$.

Следствие 9.2. *Два p-адических винеровских процесса $X(\omega,t)$ и $Y(\omega,t)$ неразличимы тогда, и только тогда, когда при всех $n = 0,1,\dots$ выполнено условие $\xi_n^X(\omega) = \xi_n^Y(\omega)$ для почти всех ω.*

9.6 p-Адическая мера Винера

Как и в вещественном случае, построенный p-адический винеровский процесс можно рассматривать как случайную величину $\{W(t), t \in \mathbb{Z}_p\}$ со значениями в пространстве непрерывных функций $C(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p)$. Распределение вероятностей этой случайной величины естественно назвать p-адической мерой Винера. p-Адическую меру Винера будем обозначать μ_W. Цель настоящего раздела – дать описание этой меры. Заметим, что другой аналог меры Винера, играющий ключевую роль при построении формул Фейнмана и Фейнмана-Каца для p-адического аналога оператора Лапласа, рассматривался в работах [41], [42], [48].

Прежде всего, докажем следующую Лемму.

Лемма 9.1. *Множество функций, заданных на $\mathbb{Z}_p$, принимающих значения в $\mathbb{Z}_p$ и удовлетворяющих условию Липшица порядка 1 с постоянной Липшица, равной 1, образуют компактный $\mathbb{Z}_p$-подмодуль пространства непрерывных функций $C(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p)$.*

Обозначим через L множество функций, принимающих значения в $\mathbb{Z}_p$, удовлетворяющих условию Липшица порядка 1 с постоянной Липшица, равной 1. То есть $f \in L$, если для всех $x, y \in \mathbb{Z}_p$ выполнены условия

$$|f(x) - f(y)|_p \leq |x - y|_p \, , |f(x)|_p \leq 1$$

.

Легко проверить, используя неархимедовость нормы, что множество L замкнуто относительно сложения и умножения на константу из $\mathbb{Z}_p$, то есть является $\mathbb{Z}_p$-модулем.

Предкомпактность множества L следует из леммы Арцелла-Асколи. Действительно, легко проверить, что функции из множества L равномерно ограничены и равностепенно непрерывны.

Осталось проверить полноту множества L. Рассмотрим последовательность Коши функций из L, $\{f_n, n = 1, 2, \ldots, f_n \in L\}$. Эта последовательность сходится к некоторой непрерывной функции f. Покажем, что $f \in L$. Для всех $x, y \in \mathbb{Z}_p$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)|_p = |f(x) - f_n(x) - f(y) + f_n(y) + f_n(x) - f_n(y)|_p \leq \\ \leq \max\{|f(x) - f_n(x)|_p, |f(y) - f_n(y)|_p, |f_n(x) - f_n(y)|_p\} \, . \quad (40)\end{aligned}$$

Для $x, y \in \mathbb{Z}_p, x \neq y$ выберем положительное число ϵ таким образом, чтобы выполнялось неравенство $\epsilon < |x-y|_p$. Поскольку последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится к функции f, найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что одновременно выполнены неравенства

$$|f(x) - f_n(x)|_p < \epsilon, |f(y) - f_n(y)|_p < \epsilon.$$

Тогда, если справедливо неравенство $|f_n(x) - f_n(y)|_p \leq \epsilon$, то из соотношений (40) получаем $|f(x) - f(y)|_p \leq \epsilon < |x-y|_p$, то есть $f \in L$. В случае, когда $|f_n(x) - f_n(y)|_p > \epsilon$, из соотношений (40) и неархимедовости нормы следует $|f(x) - f(y)|_p = |f_n(x) - f_n(y)| \leq |x-y|_p$. Лемма доказана.

Замечание. *По определению нормы* $\|\cdot\|_1$ *пространства* $\mathrm{Lip}_1(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p)$, *множество* L *есть единичный шар в этом пространстве. С учетом этого, Лемму 9.1 можно сформулировать следующим образом. Единичный шар в пространстве* $\mathrm{Lip}_1(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p)$ *является компактным множеством в равномерной топологии (задаваемой нормой* $\|\cdot\|$*).*

Обозначим через L_0 множество функций, удовлетворяющих условию Липшица порядка 1 с постоянной Липшица, равной 1, обращающихся в нуль в нуле. Множество L_0 есть подмножество L, поскольку выполнены соотношения

$$|f(x)|_p = |f(x) - f(0)|_p \leq |x|_p \leq 1, x \in \mathbb{Z}_p.$$

Как следует из доказанной Леммы 9.1, L_0 есть компактный $\mathbb{Z}_p$-подмодуль пространства непрерывных функций.

Справедлива следующая Теорема.

Теорема 9.5. *Носитель p-адической меры Винера содержится в множестве* L_0. *При ограничении на* L_0 *p-адическая мера Винера совпадает с мерой Хаара на* L_0.

Замечание. *В работе [66] теорема 9.5 (с точностью до несущественных деталей) принимается за определение p-адического винеровского процесса. Утверждение теоремы можно получить, используя развитую в [66] теорию* $\mathbb{Q}_p$*-гауссовских случайных величин.*

Первое утверждение Теоремы сразу следует из определения p-адического винеровского процесса и Теоремы 9.3. Для доказательства второго утверждения Теоремы достаточно проверить инвариантность p-адической меры

Винера относительно сдвигов и воспользоваться единственностью меры Хаара на компактной коммутативной группе.

Через $C\left(t_0, B(a,r)\right)$ обозначим элементарный цилиндр в пространстве непрерывных функций $C\left(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p\right)$, то есть множество непрерывных функций, значение которых в точке $t_0 \in \mathbb{Z}_p$ лежит в шаре $B(a,r)$ с центром в точке $a \in \mathbb{Q}_p$ радиуса r. Элементарные цилиндры являются образующими σ-алгебры (цилиндрической алгебры) измеримых относительно μ_W множеств. Поскольку пространство $C\left(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p\right)$ является польским пространством, то цилиндрическая алгебра совпадает с борелевской алгеброй.

Мера Винера элементарного цилиндра выражается следующей формулой:

$$\mu_W\left(C\left(t_0, B(a,r)\right)\right) = \int_{B(a,r)} \frac{1}{|t_0|_p} h\left(0, |t_0|_p\right)(x)dx. \tag{41}$$

Пусть $g \in L_0$. Рассмотрим сдвиг цилиндра $C\left(t_0, B(a,r)\right)$ на элемент g. Результатом этого сдвига будет множество функций, принимающих при $t = t_0$ значения в шаре $B\left(a + g(t_0), r\right)$ – элементарный цилиндр $C\left(t_0, B(a + g(t_0), r)\right)$. Поскольку $g \in L_0$, то справедливо неравенство $\left|g(t_0)\right|_p \leq |t_0|_p$. В силу локальной постоянности функции $h\left(0, |t_0|_p\right)(x)$, из последнего неравенства вытекает соотношение:

$$h\left(0, |t_0|_p\right)\left(x + g(t_0)\right) = h\left(0, |t_0|_p\right)(x).$$

С учетом формулы (41) из последнего равенства вытекает соотношение

$$\mu_W\left(C\left(t_0, B(a,r)\right)\right) = \mu_W\left(C\left(t_0, B(a + g(t_0), r)\right)\right).$$

Таким образом, мы показали, что p-адическая мера Винера инвариантна относительно сдвигов и, следовательно, совпадает с мерой Хаара на L_0. Теорема доказана.

Пусть h – непрерывная функция, $h \in C\left(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p\right)$. Обозначим через μ_W^h сдвиг меры μ_W на вектор h. Справедливо следующее следствие Теоремы 9.5.

Следствие 9.3. *Меры μ_W и μ_W^h совпадают тогда и только тогда, когда h является элементом L_0, $h \in L_0$. Если $h \notin L_0$, то меры μ_W и μ_W^h взаимно сингулярны.*

Для доказательства достаточно заметить, что множество L_0 есть единичный шар в пространстве $\mathrm{Lip}_1^0 = \left\{f \in \mathrm{Lip}_1\left(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p\right), f(0) = 0\right\}$ (см. Замечание 9.6). Следовательно, если $h \notin L_0$, то носители мер μ_W и μ_W^h не пересекаются в силу неархимедовости нормы в пространстве Lip_1^0.

Замечание. *Множество L_0 для p-адической меры Винера играет роль аналогичную пространству Кэмерона-Мартина для вещественной меры Винера.*

10 Публикации автора по теме диссертации

1. Е. И. Зеленов. p-Адическая модель квантовой механики и квантовые каналы. Тр. МИАН, **285** (2014), 140–153.

2. Е. И. Зеленов. p-Адический квантовый дифференциал. ТМФ, **168**:2 (2011), 212–218.

3. Е. И. Зеленов. Об операторах координаты и импульса в p-адической квантовой механике. ТМФ, **164**:3 (2010), 426–434.

4. Е. И. Зеленов. Квантовая механика и Колмогоровская сложность. Вестн. Сам. ГУ. Сер. естественнонаучная, **8/1**(67) (2008), 108-115.

5. Е. И. Зеленов. Модели p-адической механики. ТМФ, **174**:2 (2013), 285–291.

6. Е И. Зеленов. Качественная теория p-адических динамических систем. ТМФ, **178**:2 (2014), 220–229.

7. Е. И. Зеленов. p-Адический закон больших чисел. Изв. РАН. Сер. матем., **80**:3, (2016), 31–42.

8. Е. И. Зеленов. p-Адическое броуновское движение. Изв. РАН. Сер. матем., **80**:6 (2016), 92–102.

9. Е. И. Зеленов. p-Адическая бесконечномерная симплектическая группа. Изв. РАН. Сер. матем., **57**:6 (1993), 29–51.

10. В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов. p-Адический анализ и математическая физика М.: Физматлит, 1994.—352с.
    V. S. Vladimirov, I. V Volovich, E. I. Zelenov. p-Adic analysis and mathematical physics. World Scientific, Singapure, 1994.

11. E. I. Zelenov. p-Adic Heisenberg group and Maslov index. Communications in mathematical physics, **155**: 3 (1993), 489-502.

12. E. I. Zelenov. On geometrical interpretation of the p-adic Maslov index. Communications in mathematical physics, **159**:3 (1994), 539-547.

13. E. I. Zelenov. p-Adic Mathematical Physics and Space-Time. Gravitation and Cosmology.**1**:3 (1995), 243-246.

14. E. I. Zelenov. Quantum approximation theorem. p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis, and Applications **1**:1 (2009), 88-90.

15. E. I. Zelenov. Adelic decoherence. p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications, **4**:1 (2012), 84-87.

16. B. Dragovich, A. Yu. Khrennikov, S. V. Kozyrev, I. V. Volovich, E. I. Zelenov. p-Adic Mathematical Physics: The First 30 Years. p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl., **9**:2 (2017), 87–121.

Список литературы

[1] В. А. Аветисов, А. Х. Бикулов. Об ультраметричности флуктуационно динамической подвижности белковых молекул. Тр. МИАН, 265, (2009), 82–89.

[2] В. А. Аветисов, А. Х. Бикулов, А. П. Зубарев. Ультраметрическое случайное блуждание и динамика белковых молекул, Избранные вопросы математической физики и анализа, Сборник статей. К 90-летию со дня рождения академика Василия Сергеевича Владимирова, Тр. МИАН, 285, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2014, 9–32.

[3] В. А. Аветисов, А. Х. Бикулов, В. А. Осипов. p-Адические модели ультраметрической диффузии в конформационной динамике макромолекул. Тр. МИАН, 245, Наука, М., 2004, 55–64.

[4] V. Anashin, A. Khrennikov. Applied Algebraic Dynamics. de Gruyter Expositions in Mathematics, de Gruyter, 2009.

[5] А. Х. Бикулов, И. В. Волович. p-адическое броуновское движение. Изв. РАН. Сер. матем., **61**:3 (1997).

[6] Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, А. И. Оксак, И. Т. Тодоров. Общие принципы квантовой теории поля. М.: Наука, 1987.

[7] А. В Булинский, А. Н. Ширяев. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2003.

[8] В. С. Владимиров. Регуляризованные адельные формулы для струнных и суперструнных амплитуд в одноклассных квадратичных полях, ТМФ, **164**:3 (2010), 323–332.

[9] В. С. Владимиров. Обобщенные функции над полем p-адических чисел. УМН, **43**:5 (263), (1988), 17-53.

[10] В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов. Спектральная теория в p-адической квантовой механике и теория представлений. Изв. АН СССР. Сер. матем., **54**:2 (1990), 275–302.

[11] В. С. Владимиров. О спектре некоторых псевдодифференциальных, операторов над полем p-адических чисел. Алгебра и анализ, 2:6 (1990), 107–124.

[12] В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов. p-Адический анализ и математическая физика М.: Физматлит, 1994.—352с.
V. S. Vladimirov, I. V Volovich, E. I. Zelenov. p-Adic analysis and mathematical physics. World Scientific, Singapure, 1994.

[13] В. С. Владимиров, И. И. Волович. p-Адическая квантовая механика. ДАН СССР, **302**, (1988), 320-322.

[14] И. В. Волович. p-Адическое пространство-время и теория струн. ТМФ, **71**, (1987), 337-340.

[15] Б. Г. Драгович. Адельная модель гармонического осциллятора. ТМФ, **101**:3 (1994), 349–359.

[16] Б. Драгович. p-Адическая и адельная квантовые механики. Тр. МИАН, 245, (2004), 72–85.

[17] Е. И. Зеленов. p-Адическая бесконечномерная симплектическая группа. Изв. РАН, серия математическая, **57**:6 (1993), 29-51.

[18] Е. И. Зеленов. Об операторах координаты и импульса в p-адической квантовой механике. ТМФ, **164**:3 (2010), 426–434.

[19] Е. И. Зеленов. Модели p-адической механики. ТМФ, **174**:2 (2013), 285–291.

[20] Е. И. Зеленов. p-Адическая квантовая механика и когерентные состояния. ТМФ. **86**, (1991), 210-220.

[21] Е. И. Зеленов. Квантовая механика и Колмогоровская сложность. Вестн. Сам. ГУ. Сер. естественнонаучная, 8/1(67) (2008), 108-115.

[22] Б. М. Клосс. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, принимающих значения из бикомпактной группы. Докл. АН СССР, **109**:3, (1956), 453—455.

[23] С.В. Козырев. Ультраметричность в теории сложных систем. ТМФ **185**(2), (2015), 46–360.

[24] С. В. Козырев. Всплески и спектральный анализ ультраметрических псевдодифференциальных операторов. Матем. сб., 198:1 (2007), 103–126.

[25] С. В. Козырев, А. Ю. Хренников, В. М. Шелкович. p-Адические всплески и их приложения. Избранные вопросы математической физики и анализа, Сборник статей. К 90-летию со дня рождения академика Василия Сергеевича Владимирова, Тр. МИАН, 285, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2014, 166–206.

[26] А. Н. Колмогоров. Теория информации и теория алгоритмов. М.: Наука, 1987.

[27] И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.

[28] А. Н. Кочубей. Оператор типа Шрёдингера над полем p-адических чисел. ТМФ, **86**:3 (1991), 323–333.

[29] К. Куратовский. Топология. М., Мир, 1966.

[30] Э. Ю. Лернер, М. Д. Миссаров. Скалярные модели p-адической квантовой теории поля и иерархическая модель. ТМФ, **78**:2, (1989), 248–257.

[31] Э. Ю. Лернер, М. Д. Миссаров. Размерная перенормировка в p-адических моделях теории поля. ТМФ, **123**:3 (2000), 462–475.

[32] Дж. Макки. Лекции по математическим основам квантовой механики. М.: Мир, 1965.

[33] Ю. И. Манин. p-Адические автоморфные функции. Современные проблемы математики, **3**, 5-93. ВИНИТИ, 1974.

[34] Д. С. Миндлин. Скорость сходимости сверток случайных мер на компактной группе. ТВП, **35**:2, (1990), 361–367.

[35] М. Д. Миссаров. Функциональные уравнения и перенормировки в p-адических теориях поля. ТМФ, **109**:1 (1996), 3–16.

[36] М. Д. Миссаров. Симметрия ренормализационной группы в p-адических моделях. Избранные вопросы р-адической математической физики и анализа, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Василия Сергеевича Владимирова.Тр. МИАН, 245, Наука, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2004, 172–181.

[37] М. А. Наймарк. Нормированные кольца. М.: ГТТИ, 1956.

[38] Ю, А. Неретин. О комбинаторных аналогах группы диффеоморфизмов окружности. Изв. РАН. Сер. матем., **56**:5 (1992), 1072–1085.

[39] А. Переломов. Обобщенные когерентные состояния и их применения. М.: Наука, 1987.

[40] Р. Сикорский. Булевы алгебры. М.: Мир, 1969.

[41] О. Г. Смолянов, Н. Н. Шамаров. Представления функциональными интегралами решений уравнения теплопроводности с оператором Владимирова. Вестн. Моск. ун-та. Математика. Механика, **4**, (2008), 16–22.

[42] О. Г. Смолянов, Н. Н. Шамаров, Формулы Фейнмана и интегралы по траекториям для эволюционных уравнений с оператором Владимирова. Избранные вопросы математической физики и р-адического анализа, Сборник статей, Тр. МИАН, 265, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2009, 229–240.

[43] А. С. Холево. Статистическая структура квантовой теории. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

[44] А. С. Холево. Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории. М.:Наука, 1980.

[45] А. С. Холево. Квантовые системы, каналы, информация. М.: МЦНМО, 2010.

[46] А. Ю. Хренников. р-Адическая теория вероятностей и ее приложения. ТМФ, **97**:3, (1993), 348–363.

[47] Э. Хьюитт, К. Росс. Абстрактный гармонический анализ. М.: Мир, 1975.

[48] Н. Н. Шамаров. Функциональный оператор Лапласса на p-адическом пространстве и формулы Фейнмана и Фейнмана–Каца. Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2(23) (2011), 251–259.

[49] А. Н. Ширяев. Вероятность. М.: МЦНМО, 2004.

[50] L. Accardi. Topics in quantum probability. Phys. Rep. **77**, (1981), 169-192.

[51] S. Albeverio, W. Karwowski. Diffusion on P-adic Numbers. Bielefeld-Bochum Stochastik, 1990.

[52] V. Anashin. The non-Archimedean theory of discrete systems. Math. Comp. Sci., 6(4) (2012), 375-393.

[53] V. Anashin and A. Khrennikov. Applied Algebraic Dynamics. De Gruyter Expositions in Mathematics 49, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2009.

[54] V. Anashin, A. Khrennikov, E. Yurova. Ergodicity criteria for non-expanding transformations of 2-adic spheres. Discrete and Continuous Dynamical Sysytems, 34(2) (2014), 367-377.

[55] V. A. Avetisov. Chaotic Hamiltonian systems: survival probability. Phys. Rev. E: Stat. Nonlin. Soft Matter Phys. 81:046211 (2010).

[56] V. Avetisov, A. Bikulov and S. Kozyrev. Application of p-adic analysis to models of breaking of replica symmetry. J. Phys. A: Math. Gen. 32, 8785 (1999).

[57] V. A. Avetisov, A. Kh. Bikulov1 and A. P. Zubarev. First passage time distribution and the number of returns for ultrametric random walks. J. Phys. A: Math. Theor. 42 085003 (2009).

[58] V. A. Avetisov, A. H. Bikulov, S. V. Kozyrev, and V. A. Osipov. p-adic models of ultrametric diffusion constrained by hierarchical energy landscapes J. Phys. A: Math. Gen. 35, 177 (2002).

[59] J. C. Baez, I. E. Segal, Z. Zhou. Introduction to algebraic and constructive quamtum field theory. Princeton University Press, 1992.

[60] P. Cartier. Quantum mechanical commutation relations and theta-functions. Proc. Sympos. Pure Math., **9**, (1966), 361-383.

[61] A. Connes. Noncommutative geometry. Academic Press, 1994.

[62] B. Dragovich. p-Adic and adelic quantum mechanics.Тр. МИАН, 245 (2004), 72–85.

[63] B. Dragovich, A. Yu. Khrennikov, S. V. Kozyrev, I. V. Volovich. On p-adic mathematical physics. p-Adic Numbers, Ultram. Anal. Appl. **1**, 1, (2009), 1-17.

[64] B. Dragovich, A. Yu. Khrennikov, S. V. Kozyrev, I. V. Volovich, E. I. Zelenov. p-Adic Mathematical Physics: The First 30 Years. p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl., **9**:2 (2017), 87–121.

[65] S. Evans. Local field U-statistics. Algebraic Methods in Statistics and Probability (Marlos A.G. Viana and Donald St. P. Richards eds.) Contemporary Mathematatics 287 (2001), AMS.

[66] S. Evans. Local fields, Gaussian measures, and Brownian motions. Topics in Lie Groups and Probability: Boundary Theory (J. Taylor ed.) CRM Proceedings and Lecture Notes 28, (2001), AMS.

[67] S. Evans, T. Lidman. Expectation, conditional expectation and martingales in local fields. Electron. J. Probab. 12, (2007), 498-515.

[68] S. V. Fistchenko, E. I. Zelenov. p-Adic models of turbulence. p-Adic Mathematical Physics, AIP Conference Proceedings 286, Melville, NY, (2006), 174-191.

[69] P. G. O. Freund, E. Witten. Adelic string amplitudes. Phys. Lett. B 199, (1987), 191-194.

[70] P. Julg, A. Valette. K-Theoretic Amenability for $SL_2(\mathbb{Q}_p)$ and the action on the associated tree. Journ. Funct. Analysis **58**, (1984), 194-215.

[71] A. Kochubei. Pseudo-differential equations and stochastics over non-Archumedean fields. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 244, Marcel Dekker Inc., NY, 2001.

[72] A. Yu. Khrennikov, M. Nilsson. p-Adic deterministic and random dynamical systems. Kluwer, Dordreht, 2004.

[73] G. Lion, M. Vergne. The Weil representation, Maslov index and theta-series. Boston: BirkHauser, 1980.

[74] G. W. Mackey. A theorem of Stone and von Neumann. Duke Math. J. **16** (1949), 311-326.

[75] Yu. Manin. Reflections on arithmetical physics. Conformal invariance and string theory, 293–303, Academic Press, Boston, MA, 1989.

[76] M. Mézard, G. Parisi, N. Sourlas, G. Toulouse, and M. Virasoro. Nature of the Spin-Glass Phase.Phys. Rev. Lett. 52, 1156 (1984).

[77] D. Mumford. An analytic construction of degenerating curves over complete local rings. Comp. Math., 24 (1972), 129-174.

[78] G. Parisi. Infinite Number of Order Parameters for Spin-Glasses. Phys. Rev. Lett. 43, 1754, (1979).

[79] M. F. Rieffel. On the uniqueness of the Heisenberg commutation relations. Duke Math. J. **29** (1972), 745-752.

[80] W. Schikhof. Ultrametric calculus. Cambridge Univ. Press, 1984.

[81] M. Schlosshauer. Decoherence, the measurement problem and interpretation of quantum mechanics. Rev. Mod. Phys. **76** (4), (2005), 1267-1305.

[82] J.-P. Serre. Trees. Springer, 1980.

[83] J.-P. Serre. Lie algebras and Lie groups. Lecture notes in mathematics. Springer-Verlag, 1992.

[84] J. Slawny. On factor representations and C^*-algebra of canonical commutation relations. Commun. math. Phys. **24**, (1972), 151-170.

[85] K. Stromberg. Probabilities on a compact group.Trans. Amer. Math. Soc. 94, (1960), 295-309.

[86] V. S. Vladimirov. On the Freund–Witten Adelic Formular for Veneziano Amplitudes. Lett. Math. Phys., **27**, (1993), 123–131.

[87] I. V. Volovich. Number theory as the ultimate physical theory. Preprint TH 4781/87, Cern, Geneva 1987.

[88] |. V. Volovich. p-Adic strings. Class. Quant. Grav. **4**, (1987), L83-L87.

[89] K. Urbanik. On the limiting probability distributions on a compact topological group. Fund. Math. **3** (1957), 253-261.

[90] E. I. Zelenov. Representations of commutation relations of p-adic systems of infinitely many degrees of freedom. Journ. of Math. Physics **33** (1992), 178- 188.