

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова
механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 512.774.42, 512.772.3, 512.542

Ясинский Егор Андреевич

**Конечные подгруппы в группе Кремоны над полем
вещественных и комплексных чисел**

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических
наук, профессор Ю. Г. Прохоров

Москва — 2018

Оглавление

Глава 1. Введение	4
1.1. История вопроса и постановка задачи	4
1.2. Основные результаты и методы диссертации	10
1.3. Обозначения	13
Глава 2. Предварительные сведения	15
2.1. Вещественные алгебраические многообразия	15
2.2. Рациональные поверхности	16
2.3. \mathbb{G} -многообразия	21
2.4. Топология вещественных рациональных поверхностей	25
2.5. Бирациональные диффеоморфизмы	27
2.6. Конечные группы	27
Глава 3. Константа Жордана	34
3.1. Свойство Жордана для вещественных поверхностей	34
3.2. Случай алгебраически замкнутого поля	36
3.3. Случай полей вещественных и рациональных чисел	40
3.4. Группы бирациональных диффеоморфизмов	44
Глава 4. Автоморфизмы вещественных поверхностей дель Пеццо	46
4.1. Поверхности дель Пеццо степени 9	48
4.2. Поверхности дель Пеццо степени 8	48
4.3. Поверхности дель Пеццо степени 7	52
4.4. Поверхности дель Пеццо степени 6	52
4.5. Поверхности дель Пеццо степени 5	58
4.6. Поверхности дель Пеццо степени 4	62
4.7. Поверхности дель Пеццо степени 3	63
4.8. Поверхности дель Пеццо степени 2	69
4.9. Поверхности дель Пеццо степени 1	78
Глава 5. Автоморфизмы вещественных расслоений на коники	87
5.1. Линейчатые поверхности	87
5.2. Группы нечетного порядка	88

Глава 6. Некоторые классы конечных групп	91
6.1. Простые группы	91
6.2. Неразрешимые группы	95
Публикации по теме диссертации	99
Список литературы	99

Глава 1

Введение

1.1. История вопроса и постановка задачи

Проективное пространство является, возможно, одним из центральных объектов геометрии. Значит, важно понимать, как устроена группа бирациональных автоморфизмов этого пространства, которая имеет специальное название:

Определение 1.1.1. *Группой Кремоны* $Cr_n(\mathbb{k})$ проективного пространства $\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^n$ размерности n над полем \mathbb{k} называется группа бирациональных автоморфизмов этого пространства.

С алгебраической точки зрения эта группа есть ни что иное как группа \mathbb{k} -автоморфизмов поля рациональных функций $\mathbb{k}(x_1, \dots, x_n)$ от n независимых переменных.

Несложно показать (как геометрическими, так и чисто алгебраическими методами), что $Cr_1(\mathbb{k}) \cong PGL_2(\mathbb{k})$. Однако при $n > 1$ группа Кремоны оказывается исключительно сложным объектом, изучению которого посвящены сотни публикаций. Большинство результатов в этой области относятся к случаю, когда $n = 2$ и \mathbb{k} — поле комплексных чисел или любое алгебраически замкнутое поле характеристики нуль. Несколько условно, можно выделить два направления исследования группы Кремоны — классификация ее конечных подгрупп и изучение ее общих теоретико-групповых свойств.

По-видимому, первый классификационный результат о конечных подгруппах в $Cr_2(\mathbb{C})$ относится к 1877 г., когда Е. Бертини дал описание классов сопряженности инволюций (то есть элементов порядка 2) в этой группе [2]. Сегодня эти типы инволюций называются инволюциями Гейзера, Бертини и де Жонкьера. В 1895 г. С. Кантор [17] и А. Виман [40] получили некоторое описание конечных подгрупп $Cr_2(\mathbb{C})$, но их классификация не давала ответов на очень простые вопросы. Например, задавшись произвольной конечной группой, нельзя было выяснить, изоморфна ли эта группа некоторой подгруппе в группе Кремоны. Кроме того, игнорировался вопрос о возможной сопряженности подгрупп. В целом нужно отметить, что работы классиков не

удовлетворяли современным требованиям строгости и содержали значительные пробелы.

Современный подход к изучению конечных подгрупп в группе Кремоны начался лишь в 1960-х годах с работ Ю. И. Манина и В. А. Исковских, установивших тесную взаимосвязь между изучением классов сопряженности конечных подгрупп в группе Кремоны и классификацией G -минимальных рациональных многообразий и G -эквивариантных бирациональных отображений между ними. Эта техника была применена Л. Бэйлем и А. Бовилем в работе [1], в которой они дали современное описание элементов второго порядка в группе $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ с точностью до сопряженности. В дальнейшем их методы были обобщены де Ферне в статье [11] на изучение групп простого порядка. Классификация абелевых конечных подгрупп в $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ была получена Дж. Бланком в его диссертации, см. [3]. Наконец, полное описание конечных подгрупп в $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ было получено И. В. Долгачевым и В. А. Исковских в работе [13].

Гораздо меньше известно в случае, когда $n \geq 3$ или поле \mathbb{k} не является алгебраически замкнутым. Используя последние достижения трехмерной бирациональной геометрии, Ю. Г. Прохоров получил грубую классификацию бирациональных инволюций $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ [57], а также список конечных простых подгрупп в группе $\mathrm{Cr}_3(\mathbb{C})$ и, более общо, в группах автоморфизмов трехмерных рационально связных многообразий [25] (отметим, что в последнем случае речь идет о классификации с точностью до теоретико-группового изоморфизма, но не сопряженности). Кроме того, имеются оценки на ранг p -подгрупп [30]. Геометрия трехмерных алгебраических многообразий в контексте проблемы классификации конечных подгрупп $\mathrm{Cr}_3(\mathbb{C})$ изучалась также в [45], [46], [56]. Задача классификации конечных подгрупп в группе $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{k})$ над произвольным полем \mathbb{k} также тесно связана с классическим вопросом о рациональности фактора рациональной поверхности по конечной группе¹, см. [34, 35, 36, 37].

Хотя полная классификация конечных подгрупп в $\mathrm{Cr}_3(\mathbb{C})$ ожидается исключительно сложной, имеется свидетельство в пользу того, что их «грубая» классификация принципиально возможна в любой размерности. А именно, бу-

¹По критерию Кастельнуово для алгебраически замкнутого поля характеристики 0 всякий фактор рациональной поверхности является рациональным. Для алгебраически незамкнутого поля это не так.

дем смотреть на каждую конечную подгруппу $G \subset \mathrm{Cr}_n(\mathbb{k})$ как на расширение

$$1 \rightarrow A \rightarrow G \rightarrow B \rightarrow 1,$$

где A — абелева группа. Если мы знаем, что порядок B ограничен некоторой универсальной константой, зависящей от n и \mathbb{k} , то можно говорить о «классификации с точностью до абелевых подгрупп». Ж.-П. Серром было замечено, что такая константа действительно существует, если $n \leq 2$ и \mathbb{k} — произвольное поле характеристики нуль. В. Л. Поповым было предложено следующее удобное определение:

Определение 1.1.2. [23, Definition 2.1] Пусть \mathcal{G} — произвольная группа. Будем говорить, что эта группа *жорданова* или *обладает свойством Жордана*, если существует положительное целое число m , такое что любая конечная подгруппа $G \subset \mathcal{G}$ обладает нормальной абелевой подгруппой A с $[G : A] \leq m$. Наименьшее такое m будем называть *константой Жордана* группы \mathcal{G} и обозначать $J(\mathcal{G})$.

Такое название мотивировано классической теоремой Камиля Жордана, которая утверждает, что общая линейная группа $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ является жордановой. В свою очередь, упомянутый выше результат Серра говорит о том, что и группа Кремоны плоскости также обладает свойством Жордана. Совсем недавно Ю. Г. Прохоров и К. А. Шрамов показали, что группа Кремоны жорданова в любой размерности [29], [27]. Эти результаты хорошо подтверждают неформальный принцип, согласно которому группы Кремоны обладают некоторыми общими свойствами линейных алгебраических групп. При этом следует отметить, что для $n > 1$ группа Кремоны, вообще говоря, *не* является алгебраической группой. Здесь будет уместно сделать краткий обзор того, что известно об общих свойствах групп Кремоны.

Как было замечено Серром, группу Кремоны можно снабдить естественной *топологией Зарисского*, индуцированной морфизмами $A \rightarrow \mathrm{Cr}_n(\mathbb{k})$, где A — алгебраические многообразия. Тем не менее, Дж. Бланк и Ж.-Ф. Фурте показали, что при $n \geq 2$ на группе $\mathrm{Cr}_n(\mathbb{k})$ невозможно ввести структуру (бесконечномерного) алгебраического многообразия, такого что семейства $A \rightarrow \mathrm{Cr}_n(\mathbb{k})$ соответствуют морфизмам алгебраических многообразий или, другими словами, группа Кремоны не является ind -группой [4]. С другой стороны, если \mathbb{k} — локальное поле (локально компактное и не дискретное, напри-

мер, \mathbb{R} , \mathbb{C} или $\mathbb{F}_q((t))$), то на $\mathrm{Cr}_n(\mathbb{k})$ существует естественная топология, относительно которой группа Кремоны является хаусдорфовой топологической группой. Более того, ограничение этой топологии на любую алгебраическую подгруппу (например, на $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^n) = \mathrm{PGL}_{n+1}(\mathbb{k})$) совпадает с классической евклидовой топологией (которая дается расстоянием между матрицами). Относительно этих обеих топологий группа Кремоны является связной.

Долгое время оставался открытым вопрос, является ли группа Кремоны простой. Существование нормальных подгрупп в группе $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ было доказано С. Канта и С. Лами в [8] с привлечением теории пространств, гиперболических по Громову. В размерности $n \geq 3$ этот вопрос остается широко открытым. В то же время, Дж. Бланк и С. Циммерманн установили, что при $n \geq 2$ все группы $\mathrm{Cr}_n(\mathbb{k})$ являются топологически простыми² относительно любой из топологий, упомянутых выше [5].

Для плоской группы Кремоны известны порождающие и соотношения. Классическая теорема М. Нетера и Г. Кастельнуово утверждает, что группа $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ порождается своей подгруппой $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2) = \mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ и *стандартным квадратичным преобразованием*

$$[x : y : z] \mapsto [yz : xz : xy]. \quad (1.1)$$

Соотношения для такого представления были найдены М. Х. Гизатуллиным [48]. Многочисленные результаты об образующих и определяющих соотношениях для плоской группы Кремоны над произвольным совершенным полем были получены В. А. Исковских, см. [52] и [51]. Вообще, легко понять, что набора порождающих из теоремы Нетера и Кастельнуово может не хватить, если поле \mathbb{k} не является алгебраически замкнутым. Пусть, например, $\mathbb{k} = \mathbb{R}$. Заметим, что все точки неопределенности преобразования (1.1) являются вещественными. Следовательно, любой элемент из группы, порожденной этим преобразованием и элементами $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$, также имеет вещественные точки неопределенности. Легко, однако, предъявить бирациональный автоморфизм $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, имеющий мнимые точки неопределенности, например

$$[x : y : z] \mapsto [y^2 + z^2 : xy : xz]. \quad (1.2)$$

Дж. Бланк и Ф. Мангольт показали, что группа $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{R})$ порождается

²Это означает, что они не содержат нетривиальных замкнутых нормальных подгрупп.

$\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$, квадратичными преобразованиями (1.1) и (1.2), а также набором некоторых преобразований степени 5. К сожалению, информация об образующих и порождающих группы Кремоны не дает глубокого понимания ее алгебраических свойств. Вероятно, единственным существенным применением этой техники на сегодняшний день является результат С. Циммерманн [44], согласно которому группа $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{R})$ не совпадает со своим коммутантом, и имеет место изоморфизм

$$\mathrm{Cr}_2(\mathbb{R})/[\mathrm{Cr}_2(\mathbb{R}), \mathrm{Cr}_2(\mathbb{R})] \cong \bigoplus_{(0,1]} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

В частности, группа $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{R})$ не является простой.

В заключение упомянем, что в высших размерностях группы Кремоны не имеют «хороших» систем порождающих. А именно, теорема Х. Хадсон и И. Пана [21] утверждает, что при $n \geq 3$ требуется столько алгебраических семейств порождающих, сколько существует семейств гладких гиперповерхностей в $\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^{n-1}$ степени $\geq n + 2$. При этом группа Кремоны не может быть порождена элементами ограниченной степени.

Цель работы

Цель данной работы состоит в классификации конечных подгрупп в группе бирациональных автоморфизмов вещественной проективной плоскости (группе Кремоны), а также в выявлении общих свойств, которым удовлетворяют эти подгруппы.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация имеет теоретический характер. Результаты могут быть полезны математикам, занимающимся автоморфизмами алгебраических многообразий и бирациональной геометрией.

Научная новизна

Утверждения 1.2.1, 1.2.2, 1.2.3, 1.2.5, 1.2.6 являются новыми.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих научно-исследовательских семинарах:

1. 25 апреля 2013 г., доклад «О подгруппах простого порядка в двумерной группе Кремоны над полем вещественных чисел», семинар им. В. А. Исковских, МИАН им. В. А. Стеклова.
2. 17 апреля 2014 г., доклад «Подгруппы нечетного порядка в группе Кремоны вещественной проективной плоскости», семинар им. В. А. Исковских, МИАН им. В. А. Стеклова.
3. 9 февраля 2016 г., доклад «Конечные подгруппы в группе Кремоны вещественной проективной плоскости», семинар отдела алгебры и отдела алгебраической геометрии (семинар И. Р. Шафаревича), МИАН им. В. А. Стеклова.
4. 4 декабря 2017 г., доклад «Конечные группы бирациональных автоморфизмов», научно-исследовательский семинар кафедры высшей алгебры МГУ.

Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

1. EDGE Days 2015, доклад «Automorphism groups of real Del Pezzo surfaces», Edinburgh, 5 июня 2015 г.
2. V школа-конференция по алгебраической геометрии и комплексному анализу для молодых математиков России, доклад «Подгруппы нечетного порядка в группе Кремоны вещественной проективной плоскости», Коряжма, 17-22 августа 2015 г.
3. Cremona conference, постер «Finite subgroups of the real plane Cremona group», Basel, Switzerland, 5–16 сентября 2016 г.
4. Groups of birational automorphisms, доклад «The real Cremona group and its finite subgroups», НИУ ВШЭ, 14–18 ноября 2016 г.
5. VI школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», доклад «Константа Жордана для плоской группы Кремоны», МГУ, 30 января–4 февраля 2017 г.

6. EDGE Days 2017, доклад «Boundedness results for groups of birational self-maps», University of Edinburgh, Edinburgh, UK, 26-30 июня 2017 г.
7. Basel-EPFL Meeting in Birational Geometry, доклад «Finite groups of birational automorphisms», Basel, Switzerland, 27-30 ноября 2017 г.

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в 2 работах (2 в рецензируемых журналах), список которых приведен в конце диссертации.

1.2. Основные результаты и методы диссертации

Диссертация состоит из шести глав.

Первая глава — введение. В ней дается краткий исторический обзор вопроса, формулируется основная задача, общий метод ее решения и главные результаты диссертации. Формулируются открытые вопросы, дальнейшие перспективы исследования, вводятся обозначения.

Вторая глава содержит все необходимые сведения о рациональных алгебраических поверхностях над полями \mathbb{C} и \mathbb{R} и их топологии. Кроме того, мы приводим основные результаты эквивариантной программы минимальных моделей для таких поверхностей.

Третья глава посвящена вычислению констант Жордана для групп автоморфизмов различных поверхностей над полями вещественных, комплексных и рациональных чисел. В частности, мы находим точные константы Жордана для плоской группы Кремоны $\text{Cr}_2(\mathbb{k})$ при $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, \mathbb{C} или \mathbb{Q} .

Теорема 1.2.1. *Имеют место следующие равенства:*

$$J(\text{Cr}_2(\mathbb{C})) = 7200,$$

$$J(\text{Cr}_2(\mathbb{R})) = 120,$$

$$J(\text{Cr}_2(\mathbb{Q})) = 120.$$

Пусть X — комплексная алгебраическая поверхность. В [24] В. Л. Поповым было показано, что если X не бирациональна $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times E$, где E — эллиптическая кривая, то группа $\text{Bir}(X)$ является жордановой. В свою очередь, в [41]

Ю. Г. Зархин доказал, что группа $\text{Bir}(\mathbb{P}^1 \times E)$ не является жордановой. Позднее Ю. Г. Прохоров и К. А. Шрамов установили, что контрпример Зархина является единственным контрпримером и в категории комплексно-аналитических поверхностей [31]. В третьей главе мы доказываем, что, в отличие от комплексного случая, группа бирациональных автоморфизмов вещественной поверхности *всегда* жорданова.

Теорема 1.2.2. *Пусть X — вещественная алгебраическая поверхность. Тогда группа $\text{Bir}(X)$ жорданова.*

В четвертой главе мы изучаем конечные группы автоморфизмов вещественных поверхностей дель Пеццо. При $K_X^2 = 9, 8, 6, 5, 2$ и 1 (в последнем случае — за исключением одной возможности) мы полностью классифицируем конечные группы, действующие минимально на \mathbb{R} -рациональных поверхностях дель Пеццо X данных степеней. Для оставшихся случаев $K_X^2 = 3$ и 4 нами получена существенная часть классификации таких групп. В частности, одним из основных следствий главы 4 является следующая теорема.

Теорема 1.2.3. *Пусть X — \mathbb{R} -рациональная поверхность дель Пеццо и $G \subset \text{Aut}(X)$ — группа нечетного порядка, такая что $\text{rk Pic}(X)^G = 1$. Тогда имеет место один из следующих случаев:*

- $K_X^2 = 9$, G — циклическая подгруппа of $\text{PGL}_3(\mathbb{R})$;
- $K_X^2 = 8$, группа G — циклическая и, кроме того, линейризуема.
- $K_X^2 = 6$, $G \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \rtimes (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ для некоторых нечетных чисел $n, m \geq 1$; эта группа линейризуема если, и только если $n = m = 1$;
- $K_X^2 = 5$, $G \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, причем эта группа линейризуема.

Более того, все перечисленные возможности реализуются.

Замечание 1.2.4. Если в условии этой теоремы заменить требование \mathbb{R} -рациональности на более слабое условие $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, то мы получим только два новых случая — вещественные поверхности дель Пеццо степени 2 и 3 с действием группы $\mathbb{Z}/3$, см. замечания 4.7.6 и 4.8.3.

В пятой главе мы описываем некоторые классы групп, действующих минимально на вещественных расслоениях на коники. В частности, мы получаем следующий результат.

Теорема 1.2.5. *Любая подгруппа нечетного порядка в группе $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{R})$ сопряжена группе автоморфизмов некоторой поверхности дель Пеццо X . Более точно, имеет место один из следующих случаев:*

1. $\mathrm{rk} \mathrm{Pic}(X)^G = 1$, и X является \mathbb{R} -рациональной;
2. $\mathrm{rk} \mathrm{Pic}(X)^G = 2$, $X \cong \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$, и группа G изоморфна произведению не более чем двух циклических групп.

Наконец, в шестой главе мы даем полное описание некоторых классов конечных групп, действующих на вещественных геометрических рациональных поверхностях и представляющих отдельный интерес с точки зрения классификации. Так, одним из полученных результатов является следующая теорема.

Теорема 1.2.6. *Пусть X — вещественная геометрически рациональная поверхность и $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ — конечная неразрешимая группа. Тогда пара (X, G) бирационально эквивалентна одной (и лишь одной) паре из следующих:*

- $(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2, \mathfrak{A}_5)$;
- $(Q_{3,1}, \mathfrak{A}_5)$ или $(Q_{3,1}, \mathfrak{A}_5 \times \mathbb{Z}/2)$;
- $(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2(4, 0), \mathfrak{A}_5)$ или $(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2(4, 0), \mathfrak{S}_5)$;
- (Y, \mathfrak{S}_5) , где Y — кубика Клебша.

Основной метод доказательства наших теорем состоит в систематическом использовании техники G -поверхностей, развитой в работах В. А. Исковских и Ю. И. Манина (см. [49], [53], [13], [14]), которая заключается в следующем. Для любого совершенного поля \mathbb{k} и конечной группы $G \subset \mathrm{Cr}_2(\mathbb{k})$ действие этой группы может быть *регуляризовано*, см. лемму 2.3.4 (доказательство из [13, Lemma 3.5] легко переносится на случай произвольного совершенного поля). Это означает, что существует \mathbb{k} -рациональная поверхность X , на которой G действует *бирегулярными* автоморфизмами. Далее к X применяется G -эквивариантное разрешение особенностей и G -эквивариантная программа минимальных моделей, описанная в [49]. Оказывается, что полученная в результате этой процедуры поверхность X_{\min} либо является поверхностью дель Пеццо с $\mathrm{rk} \mathrm{Pic}(X_{\min})^G = 1$, либо имеет структуру эквивариантного

расслоения на коники с $\text{rk Pic}(X_{\min})^G = 2$, см. теорему 2.3.5. Эти два типа поверхностей обладают достаточно богатой геометрией, которая позволяет классифицировать конечные подгруппы $G \subset \text{Aut}(X_{\min})$.

В данной диссертации мы применяем описанную выше стратегию к полю $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ и конечным подгруппам $G \subset \text{Cr}_2(\mathbb{R})$. На вещественные поверхности X с действием конечной группы $G \subset \text{Aut}(X)$ мы зачастую смотрим как на *комплексные* поверхности с действием *двух* групп — группы G и группы Галуа $\Gamma = \text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$. Кроме того, нами систематически используется тот факт, что для гладкой проективной вещественной алгебраической поверхности X множество ее вещественных точек $X(\mathbb{R})$ является гладкой компактной топологической поверхностью. Это простое наблюдение позволяет нам применять методы топологии и вещественной алгебраической геометрии.

Благодарности

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Ю. Г. Прохорову за постановку задачи и неоценимую помощь в её выполнении. Автор также хотел бы поблагодарить А. С. Трепалина и К. А. Шрамова за многочисленные советы и обсуждения.

1.3. Обозначения

Наши обозначения в основном стандартны.

- \mathbb{Z}/n или просто n обозначает циклическую группу порядка n ;
- D_n обозначает диэдральную группу порядка $2n$;
- \mathfrak{S}_n — симметрическая группа на множестве из n элементов.
- \mathfrak{A}_n — знакопеременная группа на множестве из n элементов.
- $A \Delta_D B$ — диагональное произведение групп A и B над их общим гомоморфным образом D , то есть подгруппа $A \times B$, состоящая из пар (a, b) , таких что $\alpha(a) = \beta(b)$ для некоторых сюръективных гомоморфизмов $\alpha : A \rightarrow D$, $\beta : B \rightarrow D$.
- $A \bullet B$ — некоторое расширение B с помощью нормальной подгруппы A ;

- Если M и N — две квадратные матрицы, то $M \oplus N$ обозначает блочно-диагональную матрицу, составленную из M и N . Единичную матрицу размера $n \times n$ мы будем обозначать I_n или просто 1 , если это не приводит к путанице.
- S^k обозначает k -мерную сферу.
- \mathbb{RP}^k обозначает k -мерное вещественное проективное пространство (рассматриваемое как топологическое многообразие).
- T^2 обозначает двумерный топологический тор.
- Символом \approx мы обозначаем отношение гомеоморфности двух топологических многообразий.
- Для вещественной поверхности X через $X(a, 2b)$ мы обозначаем поверхность, полученную раздутием X в a вещественных точках и b парах комплексно сопряженных точек.
- $\text{Sp}(A)$ обозначает набор собственных значений линейного оператора A .
- C_n обозначает циклическую характеристическую подгруппу индекса 2 в диэдральной группе D_n , $n \geq 3$.
- $M \# N$ обозначает связную сумму двух C^∞ -многообразий одинаковой размерности. Через $\#_g M$ мы будем обозначать связную сумму g копий многообразия M .
- Через $p_k = p_k(t)$ обозначается многочлен $t^k + t^{k-1} + \dots + t + 1$.
- Для двух непересекающихся множеств M и N через $M \sqcup N$ обозначается их несвязное объединение.

Глава 2

Предварительные сведения

В этой главе и на протяжении всей диссертации \mathbb{k} обозначает произвольное совершенное поле. В некоторых местах это требование можно ослабить, но мы не стремимся к максимальной общности.

2.1. Вещественные алгебраические многообразия

Пусть \mathbb{K} — нормальное сепарабельное расширение поля \mathbb{k} с группой Галуа $\text{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{k})$.

Определение 2.1.1.

- *Алгебраическое многообразие* над \mathbb{k} для нас — это приведенная отдельная схема конечного типа над \mathbb{k} . В случае $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ мы говорим о *вещественном* или *комплексном* многообразии соответственно.
- Для всякого многообразия X над \mathbb{k} символ $X_{\mathbb{K}}$ или $X \otimes_{\mathbb{k}} \mathbb{K}$ обозначает схему

$$X_{\mathbb{K}} = X \times_{\text{Spec } \mathbb{k}} \text{Spec } \mathbb{K}.$$

Группа $\text{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{k})$ действует на $X_{\mathbb{K}}$ через второй сомножитель. Кроме того, она действует на морфизмах $f : X_{\mathbb{K}} \rightarrow X_{\mathbb{K}}$ по правилу

$$\sigma \cdot f = (\text{id} \otimes \sigma) \circ f \circ (\text{id} \otimes \sigma)^{-1},$$

где $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{k}/\mathbb{k})$.

- *Вещественная структура* на комплексном алгебраическом многообразии X — это инволюция $\sigma : X \rightarrow X$, такая что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\sigma} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec}(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\text{Spec}(z \mapsto \bar{z})} & \text{Spec}(\mathbb{C}), \end{array}$$

- Две вещественные структуры σ и σ' на комплексном многообразии X

называются *эквивалентными*, если существует $\varphi \in \text{Aut}_{\mathbb{C}}(X)$, такой что $\sigma' = \varphi \circ \sigma \circ \varphi^{-1}$.

- Пусть X и Y — многообразия над \mathbb{k} . Тогда Y называется \mathbb{K}/\mathbb{k} -формой многообразия X , если существует \mathbb{K} -изоморфизм $X_{\mathbb{K}} \cong Y_{\mathbb{K}}$. Иногда также говорят, что X и Y являются \mathbb{k} -формами одного и того же многообразия, определенного над \mathbb{K} .

2.2. Рациональные поверхности

Определение 2.2.1. Гладкая проективная поверхность X над полем \mathbb{k} называется \mathbb{k} -рациональной, если она \mathbb{k} -бirationальна $\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^2$, и *геометрически рациональной*, если поверхность $X_{\mathbb{K}}$ бирационально изоморфна $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2$.

Замечание 2.2.2. Заметим, что по лемме Нишимуры \mathbb{k} -рациональность поверхности X влечет $X(\mathbb{k}) \neq \emptyset$, см. [58, 9.1.1].

Пример 2.2.3. Пусть $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ и X — квадрика в $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$, заданная уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 0.$$

Эта поверхность не является \mathbb{R} -рациональной, поскольку $X(\mathbb{R}) = \emptyset$. С другой стороны, стереографическая проекция из точки задает бирациональный изоморфизм между $X_{\mathbb{C}}$ и $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, поэтому поверхность X геометрически рациональна.

В этой диссертации особо важную роль играют два класса геометрически рациональных поверхностей — поверхности дель Пеццо и расслоения на коники.

2.2.1. Поверхности дель Пеццо

В этом разделе мы следуем [54, Глава IV] и [58, Глава 6].

Определение 2.2.4. *Поверхность дель Пеццо* — это гладкая проективная \mathbb{k} -поверхность с обильным антиканоническим классом $-K_X$. *Степенью* поверхности дель Пеццо называется число $d = K_X^2$.

Из формулы Нетера следует, что $1 \leq d \leq 9$. Следующая важная теорема дает основную геометрическую информацию о поверхностях дель Пеццо.

Теорема 2.2.5 ([54, Гл. IV, теорема 2.5]). *Пусть X — поверхность дель Пеццо степени d над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{k} = \bar{\mathbb{k}}$.*

- (а) *Если $d = 9$, то X изоморфна $\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^2$.*
- (б) *Если $d = 8$, то X изоморфна либо $\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{k}}^1$, либо раздутию $\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^2$ в одной точке.*
- (в) *Если $1 \leq d \leq 7$, то X изоморфна раздутию $\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^2$ в $9 - d$ точках в общем положении. Последнее означает, что никакие три точки не лежат на прямой, никакие шесть не лежат на конике, и никакие восемь не лежат на особой кубике так, что одна из точек является особенностью.*

Наоборот, любая поверхность, описанная в а), б), в) является поверхностью дель Пеццо соответствующей степени.

Бирациональные морфизмы между поверхностями дель Пеццо устроены следующим образом.

Предложение 2.2.6 ([58, Предложение 6.11.1]). *Пусть X — поверхность дель Пеццо.*

1. *Если $\nu : X \rightarrow Z$ — бирациональный морфизм, то Z — поверхность дель Пеццо.*
2. *Пусть $\pi : Y \rightarrow X$ — раздутие точки $p \in X$. Предположим, что выполняются следующие условия: (i) $K_X^2 > 1$; (ii) p не лежит ни на какой (-1) -кривой; (iii) p не лежит на дивизоре ветвления двойного накрытия $\varphi_{|-K_X|} : X \rightarrow \mathbb{P}^2$ при $K_X^2 = 2$. Тогда Y — поверхность дель Пеццо с $K_Y^2 = K_X^2 - 1$.*

Пусть X — поверхность дель Пеццо над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{k} = \bar{\mathbb{k}}$. Под (-1) -кривой мы будем понимать неприводимую кривую C с $C^2 = C \cdot K_X = -1$ (в частности, C рациональна). Из теоремы 2.2.5 следует, что $\text{Pic}(X) \cong \mathbb{Z}^{10-d}$. Если $d \leq 7$, то эта решетка порождена классами

(−1)-кривых. Пусть X получается из \mathbb{P}^2 раздутием точек $\{p_1, \dots, p_r\}$. Обозначим через e_i класс (−1)-кривой, соответствующей точке p_i , $r = 9 - d$, и пусть ℓ — класс собственного прообраза общей прямой на \mathbb{P}^2 . Тогда $\{\ell, e_1, \dots, e_r\}$ — базис для $\text{Pic}(X)$. Заметим, что

$$e_i^2 = -\delta_{ij}, \quad e_i \cdot \ell = 0, \quad \ell^2 = 1,$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Кроме того,

$$-K_X = 3\ell - \sum_{i=1}^{9-d} e_i. \quad (2.1)$$

Зависимость числа (−1)-кривых на поверхности дель Пеццо от ее степени приведена в таблице ниже.

d	1	2	3	4	5	6
# (−1)-кривых	240	56	27	16	10	6

Таблица 2.1: (−1)-кривые на поверхностях дель Пеццо

Положим

$$\Delta_r = \{s \in \text{Pic}(X) : s^2 = -2, s \cdot K_X = 0\}.$$

Тогда Δ_r — решетка корней в ортогональном дополнении $K_X^\perp \subset \text{Pic}(X) \otimes \mathbb{R}$. Как обычно, с Δ_r можно связать группу Вейля $\mathscr{W}(\Delta_r)$. По определению, это подгруппа $O(K_X^\perp)$, порожденная отражениями относительно гиперплоскостей, ортогональных корням $s \in \Delta_r$. В зависимости от степени d , тип Δ_r и порядок $\mathscr{W}(\Delta_r)$ могут быть следующими:

d	1	2	3	4	5	6
Δ_r	E_8	E_7	E_6	D_5	A_4	$A_1 \times A_2$
$ \mathscr{W}(\Delta_r) $	$2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$	$2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$	$2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$	$2^7 \cdot 3 \cdot 5$	$2^3 \cdot 3 \cdot 5$	12

Таблица 2.2: Группы Вейля

Кроме того, имеются естественные гомоморфизмы

$$\rho : \text{Aut}(X) \rightarrow \mathscr{W}(\Delta_r), \quad \eta : \text{Gal}(\bar{\mathbb{k}}/\mathbb{k}) \rightarrow \mathscr{W}(\Delta_r),$$

где в случае гомоморфизма η рассматривается решетка корней, ассоциированная с поверхностью $X_{\mathbb{k}}$. Более того, гомоморфизм ρ инъективен при $d \leq 5$. Если $h = (\gamma, g) \in \Gamma_{\mathbb{k}} \times G$, то положим

$$h^* = \rho(g)\eta(\gamma).$$

Обозначим через \mathbb{E}_r подрешетку в $\text{Pic}(X)$, порожденную системой корней Δ_r . Для элемента $h^* \in \mathscr{W}(\Delta_r)$ обозначим через $\text{tr}(h^*)$ след этого элемента на \mathbb{E}_r .

Замечание 2.2.7. По теореме Лефшеца о неподвижной точке, для любого автоморфизма $g \in \text{Aut}(X)$ имеем

$$\text{Eu}(X(\mathbb{C})^g) = 3 + \text{tr}(g^*),$$

где Eu обозначает эйлерову характеристику множества неподвижных точек $X(\mathbb{C})^g$ автоморфизма g .

Замечание 2.2.8. Из голоморфной формулы Лефшеца вытекает, что любой автоморфизм проективной рациональной поверхности над \mathbb{C} имеет неподвижную точку.

2.2.2. Расслоения на коники

Определение 2.2.9. Пусть X — неособая поверхность и $\pi : X \rightarrow B$ — доминантный проективный морфизм на неособую кривую, причем слои π связны. Морфизм π (и поверхность X) называется *расслоением на коники*, если каждый схемный слой $\pi^{-1}(b)$, $b \in B$, изоморфен плоской конике над \mathbb{k} .

Замечание 2.2.10. Пусть $\pi : X \rightarrow B$ — расслоение на коники над алгебраически замкнутым полем, и пусть F_b — его слой над (замкнутой) точкой. Тогда F_b приведен и имеет место одна из следующих возможностей:

- (i) F_b — неприводимая неособая рациональная кривая;
- (ii) F_b — объединение двух (-1) -кривых, пересекающихся трансверсально в одной точке.

Слои типа (ii) мы будем называть *(геометрически) вырожденными слоями*. Число s вырожденных слоев конечно, и из формулы Нетера вытекает, что

$$K_X^2 = 8 - s.$$

Определение 2.2.11. Для $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ определим *поверхность Хирцебруха*¹ *индекса n* как

$$\mathbb{F}_n = \{([x : y : z], [u : v]) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 : xv^n = yu^n\}$$

Заметим, что $\mathbb{F}_0 \cong \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$, а поверхность \mathbb{F}_1 изоморфна раздутию $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ в одной вещественной точке.

При $n > 0$ кривая $\Sigma = \{x = y = 0\}$ называется *исключительным $(-n)$ -сечением* поверхности Хирцебруха. Это единственная кривая с отрицательным индексом самопересечения на \mathbb{F}_n . Группа $\text{Pic}(\mathbb{F}_n)$ порождается Σ и классом слоя F , а теория пересечений имеет вид

$$F^2 = 0, \quad F \cdot \Sigma = 1, \quad \Sigma^2 = -n.$$

Канонический дивизор записывается как

$$K_{\mathbb{F}_n} = -2\Sigma - (2 + n)F.$$

Элементарным преобразованием поверхности Хирцебруха \mathbb{F}_n над \mathbb{C} называется следующее бирациональное преобразование. Пусть $v : Y \rightarrow \mathbb{F}_n$ обозначает раздутие точки p на слое F , \tilde{F} — собственный прообраз F , $\tilde{\Sigma}$ — собственный прообраз $(-n)$ -сечения $\Sigma \subset \mathbb{F}_n$ и E — исключительный дивизор раздутия. Тогда $(\tilde{F})^2 = (v^*F - E)^2 = F^2 - 1 = -1$. Существует морфизм $\psi : Y \rightarrow Z$, стягивающий \tilde{F} (над \mathbb{C}). Если $p \notin \Sigma$, то $\tilde{\Sigma}^2 = C_n^2 = -n$ и $\tilde{\Sigma}$ пересекает \tilde{F} трансверсально ровно в одной точке. Значит, $\psi(\tilde{\Sigma})^2 = -n + 1$ и $Z \cong \mathbb{F}_{n-1}$. Если $p \in \Sigma$, то $\tilde{\Sigma}^2 = \Sigma^2 - 1 = -n - 1$, $\tilde{\Sigma} \cap \tilde{F} = \emptyset$, поэтому $\psi(\tilde{\Sigma})^2 = -n - 1$ и $Z \cong \mathbb{F}_{n+1}$. Следующая коммутативная диаграмма иллюстрирует это бирациональное преобразование:

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ v \swarrow & & \searrow \psi \\ \mathbb{F}_n & \dashrightarrow & Z = \mathbb{F}_{n+1} \text{ или } \mathbb{F}_{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}^1 & \xlongequal{\quad\quad\quad} & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

¹Другое общепринятое название — рациональная линейчатая поверхность.

Заметим, что над \mathbb{R} мы можем раздувать либо вещественную точку, либо пару комплексно сопряженных (см. ниже). Например, раздутие пары сопряженных точек $p, \bar{p} \notin \Sigma \subset \mathbb{F}_n$ с $n > 0$ с последующим стягиванием собственных прообразов слоев, проходящих через p, \bar{p} , дает бирациональное отображение $\mathbb{F}_n \dashrightarrow \mathbb{F}_{n-2}$. Аналогичная процедура для вещественной точки $q \in \mathbb{F}_n(\mathbb{R})$ дает бирациональное отображение $\mathbb{F}_n \dashrightarrow \mathbb{F}_{n-1}$.

Замечание 2.2.12. На языке программы Саркисова эти элементарные преобразования являются линками Саркисова типа II между двумя расслоениями Мори, см. [55].

2.3. \mathbb{G} -многообразия

Пусть \mathbb{k} — произвольное совершенное поле, а \mathbb{G} — конечная группа.

Определение 2.3.1. \mathbb{G} -многообразием (X, \mathbb{G}) называется алгебраическое многообразие X над полем \mathbb{k} с действием группы \mathbb{G} на $X \otimes \bar{\mathbb{k}}$.

Морфизм \mathbb{G} -многообразий $(X_1, \mathbb{G}) \rightarrow (X_2, \mathbb{G})$ (или \mathbb{G} -морфизм) — это морфизм $f : X_1 \rightarrow X_2$, такой что для всех $g \in \mathbb{G}$ следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{f} & X_2 \\ g \downarrow & & \downarrow g \\ X_1 & \xrightarrow{f} & X_2 \end{array}$$

Рациональные и бирациональные отображения определяются аналогично.

Замечание 2.3.2. Важными случаями \mathbb{G} -многообразий являются следующие:

- *арифметический:* группа \mathbb{G} является группой Галуа поля $\bar{\mathbb{k}}$ над \mathbb{k} и действует на $X \otimes \bar{\mathbb{k}}$ через второй сомножитель. Группа \mathbb{G} в этом случае будет обозначаться $\Gamma_{\mathbb{k}}$ или просто Γ .
- *геометрический:* группа \mathbb{G} является конечной группой, действующей \mathbb{k} -автоморфизмами на X . Группа \mathbb{G} в этом случае будет обозначаться как G .
- *смешанный:* группа \mathbb{G} есть прямое произведение $\Gamma_{\mathbb{k}} \times G$.

Определение 2.3.3. \mathbb{G} -поверхность X называется \mathbb{G} -минимальной, если любой бирациональный \mathbb{G} -морфизм гладких поверхностей $X \rightarrow Y$ является \mathbb{G} -изоморфизмом. В случае $\mathbb{G} = \Gamma_{\mathbb{k}}$ мы будем называть поверхность \mathbb{k} -минимальной или минимальной над \mathbb{k} .

Пусть имеется \mathbb{G} -морфизм $\pi : X \rightarrow B$, где B — кривая. Он называется относительно \mathbb{G} -минимальным, если для любого разложения

$$\pi : X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{h} B$$

в композицию \mathbb{G} -морфизмов с бирациональным g этот морфизм g является изоморфизмом.

Как и в классической программе минимальных моделей, имеют место \mathbb{G} -инвариантная теорема о конусе и \mathbb{G} -инвариантная теорема о стягивании. За их точными формулировками мы отсылаем читателя к [58, теорема 7.6, 7.7].

Опишем теперь, как техника \mathbb{G} -многообразий позволяет работать с конечными подгруппами в группе Кремоны. Пусть (X, G) — \mathbb{k} -рациональная G -поверхность. Бирациональное отображение $\psi : X \dashrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{k}}^2$ индуцирует вложение

$$i_{\psi} : G \rightarrow \mathrm{Cr}_2(\mathbb{k}), \quad g \mapsto \psi \circ g \circ \psi^{-1}.$$

Будем говорить, что группа G *линеаризуема*, если существует бирациональное отображение $\psi : X \dashrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{k}}^2$, такое что $i_{\psi}(G) \subset \mathrm{PGL}_3(\mathbb{k})$. Если (X', G) — другая \mathbb{k} -рациональная G -поверхность с бирациональным отображением $\psi' : X' \dashrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{k}}^2$, то подгруппы $i_{\psi}(G)$ и $i_{\psi'}(G)$ сопряжены если, и только если G -поверхности (X, G) и (X', G) бирационально изоморфны. Другими словами, класс бирационально изоморфных G -поверхностей определяет класс сопряженности подгрупп $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{k})$, изоморфных G .

Можно показать, что *любой* класс сопряженности получается таким образом. А именно, справедлива следующая лемма о *регуляризации* действия конечной группы.

Лемма 2.3.4 ([14, Лемма 6]). *Пусть $G \subset \mathrm{Cr}_2(\mathbb{k})$ — конечная подгруппа. Тогда существует \mathbb{k} -рациональная гладкая проективная поверхность X , инъективный гомоморфизм*

$$\iota : G \rightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{k}}(X)$$

и бирациональное G -эquivариантное \mathbb{k} -отображение $\psi : X \dashrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{k}}^2$, такое что

$$G = \psi \circ \iota(G) \circ \psi^{-1}$$

Разумеется, построенную в лемме 2.3.4 пару (X, G) можно заменить на минимальную \mathbb{k} -рациональную G -поверхность. Другими словами, имеется естественная биекция между классами сопряженности конечных подгрупп $G \subset \mathrm{Cr}_2(\mathbb{k})$ и классами G -бирационально изоморфных G -минимальных гладких \mathbb{k} -рациональных поверхностей. Оказывается, такие поверхности допускают компактную классификацию.

Теорема 2.3.5 ([58, следствие 7.8.1]). *Пусть X — геометрически рациональная G -минимальная поверхность. Тогда имеет место одно из следующих утверждений:*

- (i) X — поверхность дель Пеццо с $\mathrm{Pic}(X)^G \cong \mathbb{Z}$;
- (ii) X имеет структуру расслоения на коники с $\mathrm{Pic}(X)^G \cong \mathbb{Z}^2$.

Замечание 2.3.6 ([58, теорема 9.1]). Пусть X — нормальное проективное многообразие над совершенным полем \mathbb{k} . Если $X(\mathbb{k}) \neq \emptyset$, то

$$\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Pic}(X_{\overline{\mathbb{k}}})^{\Gamma_{\mathbb{k}}}.$$

Соглашение 2.3.7. В дальнейшем под G -минимальной поверхностью дель Пеццо мы будем понимать поверхность дель Пеццо X с $\mathrm{Pic}(X)^G \cong \mathbb{Z}$, а под G -минимальным расслоением на коники будем понимать расслоение на коники X с $\mathrm{Pic}(X)^G \cong \mathbb{Z}^2$. Согласно замечанию 2.3.6, при условии $X(\mathbb{k}) \neq \emptyset$, это эквивалентно $\Gamma_{\mathbb{k}} \times G$ -минимальности соответствующих $X_{\overline{\mathbb{k}}}$.

Замечание 2.3.8. Имеется следующий практический способ проверки G -минимальности поверхности дель Пеццо, которым мы будем часто пользоваться. Будем следовать обозначениям параграфа 2.2.1. Пусть $X(\mathbb{k}) \neq \emptyset$. Тогда

$$\mathrm{rk} \mathrm{Pic}(X)^G = \mathrm{rk} \mathrm{Pic}(X_{\overline{\mathbb{k}}})^{\Gamma_{\mathbb{k}} \times G} = 1 + \frac{1}{|\Gamma_{\mathbb{k}} \times G|} \sum_{h \in \Gamma_{\mathbb{k}} \times G} \mathrm{tr}(h^*). \quad (2.2)$$

В частности, $\text{rk Pic}(X)^G = 1$ если, и только если

$$\sum_{h \in \Gamma_k \times G} \text{tr}(h^*) = 0. \quad (2.3)$$

Критерий минимальности формулируется особенно просто, если G — циклическая группа. В дальнейшем через $\text{Sp}(g^*)$ мы обозначаем набор собственных значений отображения g^* .

Лемма 2.3.9. *Поверхность дель Пеццо $X_{\mathbb{C}}$ является $\langle g \rangle_n$ -минимальной если, и только если $1 \notin \text{Sp}(g^*)$.*

Доказательство. Согласно формуле (2.3), нужно показать, что сумма $\text{tr}(g^{*k})$ равна нулю если и только если $1 \notin \text{Sp}(g^*)$. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ — собственные значения g^* . Тогда

$$\sum_{k=0}^{n-1} \text{tr}(g^{*k}) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=1}^r \lambda_i^k = \sum_{i=1}^r \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_i^k.$$

Остается заметить, что сумма $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_i^k$ равна n при $\lambda_i = 1$ и равна нулю иначе. \square

Рассмотрим более подробно программу минимальных моделей над \mathbb{R} , то есть $\Gamma_{\mathbb{R}}$ -программу минимальных моделей. Пусть X — вещественная проективная геометрически неприводимая поверхность. Рассмотрим каноническую проекцию

$$\text{pr} : X_{\mathbb{C}} \rightarrow X.$$

Пусть $p \in X$ — замкнутая точка. Тогда либо $\text{pr}^{-1}(p) = p$, либо $\text{pr}^{-1}(p) = \{p, \sigma(p)\}$. Напомним, что *исключительной кривой* (или *(-1)-кривой*) на комплексной поверхности S называется кривая L , такая что $L \cong \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ и $L^2 = -1$. Кривая E на вещественной поверхности X называется *исключительной*, если:

- (i) либо $\text{pr}^{-1}(E) = L$ исключительна на $X_{\mathbb{C}}$ и $L = \sigma(L)$;
- (ii) либо $\text{pr}^{-1}(E) = L + \sigma(L)$, L исключительна на $X_{\mathbb{C}}$ и $L \cap \sigma(L) = \emptyset$.

В случае (i) будем называть L *вещественной (-1)-кривой*. Далее, существует последовательность морфизмов

$$X = X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{m-2}} X_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} X_n = X_{\min},$$

где каждый f_i является бирациональным стягиванием исключительной кривой (в смысле, обсуждавшемся выше) и либо дивизор $K_{X_{\min}}$ является численно эффективным, либо X_{\min} является расслоением на коники с $\text{rk Pic}(X_{\min}) = 2$, либо X_{\min} — поверхность дель Пеццо с $\text{rk Pic}(X_{\min}) = 1$.

Описание геометрически рациональных минимальных вещественных поверхностей восходит к работам А. Комессатти, а современное изложение можно найти в [55], [18].

Теорема 2.3.10. *Пусть X — вещественная геометрически рациональная минимальная поверхность с $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$. Тогда выполнено ровно одно из следующих утверждений:*

1. *Поверхность X является \mathbb{R} -рациональной: в этом случае X изоморфна либо $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, либо квадрике $Q_{3,1}$, либо вещественной поверхности Хирцебруха \mathbb{F}_n , $n \neq 1$;*
2. *Поверхность X является поверхностью дель Пеццо степени 1 или 2 с $\rho(X) = 1$;*
3. *Поверхность X допускает структуру минимального расслоения на коники $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ с четным числом вырожденных слоев $s \geq 4$ и $\rho(X) = 2$.*

2.4. Топология вещественных рациональных поверхностей

Под *топологической поверхностью* мы будем понимать компактное топологическое многообразие размерности 2 (без края). Любая топологическая поверхность допускает единственную дифференцируемую структуру класса C^∞ , наличие которой мы всегда будем предполагать. В частности, имеет смысл говорить о диффеоморфизмах топологических поверхностей. Напомним, что любая связная топологическая поверхность гомеоморфна одной из следующих:

- сфера \mathbb{S}^2 ;
- ориентируемая поверхность $\Sigma_g = \#_g \mathbb{T}^2$, где $\mathbb{T}^2 \approx \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ — двумерный тор;

- неориентируемая поверхность $N_g = \#_g \mathbb{R}P^2$. В этом и предыдущем случае число $g \geq 1$ называется родом поверхности.

Пусть X — гладкая проективная алгебраическая поверхность над \mathbb{R} . Тогда множество $X(\mathbb{R})$ (с обычной евклидовой топологией) является топологической поверхностью. Если

$$X \rightarrow Y$$

— стягивание исключительной кривой, то

$$X(\mathbb{R}) \approx Y(\mathbb{R}) \# \mathbb{R}P^2$$

при стягивании вещественной (-1) -кривой, и $X(\mathbb{R}) \approx Y(\mathbb{R})$ при стягивании пары комплексно сопряженных (-1) -кривых [20, Exemple 4.2.17]. Используя программу минимальных моделей над \mathbb{R} и некоторую дополнительную информацию о геометрии поверхностей дель Пеццо малой степени, несложно получить следующее описание топологии вещественного локуса геометрически рациональных поверхностей.

Теорема 2.4.1 ([20, Théorème 4.4.10]). *Пусть X — геометрически рациональная гладкая алгебраическая поверхность над \mathbb{R} .*

1. *Поверхность X является \mathbb{R} -рациональной если, и только если множество $X(\mathbb{R})$ непусто и связно. Если X минимальна над \mathbb{R} , то поверхность $X(\mathbb{R})$ диффеоморфна одной из следующих:*
 - проективная плоскость $\mathbb{R}P^2$;
 - сфера S^2 ;
 - тор T^2 ;
 - бутылка Клейна $\#_2 \mathbb{R}P^2$ (и в этом случае $X \cong \mathbb{F}_{2n+1}$).
2. *Если X — \mathbb{R} -минимальная поверхность дель Пеццо степени 1, то $X(\mathbb{R})$ диффеоморфно несвязному объединению $\mathbb{R}P^2$ и четырех копий S^2 . Если X — \mathbb{R} -минимальная поверхность дель Пеццо степени 2, то $X(\mathbb{R})$ диффеоморфно несвязному объединению четырех копий S^2 .*
3. *Если X не рациональна над \mathbb{R} и обладает структурой минимального расслоения на коники с $2s$ вырожденными слоями, то $X(\mathbb{R})$ диффеоморфно несвязному объединению s копий сферы, где $s \geq 2$.*

2.5. Бирациональные диффеоморфизмы

В литературе, посвященной вещественным алгебраическим многообразиям, можно найти два основных определения морфизма между такими многообразиями. Наиболее употребимое (и используемое нами) определение таково: *регулярный морфизм* $X \rightarrow Y$ — это рациональное отображение, определенное во всех комплексных точках X . Соответствующая категория суть категория схем над \mathbb{R} с регулярными морфизмами между ними. Группа автоморфизмов объекта X , обозначаемая $\text{Aut}(X)$, как правило, является «маленькой»: ее связная компонента единицы является конечномерной алгебраической группой.

Другое используемое определение морфизма таково. Мы говорим, что между двумя гладкими вещественными многообразиями X и Y имеется морфизм $f : X \dashrightarrow Y$, если f — рациональное отображение, определенное во всех *вещественных* точках $X(\mathbb{R})$. Соответствующая группа автоморфизмов X будет обозначаться $\text{Aut}(X(\mathbb{R}))$ и называется *группой бирациональных диффеоморфизмов* X или $X(\mathbb{R})$. Название оправдано тем, что любое отображение $f \in \text{Aut}(X(\mathbb{R}))$, очевидно, индуцирует диффеоморфизм C^∞ -многообразия $X(\mathbb{R})$ на себя. Группа $\text{Aut}(X(\mathbb{R}))$ в общем случае гораздо больше, чем $\text{Aut}(X)$. Так, Я. Коллар и Ф. Мангольт показали в [19], что группа $\text{Aut}(X(\mathbb{R}))$ плотна² в группе $\text{Diff}(X(\mathbb{R}))$, если X — гладкая вещественная рациональная поверхность.

2.6. Конечные группы

2.6.1. Конечные подгруппы классических линейных групп

В этом параграфе мы собрали все необходимые для нас факты и обозначения, касающиеся теории групп.

Предложение 2.6.1. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Любая конечная подгруппа в $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ или $\text{PGL}_2(\mathbb{R})$ сопряжена либо цик-*

²В некоторой естественной C^∞ -топологии.

лической группе

$$\left\langle R_n = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n) \\ \sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \left\langle S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

либо диэдральной группе

$$D_n = \langle R_n, S \mid R_n^n = S^2 = 1, SR_nS^{-1} = R_n^{-1} \rangle.$$

2. Любая конечная подгруппа в $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$ сопряжена либо циклической группе $\langle I \oplus R_n \rangle$ или $\langle I \oplus S \rangle$, либо диэдральной группе $\langle I \oplus R_n, I \oplus S \rangle$, либо одной из исключительных групп \mathfrak{A}_4 , \mathfrak{S}_4 , \mathfrak{A}_5 .

Доказательство. Утверждение (1) является простым упражнением. Заметим, что $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{R}) \cong \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ при нечетном n . Более того, любая конечная подгруппа $G \subset \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$ сопряжена подгруппе в $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, поэтому (2) вытекает из хорошо известной классификации конечных подгрупп в $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. \square

Лемма 2.6.2. Пусть G — конечная группа нечетного порядка. Тогда каждое точное проективное представление $\theta : G \rightarrow \mathrm{PGL}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, поднимается до точного представления $\tilde{\theta} : \tilde{G} \cong G \rightarrow \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

Доказательство. Поскольку $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{R}) \cong \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ для нечетных n , мы будем предполагать n четным. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & & 1 & & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & \{\pm 1\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\det} & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow \gamma & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \mathrm{PSL}_n(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\alpha} & \mathrm{PGL}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \{\pm 1\} & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 1 & & 1 & & 1 & & \end{array}$$

Поскольку $G \subset \mathrm{PGL}_n(\mathbb{R})$ имеет нечетный порядок, имеем $G \cong \alpha^{-1}(G) \subset \mathrm{PSL}_n(\mathbb{R})$. Группа $\gamma^{-1} \circ \alpha^{-1}(G)$ является двойным расширением G , в котором G является подгруппой Холла. \square

Предложение 2.6.3. *Любая конечная подгруппа $G \subset \mathrm{PGL}_4(\mathbb{R})$ нечетного порядка изоморфна прямому произведению не более чем двух циклических групп.*

Доказательство. По лемме 2.6.2 группа G изоморфно поднимается до подгруппы в $\mathrm{SL}_4(\mathbb{R})$, и это поднятие сопряжено подгруппе в $\mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$. Напомним, что $\mathrm{SO}_4(\mathbb{R})$ является двойным накрытием $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \times \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ [59, Chapter 3, §3D]. Значит, $G \subset \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \times \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. Пусть π_i обозначает проекцию на i -й сомножитель. Тогда $G \subseteq \pi_1(G) \times \pi_2(G)$, где $\pi_i(G) \subset \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ — циклическая группа нечетного порядка. Но тогда G сама изоморфна прямому произведению не более чем двух циклических групп. \square

2.6.2. Теория инвариантов

В этом разделе мы собрали необходимую информацию, касающуюся вещественных инвариантов конечных групп.

Пусть V — вещественное m -мерное векторное пространство и x_1, \dots, x_m — стандартный двойственный базис в V^* . Пусть $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$ — точное линейное представление конечной группы G и $\eta : G \rightarrow \mathrm{GL}(V \otimes \mathbb{C})$ — некоторое точное комплексное представление, эквивалентное ρ , то есть $\rho(g) = T \circ \eta(g) \circ T^{-1}$ для каждого $g \in G$ и некоторого $T \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$.

Напомним, что каждая конечная подгруппа $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ является либо циклической $\mathbb{Z}/n \cong \langle R_n \rangle$ (или $\langle S \rangle \cong \mathbb{Z}/2$, см. ниже), либо диэдральной

$$D_n \cong \langle R_n, S \mid R_n^n = S^2 = 1, SR_nS^{-1} = R_n^{-1} \rangle.$$

В дальнейшем под *стандартным представлением* \mathbb{Z}/n и D_n мы подразумеваем

$$\rho : R_n \mapsto \begin{pmatrix} \cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n) \\ \sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{pmatrix}, \quad S \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что группу $\langle R_2, S \rangle \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ мы также считаем диэдральной и обозначаем D_2 . Для построения G -инвариантных поверхностей дель Пеццо в параграфах 4.8 и 4.9, нам потребуется знание G -инвариантных бинарных форм $f_k(x, y)$ степеней $k = 2, 4$ и 6 . Они перечислены ниже.

Циклические группы

Пусть $G = \mathbb{Z}/n$. Тогда

$$\mathbb{R}[x, y]^{\rho(\mathbb{Z}/n)} = \mathbb{R}[x^2 + y^2, \operatorname{Re}(x + iy)^n, \operatorname{Im}(x + iy)^n] \quad (2.4)$$

Действительно, обозначим через ω первообразный корень степени n из единицы. Представление ρ эквивалентно $\eta : R_n \mapsto \operatorname{diag}\{\omega, \bar{\omega}\}$ с $T : x \mapsto z = x + iy, y \mapsto w = x - iy$. Для каждого $g \in G$ имеем $\eta(g)(Tf) = T\rho(g)T^{-1}Tf = Tf$, поэтому $Tf \in \mathbb{C}[x, y]^{\eta(\mathbb{Z}/n)}$. Хорошо известно, что $\mathbb{C}[z, w]^{\eta(\mathbb{Z}/n)} = \mathbb{C}[z^n, zw, w^n]$, поэтому

$$Tf = \sum c_{jkl} z^{nj} (zw)^k w^{nl}, \quad \text{и} \quad f = \sum c_{jkl} (x + iy)^{nj} (x^2 + y^2)^k (x - iy)^{nl}.$$

Отделяя вещественную часть, мы получаем список базисных инвариантов. Ниже мы используем (2.4), чтобы найти «хороший» список порождающих.

$$\boxed{\mathbb{Z}/2} \quad \mathbb{R}[x, y]^{\mathbb{Z}/2} = \mathbb{R}[x^2 + y^2, x^2 - y^2, 2xy] = \mathbb{R}[x^2, xy, y^2]$$

$f_{2k}(x, y)$ — инвариант для всех $k \geq 1$.

$$\boxed{\mathbb{Z}/4} \quad \mathbb{R}[x, y]^{\mathbb{Z}/4} = \mathbb{R}[x^2 + y^2, x^4 - 6x^2y^2 + y^4, 4x^3y - 4xy^3] = \mathbb{R}[x^2 + y^2, x^2y^2, x^3y - xy^3]$$

$$f_2(x, y) : a(x^2 + y^2);$$

$$f_4(x, y) : ax^4 + bx^2y^2 + ay^4 + cxy(x^2 - y^2);$$

$$f_6(x, y) : (x^2 + y^2)(ax^4 + dx^3y + bx^2y^2 - dxy^3 + ay^4)$$

$$\boxed{\mathbb{Z}/8} \quad \mathbb{R}[x, y]^{\mathbb{Z}/8} = \mathbb{R}[x^2 + y^2, x^8 - 28x^6y^2 + 70x^4y^4 - 28x^2y^6 + y^8, 8x^7y - 56x^5y^3 + 56x^3y^5 - 8xy^7] = \mathbb{R}[x^2 + y^2, xy(x^2 - y^2)(x^4 - 6x^2y^2 + y^4), x^2y^2(x^2 - y^2)^2]$$

$$f_2(x, y) : a(x^2 + y^2);$$

$$f_4(x, y) : a(x^2 + y^2)^2;$$

$$f_6(x, y) : a(x^2 + y^2)^3.$$

Диэдральные группы

Имеем

$$\mathbb{R}[x, y]^{\rho(D_n)} = \mathbb{R}[x^2 + y^2, \operatorname{Re}(x + iy)^n].$$

$$\boxed{D_2} \quad \mathbb{R}[x, y]^{D_2} = \mathbb{R}[x^2 + y^2, x^2 - y^2] = \mathbb{R}[x^2, y^2]$$

$$f_2(x, y) : ax^2 + by^2;$$

$$f_4(x, y) : ax^4 + bx^2y^2 + cy^4;$$

$$f_6(x, y) : ax^6 + bx^4y^2 + cx^2y^4 + dy^6.$$

$$\boxed{D_4} \quad \mathbb{R}[x, y]^{D_4} = \mathbb{R}[x^2 + y^2, x^4 - 6x^2y^2 + y^4] = \mathbb{R}[x^2 + y^2, x^2y^2]$$

$$f_2(x, y) : a(x^2 + y^2);$$

$$f_4(x, y) : ax^4 + bx^2y^2 + ay^4;$$

$$f_6(x, y) : (x^2 + y^2)(ax^4 + bx^2y^2 + ay^4).$$

$$\boxed{D_8} \quad \mathbb{R}[x, y]^{D_8} = \mathbb{R}[x^2 + y^2, x^8 - 28x^6y^2 + 70x^4y^4 - 28x^2y^6 + y^8] = \mathbb{R}[x^2 + y^2, x^2y^2(x^2 - y^2)^2]$$

$$f_2(x, y) : a(x^2 + y^2);$$

$$f_4(x, y) : a(x^2 + y^2)^2;$$

$$f_6(x, y) : a(x^2 + y^2)^3.$$

2.6.3. Свойство Жордана

В параграфе 1.1 было введено понятие константы Жордана произвольной группы. Отметим, что для всех групп $\operatorname{GL}_n(\mathbb{C})$ эти константы были вычислены в [10] М. Коллинзом лишь в 2007 году с использованием классификации конечных простых групп. Нам потребуются лишь некоторые следствия работы Коллинза (которые, впрочем, могут быть получены напрямую из классификации конечных подгрупп $\operatorname{GL}_n(\mathbb{k})$ при малых n). Доказательство следующей леммы элементарно, и мы его опускаем.

Лемма 2.6.4. *Справедливы следующие утверждения.*

1. Если \mathcal{G}_1 — подгруппа жордановой группы \mathcal{G}_2 , то \mathcal{G}_1 жорданова и $J(\mathcal{G}_1) \leq J(\mathcal{G}_2)$.
2. Если \mathcal{G}_1 — жорданова группа и имеется сюръективный гомоморфизм $\mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$, то \mathcal{G}_2 также жорданова и $J(\mathcal{G}_2) \leq J(\mathcal{G}_1)$.

Лемма 2.6.5. *Имеем*

1. $J(\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})) = 60$.
2. $J(\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})) = 360$.
3. $J(\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})) = 60$.
4. $J(\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})) = 360$.

Доказательство. Утверждения (1) и (2) вытекают из [10] или явной классификации конечных подгрупп в соответствующих линейных группах. Для доказательства (3) и (4) применим лемму 2.6.4 (2) к естественной сюръекции $\mathrm{GL}_n(\mathbb{k}) \rightarrow \mathrm{PGL}_n(\mathbb{k})$, $n = 2, 3$, и получим $J(\mathrm{PGL}_2(\mathbb{k})) \leq 60$ и $J(\mathrm{PGL}_3(\mathbb{k})) \leq 360$. Требуемые равенства достигаются для простых групп \mathfrak{A}_5 and \mathfrak{A}_6 соответственно. \square

При вычислении констант Жордана оказывается полезным также понятие *слабой константы Жордана* группы \mathcal{G} , введенное в [28]. По определению, это наименьшее натуральное число $\bar{J}(\mathcal{G})$, такое что любая конечная подгруппа $G \subset \mathcal{G}$ содержит абелеву (не обязательно нормальную!) подгруппу $A \subset G$ с индексом $[G : A] \leq \bar{J}(\mathcal{G})$. Слабые константы Жордана для групп $\mathrm{St}_2(\mathbb{C})$ и $\mathrm{St}_3(\mathbb{C})$ были вычислены Ю. Г. Прохоровым и К. А. Шрамовым в [28]. Для оценки константы Жордана оказывается полезным следующий замечательный факт.

Теорема 2.6.6 ([15, теорема 1.41]). *Пусть G — конечная группа. Тогда существует характеристическая абелева подгруппа $N \subset G$, такая что $[G : N] \leq [G : A]^2$ для любой абелевой подгруппы $A \subset G$.*

Следовательно, для любой группы \mathcal{G} справедлива оценка

$$\bar{J}(\mathcal{G}) \leq J(\mathcal{G}) \leq \bar{J}(\mathcal{G})^2.$$

Как мы покажем в главе 3, в большинстве интересующих нас случаев эта оценка оказывается слишком грубой.

Глава 3

Константа Жордана

В этой главе мы вычисляем константы Жордана для групп $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$, $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{R})$ и $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{Q})$, а также для групп бирациональных диффеоморфизмов некоторых двумерных поверхностей. Кроме того, в параграфе 3.1 мы покажем, что группа бирациональных автоморфизмов *любой* вещественной поверхности является жордановой. Это контрастирует со случаем комплексных поверхностей, для которых справедлив следующий результат.

Теорема 3.0.1 (В. Л. Попов, Ю. Г. Зархин). *Пусть X — комплексная проективная поверхность. Тогда группа $\mathrm{Bir}(X)$ является жордановой если и только если X не бирациональна $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times E$, где E — эллиптическая кривая.*

Замечание 3.0.2. Жордановость $\mathrm{Bir}(X)$ для комплексных алгебраических поверхностей, не бирациональных $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times E$, была доказана В. Л. Поповым в [24]. Нежордановость группы $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times E)$ была доказана Ю. Г. Зархиным в работе [41]. Недавно Ю. Г. Прохоров и К. А. Шрамов доказали аналог теоремы 3.0.1 для связных компактных комплексных поверхностей. теорема 3.1.1, доказываемая ниже, также может быть сформулирована для неалгебраических вещественных поверхностей, то есть для компактных комплексных поверхностей, снабженных антиголоморфной инволюцией.

3.1. Свойство Жордана для вещественных поверхностей

Основной целью этого параграфа является доказательство следующего результата.

Теорема 3.1.1. *Пусть X — вещественная проективная алгебраическая поверхность и $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$. Тогда группа $\mathrm{Bir}(X)$ жорданова.*

Доказательству предпшлем несколько лемм. Напомним, что \mathbb{k} -поверхность X над \mathbb{k} -кривой B называется \mathbb{k} -линейчатой, если существует проективный морфизм¹ $\pi : X \rightarrow B$, такой что $\pi^{-1}(\eta)$ — гладкая кривая рода нуль над полем $\mathbb{k}(\eta)$, где η — общая точка B .

¹Применяя факторизацию Штейна, мы всегда можем считать, что слои π связны.

Лемма 3.1.2 ([33, V, Proposition 1.8]). Пусть X — вещественная алгебраическая поверхность, не являющаяся \mathbb{R} -рациональной, причем $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ и поверхность $X_{\mathbb{C}}$ является \mathbb{C} -линейчатой. Тогда X является \mathbb{R} -линейчатой над \mathbb{R} -кривой B .

Пусть поверхность X является \mathbb{R} -линейчатой над вещественной кривой B и $G \subset \text{Aut}(X)$ — конечная подгруппа. Тогда имеется короткая точная последовательность групп

$$1 \longrightarrow G_F \longrightarrow G \xrightarrow{\varphi} G_B \longrightarrow 1, \quad (3.1)$$

где $G_B \subset \text{Aut}(B)$, и G_F действует автоморфизмами общего слоя F .

Лемма 3.1.3. Пусть $g \in G$ и $h \in G_F$ — такие элементы, что g нормализует циклическую группу $\langle h \rangle$. Тогда элемент $g^{-1}hg$ равен либо h , либо h^{-1} .

Доказательство. Заметим, что лемму достаточно доказать над алгебраическим замыканием основного поля. Тогда G_F является подгруппой $\text{Aut}_{\mathbb{C}}(\pi^{-1}(\eta)) = \text{PGL}_2(\mathbb{C}(B))$, где η — общая точка кривой B . Поскольку элемент h имеет конечный порядок, он лежит в некотором максимальном торе $T \subset \text{PGL}_2(\mathbb{C}(B))$. Легко видеть, что

$$T = \text{Cent}_{\text{PGL}_2(\mathbb{C}(B))}(h),$$

где $\text{Cent}(h)$ обозначает централизатор элемента h . По условию леммы, $g^{-1}hg = h^k$. Тогда

$$g^{-1}Tg = g^{-1}\text{Cent}(h)g = \text{Cent}(g^{-1}hg) = \text{Cent}(h^k) \supset \text{Cent}(h) = T.$$

Поскольку g имеет конечный порядок $m < \infty$, имеем $g^{m-1} = g^{-1}$, поэтому,

$$gTg^{-1} = \text{Cent}(g^{-(m-1)}hg^{m-1}) = \text{Cent}(h^{k(m-1)}) \supset \text{Cent}(h) = T,$$

откуда $g^{-1}Tg \subset T$. Значит, $g^{-1}Tg = T$. Поэтому g индуцирует групповой автоморфизм тора T , который обязан иметь вид $t \mapsto t^{\pm 1}$ [47, теорема 4.14.1].

□

Доказательство теоремы 3.1.1. Поскольку

$$\mathrm{Bir}(X) \subset \mathrm{Bir}_{\mathbb{C}}(X_{\mathbb{C}}),$$

группа $\mathrm{Bir}(X)$ является жордановой, если $X_{\mathbb{C}}$ не \mathbb{C} -бirationальна $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times E$. Остается показать, что группа бирациональных автоморфизмов вещественной алгебраической поверхности X , такой что $X_{\mathbb{C}}$ является \mathbb{C} -линейчатой над эллиптической кривой, жорданова. Пусть $G \subset \mathrm{Bir}(X)$ — конечная группа. Регуляризуем ее действие на некоторой поверхности Y . По лемме 3.1.2, мы можем считать, что Y обладает \mathbb{R} -линейчатой структурой над вещественной эллиптической кривой B . Условие $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ влечет $B(\mathbb{R}) \neq \emptyset$.

Запишем короткую точную последовательность (3.1) для G . Тогда $G_F \subset \mathrm{Aut}(F_{\mathbb{C}}) \cong \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}(B))$, поэтому G_F содержит циклическую характеристическую подгруппу G'_F индекса не более 60 (значение 60 соответствует простой группе \mathfrak{A}_5). Пусть h — порождающий элемент G'_F . Группа G_B является подгруппой $\mathrm{Aut}_{\mathbb{R}}(B) \cong B(\mathbb{R}) \rtimes H$, где $|H| \leq 6$. Поскольку $B(\mathbb{R}) \cong \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \times (\mathbb{Z}/2)^k$, $k = 0, 1$, группа G_B содержит циклическую подгруппу G'_B индекса не выше 12.

Возьмем теперь $g \in G$ таким, что $\langle \varphi(g) \rangle = G'_B$. Поскольку подгруппа G'_F нормальна в G , она нормализуется элементом g . Значит, по лемме 3.1.3, либо $ghg^{-1} = h$, либо $ghg^{-1} = h^{-1}$. В обоих случаях g^2 коммутирует с h , поэтому группа $\langle g^2, h \rangle$ абелева. Имеем цепочку включений

$$\langle g^2, h \rangle \subset \langle g, h \rangle \subset (G_F) \bullet \langle \varphi(g) \rangle \subset G.$$

Следовательно, индекс $\langle g^2, h \rangle$ в G не превосходит $2 \cdot 60 \cdot 12 = 1440$. \square

3.2. Случай алгебраически замкнутого поля

В этом параграфе \mathbb{k} обозначает произвольное алгебраически замкнутое поле характеристики нуль.

Предложение 3.2.1. Пусть X — гладкая \mathbb{k} -рациональная поверхность со структурой расслоения на коники $\pi : X \rightarrow B \cong \mathbb{P}^1$. Тогда

$$J(\mathrm{Aut}(X, \pi)) \leq 7200.$$

Доказательство. Пусть $G \subset \text{Aut}(X, \pi)$ — конечная группа. Требуется найти абелеву нормальную подгруппу $A \subset G$, такую что $[G : A] \leq 7200$. В дальнейшем мы будем называть группы \mathfrak{A}_4 , \mathfrak{S}_4 и \mathfrak{A}_5 «исключительными». Имеются следующие возможности для G_F и G_B :

(i) Группы G_F и G_B исключительные. Тогда $|G| = |G_F| \cdot |G_B| \leq |\mathfrak{A}_5|^2 = 3600$.

(ii) Группа G_B исключительная, а G_F — либо \mathbb{Z}/n , либо D_n , $n \geq 2$. Возьмем $A = G_F$ (если $G_F \cong \mathbb{Z}/n$ или $G_F \cong D_2$) или $A = C_n \subset D_n$ (если $G_F \cong D_n$; здесь и далее C_n обозначает характеристическую циклическую подгруппу индекса 2 в группе D_n , $n \geq 3$). Тогда $[G : A] \leq 2 \cdot 60 = 120$ (напомним, что C_n — характеристическая подгруппа D_n , поэтому она нормальна в G).

(iii) Группа G_F исключительная, а G_B — либо \mathbb{Z}/n , либо D_n , $n \geq 2$. Возьмем $g \in G$, такое что $\varphi(g)$ порождает циклическую подгруппу $G'_B \subset G_B$ с $[G_B : G'_B] \leq 2$. Имеем включения

$$\langle g \rangle \subset (G_F) \bullet \langle \varphi(g) \rangle \subset G.$$

Поскольку группа $\langle g \rangle$ имеет индекс не больше 60 в $(G_F) \bullet \langle \varphi(g) \rangle$, последняя группа содержит характеристическую абелеву подгруппу A индекса не больше 3600 (см. теорему 2.6.6). Поскольку группа $(G_F) \bullet \langle \varphi(g) \rangle$ имеет индекс не больше 2 в G , группа A нормальна и имеет индекс не больше 7200 в G .

(iv) Обе группы G_F и G_B либо циклические, либо диэдральные. Предположим сначала, что G_F не изоморфна $D_2 \cong (\mathbb{Z}/2)^2$. Тогда G_F содержит циклическую характеристическую подгруппу $G'_F = \langle h \rangle$ индекса не больше 2. Аналогично, G_B содержит циклическую подгруппу G'_B индекса не больше 2. Возьмем $g \in G$, такое что $\langle \varphi(g) \rangle = G'_B$. Поскольку G'_F нормальна в G , она нормализуется элементом g . Значит, по лемме 3.1.3, либо $ghg^{-1} = h$, либо $ghg^{-1} = h^{-1}$. В обоих случаях g^2 коммутирует с h , поэтому группа $\langle g^2, h \rangle$ абелева. Имеем включения

$$\langle g^2, h \rangle \subset \langle g, h \rangle \subset (G_F) \bullet \langle \varphi(g) \rangle \subset G$$

Индекс $\langle g^2, h \rangle$ в $(G_F) \bullet \langle \varphi(g) \rangle$ не превосходит 4. По теореме 2.6.6, последняя группа содержит абелеву характеристическую подгруппу A индекса не больше 16. Поскольку $(G_F) \bullet \langle \varphi(g) \rangle$ имеет индекс не больше 2 в группе G , группа A нормальна в G и имеет индекс не превосходящий 32.

Наконец, рассмотрим случай $G_F \cong D_2 \cong (\mathbb{Z}/2)^2$ и $G_B \cong \mathbb{Z}/n$ или D_n , $n \geq 2$. Возьмем $g \in G$, таким что $\varphi(g)$ порождает G'_B с $[G_B : G'_B] \leq 2$. Имеем включения

$$\langle g \rangle \subset (G_F) \bullet \langle \varphi(g) \rangle \subset G,$$

поэтому в $(G_F) \bullet \langle \varphi(g) \rangle$ существует абелева характеристическая подгруппа индекса не более чем 16. Поскольку группа $(G_F) \bullet \langle \varphi(g) \rangle$ имеет индекс не более двух в G , группа A нормальна и индекса не более 32 в G . \square

Перейдем теперь к изучению поверхностей дель Пеццо.

Предложение 3.2.2. Пусть X — поверхность дель Пеццо над \mathbb{k} . Тогда

$$J(\text{Aut}(X)) \leq 7200.$$

Если X не изоморфна $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, то $J(\text{Aut}(X)) \leq 360$.

Доказательство. Будем рассматривать каждое значение $d = K_X^2$ отдельно.

$d = 9$ Тогда $X \cong \mathbb{P}^2$ и $J(\text{Aut}(X)) \leq 360$ по лемме 2.6.5 (4).

$d = 8$ Если X — раздутие $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^2$ в одной точке, то π является $\text{Aut}(X)$ -эquivариантным, поэтому $J(\text{Aut}(X)) \leq 360$, согласно случаю $d = 9$. Пусть $X \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Тогда

$$\text{Aut}(X) \cong (\text{PGL}_2(\mathbb{k}) \times \text{PGL}_2(\mathbb{k})) \rtimes \mathbb{Z}/2.$$

Пусть $G \subset \text{Aut}(X)$ — конечная группа и G_0 — ее пересечение с $\text{PGL}_2(\mathbb{k}) \times \text{PGL}_2(\mathbb{k})$. Мы будем предполагать, что $G_0 \neq 1$ (иначе $G \cong \mathbb{Z}/2$ и утверждение очевидно). Предположим сначала, что $G \neq G_0$. Тогда G_0 — нормальная подгруппа G индекса 2. Обозначим

$$\pi_i : \text{PGL}_2(\mathbb{k}) \times \text{PGL}_2(\mathbb{k}) \rightarrow \text{PGL}_2(\mathbb{k}), \quad i = 1, 2,$$

проекцию на i -й сомножитель. Тогда $G_0 \subseteq \pi_1(G_0) \times \pi_2(G_0)$. Поскольку $\mathbb{Z}/2$ действует на $\text{PGL}_2(\mathbb{k}) \times \text{PGL}_2(\mathbb{k})$ перестановкой сомножителей,

$\pi_1(G_0) \cong \pi_2(G_0) \cong H$, где H — одна из следующих групп: \mathbb{Z}/n , D_n , \mathfrak{A}_4 , \mathfrak{S}_4 , \mathfrak{A}_5 . В последних трех случаях имеем $|G| = 2|G_0| \leq 2|\mathfrak{A}_5|^2 = 7200$. Если $H \cong \mathbb{Z}/n$, то возьмем G_0 как нормальную абелеву подгруппу G индекса 2. Наконец, если $H \cong D_n$, то, пересекая G_0 с $C_n \times C_n \subset D_n \times D_n$, мы получаем абелеву подгруппу $G'_0 \subset G_0$ индекса не больше 4. Значит, G_0 содержит характеристическую абелеву подгруппу индекса не больше 16 (см. теорему 2.6.6), которая нормальна в G и имеет индекс не более 32 в ней.

Если $G = G_0$, то мы можем либо применить Предложение 3.2.1 (поскольку $G = G_0$ сохраняет структуру расслоения на коники), либо использовать те же аргументы, что и выше (здесь мы не можем утверждать, что $\pi_1(G) \cong \pi_2(G)$, но это не так важно).

$d = 7$ Пусть X — раздутие $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^2$ в двух точках. Тогда π является $\text{Aut}(X)$ -эquivариантным. Следовательно, $J(\text{Aut}(X)) \leq 360$.

$d = 6$ Тогда X изоморфна поверхности, полученной раздутием $\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^2$ в трех неколлинеарных точках p_1, p_2, p_3 . Множество (-1) -кривых на X состоит из шести кривых, образующих шестиугольник прямых Σ при антиканоническом вложении $X \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{k}}^6$. Поскольку $\text{Aut}(X) \cong (\mathbb{k}^*)^2 \rtimes D_6$, имеем $J(\text{Aut}(X)) \leq |D_6| = 12$.

$d = 5$ Тогда $\text{Aut}(X) \cong \mathfrak{S}_5$, поэтому $J(\text{Aut}(X)) = 120$.

$d = 4$ Тогда $\text{Aut}(X) \cong (\mathbb{Z}/2)^4 \rtimes \Gamma$, где $|\Gamma| \leq 10$, см. [12, Theorem 8.6.8]. Значит $J(\text{Aut}(X)) \leq 10$.

$d = 3$ Тогда либо $|\text{Aut}(X)| \leq 120$, либо $\text{Aut}(X) \cong (\mathbb{Z}/3)^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$ (и X — кубика Ферма), см. [12, Theorem 9.5.8]. Но в последнем случае $J(\text{Aut}(X)) \leq 24$.

$d = 2$ Напомним, что антиканоническое отображение $\psi_{|-K_X|} : X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{k}}^2$ является двойным накрытием, разветвленным вдоль гладкой кватрики $B \subset \mathbb{P}_{\mathbb{k}}^2$. Хорошо известно, что $\text{Aut}(X) \cong \text{Aut}(B) \times \langle \gamma \rangle$, где γ — инволюция Гейзера (то есть инволюция Галуа двойного накрытия). По теореме Гурвица, $|\text{Aut}(B)| \leq 84(g(B) - 1) = 168$, поэтому $J(\text{Aut}(X)) \leq |\text{Aut}(X)| = 336$.

$d = 1$ Линейная система $|-K_X|$ есть эллиптический пучок, чье базисное множество состоит из одной точки p . Эта точка неподвижна относительно $\text{Aut}(X)$, поэтому имеется точное представление

$$\text{Aut}(X) \hookrightarrow \text{GL}(T_p X) \cong \text{GL}_2(\mathbb{C}).$$

Значит, $J(\text{Aut}(X)) \leq J(\text{GL}_2(\mathbb{C})) = 60$ по лемме 2.6.5 (1). □

Следствие 3.2.3. Пусть X — гладкая рациональная поверхность над \mathbb{k} . Тогда $J(\text{Aut}(X)) \leq 7200$.

Доказательство. Пусть $G \subset \text{Aut}(X)$ — конечная подгруппа. Применив G -программу минимальных моделей к X , можем считать, что X — либо поверхность дель Педро, либо рациональная поверхность со структурой G -эквивариантного расслоения на коники. Осталось применить предложения 3.2.2 и 3.2.1. □

Следствие 3.2.4. Имеем $J(\text{Cr}_2(\mathbb{k})) = 7200$.

Доказательство. Пусть $G \subset \text{Cr}_2(\mathbb{k})$ — конечная подгруппа. Регуляризуя ее действие, можем считать, что G действует бирегулярно на гладкой \mathbb{k} -рациональной поверхности. Значит, оценка $J(\text{Cr}_2(\mathbb{k})) \leq 7200$ вытекает из следствия 3.2.3. Эта оценка точна и достигается для группы $G = (\mathfrak{A}_5 \times \mathfrak{A}_5) \rtimes \mathbb{Z}/2$, действующей на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Действительно, если A нормальна в G , то группа $A \cap (\mathfrak{A}_5 \times \mathfrak{A}_5)$ нормальна в $\mathfrak{A}_5 \times \mathfrak{A}_5$. Но любая нормальная подгруппа в произведении двух простых неабелевых групп H и K суть одна из групп $1_H \times 1_K$, $1_H \times K$, $H \times 1_K$, $H \times K$. Если A при этом абелева, она обязана быть тривиальной. □

3.3. Случай полей вещественных и рациональных чисел

Предложение 3.3.1. Пусть X — гладкая \mathbb{R} -рациональная поверхность со структурой расслоения на коники $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$. Тогда

$$J(\text{Aut}(X, \pi)) \leq 32, \quad \bar{J}(\text{Aut}(X, \pi)) \leq 8.$$

Доказательство. Пусть $G \subset \text{Aut}(X, \pi)$ — конечная группа. Алгебраически замкнув базовое поле, будем действовать так же, как в доказательстве предложения 3.2.1. Заметим, что G_F и G_B не могут быть “исключительными” группами по лемме 2.6.5 (1), поэтому нам остается рассмотреть только случай (iv) из предложения 3.2.1. Поскольку абелева группа $\langle g^2, h \rangle$ (или $\langle g \rangle$, где $G_F \cong D_2$) имеет индекс не более 8 в G , мы получаем желаемую оценку на слабую константу Жордана. \square

Перейдем теперь к изучению вещественных поверхностей дель Пеццо. Для полноты изложения, мы также вычислим слабые константы Жордана для их групп автоморфизмов. Заметим, что над алгебраически замкнутым полем \mathbb{k} характеристики нуль имеем $\bar{J}(\text{Aut } X) \leq 288$ для каждой поверхности дель Пеццо X над \mathbb{k} , см. [28, Corollary 3.2.5].

Предложение 3.3.2. *Пусть X — гладкая \mathbb{R} -рациональная поверхность дель Пеццо. Тогда*

$$J(\text{Aut}(X)) \leq 120, \quad \bar{J}(\text{Aut}(X)) \leq 20.$$

Доказательство. Снова будем рассматривать каждое значение $d = K_X^2$ отдельно. Поскольку $J(\text{Aut}(X)) \leq J(\text{Aut}(X_{\mathbb{C}}))$, в большинстве случаев будет достаточно получить более точную оценку для $J(\text{Aut}(X_{\mathbb{C}}))$, чем в предложении 3.2.2.

$d = 9$ Тогда $X \cong \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ и $J(\text{Aut}(X)) = |\mathfrak{A}_5| = 60$ по лемме 2.6.5 (2). Ясно, что $\bar{J}(\text{Aut}(X)) = 12$.

$d = 8$ Если X — раздутие $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^2$ в одной точке, то любая конечная подгруппа $G \subset \text{Aut}(X)$ сохраняет исключительный дивизор π , изоморфный $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$, и утверждение следует из леммы 2.6.5. Предположим, что $X_{\mathbb{C}} \cong \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. Тогда либо $X \cong Q_{3,1}$, либо $X \cong Q_{2,2}$. В первом случае $\text{Aut}(X) \cong \text{PO}(3, 1)$, и классификация конечных подгрупп $\text{O}(3, 1)$, приведенная в [22], показывает, что любая конечная подгруппа $G \subset \text{PO}(3, 1)$ содержит нормальную абелеву подгруппу индекса не более 60 и абелеву (необязательно нормальную) подгруппу индекса не более 12.

Если $X \cong Q_{2,2} \cong \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$, то

$$\text{Aut}(X) \cong (\text{PGL}_2(\mathbb{R}) \times \text{PGL}_2(\mathbb{R})) \rtimes \mathbb{Z}/2,$$

и утверждение следует из леммы 2.6.5 (1) и тех же аргументов, что и предложении 3.2.2 (случай $d = 8$).

$d = 7$ Тогда X — раздутие $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^2$ в двух точках. На X при этом всегда имеется пара непересекающихся (-1) -кривых, определенная над \mathbb{R} и инвариантная относительно $\text{Aut}(X)$, поэтому утверждение следует из предложения 2.6.1.

$d = 6$ Имеем $\bar{J}(\text{Aut}(X)) \leq J(\text{Aut}(X)) \leq J(\text{Aut}(X_{\mathbb{C}})) \leq |D_6| = 12$.

$d = 5$ Тогда $\text{Aut}(X_{\mathbb{C}}) \cong \mathfrak{S}_5$, так что $J(\text{Aut}(X)) \leq 120$ и $\bar{J}(\text{Aut}(X)) \leq 20$. Заметим, что существует вещественная поверхность дель Пеццо X степени 5 с $\text{Aut}(X) \cong \mathfrak{S}_5$ (она получается раздутием $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ в четырех вещественных точках общего положения). Значит, обе оценки точны.

$d = 4$ Как уже отмечалось, $\text{Aut}(X_{\mathbb{C}}) \cong (\mathbb{Z}/2)^4 \rtimes \Gamma$, где $|\Gamma| \leq 10$. Следовательно,

$$\bar{J}(\text{Aut}(X)) \leq J(\text{Aut}(X)) \leq J(\text{Aut}(X_{\mathbb{C}})) \leq |\Gamma| \leq 10.$$

$d = 3$ С этого момента мы будем стараться получить как можно более точные оценки для $J(\text{Aut}(X))$. Они понадобятся нам в дальнейшем при доказательстве теоремы 3.4.1. Для группы $\text{Aut}(X_{\mathbb{C}})$ имеются следующие возможности (см. [12, Theorem 9.5.8]):

- $|\text{Aut}(X_{\mathbb{C}})| = 648$, $\text{Aut}(X_{\mathbb{C}}) \cong (\mathbb{Z}/3)^3 \rtimes \mathfrak{S}_4$ и $X_{\mathbb{C}}$ — кубика Ферма

$$\{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] : x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0\} \subset \mathbb{P}^3.$$

Следовательно, $J(\text{Aut}(X)) \leq |\mathfrak{S}_4| = 24$. Заметим, что $\text{Aut}(X) \cap (\mathbb{Z}/3)^3 \cong (\mathbb{Z}/3)^\ell$, где $\ell = 1, 2$, поскольку $\text{PGL}_4(\mathbb{R})$ не содержит $(\mathbb{Z}/3)^3$ (см., например, [1, предложение 2.17]). Поскольку каждое представление $\mathfrak{S}_4 \rightarrow \text{GL}_\ell(\mathbb{F}_3)$ имеет нетривиальное ядро, $\text{Aut}(X)$ содержит абелеву подгруппу индекса не больше 12. Мы заключаем, что $\bar{J}(\text{Aut}(X)) \leq 12$.

- $|\text{Aut}(X_{\mathbb{C}})| = 120$ и $\text{Aut}(X_{\mathbb{C}}) \cong \mathfrak{S}_5$. Тогда $J(\text{Aut}(X)) \leq J(\mathfrak{S}_5) = 120$ и $\bar{J}(\text{Aut}(X)) \leq 20$.
- $|\text{Aut}(X_{\mathbb{C}})| = 108$ и $\text{Aut}(X_{\mathbb{C}}) \cong \mathcal{H}_3(3) \rtimes \mathbb{Z}/4$, где $\mathcal{H}_3(3)$ обозначает группу Гейзенберга унипотентных 3×3 -матриц над полем

\mathbb{F}_3 . Эта группа имеет порядок 27, поэтому ее центр нетривиален и является нормальной подгруппой $\text{Aut}(X_{\mathbb{C}})$. Следовательно, $J(\text{Aut}(X)) \leq 108/3 = 36$. С другой стороны, $\mathcal{H}_3(3)$ содержит абелеву подгруппу индекса 3, поэтому $\bar{J}(\text{Aut}(X)) \leq 12$.

- $|\text{Aut}(X_{\mathbb{C}})| = 54$ и $\text{Aut}(X_{\mathbb{C}}) \cong \mathcal{H}_3(3) \rtimes \mathbb{Z}/2$. Аналогично, $\bar{J}(\text{Aut}(X)) \leq 6$.
- $|\text{Aut}(X_{\mathbb{C}})| \leq 24$. Тогда каждая нетривиальная циклическая подгруппа $\text{Aut}(X)$ имеет индекс не больше 12.

$d = 2$ Как и в доказательстве предложения 3.2.2, имеем $\text{Aut}(X) \cong \text{Aut}(B) \times \langle \gamma \rangle$, где γ — инволюция Гейзера и B — вещественная плоская кватерника. Поскольку $\text{Aut}(B) \subset \text{PGL}_3(\mathbb{R})$ — конечная группа, мы можем применить лемму 2.6.1. А именно, если $\text{Aut}(B)$ является исключительной, возьмем $A = \langle \gamma \rangle$ в качестве искомой абелевой подгруппы. Если $\text{Aut}(B) \cong \mathbb{Z}/n$, возьмем $A = \text{Aut}(X)$. Если $\text{Aut}(B) \cong D_n$, возьмем $A = C_n \times \langle \gamma \rangle$. Во всех случаях $J(\text{Aut}(X)) \leq 60$ и $\bar{J}(\text{Aut}(X)) \leq 12$.

$d = 1$ Поскольку единственная базисная точка p линейной системы $| -K_X |$ должна быть вещественной, имеем точное представление

$$\text{Aut}(X) \rightarrow \text{GL}(T_p X) \cong \text{GL}_2(\mathbb{R}).$$

Значит, группа $\text{Aut}(X)$ либо циклическая, либо диэдральная и $J(\text{Aut}(X)) \leq 2$.

□

Следствие 3.3.3. *Имеем*

$$J(\text{Cr}_2(\mathbb{R})) = 120, \quad \bar{J}(\text{Cr}_2(\mathbb{R})) = 20.$$

Доказательство. Пусть $G \subset \text{Cr}_2(\mathbb{R})$ — конечная подгруппа. Регуляризуя ее действие на некоторой \mathbb{R} -рациональной поверхности и применяя G -программу минимальных моделей, можем считать, что G действует бигулярно на гладкой \mathbb{R} -рациональной поверхности, которая является либо поверхностью дель Пеццо, либо G -эквивариантным расслоением на коники. По предложениям 3.3.1 и 3.3.2, получаем $J(\text{Cr}_2(\mathbb{R})) \leq 120$ и $\bar{J}(\text{Cr}_2(\mathbb{R})) = 20$.

Равенства достигаются для группы \mathfrak{S}_5 , которая реализуется как группа автоморфизмов поверхности дель Педро степени 5, полученной раздутием $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ в четырех вещественных точках общего положения. \square

Следствие 3.3.4. *Имеем*

$$J(\mathrm{Cr}_2(\mathbb{Q})) = 120, \quad \bar{J}(\mathrm{Cr}_2(\mathbb{Q})) = 20.$$

Доказательство. Очевидно, $J(\mathrm{Cr}_2(\mathbb{Q})) \leq J(\mathrm{Cr}_2(\mathbb{R}))$, $\bar{J}(\mathrm{Cr}_2(\mathbb{Q})) \leq \bar{J}(\mathrm{Cr}_2(\mathbb{R}))$. Остается заметить, что группа \mathfrak{S}_5 может быть реализована как группа автоморфизмов поверхности дель Педро степени 5 над \mathbb{Q} . \square

3.4. Группы бирациональных диффеоморфизмов

Понятие бирационального диффеоморфизма было введено нами в разделе 2.5. Напомним, что для гладкой вещественной алгебраической поверхности X группой бирациональных диффеоморфизмов ее вещественного локуса $X(\mathbb{R})$ называется группа

$$\mathrm{Aut}(X(\mathbb{R})) = \{f \in \mathrm{Bir}(X) : \text{точки неопределенности } f \text{ — чисто мнимые}\}.$$

В этом параграфе мы вычисляем константы Жордана для групп бирациональных диффеоморфизмов двумерной сферы и проективной плоскости.

Теорема 3.4.1. *Имеем*

$$\begin{aligned} J(\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}))) &= 60, & \bar{J}(\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}))) &= 12, \\ J(\mathrm{Aut}(Q_{3,1}(\mathbb{R}))) &= 60, & \bar{J}(\mathrm{Aut}(Q_{3,1}(\mathbb{R}))) &= 12. \end{aligned}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную конечную подгруппу $G \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}))$ и регуляризуем ее действие на некоторой гладкой \mathbb{R} -рациональной поверхности X . Как и выше, мы можем предполагать, что X минимальна относительно действия G и является либо поверхностью дель Педро, либо обладает структурой G -эквивариантного расслоения на коники. Более того, поскольку $X(\mathbb{R})$ должно быть диффеоморфно $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$, мы можем предполагать, что поверхность X изоморфна раздутию $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ в k парах комплексно-сопряженных точек, где $k = 0, \dots, 4$ и $d = K_X^2 = 9 - 2k$. Из

доказательства предложения 3.3.2 легко получается оценки $J(\text{Aut}(X)) \leq 60$ и $\bar{J}(\text{Aut}(X)) \leq 12$ во всех случаях, кроме $d = k = 3$, $\text{Aut}(X_{\mathbb{C}}) \cong \mathfrak{S}_5$, и $d = 5$, $k = 2$, $\text{Aut}(X_{\mathbb{C}}) \cong \mathfrak{S}_5$. Чтобы доказать равенства $J(\text{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}))) = 60$ и $\bar{J}(\text{Aut}(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}))) = 12$, достаточно проверить, что \mathfrak{S}_5 не реализуется как группа автоморфизмов таких вещественных поверхностей.

Если $d = 5$, то \mathfrak{S}_5 — группа автоморфизмов графа (-1) -кривых на $X_{\mathbb{C}}$ (графа Петерсена). В нашем случае на X имеется всего 2 вещественные прямые, поэтому группа $\text{Aut}(X)$ не может быть изоморфна \mathfrak{S}_5 .

Пусть $d = k = 3$, $\text{Aut}(X) \cong \mathfrak{S}_5$ и пусть $\tau \in \text{Aut}(X) \subset \text{PGL}_4(\mathbb{R})$ — автоморфизм порядка 5. Легко видеть, что на X имеется ровно 3 вещественные прямые ℓ_1 , ℓ_2 и ℓ_3 , образующие либо «треугольник», либо пересекающиеся в единственной точке Экарда. Значит, τ сохраняет каждую прямую ℓ_i . Без ограничения общности можно считать, что τ фиксирует точку $p = \ell_1 \cap \ell_2$. Ограничивая τ на ℓ_1 , получаем автоморфизм τ' прямой $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ с вещественной неподвижной точкой. Значит, либо τ' имеет порядок 2, что невозможно, либо τ сохраняет ℓ_1 поточечно. В последнем случае τ также поточечно фиксирует ℓ_2 , поэтому τ поточечно фиксирует плоскость в $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$, натянутую на ℓ_1 и ℓ_2 . Следовательно, τ является отражением, противоречие.

Аналогично, если задана конечная подгруппа $G \subset \text{Aut}(Q_{3,1}(\mathbb{R}))$, можно предполагать, что G действует бирегулярно либо на гладком \mathbb{R} -рациональном расслоении на коники X , либо на \mathbb{R} -рациональной поверхности дель Пеццо X . В первом случае мы можем применить предложение 3.3.1. Во втором случае из условия $X(\mathbb{R}) \approx \mathbb{S}^2$ вытекает, что значение K_X^2 должно быть равным 8, 6, 4, или 2. Из доказательства предложения 3.3.2 мы видим, что $J(\text{Aut}(X)) \leq 60$ и $\bar{J}(\text{Aut}(X)) \leq 12$ в этих случаях. Как обычно, равенство достигается для группы \mathfrak{A}_5 , действующей на $Q_{3,1}$.

□

Автоморфизмы вещественных поверхностей дель Пеццо

В этой главе мы изучаем группы автоморфизмов вещественных поверхностей дель Пеццо. На протяжении всей главы мы будем предполагать, что *множество вещественных точек такой поверхности непусто*, но \mathbb{R} -рациональность в каждом случае будет оговариваться отдельно. Во многих случаях нам удастся полностью классифицировать действия всех конечных групп на таких поверхностях, в том числе и минимальные. В иных случаях мы ограничиваемся некоторыми классами конечных групп.

Хотя доказываемая ниже теорема 4.0.3 не будет использоваться в дальнейшем, нам представляется интересным, что для вещественных поверхностей дель Пеццо естественное ограничение на порядок группы $\text{Aut}(X)$ может быть получено способом, не связанным с вложением $\text{Aut}(X_{\mathbb{C}})$ в соответствующую группу Вейля (см. параграф 2.2.1). Для простоты ограничимся случаем \mathbb{R} -рациональных поверхностей.

Предложение 4.0.1 ([18]). *Пусть X — \mathbb{R} -рациональная поверхность дель Пеццо. Тогда топологическая поверхность $X(\mathbb{R})$ диффеоморфна одной из следующих:*

1. \mathbb{S}^2 , если $X \cong Q_{3,1}(0, 2b)$;
2. \mathbb{T}^2 , если $X \cong Q_{2,2}(0, 2b)$;
3. $N_g = \#_g \mathbb{R}P^2$, если $X \cong P_{\mathbb{R}}^2(a, 2b)$, где $g = a + 1$ и $1 \leq g \leq 9$.

Нам также понадобятся некоторые топологические результаты о действии конечных групп на C^∞ -многообразиях.

Предложение 4.0.2 ([6, Corollary 9.4]). *Если G — группа Ли (не обязательно связная), действующая на неориентируемом компактном C^∞ -многообразии M , то действие G единственным образом поднимается до действия на ориентирующем накрытии $\widetilde{M} \rightarrow M$ сохраняющими ориентацию гомеоморфизмами.*

Теперь мы можем описать конечные группы, действующие на вещественных поверхностях дель Пецо. Для большинства поверхностей, доминирующих $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, мы получаем явную оценку на порядок группы в терминах $d = K_X^2$. Для остальных поверхностей мы указываем структуру группы автоморфизмов.

Теорема 4.0.3. *Пусть X — \mathbb{R} -рациональная поверхность дель Пецо и $G \subset \text{Aut}(X)$ — конечная группа. Тогда справедливо следующее.*

1. Если $X \cong \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2(a, 2b)$, то

$$|G| \leq 84(8 - d)$$

при $a \geq 2$. При $a = 0$ группа G изоморфна одной из групп

$$\mathbb{Z}/n, D_n, \mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}_4, \mathfrak{A}_5. \quad (4.1)$$

При $a = 1$ группа G изоморфна $(n \times m) \bullet k$, где $k \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

2. Если $X \cong Q_{3,1}(0, 2b)$, то G изоморфна группе $H \bullet 2^r$, где $r \in \{0, 1\}$ и H — группа из списка (4.1).

3. Если $X \cong Q_{2,2}(0, 2b)$, то

$$G \cong ((n \times m) \bullet k) \bullet 2^r,$$

где $r \in \{0, 1\}$, $k \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

Доказательство. Мы можем считать, что $G \subset \text{Diff}(X(\mathbb{R}))$.

Пусть $X \cong \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2(a, 2b)$. Тогда $X(\mathbb{R}) \approx N_{a+1}$. Ориентирующее накрытие N_{a+1} — это сфера с a ручками, которую мы обозначим Σ_a . По предложению 4.0.2, можно считать, что G точно действует на Σ_a сохраняющими ориентацию диффеоморфизмами. Возьмем произвольную риманову метрику на Σ_a и усредним ее относительно действия G . Полученная G -инвариантная метрика определяет комплексную G -инвариантную структуру на Σ_a , при которой G можно рассматривать как группу автоморфизмов римановой поверхности рода a . Значит, при $a = 0$ группа G вкладывается в $\text{Aut}(\Sigma_0) \cong \text{PSL}_2(\mathbb{C})$ и является либо циклической, либо диэдральной, либо одной из групп $\mathfrak{A}_4, \mathfrak{S}_4, \mathfrak{A}_5$.

При $a = 1$ утверждение вытекает из хорошо известной классификации групп автоморфизмов эллиптических кривых.

Наконец, при $a \geq 2$, по теореме Гурвица,

$$|G| \leq 84(a - 1). \quad (4.2)$$

Поскольку $a + 2b = 9 - d$, из (4.2) вытекает неравенство

$$|G| \leq 84(8 - d). \quad (4.3)$$

Пусть $X \cong Q_{3,1}(0, 2b)$ или $X \cong Q_{2,2}(0, 2b)$. Тогда G точно действует диффеоморфизмами $X(\mathbb{R}) \approx \mathbb{S}^2$. Переходя (при необходимости) к подгруппе $G' \subset G$ индекса 2, мы можем считать, что G' действует, сохраняя ориентацию. Применяя к G' те же рассуждения, что и выше, получаем требуемый результат¹. \square

4.1. Поверхности дель Педро степени 9

Пусть X — вещественная поверхность дель Педро степени 9. Это означает, что $X_{\mathbb{C}} \cong \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, то есть X — многообразие Севери-Брауэра. Хорошо известно, что проективные пространства четной размерности не имеют нетривиальных (\mathbb{C}/\mathbb{R}) -форм, поэтому $X \cong \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ и $\text{Aut}(X) \cong \text{PGL}_3(\mathbb{R})$. Конечные подгруппы в этой группе описаны в предложении 2.6.1.

4.2. Поверхности дель Педро степени 8

В этом параграфе X обозначает вещественную поверхность дель Педро степени 8. Это означает, что либо X изоморфна поверхности $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2(1, 0)$, либо является (\mathbb{C}/\mathbb{R}) -формой поверхности $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. Заметим, что поверхность $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2(1, 0)$ не является G -минимальной ни для какой группы $G \subset \text{Aut}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2(1, 0))$, поскольку единственная (-1) -кривая на этой поверхности определена над \mathbb{R} и G -инвариантна, то есть может быть эквивариантно стянута.

Значит, мы можем предполагать, что $X_{\mathbb{C}} \cong \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. В этом разделе мы будем также всюду предполагать наличие вещественной точки на поверхно-

¹Отметим, что известная теорема Брауэра, Керекжарто (Kerekjarto) и Эйленберга утверждает, что действие конечной группы на двумерной сфере всегда эквивалентно линейному, а потому G изоморфна подгруппе $O_3(\mathbb{R})$ [43].

сти, то есть $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$. В этом случае X изоморфна либо $Q_{3,1}$, либо $Q_{2,2}$. Мы рассмотрим эти случаи отдельно.

4.2.1. Случай $X \cong Q_{3,1}$

По определению, $\text{Aut}(X) = \text{PO}(3, 1)$ в этом случае, где

$$\text{PO}(3, 1) = \text{O}(3, 1) / \langle \pm I_4 \rangle,$$

Поскольку $\rho(X) = 1$, любая группа $G \subset \text{PO}(3, 1)$ действует минимально на X . Несложно выписать порождающие конечных подгрупп $\text{PO}(3, 1)$, используя явное описание конечных подгрупп группы Лоренца $\text{O}(3, 1)$, данное в [22]. Мы не будем здесь приводить этот список целиком в силу его громоздкости, но опишем общий подход. Положим $I_1 = \text{diag}\{1, 1, 1, -1\}$ и рассмотрим группу

$$\tilde{\text{O}}_3(\mathbb{R}) = \{g \oplus 1 : g \in \text{O}_3(\mathbb{R})\} \cong \text{O}_3(\mathbb{R}).$$

Для двух групп G_1 и G_2 будем обозначать через $G_1 \Delta_D G_2$ их диагональное произведение по их общему гомоморфному образу D , то есть группу

$$\{(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2 : \alpha(g_1) = \beta(g_2)\},$$

где $\alpha : G_1 \rightarrow D$ и $\beta : G_2 \rightarrow D$ — некоторые эпиморфизмы. Напомним следующий классический результат из теории групп.

Лемма 4.2.1 (лемма Гурса). *Пусть G — конечная подгруппа в прямом произведении $A \times B$ групп A и B . Пусть $p_1 : A \times B \rightarrow A$, $p_2 : A \times B \rightarrow B$ — гомоморфизмы проекций. Пусть $G_i = p_i(G)$, $H_i = \text{Ker}(p_j|_G)$, $i \neq j$. Тогда H_i — нормальная подгруппа в G_i . отображение $\varphi : G_1/H_1 \rightarrow G_2/H_2$, определенное как $\varphi(aH_1) = p_2(a)H_2$, является изоморфизмом и*

$$G = G_1 \Delta_D G_2,$$

где $D = G_1/H_1$, $\alpha : G_1 \rightarrow D$ — отображение факторизации, а β — композиция факторизации $G_2 \rightarrow G_2/H_2$ и φ^{-1} .

Отметим два важных частных случая этой леммы:

$$G_1 \Delta_{\text{id}} G_2 = G_1 \times G_2, \quad G_1 \Delta_{G_2} G_2 = \{(g_1, \alpha(g_1)) : g_1 \in G_1\}, \quad (4.4)$$

где в последнем случае $\alpha : G_1 \rightarrow G_2$ — эпиморфизм и $\beta = \text{id}$. Конечные подгруппы $O(3, 1)$ принадлежат одному из следующих классов:

(i) подгруппы $\tilde{O}_3(\mathbb{R})$;

Подгруппы прямого произведения $\tilde{O}_3(\mathbb{R}) \times \langle I_1 \rangle$. Согласно (4.4), они имеют следующий вид:

(ii) группы вида $G \times \langle I_1 \rangle$, где $G \subset \tilde{O}_3(\mathbb{R})$ — группа из списка (i);

(iii) группы вида

$$\{(g, \alpha(g)) : g \in \tilde{O}_3(\mathbb{R})\}$$

для некоторого эпиморфизма $\alpha : \tilde{O}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \langle I_1 \rangle$.

В частности, легко видеть, что любая конечная подгруппа $PO(3, 1)$ изоморфна подгруппе в $O_3(\mathbb{R})$, то есть группе вида $H \cdot 2^k$, где $k \in \{0, 1\}$ и H — либо циклическая, либо диэдральная, либо одна из исключительных групп \mathfrak{A}_4 , \mathfrak{S}_4 , \mathfrak{A}_5 . Используя классификацию элементарных линков между расслоениями Мори, полученную в [50], несложно показать, что большинство этих групп не линеаризуются. Мы рассмотрим простой пример линеаризации.

Пример 4.2.2. Пусть $X \cong Q_{3,1}$ и $G \subset \text{Aut}(X)$ — подгруппа нечетного порядка. Тогда эта группа является циклической и линеаризуема. Действительно, цикличность G очевидна из описания конечных подгрупп $PO(3, 1)$, приведенного выше (это также можно получить апостериорным способом, как было сделано в [1, Proposition 4.7]). Пусть $G = \langle g \rangle$. Применив теорему Лефшеца о неподвижной точке, получаем

$$\text{Eu}((\mathbb{S}^2)^g) = \sum_{k \geq 0} \text{tr}_{H_k(\mathbb{S}^2, \mathbb{R})} g_* = \text{tr}_{H_0(\mathbb{S}^2, \mathbb{R})} g_* + \text{tr}_{H_2(\mathbb{S}^2, \mathbb{R})} g_* = 2,$$

где через g_* обозначено индуцированное действие на группах гомологий. Заметим, что $\text{tr}_{H_0(\mathbb{S}^2, \mathbb{R})} g_* = 1$ в силу линейной связности \mathbb{S}^2 , и $\text{tr}_{H_2(\mathbb{S}^2, \mathbb{R})} g_* = 1$, поскольку g имеет нечетный порядок и потому обязан сохранять ориентацию \mathbb{S}^2 . Значит, G имеет неподвижную точку $p \in X(\mathbb{R})$. Раздувая ее и стягивая собственные прообразы комплексно-сопряженно прямых, проходящих через p , мы видим, что G сопряжена подгруппе $PGL_3(\mathbb{R})$.

4.2.2. Случай $X \cong Q_{2,2}$

Имеем $X \cong \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ и

$$\text{Aut}(X) \cong (\text{PGL}_2(\mathbb{R}) \times \text{PGL}_2(\mathbb{R})) \rtimes \mathbb{Z}/2.$$

Предложение 4.2.3. Пусть $X \cong Q_{2,2}$ и G — конечная группа, действующая минимально на X (то есть $\text{Pic}(X)^G \cong \mathbb{Z}$). Тогда G изоморфна группе вида

$$((n \times m) \bullet 2^s) \bullet 2,$$

где $s \in \{0, 1, 2\}$.

Доказательство. Имеет место точная последовательность групп

$$1 \rightarrow G_0 \rightarrow G \rightarrow 2^r \rightarrow 1,$$

где $r \in \{0, 1\}$ и $G_0 = G \cap (\text{PGL}_2(\mathbb{R}) \times \text{PGL}_2(\mathbb{R}))$. Условие $\text{Pic}(X)^G \cong \mathbb{Z}$ влечет $r = 1$. Пусть U и V — проекции G_0 на первый и второй сомножители соответственно. Тогда условие $r = 1$ означает, что $U \cong V \cong H$, то есть G_0 является подгруппой прямого произведения $H \times H$, где H — либо циклическая, либо диэдральная группа. Заметим, что подгруппа прямого произведения двух циклических групп изоморфна прямому произведению не более чем двух циклических групп.

Пусть $H \cong D_n$ (считаем, что $n \geq 3$; случай $H \cong D_2$ тривиален). Положим $G'_0 = G_0 \cap (C_n \times C_n)$, где $C_n \subset D_n$ — характеристическая подгруппа индекса 2. Тогда имеет место точная последовательность

$$1 \rightarrow G'_0 \rightarrow G_0 \rightarrow 2^s \rightarrow 1,$$

где $s \in \{0, 1, 2\}$. При этом, как и выше, группа G'_0 изоморфна прямому произведению не более чем двух циклических групп. Таким образом, окончательно получаем

$$G \cong ((n \times m) \bullet 2^s) \bullet 2,$$

где $s \in \{0, 1, 2\}$. □

Следствие 4.2.4. Пусть G — группа нечетного порядка, действующая минимально на вещественной поверхности дель Пецо X степени 8. Тогда

$X \cong Q_{3,1}$, группа G является циклической и линеаризуема.

4.3. Поверхности дель Пеццо степени 7

Вещественная поверхность дель Пеццо X изоморфна раздутию $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ в двух точках p и q , причем эти точки либо вещественны, либо комплексно сопряжены. В обоих случаях собственный прообраз прямой, проходящей через p и q является вещественной (-1) -кривой на X , инвариантной относительно любой группы $G \subset \text{Aut}(X)$. Значит, поверхность дель Пеццо степени 7 не является G -минимальной ни для какой группы G .

4.4. Поверхности дель Пеццо степени 6

В этом параграфе X обозначает вещественную поверхность дель Пеццо степени 6. Напомним, что ее комплексификация $X_{\mathbb{C}}$ изоморфна раздутию $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ в трех неколлинеарных точках, которые мы назовем p_1, p_2, p_3 . Множество (-1) -кривых на $X_{\mathbb{C}}$ состоит из шести элементов: исключительных дивизоров раздутия $e_i = \pi^{-1}(p_i)$ и собственных прообразов прямых d_{ij} , проходящих через пары точек p_i, p_j . При антиканоническом вложении $X_{\mathbb{C}} \hookrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^6$ эти (-1) -кривые образуют «шестиугольник», который мы обозначим Σ . В частности, имеется гомоморфизм в группу симметрий этого шестиугольника

$$\rho : \text{Aut}(X_{\mathbb{C}}) \rightarrow \mathcal{W}(A_1 \times A_2) \cong D_6,$$

Поскольку множество всех (-1) -кривых на $X_{\mathbb{C}}$ определено над \mathbb{R} , его дополнение T изоморфно алгебраическому тору над \mathbb{C} . Но мы предполагаем, что $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, поэтому T в действительности является алгебраическим \mathbb{R} -тором. Его можно рассматривать как связную компоненту единицы группы $\text{Aut}(X)$. Для нетривиального действия комплексного сопряжения σ на Σ имеются следующие возможности:

Соответственно, имеется четыре \mathbb{R} -рациональные неизоморфные (\mathbb{C}/\mathbb{R}) -формы поверхности дель Пеццо степени 6.

Замечание 4.4.1. Заметим, что эти формы соответствуют \mathbb{R} -формам алгебраического тора T по Воскресенскому [47, 11.1].

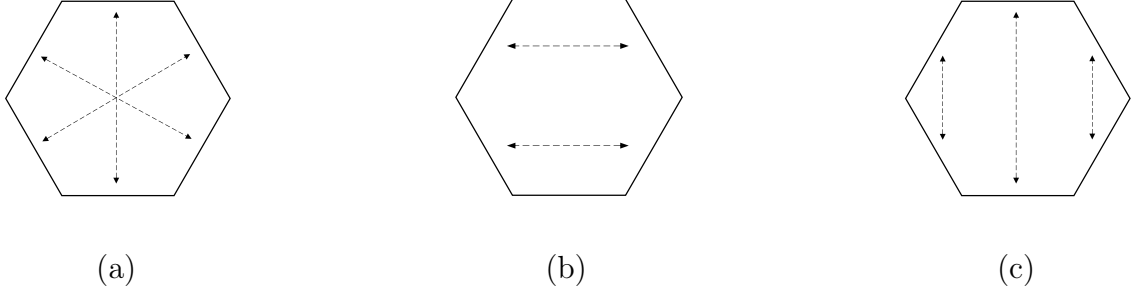


Рис. 4.1: Действие Γ на Σ

Таблица 4.1: \mathbb{R} -формы \mathbb{R} -рациональных поверхностей дель Пецо степени 6

$\Gamma : \Sigma$	id	Рис. 4.1 (a)	Рис. 4.1 (b)	Рис. 4.1 (c)
X	$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2(3, 0)$	$Q_{2,2}(0, 2)$	$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2(1, 2)$	$Q_{3,1}(0, 2)$
$X(\mathbb{R})$	$\#_4\mathbb{R}\mathbb{P}^2$	\mathbb{T}^2	$\#_2\mathbb{R}\mathbb{P}^2$	\mathbb{S}^2

Предложение 4.4.2. Пусть X — вещественная поверхность дель Пецо степени 6 и $G \subset \text{Aut}(X)$ — конечная группа, действующая минимально на X . Тогда справедливо одно из следующих утверждений:

(1) Поверхность X изоморфна $Q_{2,2}(2, 0) \cong \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2(3, 0)$ и задается уравнением

$$\{([x_0 : x_1 : x_2], [y_0 : y_1 : y_2]) \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 : x_0y_0 = x_1y_1 = x_2y_2\}$$

Кроме того, имеется короткая точная последовательность

$$1 \rightarrow \text{Ker } \rho \rightarrow \text{Aut}(X) \xrightarrow{\rho} D_6 \rightarrow 1.$$

Здесь $\text{Ker } \rho \cong (\mathbb{R}^*)^2$ — диагональная подгруппа $\text{PGL}_3(\mathbb{R})$, а $\rho(\text{Aut}(X)) \cong D_6$ порождена вращением $r = \rho(\alpha_1)$ и отражением $s = \rho(\alpha_2)$, где

$$\begin{aligned} \alpha_1 : ([x_0 : x_1 : x_2], [y_0 : y_1 : y_2]) &\mapsto ([y_2 : y_0 : y_1], [x_2 : x_0 : x_1]), \\ \alpha_2 : ([x_0 : x_1 : x_2], [y_0 : y_1 : y_2]) &\mapsto ([x_1 : x_0 : x_2], [y_1 : y_0 : y_2]). \end{aligned}$$

Группа G изоморфна одной из следующих:

$$(1a) H_{\bullet}\langle r \rangle \cong H_{\bullet}6, \quad (1b) H_{\bullet}\langle r^2, s \rangle \cong H_{\bullet}\mathfrak{S}_3, \quad \text{или} \quad (1c) H_{\bullet}\langle r, s \rangle \cong H_{\bullet}D_6,$$

где $H \subset \text{Ker } \rho$ изоморфна подгруппе $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$.

(2) Поверхность X изоморфна $Q_{2,2}(0, 2)$ и может быть задана уравнением

$$x_0y_0z_1 + x_0y_1z_0 + x_1y_0z_0 - x_1y_1z_1 = 0, \quad (4.5)$$

где $([x_0 : x_1], [y_0 : y_1], [z_0 : z_1]) \in (\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1)^3$. Имеется короткая точная последовательность групп

$$1 \rightarrow \text{Ker } \rho \rightarrow \text{Aut}(X) \xrightarrow{\rho} D_6 \rightarrow 1.$$

Здесь $\text{Ker } \rho \cong \text{SO}_2(\mathbb{R}) \times \text{SO}_2(\mathbb{R})$, и группа $\rho(\text{Aut}(X)) \cong D_6$ порождена вращением $r = \rho(\alpha_1)$ и отражением $s = \rho(\alpha_2)$, где

$$\begin{aligned} \alpha_1 &: ([x_0 : x_1], [y_0 : y_1], [z_0 : z_1]) \mapsto ([z_1 : z_0], [x_0 : -x_1], [y_1 : y_0]), \\ \alpha_2 &: ([x_0 : x_1], [y_0 : y_1], [z_0 : z_1]) \mapsto ([y_0 : y_1], [x_0 : x_1], [z_0 : z_1]). \end{aligned}$$

Группа G изоморфна одной из следующих групп:

$$\begin{aligned} (2a) \quad H \cdot \langle r \rangle &\cong H \cdot 6, & (2b) \quad H \cdot \langle r^2 \rangle &\cong H \cdot 3, & (2c) \quad H \cdot \langle r^2, s \rangle &\cong H \cdot \mathfrak{S}_3, \\ (2d) \quad H \cdot \langle r^2, rs \rangle &\cong H \cdot \mathfrak{S}_3, & (2e) \quad H \cdot \langle r, s \rangle &\cong H \cdot D_6, \end{aligned}$$

где $H \subset \text{Ker } \rho$ — прямое произведение не более двух циклических групп произвольного порядка.

Доказательство. Вещественные формы поверхностей дель Пеццо степени 6 перечислены в таблице 4.1. Утверждения о группах автоморфизмов X и уравнения соответствующих поверхностей могут быть найдены в [32, Section 3]. Более того, для $X = Q_{3,1}(0, 2)$ или $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2(1, 2)$ пара $(X, \text{Aut}(X))$ не является минимальной, поэтому можно предполагать, что $X = Q_{2,2}(0, 2)$ или $X = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2(3, 0)$. С точностью до сопряженности, группа

$$\rho(G) \subset D_6 = \langle r, s : r^6 = s^2 = 1, srs^{-1} = r^{-1} \rangle$$

является одной из следующих:

- циклические: $\langle r^k \rangle$, $\langle s \rangle$, $\langle rs \rangle$, где $k = 1, 2, 3$;
- диэдральные: $\langle r, s \rangle$, $\langle r^2, s \rangle$, $\langle r^2, rs \rangle$, $\langle r^3, s \rangle$.

Случай $X = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2(3, 0)$. Все (-1) -кривые на X вещественны. Циклическая группа $\rho(G) \cong \langle r^k \rangle$ действует минимально на X если, и только если $k = 1$. В случае диэдральной группы легко проверить, что только $\langle r^2, s \rangle$ и вся группа $\langle r, s \rangle$ могут действовать минимально на X . Поскольку любая нетривиальная конечная подгруппа \mathbb{R}^* изоморфна $\mathbb{Z}/2$, получаем требуемый результат.

Случай $X = Q_{2,2}(0, 2)$. Действие Γ на Σ показано на Рис. 4.1 (с). Легко проверить, что только группы $\langle r \rangle$, $\langle r^2 \rangle$, $\langle r^2, s \rangle$, $\langle r^2, rs \rangle$, $\langle r, s \rangle$ действуют минимально на X . \square

Предложение 4.4.3. Пусть X — вещественная поверхность дель Пеццо, $G \subset \text{Aut}(X)$ — конечная группа, действующая минимально на X . Если это действие линеаризуется, то G может быть одной из следующих групп, в обозначениях предложения 4.4.2:

- изоморфные \mathfrak{S}_4 : (1b) и (2c), где H изоморфна группе Клейна;
- изоморфные \mathfrak{A}_4 : (2b), где H изоморфна группе Клейна;
- диэдральные: $D_3 \cong \mathfrak{S}_3$: (1b), (2c), (2d); D_6 : (1c), (1b), (2c), (2d), (2e); D_{12} : (1c), (2c), (2d), (2e); при $k \geq 2$ — D_{3k} : (2c), (2d); D_{6k} : (2e).
- циклические: (1a): $\mathbb{Z}/6$ и $\mathbb{Z}/12$, (2a): $\mathbb{Z}/6k$, (2b): $\mathbb{Z}/3k$.

Доказательство. Напомним, что если G линеаризуется, то она изоморфна одной из следующих подгрупп $\text{PGL}_3(\mathbb{R})$:

$$\mathbb{Z}/n, \quad D_n, \quad \mathfrak{A}_4, \quad \mathfrak{S}_4, \quad \mathfrak{A}_5.$$

Поскольку группа \mathfrak{A}_5 проста, ни одна группа из предложения 4.4.2 не изоморфна \mathfrak{A}_5 . Пусть $G \cong \mathfrak{S}_4$. Легко проверить, \mathfrak{S}_4 не содержит нормальных подгрупп, фактор по которым изоморфен $\mathbb{Z}/3$, $\mathbb{Z}/6$ или D_6 . Если такой фактор изоморфен \mathfrak{S}_3 , то $H = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ — группа Клейна. Далее, группа \mathfrak{A}_4 не содержит нормальных подгрупп, фактор по которым изоморфен $\mathbb{Z}/6$, \mathfrak{S}_3 или D_6 . Если этот фактор изоморфен $\mathbb{Z}/3$, то H — группа Клейна.

Пусть $G \cong D_n$. Тогда G имеет нормальную подгруппу H , фактор по которой изоморфен $\mathbb{Z}/3$, $\mathbb{Z}/6$, \mathfrak{S}_3 или D_6 . В частности, H — циклическая

группа (иначе ее индекс не превосходит двух). С другой стороны, факторгруппа диэдральной группы — снова диэдральная группа. В случае (1) из предложения 4.4.2 получаем, что при $H = \text{id}$ группа G имеет тип (1b) или (1c), а при $H \cong \mathbb{Z}/2$ группа G должна иметь вид (1b). В случае (2) циклическая группа H может иметь произвольный порядок k , поэтому либо $G \cong D_{3k}$ и принадлежит типу (2c), (2d), либо $G \cong D_{6k}$ и принадлежит типу (2e).

Наконец, пусть $G \cong \mathbb{Z}/n$. Тогда H — циклическая группа. В случае (1) из предложения 4.4.2 она имеет порядок не выше двух, а фактор по ней есть циклическая группа порядка 6. Значит, $G \cong \mathbb{Z}/6$ или $\mathbb{Z}/12$. В случае (2) порядок H может быть произвольным, поэтому G изоморфна либо $\mathbb{Z}/3k$, либо $\mathbb{Z}/6k$. \square

Пример 4.4.4 (Линеаризация групп нечетного порядка). Покажем, что группа G нечетного порядка, действующая минимально на \mathbb{R} -рациональной поверхности дель Пеццо X степени 6, линеаризуется если, и только если $G \cong \mathbb{Z}/3$.

Согласно предложению 4.4.2, поверхность X задается уравнением (4.5), и имеет место точная последовательность

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow G \xrightarrow{\rho} \widehat{G} \longrightarrow 1, \quad (4.6)$$

где $H \subset \text{SO}_2(\mathbb{R}) \times \text{SO}_2(\mathbb{R})$, $H \cong \mathbb{Z}/n \times \mathbb{Z}/m$, $n, m \geq 1$, и $\widehat{G} \cong \mathbb{Z}/3$. Покажем, что это расширение расщепляется и

$$G \cong (\mathbb{Z}/n \times \mathbb{Z}/m) \rtimes \mathbb{Z}/3.$$

Чтобы построить расщепляющее отображение $\xi : \widehat{G} \rightarrow G$, достаточно найти $g \in G$, такой что $\rho(g)$ порождает $\widehat{G} \cong \mathbb{Z}/3$ и $g^3 = \text{id}$ (тогда можно положить $\xi(\rho(g)) = g$). Поскольку ρ сюръективен, можно найти $g \in G$, такой что $\rho(g)$ порождает \widehat{G} . Покажем, что $g^3 = \text{id}$ автоматически. Выберем любую неподвижную точку $q \in X(\mathbb{C})$ автоморфизма g и раздуем ее (такая точка существует по замечанию 2.2.8). Заметим, что $q \notin \Sigma$, поэтому по предложению 2.2.6, полученная поверхность есть поверхность дель Пеццо степени 5. Более того, на ней имеется 3 непересекающихся (-1) -кривые, образующие $\langle g \rangle$ -орбиту. Стягивая эту орбиту, получаем 3 точки на диагонали $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, которые фиксируются элементом g^3 . Значит, $g^3 = \text{id}$.

Таким образом, согласно предложению 4.4.3, если группа G нечетного порядка линеаризуется, то $n = m = 1$ (в обозначениях выше) и $G \cong \mathbb{Z}/3$. Покажем, что эта группа *действительно* сопряжена линейной в $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{R})$. Обозначим через τ порождающий элемент группы G . Мы утверждаем, что τ имеет вещественную неподвижную точку. Заметим попутно, что неподвижная точка не может лежать на Σ , поскольку τ действует на Σ поворотом на угол $2\pi/3$. Кроме того, множество неподвижных точек G на $X(\mathbb{C})$ дискретно, иначе кривая неподвижных точек пересекает обильный дивизор Σ . Значит, число неподвижных точек совпадает с числом Лефшеца τ , которое равно

$$\begin{aligned} \mathrm{Eu}(X(\mathbb{C})^\tau) &= \sum_{k=0}^4 (-1)^k \mathrm{tr}_{H^k(X, \mathbb{R})}(\tau^*) = \mathrm{tr}_{H^0(X, \mathbb{R})}(\tau^*) + \mathrm{tr}_{\mathrm{Pic}(X_{\mathbb{C}})}(\tau^*) + \mathrm{tr}_{H^4(X, \mathbb{R})}(\tau^*) \\ &= 2 + \mathrm{tr}_{\mathrm{Pic}(X_{\mathbb{C}})}(\tau^*). \end{aligned}$$

Поскольку τ действует как $\ell \mapsto \ell$, $e_1 \mapsto e_2$, $e_2 \mapsto e_3$, $e_3 \mapsto e_1$, имеем $\mathrm{tr}_{\mathrm{Pic}(X_{\mathbb{C}})}(\tau^*) = 1$ и $\mathrm{Eu}(X_{\mathbb{C}}^\tau) = 3$. Значит, хотя бы одна неподвижная точка вещественна.

Пусть Y — раздутие этой точки. По предложению 2.2.6, Y есть поверхность дель Педро степени 5 и $Y(\mathbb{R}) \approx \mathbb{T}^2 \# \mathbb{RP}^2$. Поскольку $Y(\mathbb{R})$ неориентируема и $\mathrm{Eu}(\mathbb{T}^2 \# \mathbb{RP}^2) = \mathrm{Eu}(\mathbb{T}^2) + \mathrm{Eu}(\mathbb{RP}^2) - 2 = -1$, получаем $Y(\mathbb{R}) \approx \#3\mathbb{RP}^2$. Заметим, что на Y имеется 3 непересекающиеся вещественные (-1) -кривые после раздутия. Стягивая их, получаем поверхность дель Педро Z степени 8 либо с $Z(\mathbb{R}) \approx \mathbb{S}^2$ (тогда $Y \cong Q_{3,1}(3, 0)$), либо $Z(\mathbb{R}) \cong \mathbb{T}^2$ (тогда $Y \cong Q_{2,2}(1, 2)$). В первом случае G имеет неподвижную точку на $Z \cong Q_{3,1}$, см. пример 4.2.2. Второй случай невозможен, поскольку иначе G фиксирует 3 точки на диагонали $Z \cong \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$, а потому $G \cong \mathrm{id}$. Наконец, раздувая вещественную неподвижную точку на $Z \cong Q_{3,1}$ и стягивая собственные прообразы прямых, проходящих через нее, сопрягаем G подгруппе $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$.

Пример 4.4.5 (Бесконечная серия нелинеаризуемых подгрупп в $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{R})$). Такая серия подгрупп нечетного порядка может быть построена следующим образом. В обозначениях Примера 4.4.4 возьмем в качестве H группу точек порядка n в $T_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) \cong \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Эта группа изоморфна $(\mathbb{Z}/n)^2$ и нормализуется \widehat{G} . Как мы видели, вся группа $G \cong (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2 \rtimes (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ при этом не линеаризуется.

Пример 4.4.6 (Два несопряженных вложения $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ в $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{R})$). Груп-

па $G \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ может действовать на следующих двух вещественных поверхностях X и Y :

- (1) X — расслоение на коники $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ с $\text{rk Pic}(X)^G = 2$;
- (2) Y — поверхность дель Пеццо степени 6, заданная уравнением (4.5), с $\text{rk Pic}(Y)^G = 1$.

Образы G при этих вложениях в $\text{Cr}_2(\mathbb{R})$ не сопряжены. Действительно, согласно классификации элементарных линков [50, Theorem 2.6], нам потребовался бы линк типа (I) или (III) с центром в точке степени 3, но, как показывает цитируемая теорема, таких линков не существует.

4.5. Поверхности дель Пеццо степени 5

Каждая вещественная поверхность дель Пеццо X степени 5 является \mathbb{R} -рациональной и изоморфна $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2(a, 2b)$, где $(a, 2b) \in \{(4, 0), (2, 2), (0, 4)\}$ [18, Corollary 5.4]. Количество вещественных (-1) -кривых на X равно 10, 4 или 2, соответственно. Очевидно, что конфигурация Γ -орбит исключительных кривых на $X_{\mathbb{C}}$ однозначно определяется парой (a, b) . Граф инцидентности такой конфигурации является раскрашенным графом Петерсена (где прямые в каждой Γ -орбите имеют один цвет). Всюду ниже мы отождествляем X с раздутием $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ в четырех точках p_1, p_2, p_3, p_4 общего положения, e_i обозначает исключительный дивизор раздутия над точкой p_i , а d_{ij} обозначает собственный прообраз прямой, проходящей через точки p_i и p_j , см. Рис.4.2.

На поверхности $X_{\mathbb{C}}$ имеется 5 четверок попарно непересекающихся (-1) -кривых, а именно:

- $F_1 = \{e_1, d_{23}, d_{24}, d_{34}\}$,
- $F_2 = \{e_2, d_{13}, d_{14}, d_{34}\}$,
- $F_3 = \{e_3, d_{12}, d_{14}, d_{24}\}$,
- $F_4 = \{e_4, d_{12}, d_{13}, d_{23}\}$,
- $F_5 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

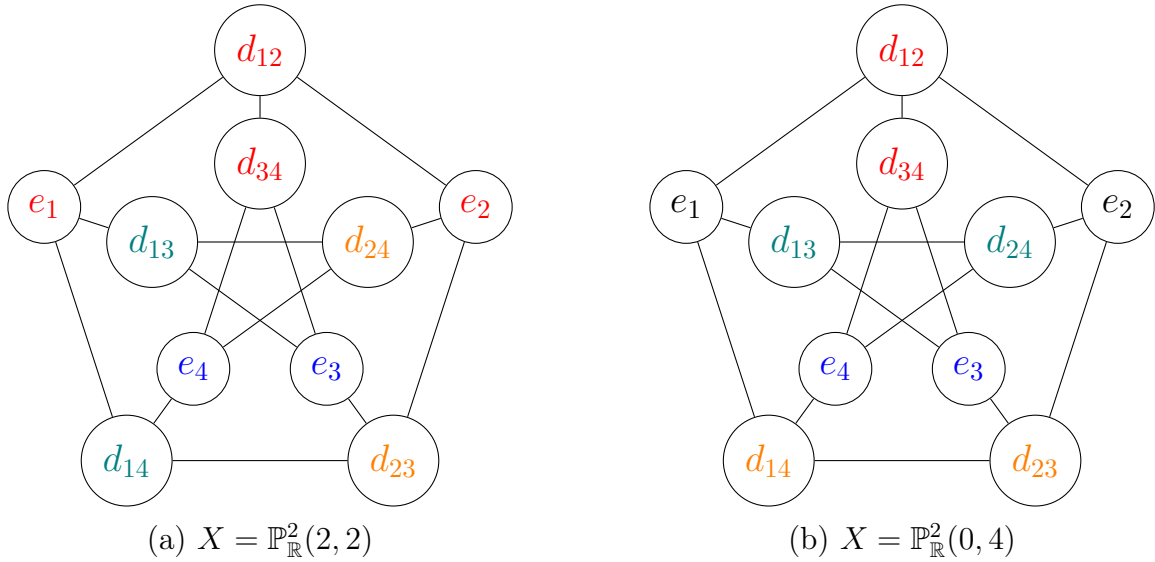


Рис. 4.2: Графы (-1) -кривых на поверхностях дель Пеццо степени 5

Действие Γ и $\text{Aut}(X_{\mathbb{C}})$ на этих четверках индуцирует гоморфизмы

$$\rho : \text{Aut}(X_{\mathbb{C}}) \rightarrow \mathfrak{S}_5, \quad \eta : \Gamma = \langle \sigma \rangle \rightarrow \mathfrak{S}_5, \quad (4.7)$$

причем ρ в действительности является изоморфизмом.

Предложение 4.5.1. Пусть X — вещественная поверхность дель Пеццо степени 5 и $G \subset \text{Aut}(X)$ — конечная группа, действующая минимально на X . Тогда X изоморфна $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2(4, 0)$, и группа G является одной из следующих:

$$\mathfrak{S}_5, \quad \mathfrak{A}_5, \quad \mathbb{Z}/5 \rtimes \mathbb{Z}/4, \quad D_5, \quad \mathbb{Z}/5.$$

Доказательство. Для $X = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2(4, 0)$ доказательство в точности повторяет свое в случае $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, см. [13, Theorem 6.4]. Предположим, что $X \cong \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2(2, 2)$. Заметим, что кривая d_{12} является единственной прямой на X , пересекающей 3 вещественных прямых. Значит, она стабилизируется группой $\text{Aut}(X)$ и пара $(X, \text{Aut}(X))$ не минимальна.

Теперь предположим, что $X \cong \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2(0, 4)$. Рассмотрим произвольный элемент $\tau \in \text{Aut}(X)$. Тогда τ либо фиксирует вещественные (-1) -кривые d_{12} и d_{34} , либо переставляет их. В обоих случаях пара комплексно сопряженных (-1) -кривых, инцидентных d_{12} (или d_{34}) должна перейти в пару сопряженных кривых, инцидентных одной из этих вершин. Это означает, что множество $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ является $\text{Aut}(X)$ -инвариантным. Но оно несвязно и состоит из двух пар сопряженных (-1) -кривых. Значит, пара $(X, \text{Aut}(X))$ не минималь-

на. □

Теперь мы изучим вопрос о линеаризуемости групп из полученного списка.

Лемма 4.5.2. *Пусть g — автоморфизм поверхности $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2(4, 0)$, имеющий порядок 5. Тогда g имеет в точности две неподвижные точки на $X_{\mathbb{C}}$ и эти точки не лежат ни на одной (-1) -кривой.*

Доказательство. Без ограничения общности можем считать, что множество (-1) -кривых (которые все вещественны) распадается на две g -орбиты $\{e_1, d_{14}, d_{23}, e_2, d_{12}\}$ и $\{d_{13}, e_4, e_3, d_{24}, d_{34}\}$. Ясно, что g переставляет эти кривые следующим образом: $e_1 \mapsto d_{14} = e_0 - e_1 - e_4$, $e_2 \mapsto d_{12} = e_0 - e_1 - e_2$, $e_3 \mapsto d_{24} = e_0 - e_2 - e_4$, $e_4 \mapsto e_3$. В частности, неподвижная точка не может лежать ни на одной (-1) -кривой. Если $e_0 \mapsto w$, то $K_{X_{\mathbb{C}}} = -3e_0 + e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = -3w + (e_0 - e_1 - e_4) + (e_0 - e_1 - e_2) + (e_0 - e_2 - e_4) + e_3$, поэтому $e_0 \mapsto w = 2e_0 - e_1 - e_2 - e_4$. Значит, $\mathrm{tr}_{\mathrm{Pic}(X_{\mathbb{C}})}(g^*) = 0$. Легко видеть, что множество неподвижных точек дискретно. Применяя теорему Лефшеца о неподвижной точке, получаем:

$$\mathrm{Eu}(X_{\mathbb{C}}^g) = \mathrm{tr}_{H^0(X, \mathbb{C})}(g^*) + \mathrm{tr}_{H^4(X, \mathbb{C})}(g^*) = 2,$$

что и завершает доказательство. □

Лемма 4.5.3. *Пусть X — поверхность дель Пеццо степени 5 и $\pi : Y \rightarrow X$ — ее раздутие в двух точках $q_1, q_2 \in X$, не лежащих ни на какой исключительной кривой и конике (под коникой мы понимаем конику при антиканоническом вложении X). Тогда Y — поверхность дель Пеццо степени 3.*

Доказательство. Для доказательства обильности $-K_Y$ мы используем критерий Накаи-Мойшезона. Заметим, что $(-K_Y)^2 = K_X^2 - 2 = 3$. По теореме Римана-Роха,

$$\dim | -K_Y | \geq \frac{1}{2}((-K_Y)^2 - (-K_Y \cdot K_Y)) = K_Y^2 = 3,$$

поэтому $| -K_Y | \neq \emptyset$. Предположим, что существует неприводимая кривая $C \subset Y$ с $-K_Y \cdot C \leq 0$. Очевидно, имеется линейная система $\mathcal{L} \subset | -K_Y |$

размерности ≥ 2 , такая что $C \subseteq F$, где F — неподвижная часть \mathcal{L} . Пусть $\mathcal{M} = \mathcal{L} - F$ — ее подвижная часть. Заметим, что $C \not\subseteq \text{Exc}(\pi)$ (поскольку любая исключительная кривая имеет положительное пересечение с $-K_Y$), поэтому $C' = \pi_* C$ — кривая. Положим $\mathcal{L}' = \pi_* \mathcal{L}$, $F' = \pi_* F$, $\mathcal{M}' = \pi_* \mathcal{M}$. Тогда $\mathcal{L}' = F' + \mathcal{M}' \subset |-K_X|$ и $C' \subseteq F' \subset \text{Bs}(\mathcal{L}')$. Очевидно, $p_1, p_2 \in \text{Bs}(\mathcal{L}') \setminus C'$. Следовательно, $\text{Bs}(\mathcal{L}') \subset X \cap \mathbb{P}^2$ (тут мы отождествляем поверхность X с ее антиканонической моделью в \mathbb{P}^5). Но однородный идеал X порождается пятью линейно независимыми квадратиками [12, 8.5.2], поэтому точки p_1, p_2 лежат на кривой степени ≤ 2 , противоречие. \square

Предложение 4.5.4. *Пусть X — вещественная поверхность дель Пеццо степени 5 и $G \subset \text{Aut}(X)$ — группа порядка 5, действующая минимально на X . Тогда G линеаризуема.*

Доказательство. По лемме 4.5.2 группа G имеет две неподвижные точки на $X_{\mathbb{C}}$, не лежащие на (-1) -кривых. Обозначим эти точки через q_1 и q_2 , и пусть Y — раздутие $\text{Bl}_{q_1, q_2}(X)$. Мы утверждаем, что Y — поверхность дель Пеццо степени 3. Согласно лемме 4.5.3, достаточно показать, что эти точки не лежат ни на какой конике.

Предположим, что $q_1, q_2 \in Q$, где Q — некоторая коника на X . Заметим, что Q определена однозначно. Действительно, пусть $q_1, q_2 \in Q \cap Q'$, где Q' — другая коника. Раздувая X в q_1 , получаем поверхность дель Пеццо X' степени 4 с 3 прямыми, образующими треугольник (возможно, вырожденный). С другой стороны, хорошо известно, что на X' не бывает таких треугольников (поверхность дель Пеццо степени 4 является полным пересечением квадратик в \mathbb{P}^4 [12, Theorem 8.6.2]). В силу своей единственности, коника Q обязана быть $\Gamma \times G$ -инвариантной, поэтому $Q \sim -aK_{X_{\mathbb{C}}}$, $a \in \mathbb{Z}$. Умножая обе части на $-K_{X_{\mathbb{C}}}$, получаем $5a = -K_{X_{\mathbb{C}}} \cdot Q = 2$, что невозможно.

Если $q_1 = \sigma(q_2)$, то $Y = \text{Bl}_{q_1, q_2}(X)$ — гладкая вещественная кубическая поверхность с двумя скрещивающимися комплексно-сопряженными G -инвариантными прямыми ℓ_1 и ℓ_2 . Хорошо известно, что такая поверхность G -бirationальна поверхности $Q_{3,1}$, а соответствующий бирациональный изоморфизм имеет вид

$$\varphi : \ell_1 \times \ell_2 \dashrightarrow Y, \quad (p_1, p_2) \mapsto \text{третья точка пересечения } Y \cap \overline{p_1 p_2}. \quad (4.8)$$

Полученное действие G на $Q_{3,1}$ линейризуется по предложению 4.2.2. Теперь предположим, что $q_1, q_2 \in X(\mathbb{R})$ и пусть $X \subset \mathbb{P}(V)$, где V — векторное пространство размерности 6. Тогда имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & X \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 & \xrightarrow{\tilde{g}} & \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \end{array}$$

где g порождает G , π — проекция из $\mathbb{P}(T_{q_1}X)$ и \tilde{g} — автоморфизм $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \cong \mathbb{P}(V/T_{q_1})$, индуцированный g . Несложно показать, что π бирационален. Значит, группа G линейризуема. \square

Пример 4.5.5 (см. [11]). Пусть X — раздутие $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ в четырех вещественных точках $p_1 = [1 : 0 : 0]$, $p_2 = [0 : 1 : 0]$, $p_3 = [0 : 0 : 1]$, $p_4 = [1 : 1 : 1]$. Рассмотрим преобразование $g \in \text{Aut}(X)$ порядка 5, индуцированное бирациональным отображением

$$g_0 : \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2, \quad g_0 : [x : y : z] \mapsto [x(z - y) : z(x - y) : xz].$$

Это отображение имеет в точности 2 вещественные неподвижные точки $[\alpha : 1 : \alpha^2]$, где $\alpha = (1 \pm \sqrt{5})/2$ (что дает нам две вещественные неподвижные точки на X). Можно проверить, что некоторая вещественная инволюция сопрягает g линейному автоморфизму.

4.6. Поверхности дель Пеццо степени 4

На протяжении этого раздела X обозначает вещественную поверхность дель Пеццо степени 4. Хорошо известно, что линейная система $| -K_X |$ задает вложение X в $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^4$ в виде пересечения двух квадрик Q_1 и Q_2 . Мы будем обозначать одним и тем же символом квадрику, соответствующую квадратичную форму и ее матрицу. Обозначим через \mathcal{Q} пучок

$$\lambda Q_1(x_0, \dots, x_4) + \mu Q_2(x_0, \dots, x_4).$$

Его дискриминант $\Delta(\mu, \lambda) \equiv \det(\lambda Q_1 + \mu Q_2)$ есть бинарная форма степени 5. Поскольку поверхность X предполагается гладкой, уравнение $\Delta = 0$ имеет пять различных корней $[\lambda_i : \mu_i]$, $i = 1, \dots, 5$. Эквивалентно, матрица $Q_1^{-1}Q_2$

(Q_1 можно считать невырожденной) имеет пять различных собственных значений $-\lambda_i/\mu_i \in \mathbb{C}$. Они соответствуют особым членам \mathcal{Q} .

Пусть $G \subset \text{Aut}(X)$. Напомним, что имеется представление в группе Вейля

$$\eta \times \rho : \Gamma \times G \rightarrow \mathcal{W}(D_5) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4 \rtimes \mathfrak{S}_5.$$

Предложение 4.6.1. *Пусть X — вещественная поверхность дель Пеццо степени 4 и $G \subset \text{Aut}(X)$ — подгруппа нечетного порядка. Тогда X не является G -минимальной (то есть $\text{rk Pic}(X)^G > 1$).*

Доказательство. Пусть $\text{rk Pic}(X)^G = 1$. Поскольку G имеет нечетный порядок, либо $G \cong \mathbb{Z}/3$, либо $G \cong \mathbb{Z}/5$. Известно, что число N вещественных (-1) -кривых на вещественной поверхности дель Пеццо степени 4 может равняться 0, 4, 8 или 16 [39, Table 2]. Однако при наших предположениях $N = 0$ (иначе существует G -инвариантная (-1) -кривая). В частности, $\eta(\Gamma) \neq \text{id}$. С другой стороны, $\sigma^* \neq \text{id}$ влечет $G \not\cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, поскольку в группе $\mathcal{W}(D_5)$ нет элементов порядка 10 (см. [13, Section 6.4, Table 3]).

Остается рассмотреть случай $G = \langle g \rangle_3 \cong \mathbb{Z}/3$. В группе $\mathcal{W}(D_5)$ имеется только один класс сопряженности элементов порядка 3 и он имеет тип A_2 [13, Section 6.4, Table 3]; в частности, $\text{Sp}(g^*) = \{1, 1, 1, \omega_3, \bar{\omega}_3\}$ (здесь и далее ω_n обозначает первообразный корень степени n из единицы). Поскольку g^* и σ^* коммутируют, они одновременно диагонализуемы $\text{Sp}(g \circ \sigma)^* = \{\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm \omega_3, \pm \bar{\omega}_3\}$ (здесь от комбинации знаков мы требуем только, чтобы она определяла минимальный многочлен с вещественными коэффициентами). Однако в группе $\mathcal{W}(D_5)$ нет инволюций, которые действуют как $-\text{id}$ на \mathbb{E}_5 . Более того, поскольку $X_{\mathbb{C}}$ предполагается $\langle g \circ \sigma \rangle$ -минимальной, $1 \notin \text{Sp}(g \circ \sigma)^*$ по лемме 2.3.9. Значит, $\text{Sp}(g \circ \sigma)^* = \{-1, -1, -1, \omega_3, \bar{\omega}_3\}$, и $\text{tr}(g \circ \sigma)^* = -4$. Однако таблица 3 из [13] показывает, что в группе $\mathcal{W}(D_5)$ нет таких элементов порядка 6. \square

4.7. Поверхности дель Пеццо степени 3

На протяжении этого раздела X обозначает вещественную поверхность дель Пеццо степени 3. Напомним, что X — кубическая поверхность в $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$. Поскольку линейная система $|-K_X| = |\mathcal{O}_X(1)|$ является G -инвариантной, любой автоморфизм X является ограничением проективного автоморфизма,

поэтому мы можем считать, что $\text{Aut}(X) \subset \text{PGL}_4(\mathbb{R})$. Это вложение дает весьма сильные ограничения на возможные группы автоморфизмов X .

Пример 4.7.1. Известно, что группа автоморфизмов гладкой неособой кубической поверхности над \mathbb{C} либо имеет порядок, не превосходящий 24, либо изоморфна одной из следующих групп:

$$(\mathbb{Z}/3)^3 \rtimes \mathfrak{S}_4, \quad \mathfrak{S}_5, \quad \mathcal{H}_3(3) \rtimes \mathbb{Z}/4, \quad \mathcal{H}_3(3) \rtimes \mathbb{Z}/2,$$

где $\mathcal{H}_3(3)$ — группа Гейзенберга унипотентных 3×3 -матриц с коэффициентами из \mathbb{F}_3 [12, Theorem 9.5.8]. Ни одна из этих групп, кроме \mathfrak{S}_5 , не может быть группой автоморфизмов вещественной кубической поверхности. Действительно, группа $\text{PGL}_4(\mathbb{R})$ не содержит групп $\mathcal{H}_3(3)$ и $(\mathbb{Z}/3)^3$ по предложению 2.6.3. Группа \mathfrak{S}_5 , как и в случае $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, является группой автоморфизмов кубики Клебша, заданной уравнениями

$$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 0.$$

Лемма 4.7.2. Пусть X — вещественная поверхность дель Пецо степени 3, $G \subset \text{Aut}(X)$, и пусть на $X_{\mathbb{C}}$ существует G -инвариантная (-1) -кривая (возможно, не определенная над \mathbb{R}). Тогда X не G -минимальна.

Доказательство. Предположим, что такая кривая $L \subset X(\mathbb{C})$ существует и X при этом G -минимальна. Если L определена над \mathbb{R} , утверждение очевидно. Пусть $L \neq \sigma(L)$. Заметим, что $L \cap \sigma(L) \neq \emptyset$ (иначе мы имеем G -инвариантную исключительную кривую $L + \sigma(L)$ на X). Пусть Π — G -инвариантная плоскость в $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$, натянутая на L и $\sigma(L)$. Тогда $\Pi \cap X_{\mathbb{C}} = \{L, \sigma(L), M\}$, где M — вещественная прямая. Очевидно, M должна быть G -инвариантной, но это противоречит предположению о G -минимальности X . \square

Следствие 4.7.3. Пусть G — 2-группа и X — вещественная поверхность дель Пецо степени 3. Тогда X не G -минимальна.

Доказательство. Действительно, на $X_{\mathbb{C}}$ имеется ровно 27 исключительных (-1) -кривых. Значит, хотя бы одна из них G -инвариантна. \square

Основной результат данного параграфа — доказательство того, что группа нечетного порядка не может действовать минимально на \mathbb{R} -рациональной

поверхности дель Педро степени 3. Вместе со следствием 4.7.3 это также показывает, что на \mathbb{R} -рациональной поверхности дель Педро степени 3 не может минимально действовать никакая p -группа.

Группы нечетного порядка

Пусть G — группа нечетного порядка. Согласно предложению 2.6.3, группа G изоморфна прямому произведению не более чем двух циклических групп. С другой стороны, имеем вложение

$$\rho : G \rightarrow \mathcal{W}(E_6),$$

поэтому $|G| = 3^k 5^l$, $k \leq 4$, $l \leq 1$. Если $k = 0$, то на $X_{\mathbb{C}}$ существует G -инвариантная (-1) -кривая (поскольку общее число таких кривых равно 27). Значит, X не может быть G -минимальной по лемме 4.7.2. Заметим, что в $\mathcal{W}(E_6)$ нет элементов порядка 15 (поэтому $l = 0$), 27 и 81 в $\mathcal{W}(E_6)$. Таким образом, G изоморфна одной из следующих групп:

$$\mathbb{Z}/3, (\mathbb{Z}/3)^2, \mathbb{Z}/9, (\mathbb{Z}/9)^2, \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/9.$$

Обозначим через $\text{diag}[\alpha : \beta : \gamma : \delta]$ проективный автоморфизм

$$[x : y : z : w] \mapsto [\alpha x : \beta y : \gamma z : \delta w], \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}^*.$$

Пусть $g \in \text{PGL}_4(\mathbb{R})$ — элемент порядка 3. Обозначим через $\text{Fix}(g, Y)$ множество неподвижных точек g , рассматриваемого как автоморфизм многообразия Y , где Y — это $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ или $X_{\mathbb{C}}$. Очевидно, $\text{Fix}(g, X_{\mathbb{C}}) = \text{Fix}(g, \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3) \cap X_{\mathbb{C}}$.

Предложение 4.7.4. *Пусть X — вещественная G -минимальная поверхность дель Педро степени 3. Тогда G не может быть изоморфна ни одной из следующих групп: $(\mathbb{Z}/3)^2$, $\mathbb{Z}/9$, $(\mathbb{Z}/9)^2$, $\mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/9$.*

Доказательство. Хорошо известно, что кубическая поверхность над \mathbb{R} содержит $N = 3, 7, 15$ или 27 вещественных прямых (см., например, [33, VI, 5.4]). Очевидно, $N \neq 7$ при наших предположениях на X (иначе существует по крайней мере одна G -инвариантная (-1) -кривая на X). Предположим, что G изоморфна одной из групп, перечисленных в условии предложения. Рассмотрим оставшиеся возможности для N .

Случай $N = 3$. Можем предполагать, что на X нет G -инвариантных прямых. Тогда имеется G -орбита, состоящая из 3 вещественных прямых ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 . Обозначим через G_0 стабилизатор ℓ_1 . Ясно, что $G_0 \neq \text{id}$ и стабилизирует всю орбиту (поскольку G абелева). Поскольку X предполагается G -минимальной, прямые ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 либо образуют треугольник, либо пересекаются в одной точке Эккарда. Покажем, что в обоих случаях $G_0 = \text{id}$.

Действительно, в обоих случаях любой проективный автоморфизм $g_0 \in G_0$ стабилизирует вещественную прямую, скажем ℓ_1 , и фиксирует вещественную точку $p = \ell_1 \cap \ell_2$. Ограничивая g_0 на ℓ_1 , получаем автоморфизм $h = g_0|_{\ell_1}$ прямой $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ с неподвижной вещественной точкой. Поэтому либо h имеет порядок 2 и мы получаем противоречие (порядок h должен делить порядок g_0), либо h фиксирует ℓ_1 поточечно. В последнем случае h также фиксирует ℓ_2 поточечно (G абелева, и ℓ_1, ℓ_2 лежат в одной орбите), поэтому g_0 поточечно фиксирует плоскость в $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$, натянутую на ℓ_1 и ℓ_2 , а потому g_0 — отражение, противоречие.

Следовательно, $G_0 \cong \text{id}$ и $G \cong \mathbb{Z}/3$. Противоречие.

Случай $N = 15$. Рассмотрим действие G на множестве вещественных прямых на X . Легко видеть, что существует орбита длины 3 (или G -инвариантная прямая). Как мы видели выше, это невозможно.

Случай $N = 27$. Группа Галуа Γ действует тривиально на $\text{Pic}(X_{\mathbb{C}})$ в этом случае и $X_{\mathbb{C}}$ является G -минимальной поверхностью. Возьмем $g \in G$. Если порядок g равен 9, то $\text{tr}(g^*) = 0$ (поскольку в $\mathscr{W}(E_6)$ ровно один класс сопряженности элементов порядка 9, см. таблицу 4.2). Если порядок g равен 3, то $\text{tr}(g^*) \geq 0$. Действительно, из таблицы 4.2 мы видим, что единственное отрицательное значение $\text{tr}(g^*)$ равно -3 , поэтому $\text{Eu}(\text{Fix}(g, X_{\mathbb{C}})) = 0$. Ясно, что $\text{Fix}(g, X_{\mathbb{C}})$ — эллиптическая кривая и $\text{Fix}(g, \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3)$ — плоскость, поэтому g имеет собственное значение кратности 3. Поскольку собственные числа g^* не все равны ± 1 , характеристический многочлен этого элемента не может быть определен над \mathbb{R} , противоречие.

Итак, $\sum_{g \in G} \text{tr}(g^*) \neq 0$ (поскольку $\text{tr}(\text{id}^*) \neq 0$). Значит, поверхность $X_{\mathbb{C}}$ не G -минимальна. Противоречие.

□

Предложение 4.7.5. Пусть X — \mathbb{R} -рациональная поверхность дель Пеццо степени 3 и $G \cong \mathbb{Z}/3$. Тогда X не G -минимальна.

Доказательство. Обозначим через g порождающий элемент G . Из таблицы 4.2 мы видим, что $\text{tr}(g^*) \in \{-3, 0, 3\}$. Как было показано выше, $\text{tr}(g^*) \neq -3$, поскольку автоморфизм g определен над \mathbb{R} . В оставшихся двух случаях из той же таблицы мы видим, что среди собственных значений g^* имеется единица, поэтому $\sigma^* \neq \text{id}$ по лемме 2.3.9.

Таблица 4.2: Элементы порядка 2, 3, 6 и 9 в $\mathcal{W}(E_6)$ (здесь и далее p_k обозначает многочлен $t^k + t^{k-1} + \dots + t + 1$)

Порядок	Граф Картера	Характеристический многочлен	tr
2	A_1	$p_1(t-1)^5$	4
2	A_1^2	$p_1^2(t-1)^4$	2
2	A_1^3	$p_1^3(t-1)^3$	0
2	A_1^4	$p_1^4(t-1)^2$	-2
3	A_2	$(t^2 + t + 1)(t-1)^4$	3
3	A_2^2	$(t^2 + t + 1)^2(t-1)^2$	0
3	A_2^3	$(t^2 + t + 1)^3$	-3
6	$E_6(a_2)$	$(t^2 + t + 1)(t^2 - t + 1)^2$	1
6	D_4	$(t+1)(t^3+1)(t-1)^2$	1
6	$A_1 \times A_5$	$(t+1)(t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1)$	-2
6	$A_1^2 \times A_2$	$(t+1)^2(t^2 + t + 1)(t-1)^2$	-1
6	$A_1 \times A_2$	$(t+1)(t^2 + t + 1)(t-1)^3$	1
6	$A_1 \times A_2^2$	$(t+1)(t^2 + t + 1)^2(t-1)$	-2
6	A_5	$(t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1)(t-1)$	0
9	$E_6(a_1)$	$t^6 + t^3 + 1$	0

Рассмотрим сперва случай $\text{tr}(g^*) = 3$. Имеем $\text{Sp}(g^*) = \{1, 1, 1, 1, \omega_3, \bar{\omega}_3\}$, поэтому, как и в предыдущем разделе, получаем $\text{Sp}(g \circ \sigma)^* = \{\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm \omega_3, \pm \bar{\omega}_3\}$. Поскольку поверхность $X_{\mathbb{C}}$ предполагается $\langle g \circ \sigma \rangle$ -минимальной,

$$\text{Sp}(g \circ \sigma)^* = \{-1, -1, -1, -1, \pm \omega_3, \pm \bar{\omega}_3\},$$

по лемме 2.3.9. Значит, $\text{tr}(g \circ \sigma)^* \in \{-3, -5\}$. таблица 4.2 показывает, что

таких элементов в группе $\mathcal{W}(E_6)$ нет.

Пусть теперь $\text{tr}(g^*) = 0$. В этом случае $\text{Sp}(g^*) = \{1, 1, \omega_3, \bar{\omega}_3, \omega_3, \bar{\omega}_3\}$. Для $\text{Sp}(g \circ \sigma)^*$ имеются следующие возможности:

Собственные числа	Характеристический многочлен	$\text{tr}(\tau \circ \sigma)^*$
$-1, -1, \omega_3, \bar{\omega}_3, \omega_3, \bar{\omega}_3$	$(t+1)^2(t^2+t+1)^2$	-4
$-1, -1, -\omega_3, -\bar{\omega}_3, \omega_3, \bar{\omega}_3$	$(t+1)^2(t^2+t+1)(t^2-t+1)$	-2
$-1, -1, -\omega_3, -\bar{\omega}_3, -\omega_3, -\bar{\omega}_3$	$(t+1)^2(t^2-t+1)^2$	0

Значит, $(g \circ \sigma)^*$ принадлежит классу $A_1 \times A_5$. Более того, $\text{Sp}(\sigma^*) = \{-1, -1, -1, -1, 1, 1\}$, и σ^* принадлежит классу A_1^4 . Можно показать, что X содержит ровно 3 вещественные (-1) -кривые и $X(\mathbb{R}) \approx \mathbb{S}^2 \sqcup \mathbb{R}\mathbb{P}^2$ [39, Table 2]. В частности, X не является \mathbb{R} -рациональной, противоречие. \square

Замечание 4.7.6. Условие \mathbb{R} -рациональности в предложении 4.7.5 не может быть отброшено. Действительно, рассмотрим кубическую поверхность S_α

$$\alpha x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - (x_0 + x_1 + x_2 + x_3)^3 = 0.$$

Можно показать, что при $1/16 < \alpha < 1/4$ множество $S_\alpha(\mathbb{R})$ несвязно и гомотеоморфно $\mathbb{S}^2 \sqcup \mathbb{R}\mathbb{P}^2$. В частности, поверхность S_α не рациональна над \mathbb{R} для таких α . На S_α имеется ровно 3 вещественные прямые S_α , заданные уравнениями

$$\ell_1 : x_0 = x_1 + x_2 = 0, \quad \ell_2 : x_0 = x_2 + x_3 = 0, \quad \ell_3 : x_0 = x_1 + x_3 = 0.$$

Эти прямые образуют треугольник

$$\ell_1 \cap \ell_2 = [0 : 1 : -1 : 1], \quad \ell_1 \cap \ell_3 = [0 : -1 : 1 : 1], \quad \ell_2 \cap \ell_3 = [0 : -1 : -1 : 1].$$

Циклическая перестановка координат $g : x_1 \mapsto x_2 \mapsto x_3$ индуцирует перестановку прямых $\ell_1 \mapsto \ell_2 \mapsto \ell_3$. Кроме того, на S_α нет непересекающихся комплексно сопряженных прямых. Действительно, в противном случае S_α бирациональна $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ посредством отображения (4.8). Значит, поверхность S_α является g -минимальной.

4.8. Поверхности дель Педро степени 2

На протяжении этого параграфа X (или X_B^{sgn} , см. ниже) обозначает вещественную поверхность дель Педро степени 2. Антиканоническое отображение $\varphi_{|-K_X|} : X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ является двулистным накрытием, разветвленным вдоль гладкой вещественной кривой $B \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ степени 4. Инволюция Галуа γ этого накрытия называется *инволюцией Гейзера*. Кривая $B(\mathbb{R})$ делит $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ на два открытых связных множества, лишь одно из которых неориентируемо. Выберем уравнение $F(x, y, z) = 0$ кривой B так, что значение F отрицательно на этом неориентируемом множестве. Тогда с B можно связать две неизоморфные поверхности дель Педро степени 2, а именно

$$X_B^{\text{sgn}} = \{[x : y : z : w] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(1, 1, 1, 2) : w^2 = \text{sgn} \cdot F(x, y, z)\}, \quad \text{где } \text{sgn} \in \{1, -1\}.$$

Известно, что имеется 6 топологических типов гладких квартик в $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. Соответственно, получаем 12 топологических типов вещественных поверхностей дель Педро степени 2. В следующей таблице мы перечисляем только те, что рациональны над \mathbb{R} (см. [39] или [18]):

Таблица 4.3: Вещественные формы \mathbb{R} -рациональных поверхностей дель Педро степени 2

Класс σ^*	$\text{Sp}(\sigma^*)$	$\text{tr } \sigma^*$	sgn	$X_B^{\text{sgn}}(\mathbb{R})$	$B(\mathbb{R})$	# вещ. (-1) -кривых
id	1^7	7	−	$\#8\mathbb{R}\mathbb{P}^2$	○ ○ ○ ○	56
A_1	$-1, 1^6$	5	−	$\#6\mathbb{R}\mathbb{P}^2$	○ ○ ○	32
A_1^2	$-1^2, 1^5$	3	−	$\#4\mathbb{R}\mathbb{P}^2$	○ ○	16
$A_1^{3''}$	$-1^3, 1^4$	1	−	$\#2\mathbb{R}\mathbb{P}^2$	○	8
$A_1^{3'}$	$-1^3, 1^4$	1	+	\mathbb{T}^2	⊙	0
$A_1^{4'}$	$-1^4, 1^3$	−1	+	\mathbb{S}^2	○	0

Инволюция Гейзера содержится в центре $\text{Aut}(X)$, и имеет место корот-

кая точная последовательность

$$1 \longrightarrow \langle \gamma \rangle \longrightarrow \text{Aut}(X) \longrightarrow \text{Aut}(B) \longrightarrow 1,$$

Хорошо известно, что эта последовательность расщепляется, то есть $\text{Aut}(X) \cong \text{Aut}(B) \times \langle \gamma \rangle$. В частности, для группы $G \subset \text{Aut}(X)$ имеются следующие возможности:

- $\gamma \notin G$. Тогда G изоморфна подгруппе $G_B \subset \text{Aut}(B) \subset \text{PGL}_3(\mathbb{R})$. Согласно [7], группы автоморфизмов вещественных алгебраических кривых рода 3 (рассматриваемых как поверхности Клейна) могут быть следующими²:

$$\mathbb{Z}/2, \quad \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2, \quad D_3, \quad D_4, \quad D_6, \quad \mathfrak{S}_4. \quad (4.9)$$

Заметим также, что случай $G = D_6$ невозможен, поскольку уравнение B приводится к виду

$$z^4 + Az^2(x^2 + y^2) + B(x^2 + y^2)^2 = 0,$$

и кривая B особа.

- $\gamma \in G$. Тогда G имеет вид $\langle \gamma \rangle \times G_B$, где G_B — одна из групп, перечисленных в (4.9). Поскольку любая вещественная поверхность дель Пеццо степени 2 является $\langle \gamma \rangle$ -минимальной, все группы $G \subset \text{Aut}(X)$, содержащие γ автоматически действуют минимально на X .

Таким образом, основным интерес представляют группы, не содержащие инволюцию Гейзера. Основным результатом данного параграфа состоит в следующем.

Предложение 4.8.1. *Пусть (X, σ) — \mathbb{R} -рациональная поверхность дель Пеццо степени 2 и $G \subset \text{Aut}(X)$ — конечная группа, действующая минимально на X и не содержащая инволюцию Гейзера. Тогда имеет место один из следующих случаев.*

1. G — циклическая группа $\langle g \rangle_n$

- $n = 2$:

²Поскольку наша кватрика лежит в $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, эту классификацию несложно получить из теории инвариантов.

(2⁺) $g : [x : y : z : w] \mapsto [x : y : -z : w]$, g^* имеет тип $A_1^{4''}$, и σ^* имеет тип³ $A_1^{4'}$, $A_1^{3'}$ или $A_1^{3''}$. Уравнение X имеет вид

$$\pm w^2 = z^4 + f_2(x, y)z^2 + f_4(x, y),$$

где знак перед w^2 и бинарные формы f_2 и f_4 (определяющие конфигурацию овалов кватрики) выбираются согласно таблице 4.3.

• $n = 4$:

(4⁺) $g : [x : y : z : w] \mapsto [-y : x : z : w]$, g^* имеет тип A_3^2 , и X имеет вид

$$\pm w^2 = z^4 + Az^2(x^2 + y^2) + B(x^4 + y^4) + Cx^2y^2 + D(x^3y - xy^3) \quad (4.10)$$

для некоторых $A, B, C, D \in \mathbb{R}$.

(4⁻) $g : [x : y : z : w] \mapsto [-y : x : z : -w]$, g^* имеет тип $D_4(a_1) \times A_1$, и X имеет вид (4.10).

2. G изоморфна одной из следующих групп: $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$, \mathfrak{S}_3 , D_4 , \mathfrak{A}_4 , \mathfrak{S}_4 .

Более того, при подходящем выборе вещественных коэффициентов уравнения X все возможности выше реализуются.

В доказательстве мы отдельно рассматриваем случай четного и нечетного порядков. Мы покажем, что группа нечетного порядка не может действовать минимально на \mathbb{R} -рациональной поверхности дель Пеццо степени 2. Затем мы покажем, что группы четного порядка исчерпываются списком, приведенным в предложении 4.8.1.

Подгруппы нечетного порядка

Согласно⁴ списку (4.9), мы должны рассмотреть только случай

$$G = \langle g \rangle_3 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

³При этом первые два случая реализуются, как показано ниже.

⁴Ограничение на порядок группы в данном случае легко получить и напрямую, см. [1, 5.3]

Положим $B' = B/G$. По формуле Римана-Гурвица, имеем

$$2 - 2g(B) = |G| \left(2 - 2g(B') - \sum_{x \in B} \left(1 - \frac{1}{|\text{stab } x|} \right) \right),$$

где $\text{stab } x$ обозначает стабилизатор точки $x \in B$. Пусть N — число точек B , фиксируемых группой G . Поскольку $g(B) = 3$ и $G \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, получаем

$$N = 5 - 3g(B'),$$

поэтому либо $N = 2$, либо $N = 5$. Очевидно, элемент $g \in \text{PGL}_3(\mathbb{R})$ порядка 3 не может иметь ровно пять неподвижных точек, поэтому остается рассмотреть случай $N = 2$.

Заметим, что имеется третья неподвижная точка $p \notin B(\mathbb{C})$ (определенная над \mathbb{R}). Это означает, что на $X_{\mathbb{C}}$ в общей сложности имеется 4 неподвижные точки.

Рассмотрим теперь гомоморфизм

$$\eta \times \rho : \Gamma \times G \rightarrow \mathscr{W}(E_7).$$

Лемма 4.8.2. *Пусть X — вещественная G -минимальная поверхность дель Пеццо степени 2 с $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, и порядок G нечетный. Тогда $\eta(\Gamma) \neq \text{id}$.*

Доказательство. Если $\eta(\Gamma) = \text{id}$, то $\text{rk Pic}(X_{\mathbb{C}})^G = 1$. Пусть E_1, E_2, \dots, E_s — (-1) -кривые на $X_{\mathbb{C}}$, образующие орбиту G . Тогда $E_1 + \dots + E_s = aK_{X_{\mathbb{C}}}$, $a \in \mathbb{Z}$, поэтому

$$2a = aK_{X_{\mathbb{C}}}^2 = \sum_{i=1}^s (E_i \cdot K_{X_{\mathbb{C}}}) = \sum_{i=1}^s (-1) = -s.$$

Значит, s четно, а потому четно $|G|$. Противоречие. \square

Лемма 4.8.2 показывает, что комплексное сопряжение $\sigma \in \Gamma$ индуцирует нетривиальный элемент $\sigma^* \in \mathscr{W}(E_7)$. Это означает, что $(g \circ \sigma)^*$ имеет порядок 6. Все 17 классов элементов порядка 6 в группе $\mathscr{W}(E_7)$ перечислены в таблице 6.1. Поскольку $1 \notin \text{Sp}(g \circ \sigma)^*$, по лемме 2.3.9, для $(g \circ \sigma)^*$ остается только 4 возможности:

Таблица 4.4: Возможности для $(g \circ \sigma)^*$

Граф Картера	Характеристический многочлен	След $\text{tr}(g \circ \sigma)^*$
$A_5 \times A_2$	$(t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1)(t^2 + t + 1)$	-2
$D_4 \times A_1^3$	$(t^3 + 1)(t + 1)^4$	-4
$D_6(a_2) \times A_1$	$(t^3 + 1)^2(t + 1)$	-1
$E_7(a_4)$	$(t^2 - t + 1)^2(t^3 + 1)$	2

Выше мы выяснили, что g имеет ровно 4 неподвижные точки на $X_{\mathbb{C}}$, поэтому $\text{tr } g^* = 1$ по формуле Лефшеца. Согласно таблице 6.1, такой элемент g^* принадлежит классу A_2^2 и

$$\text{Sp}(g^*) = \{1, 1, 1, \omega_3, \bar{\omega}_3, \omega_3, \bar{\omega}_3\}.$$

Поскольку поверхность $X_{\mathbb{C}}$ является $g \circ \sigma$ -минимальной, лемма 2.3.9 показывает, что есть следующие возможности для $\text{Sp}(g \circ \sigma)^*$:

Собств. числа	Характеристический многочлен	$\text{tr}(g \circ \sigma)^*$
$-1, -1, -1, \omega_3, \bar{\omega}_3, \omega_3, \bar{\omega}_3$	$(t + 1)^3(t^2 + t + 1)^2$	-5
$-1, -1, -1, \omega_3, \bar{\omega}_3, -\omega_3, -\bar{\omega}_3$	$(t + 1)^3(t^2 + t + 1)(t^2 - t + 1)$	-3
$-1, -1, -1, -\omega_3, -\bar{\omega}_3, -\omega_3, -\bar{\omega}_3$	$(t + 1)^3(t^2 - t + 1)^2$	-1

Сравнивая эти данные с данными из таблицы 4.4, мы видим, что $(g \circ \sigma)^*$ принадлежит классу $D_6(a_2) \times A_1$. Комплексное сопряжение σ действует на $K_{X_{\mathbb{C}}}^{\perp}$ как $-\text{id}$, поэтому совпадает с γ^* . Следовательно, поверхность X минимальна над \mathbb{R} . Но тогда она не является \mathbb{R} -рациональной. Противоречие.

Замечание 4.8.3. Как и в случае $K_X^2 = 3$, условие \mathbb{R} -рациональности для групп нечетного порядка нельзя отбросить. А именно, существует нерациональная над \mathbb{R} поверхность дель Пеццо степени 2, на которой группа $\mathbb{Z}/3$ действует минимально. Действительно, рассмотрим на $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ семь точек $[1 : 0 : 0]$, $[0 : 1 : 0]$, $[0 : 0 : 1]$, $[a : b : c]$, $[b : c : a]$, $[c : a : b]$, $[1 : 1 : 1]$ в общем положении⁵. Пусть $g \in \text{Aut}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2)$ — циклическая перестановка координат. Тогда наше множество точек g -инвариантно, а их раздутие является \mathbb{R} -рациональной

⁵То есть $a + b + c \neq 0$, $ab + ac + bc \neq 0$ и числа a/b , b/c , c/a попарно различны и не равны единице (например, это выполняется для $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$).

поверхностью дель Пеццо $w^2 = F(x, y, z)$ степени 2 с 56 вещественными прямыми и действием группы порядка 3. Рассмотрим теперь поверхность X' , заданную уравнением $\{w^2 = -F(x, y, z)\}$. Тогда X' — поверхность дель Пеццо степени 2 с $\sigma^* = \gamma^*$. Она минимальна над \mathbb{R} ($\rho(X') = 1$) и, как следствие, минимальна относительно действия группы порядка 3. С другой стороны, X' не рациональна над \mathbb{R} по теореме 2.3.10. Известно, что $X'(\mathbb{R}) \approx \sqcup 4\mathbb{S}^2$, а $B(\mathbb{R})$ состоит из четырех овалов, см. [18] или [39].

Подгруппы четного порядка

В дальнейшем мы предполагаем, что $\gamma \notin G$.

Случай $G \cong \mathbb{Z}/2$

Пусть g — инволюция, порождающая G . Без ограничения общности можем считать, что g действует на $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ как $[x : y : z] \mapsto [x : y : -z]$, а уравнение $X_{\mathbb{C}}$ имеет вид

$$\pm w^2 = z^4 + 2f_2(x, y)z^2 + f_4(x, y),$$

где f_4 не имеет кратных множителей (ввиду гладкости B).

Предположим, что $g \neq \gamma$ и X является $\langle g \rangle$ -минимальной. Тогда $\sigma^* \neq \text{id}$. В противном случае $\text{rk Pic}(X_{\mathbb{C}}) = 1$ влечет $\text{tr id}^* + \text{tr } g^* = 7 + \text{tr } g^* = 0$, поэтому g действует как $-\text{id}$ на E_7 , то есть совпадает с γ^* . Значит, можем предполагать $\text{tr } \sigma^* \in \{-1, 1, 3, 5\}$.

Для действия на X имеем две возможности

$$(2^+) [x : y : z : w] \mapsto [x : y : -z : w], \text{ или } (2^-) [x : y : z : w] \mapsto [x : y : -z : -w].$$

Мы рассмотрим эти возможности отдельно.

2⁻ Множество неподвижных точек $X_{\mathbb{C}}^g$ состоит из 4 точек $[x : y : 0 : 0]$, где $f_4(x, y) = 0$. Значит, $\text{tr } g^* = 1$, g^* имеет тип $A_1^{3'}$ в группе Вейля $\mathscr{W}(E_7)$ и $\text{tr id}^* + \text{tr } g^* + \text{tr } \sigma^* \in \{7, 9, 11, 13\}$. Поскольку поверхность $X_{\mathbb{C}}$ предполагается $\Gamma \times G$ -минимальной, имеем $\text{tr}(\sigma^* g^*) \in \{-7, -9, -11, -13\}$. Последние три значения не достигаются в $\mathscr{W}(E_7)$, поэтому можно предполагать, что σ^* имеет тип $A_1^{4''}$ и $\sigma^* = \gamma^* \circ g^*$. Мы собираемся показать, что этот случай не реализуется.

Действительно, рассмотрим две H -эквивариантные программы минимальных моделей на $X_{\mathbb{C}}$, одну с $H = \langle \sigma \rangle$, а вторую с $H = \langle g \circ \gamma \rangle$. Их общий результат есть некоторая поверхность дель Пеццо Z . Поскольку $g \circ \gamma$ имеет тип $(\mathbf{2}^+)$, этот элемент фиксирует эллиптическую кривую на X , поэтому $K_Z^2 \leq 4$ (легко проверить, что поверхность дель Пеццо Z с $K_Z^2 > 4$ не может содержать эллиптическую кривую неподвижных точек). С другой стороны, поверхность Z минимальна над \mathbb{R} , поэтому не является \mathbb{R} -рациональной по теореме 2.3.10. Но тогда X также не рациональна над \mathbb{R} , противоречие.

2⁺ Тогда $X_{\mathbb{C}}^g$ состоит из двух изолированных точек $[0 : 0 : 1 : \pm 1]$ и эллиптической кривой $\mathcal{E} = \{w^2 = f_4(x, y)\}$. Значит, $\text{tr } g^* = -1$, g^* имеет тип $A_1^{4''}$ и $\text{tr } \text{id}^* + \text{tr } g^* + \text{tr } \sigma^* \in \{5, 7, 9, 11\}$. Последние два значения не достигаются в группе Вейля $\mathcal{W}(E_7)$. Значит, либо σ^* имеет тип $A_1^{4'}$ ($X(\mathbb{R})$ — сфера), либо тип $A_1^{3'}$ (тор), либо $A_1^{3''}$ (бутылка Клейна).

Первые две возможности действительно реализуются. Первая из них рассмотрена в Примере 4.8.4. Для построения примера во втором случае достаточно рассмотреть аналогичную конструкцию для $Q_{2,2}$.

Пример 4.8.4. Рассмотрим квадрику $Q = Q_{3,1} = \{t_0^2 + t_1^2 + t_2^2 = t_3^2\} \subset \text{Proj } \mathbb{R}[t_0, t_1, t_2, t_3]$ с $X(\mathbb{R}) \approx \mathbb{S}^2$ и три пары комплексно сопряженных точек

$$p_{\pm} = [0 : \pm i : 1 : 0], \quad s_{\pm} = [\pm i : 0 : 1 : 0], \quad r_{\pm} = [0 : \pm i : \sqrt{2} : 1],$$

лежащих на Q . Пусть $\hat{g} \in \text{Aut}(Q)$ — автоморфизм

$$[t_0 : t_1 : t_2 : t_3] \mapsto [-t_0 : -t_1 : t_2 : t_3]$$

(«вращение» \mathbb{S}^2 на 180°). Тогда $\hat{g}(p_+) = p_-$, $\hat{g}(s_+) = s_-$, $\hat{g}(r_+) = r_-$. Обозначим через $\pi : X \rightarrow Q$ раздутие Q в наших шести точках, а через \tilde{g} — поднятие \hat{g} на X . Мы утверждаем, что

- (1) X — гладкая вещественная поверхность дель Пеццо степени 2,
- (2) Вещественная структура σ^* на X имеет тип A_1^4 (в частности, $X(\mathbb{R}) \approx \mathbb{S}^2$),
- (3) X минимальна относительно действия $g = \gamma \circ \tilde{g}$.

Справедливость (1) проверяется несложным вычислением (достаточно проверить, что раздуваемые точки не лежат на дивизорах бистепени $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$ или $(2, 2)$), которое мы пропустим. Заметим, что решетка $\text{Pic}(X_{\mathbb{C}})$ порождена тремя парами сопряженных исключительных дивизоров $E_{p_{\pm}}$, $E_{s_{\pm}}$, $E_{r_{\pm}}$ и парой сопряженных дивизоров F , \bar{F} , где $F = \pi^*(\ell)$, $\bar{F} = \pi^*(\bar{\ell})$, $\text{Pic}(Q_{\mathbb{C}}) = \mathbb{Z}[\ell] \oplus \mathbb{Z}[\bar{\ell}]$. Заметим, что σ переставляет члены в каждой паре (что доказывает (2)), а \tilde{g} переставляет члены в каждой паре исключительных дивизоров и сохраняет F и \bar{F} . Значит, след действия $\tilde{g}^* \circ \sigma^*$ на $\text{Pic}(X_{\mathbb{C}}) \otimes \mathbb{R}$ равен 6, а потому след на $K_X^{\perp} \otimes \mathbb{R}$ равен 5. Положим $g = \tilde{g} \circ \gamma$. Поскольку γ^* действует как $-\text{id}$ на $K_X^{\perp} \otimes \mathbb{R}$, имеем $\text{tr}((\gamma \circ g)^* \circ \sigma^*) = -5$, а потому поверхность $X_{\mathbb{C}}$ является $\langle g \rangle \times \Gamma$ -минимальной.

4.8.1. Случай $G \cong \mathbb{Z}/4$

Пусть g — порождающий $G_B \subset \text{PGL}_3(\mathbb{R}) \cong \text{SL}_3(\mathbb{R})$. Можем предполагать, что g действует как $[x : y : z] \mapsto [-y : x : z]$. Уравнение B принимает вид

$$z^4 + Az^2(x^2 + y^2) + B(x^4 + y^4) + Cx^2y^2 + D(x^3y - xy^3) = 0. \quad (4.11)$$

Имеются две возможности для действия g на X :

$$(4^+) [x : y : z : w] \mapsto [-y : x : z : w] \quad \text{или} \quad (4^-) [x : y : z : w] \mapsto [-y : x : z : -w].$$

Рассмотрим эти случаи отдельно.

4⁺ Пусть $p = [x : y : z : w] \in \mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$ — неподвижная точка g . Тогда либо $p = [0 : 0 : z : w]$, либо $p = [1 : \pm i : 0 : 0]$. Условие $p \in X$ влечет $w/z^2 = \pm 1$ в первом случае и $2B - C \pm 2iD = 0$ во втором. Значит, во втором случае $C = 2B$, $D = 0$, поэтому F принимает вид

$$z^4 + Az^2(x^2 + y^2) + B(x^2 + y^2)^2 = 0, \quad (4.12)$$

и кривая B особа. Следовательно, $\text{Fix}(g, X_{\mathbb{C}}) = \{[0 : 0 : 1 : \pm 1]\}$ и $\text{tr } g^* = -1$. Значит, g^* имеет тип $A_3 \times A_1^2$ или A_3^2 .

В первом случае $\text{Sp}(g^*) = \{\pm i, -1^3, 1^2\}$, поэтому $\text{Sp}(g^2)^* = \{-1^2, 1^5\}$ и $(g^2)^*$ не может иметь тип A_1^4 , противоречие. Остается случай A_3^2 . Он

действительно реализуется, см. Пример 4.8.5

4⁻ Как выше, пусть $p = [x : y : z : w] \in \mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$ — неподвижная точка g . Тогда $p = [1 : \pm i : 0 : \beta]$, где $\beta = w/x^2$. Поскольку множество $X(\mathbb{C})^g$ непусто, оно состоит из четырех точек $[1 : \pm i : 0 : \beta]$, где $\beta^2 = 2B - C + 2iD$ или $\beta^2 = 2B - C - 2iD$ (все точки различны: иначе $2B = C$ и $D = 0$, что дает особую кватику).

Таким образом, $\#\text{Fix}(g, X_{\mathbb{C}}) = 4$, откуда $\text{tr } g^* = 1$ и g^* принадлежит классу $(A_3 \times A_1)'$, $(A_3 \times A_1)''$ или $D_4(a_1) \times A_1$ в $\mathscr{W}(E_7)$. Те же аргументы, что и в случае (4⁺) исключают первые два класса. Оставшийся случай реализуется, см. Пример 4.8.5.

Пример 4.8.5. (См. также [38, Example 6.14]) Рассмотрим гладкую вещественную поверхность дель Пеццо

$$X = \{[x : y : z : w] : x^4 + 6x^2y^2 + y^4 - 2z^4 = w^2\} \subset \text{Proj } \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(1, 1, 1, 2).$$

Кривая $B = \{[x : y : z] : x^4 + 6x^2y^2 + y^4 - 2z^4 = 0\}$ — гладкая плоская кватику с одним овалом. Несложно найти ее бикасательные и 56 исключительных кривых на $X_{\mathbb{C}}$:

$$\begin{aligned} & \{w = \pm\sqrt{2}iz^2, \quad x = \alpha_1y\}, \quad \alpha_1 = i(\pm 1 \pm \sqrt{2}), \\ & \{w = \pm(x^2 + 3y^2), \quad z = \alpha_2y\} \quad \text{и} \quad \{w = \pm(3x^2 + y^2), \quad z = \alpha_2x\}, \quad \alpha_2^2 = \pm 2i, \\ & \{w = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(x - y)^2, \quad z = \alpha_3(x + y)\} \quad \text{и} \\ & \{w = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)^2, \quad z = \alpha_3(x - y)\}, \quad \alpha_3^2 = \pm\frac{1}{2}, \\ & \{w = \pm i(x^2 + 4ixy - y^2), \quad z = \alpha_4(x + iy)\} \quad \text{и} \\ & \{w = \pm i(x^2 - 4ixy - y^2), \quad z = \alpha_4(x - iy)\}, \quad \alpha_4^2 = \pm 1. \end{aligned}$$

(в [38] эти множества названы θ -, η -, σ -, и τ -прямыми соответственно). Рассмотрим автоморфизм $g : [x : y : z : w] \mapsto [-y : x : z : \pm w]$. Легко проверить, что не существует несвязных определенных над \mathbb{R} орбит $\langle g \rangle$, поэтому X является $\langle g \rangle$ -минимальной.

4.8.2. Группы $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$, \mathfrak{S}_3 , D_4 , \mathfrak{A}_4 , \mathfrak{S}_4

Можно считать, что эти группы содержат либо элемент порядка 2, либо элемент порядка 4, которые были описаны нами выше. Значит, действия этих групп на поверхности X действительно могут быть минимальными. Отметим, однако, что в данном тексте мы не классифицируем возможные вещественные структуры на таких поверхностях X .

4.9. Поверхности дель Пеццо степени 1

Пусть X — поверхность дель Пеццо степени 1 над полем \mathbb{k} . Ее антиканоническая модель $\text{Proj} \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, -nK_X)$ является гладкой гиперповерхностью $f(w, x, y, z) = 0$ степени 6 в $\mathbb{P}_{\mathbb{k}}(3, 1, 1, 2)$. Запишем $f(w, x, y, z) = w^2 - g_3(x, y, z)w - g_6(x, y, z)$, где $g_i \in \mathbb{k}[x, y, z]$ — многочлен взвешенной степени i . Если $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$, замена переменных $w \mapsto w + g_3/2$ приводит уравнение к форме

$$w^2 = Az^3 + z^2h_2(x, y) + zh_4(x, y) + h_6(x, y).$$

При $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ можно также сделать замену переменных $z \mapsto z/\sqrt[3]{A} - B/3\sqrt[3]{A^2}$ и привести уравнение X к виду

$$w^2 = z^3 + f_4(x, y)z + f_6(x, y). \quad (4.13)$$

Линейная система $| -2K_X |$ не имеет базисных точек, а соответствующее ей отображение представляет X в виде двойного накрытия квадратичного конуса $Q \subset \text{Proj } \mathbb{R}[x, y, z]$. Инволюция Галуа β этого накрытия называется *инволюцией Бертини* и действует как

$$[w : x : y : z] \mapsto [-w : x : y : z] = [w : -x : -y : z].$$

Множество неподвижных точек X^β состоит из кривой $R \subset Q$ рода 4 и точки q . Эта точка — единственная базисная точка эллиптического пучка $| -K_X |$; в частности, $q \in X(\mathbb{R})$.

Вещественные формы \mathbb{R} -рациональных поверхностей дель Пеццо степени 1 перечислены в таблице 4.5.

Таблица 4.5: \mathbb{R} -формы \mathbb{R} -рациональных поверхностей дель Пеццо степени 1

Класс σ^*	$\mathrm{Sp}(\sigma^*)$	$\mathrm{tr} \sigma^*$	$X(\mathbb{R})$	# вещественных (-1) -кривых
—	1^8	8	$\#9\mathbb{RP}^2$	240
A_1	$-1, 1^7$	6	$\#7\mathbb{RP}^2$	126
A_1^2	$-1, -1, 1^6$	4	$\#5\mathbb{RP}^2$	60
A_1^3	$-1, -1, -1, 1^5$	2	$\#3\mathbb{RP}^2$	26
$A_1^{4''}$	$-1, -1, -1, -1, 1^4$	0	\mathbb{RP}^2	8

Поскольку $\mathrm{Aut}(X)$ фиксирует точку q , имеется естественное точное представление

$$\mathrm{Aut}(X) \hookrightarrow \mathrm{GL}(T_q X) \cong \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}),$$

поэтому либо $\mathrm{Aut}(X) \cong \mathbb{Z}/n$, либо $\mathrm{Aut}(X) \cong D_n$.

Пусть $G \subset \mathrm{Aut}(X)$. Действие G на пучке $|-K_X|$ индуцирует действие на $C = \mathrm{Proj} \mathbb{R}[x, y] \cong \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ (напомним, что по построению $\{x, y\}$ суть базис $H^0(X, -K_X)$). Значит, имеется естественный гомоморфизм

$$v : G \rightarrow \mathrm{Aut}(C) = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{R}). \quad (4.14)$$

Положим $G_0 = G \cap \mathrm{Ker} v$. Каждый элемент G_0 действует на $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}(3, 1, 1, 2)$ как $\mathrm{diag}\{\alpha, \varepsilon, \varepsilon, \beta\}$, где $\varepsilon = \pm 1$, и $\varepsilon^6 = \alpha^2 = \beta^3$. Значит, $\beta = 1$, $\alpha = \pm 1$ и $|G_0| \leq 2$. Более того, $G_0 \cong \mathbb{Z}/2$ означает $\beta \in G$.

Поскольку каждый $g \in G \subset \mathrm{Aut}(X)$ сохраняет уравнение (4.13), автоморфизм g должен иметь вид

$$[w : x : y : z] \mapsto [w : ax + by : cx + dy : z], \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

В частности, $f_4(x, y)$ и $f_6(x, y)$ — абсолютные инварианты G . Согласно списку базисных инвариантов из раздела 2.6.2, при $n > 4$, $n \neq 6$, имеем $f_4 = a(x^2 + y^2)^2$ и $f_6 = b(x^2 + y^2)^3$, откуда $27f_6^2 + 4f_4^3 = (27b^2 + 4a^3)(x^2 + y^2)^6$, что влечет особость поверхности X . Таким образом, группа G может быть одной

из следующих:

$$\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/4, \mathbb{Z}/6, \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2, D_3, D_4, D_6.$$

Основной результат этого параграфа состоит в следующем.

Предложение 4.9.1. Пусть X — \mathbb{R} -рациональная поверхность дель Пеццо степени 1 и G — конечная группа, действующая минимально на X . Предположим, что G не изоморфна группе D_3 . Тогда G содержит инволюцию Бертини и имеет место один из следующих случаев:

Таблица 4.6: Минимальные группы автоморфизмов вещественных поверхностей дель Пеццо степени 1

G	Порожд.	$f_4(x, y)$	$f_6(x, y)$
<i>Циклические группы $G = \langle r \rangle$</i>			
$\mathbb{Z}/2$	β	$f_4(x, y)$	$f_6(x, y)$
$\mathbb{Z}/4$	R_4	$ax^4 + bx^2y^2 + ay^4 + cxy(x^2 - y^2)$	$(x^2 + y^2) \times (a'x^4 + d'x^3y + b'x^2y^2 - d'xy^3 + a'y^4)$
$\mathbb{Z}/6$	R_6	$a(x^2 + y^2)^2$	$b(x^2 + y^2)^3 + c(x^6 - 15x^4y^2 + 15x^2y^4 - y^6) + d(6x^5y - 20x^3y^3 + 6xy^5)$
<i>Диэдральные группы $G = \langle R_n, S \mid R_n^n = S^2 = 1, SR_nS^{-1} = R_n^{-1} \rangle$</i>			
$(\mathbb{Z}/2)^2$	R_2, S	$ax^4 + bx^2y^2 + cy^4$	$a'x^6 + b'x^4y^2 + c'x^2y^4 + d'y^6$
D_4	R_4, S	$ax^4 + bx^2y^2 + ay^4$	$(x^2 + y^2)(a'x^4 + b'x^2y^2 + a'y^4)$
D_6	R_6, S	$a(x^2 + y^2)^2$	$b(x^2 + y^2)^3 + c(x^6 - 15x^4y^2 + 15x^2y^4 - y^6)$

В доказательстве мы отдельно рассматриваем случай четного и нечетного порядков. Мы покажем, что группа нечетного порядка не может действовать минимально на \mathbb{R} -рациональной поверхности дель Пеццо степени 1. Затем мы покажем, что группы четного порядка ичерпываются списком, приведенным в предложении 4.9.1.

Подгруппы нечетного порядка

Каждый вырожденный член линейной системы $|-K_{X_{\mathbb{C}}}|$ является неприводимой кривой арифметического рода 1. Следовательно, это рациональная кривая с единственной особой точкой, которая является либо нодом, либо каспом. Обозначим через n_{cusp} число каспидальных кривых Z_{cusp} , а через n_{node} — число нодальных кривых Z_{node} в $|-K_{X_{\mathbb{C}}}|$.

Лемма 4.9.2. *Имеем*

$$n_{\text{node}} + 2n_{\text{cusp}} = 12.$$

Доказательство. Пусть $\tilde{X}_{\mathbb{C}}$ — раздутие $X_{\mathbb{C}}$ в точке q . Тогда

$$\text{Eu}(\tilde{X}_{\mathbb{C}}) = n_{\text{node}} \text{Eu}(Z_{\text{node}}) + n_{\text{cusp}} \text{Eu}(Z_{\text{cusp}}) = n_{\text{node}} + 2n_{\text{cusp}}.$$

С другой стороны,

$$\text{Eu}(\tilde{X}_{\mathbb{C}}) = \text{Eu}(X_{\mathbb{C}}) + 1 = \text{Eu}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2) + 8 + 1 = 12.$$

□

Рассмотрим гомоморфизм (4.14). Возможны два случая

Случай $v(G) = \text{id}$. Поскольку C можно отождествить с $\mathbb{P}(T_q X)$, образ G в $\text{GL}(T_q X)$ состоит из скалярных матриц. Это невозможно, если порядок G нечетный.

Случай $v(G) \neq \text{id}$. На $C_{\mathbb{C}}$ имеется ровно две комплексно-сопряженных неподвижных точки. Эти точки соответствуют сопряженным G -инвариантным кривым S и $\sigma(S)$ в линейной системе $|-K_{X_{\mathbb{C}}}|$. Возможны следующие случаи:

а) Пусть S и $\sigma(S)$ — нодальные кривые. Рассмотрим нормализацию $\nu : \hat{S} \rightarrow S$. Циклическая группа G имеет три неподвижные точки $\nu^{-1}(\text{node})$ и $\nu^{-1}(q)$ на $\hat{S} \cong \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. Значит, G действует тривиально на S , что невозможно.

б) Пусть S и $\sigma(S)$ — каспидальные кривые. Положим $n_{\text{cusp}} = n'_{\text{cusp}} + 2$. Тогда $n_{\text{node}} + 2n'_{\text{cusp}} = 8$, поэтому для пары $(n_{\text{node}}, n'_{\text{cusp}})$ имеются следующие

ВОЗМОЖНОСТИ:

$$(0, 4), (2, 3), (4, 2), (6, 1), (8, 0).$$

Очевидно, что ни один из этих случаев не реализуется, поскольку кривые с одинаковым типом особенности должны переставляться группой G .

с) Наконец, пусть S и $\sigma(S)$ — гладкие эллиптические кривые. Хорошо известно, что порядок автоморфизма эллиптической кривой (сохраняющего групповую структуру) делит 24. Значит, $G = \langle g \rangle_3 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. На каждой кривой имеется ровно 3 неподвижные точки и $\{q\} = S(\mathbb{R}) = \sigma(S)(\mathbb{R})$ — единственная *вещественная* G -неподвижная точка. Заметим, что в общей сложности имеется 5 неподвижных точек. По формуле Лефшеца получаем

$$\mathrm{tr}(g^*) = \# \mathrm{Fix}_{X_{\mathbb{C}}}(g) - 3 = 2.$$

Классификация элементов порядка 3 в группе $\mathscr{W}(E_8)$ приведена в таблице 4.7.

Таблица 4.7: Элементы порядка 3 в $\mathscr{W}(E_8)$

Граф Картера	Характеристический многочлен	След на пространстве $K_{X_{\mathbb{C}}}^{\perp}$
A_2	$(t^2 + t + 1)(t - 1)^6$	5
A_2^2	$(t^2 + t + 1)^2(t - 1)^4$	2
A_2^3	$(t^2 + t + 1)^3(t - 1)^2$	-1
A_2^4	$(t^2 + t + 1)^4$	-4

Мы видим, что g^* принадлежит классу A_2^2 и

$$\mathrm{Sp}(g^*) = \{1, 1, 1, 1, \omega_3, \bar{\omega}_3, \omega_3, \bar{\omega}_3\}.$$

Согласно лемме 2.3.9, поверхность $X_{\mathbb{C}}$ не $\langle g \rangle$ -минимальна для такого g . Значит, $\eta(\Gamma) \neq \mathrm{id}$, и нас интересуют элементы порядка 6 в $\mathscr{W}(E_8)$. Заметим, что для $\mathrm{Sp}(g \circ \sigma)^*$ имеются только 3 возможности:

Собств. числа	Характ. многочлен	$\text{tr}(g \circ \sigma)^*$
$-1, -1, -1, -1, \omega_3, \bar{\omega}_3, \omega_3, \bar{\omega}_3$	$(t+1)^4(t^2+t+1)^2$	-6
$-1, -1, -1, -1, -\omega_3, -\bar{\omega}_3, \omega_3, \bar{\omega}_3$	$(t+1)^4(t^2+t+1)(t^2-t+1)$	-4
$-1, -1, -1, -1, -\omega_3, -\bar{\omega}_3, -\omega_3, -\bar{\omega}_3$	$(t+1)^4(t^2-t+1)^2$	-2

В таблице 6.2 перечисляются все классы сопряженности элементов порядка 6 в группе $\mathscr{W}(E_8)$. Оказывается, что только третий случай из таблицы выше реализуется. Этот элемент принадлежит классу D_4^2 . Более того, комплексное сопряжение σ^* должно действовать как $-\text{id}$ на $K_{X_C}^\perp$, то есть $\sigma^* = \beta^*$. Следовательно, поверхность X является \mathbb{R} -минимальной. Но это означает, что она не рациональна над \mathbb{R} .

Замечание 4.9.3. В отличие от случаев $K_X^2 = 2$ и $K_X^2 = 3$, для поверхностей дель Пеццо степени 1 от требования \mathbb{R} -рациональности можно избавиться:

Предложение 4.9.4. Пусть X — вещественная поверхность дель Пеццо степени 1 с $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ и $G \subset \text{Aut}(X)$ — подгруппа нечетного порядка. Тогда X не может быть G -минимальной.

Доказательство. Согласно сказанному выше, достаточно доказать, что $G = \mathbb{Z}/3$ не может действовать минимально на X . Предположим противное. Тогда существует единственная неподвижная точка $q \in X$ (базисная точка эллиптического пучка). Более того, X должна быть минимальна над \mathbb{R} . По [18, Theorem 6.8], имеем

$$X(\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}P^2 \sqcup 4S^2.$$

Очевидно, одна из сфер должна быть G -инвариантной. С другой стороны, любой диффеоморфизм $S^2 \rightarrow S^2$ нечетного порядка имеет неподвижную точку, и то же самое верно для диффеоморфизма $\mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ (см., например, [59, Chapter 2, §2C]). Значит, имеется хотя бы две неподвижные точки. Противоречие. \square

Подгруппы четного порядка

Все группы из таблицы 4.6 содержат инволюцию Бертини, поэтому действуют минимально на X . Чтобы выписать соответствующие уравнения, нужно воспользоваться разделом 2.6.2. Таким образом, остается исключить группы, не содержащие инволюцию Бертини. Ниже мы предполагаем, что $\beta \notin G$.

Случай $G = \mathbb{Z}/2$

Пусть g порождает G . Мы можем считать, что g действует на $T_q X \cong \mathbb{R}^2$ как $\text{diag}\{-1, 1\}$. Множество $X_{\mathbb{C}}^g$ состоит из эллиптической кривой $x = 0$ и двух или трех изолированных точек $w = y = 0$, поэтому $\text{tr } g^* \in \{-1, 0\}$. Однако группа $\mathcal{W}(E_8)$ не содержит инволюций со следом -1 , поэтому мы предполагаем $\text{tr } g^* = 0$. Если $X_{\mathbb{C}}$ является $\Gamma \times G$ -минимальной, то $\text{tr id}^* + \text{tr } g^* + \text{tr } \sigma^* + \text{tr}(\sigma \circ g)^* = 8 + \text{tr } \sigma^* + \text{tr}(\sigma \circ g)^* = 0$. Значит, $\text{tr } \sigma^* = 0$, $\text{tr}(\sigma \circ g)^* = -8$ (см. таблицу 4.5). Последнее равенство влечет $\sigma^* = g^* \circ \beta^*$.

Применим к $X_{\mathbb{C}}$ две H -эquivариантные программы минимальных моделей, одну для $H = \langle \sigma \rangle$, а другую — для $H = \langle g \circ \beta \rangle$. Общий результат этих программ суть некоторая поверхность дель Пеццо Z . Поскольку $g \circ \beta$ фиксирует эллиптическую кривую на X (как и g), имеем $K_Z^2 \leq 4$ (легко проверить, что поверхность дель Пеццо Z с $K_Z^2 > 4$ не может содержать эллиптическую кривую неподвижных точек). С другой стороны, Z минимальна над \mathbb{R} , а потому не является \mathbb{R} -рациональной. Но тогда и поверхность X не является \mathbb{R} -рациональной, противоречие.

Случай $G = \mathbb{Z}/2n$, $n \geq 2$

Пусть g порождает G . Если G не содержит инволюцию Бертини, мы можем считать, что g^n действует как $\text{diag}\{-1, 1\}$ на $T_q X$, поэтому $\det g^n = -1$. Но каждый элемент $h \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ порядка $2 < \text{ord } h < \infty$ имеет определитель 1, противоречие.

Случай $G = D_n$, $n \geq 2$

Легко видеть, что $G = D_2 \cong (\mathbb{Z}/2)^2$ всегда содержит инволюцию Бертини. Рассмотрим случай $n > 2$, где n четно (в действительности, поскольку мы уже знаем список возможных групп, нужно рассмотреть только случай $n = 4$). Тогда G содержит элемент порядка n , чья $(n/2)$ -я степень не является инволюцией Бертини. Как и в предыдущем случае, легко показать, что такая ситуация невозможна.

Вложение в $\text{Cr}_2(\mathbb{R})$ и линеаризуемость

Априори не ясно, что коэффициенты форм f_4 и f_6 в таблице 4.6 можно выбрать таким образом, что соответствующая поверхность будет рациональна над \mathbb{R} . Один из возможных подходов к этой проблеме состоит в следующем.

Пусть \tilde{X} обозначает раздутие X в точке q . По теореме 2.4.1, поверхность X является \mathbb{R} -рациональной если, и только если множество $\tilde{X}(\mathbb{R})$ связно. Поверхность \tilde{X} является эллиптическим расслоением над $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ с сечением, определенным над \mathbb{R} (исключительным дивизором). Как показано в [39, §5], множество $\tilde{X}(\mathbb{R})$ связно, если $\text{Eu}(\tilde{X}(\mathbb{R})) < 0$. Далее, $\text{Eu}(\tilde{X}(\mathbb{R}))$ равно сумме эйлеровых характеристик вырожденных слоев.

Заметим, что вклад в эйлерову характеристику дают только нодальные слои. Особенность, эквивалентная $y^2 = x^3 - x^2$ над \mathbb{R} (т.н. «асноде»), прибавляет единицу к эйлеровой характеристике, а особенность, эквивалентная $y^2 = x^3 + x^2$, — вычитает единицу, см. Рис. 4.3.

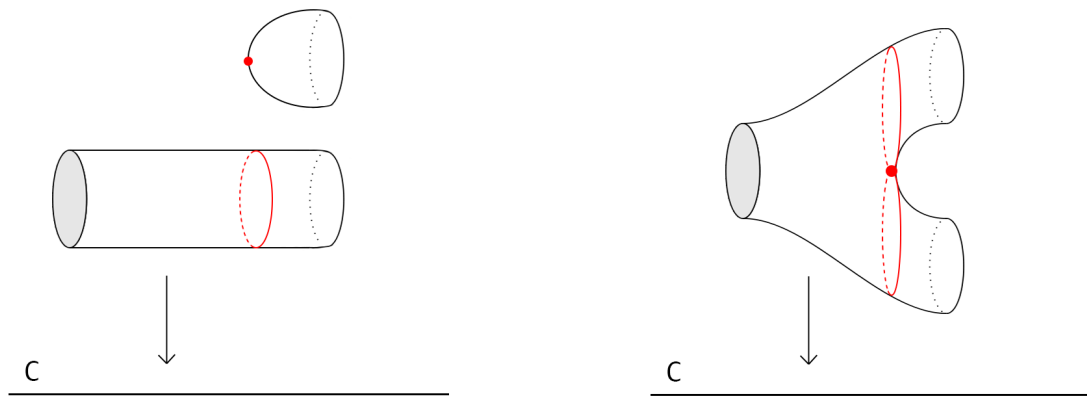


Рис. 4.3: Переход от слоя с одной компонентой связности к слою с двумя компонентами через асноде (слева) и cunode (справа).

Простые вычисления показывают, что коэффициенты форм $f_4(x, y)$ и $f_6(x, y)$ можно выбрать так, что количество кривых с особенностью cunode в (4.13) превосходит количество кривых с особенностью асноде, поэтому $\text{Eu}(\tilde{X}(\mathbb{R})) < 0$.

Итак, все группы G из таблицы 4.6 действительно вкладываются в $\text{Cr}_2(\mathbb{R})$. Наконец, заметим, что класс сопряженности $G \subset \text{Cr}_2(\mathbb{R})$ полностью определяется классом сопряженности $G \subset \text{Aut}(X)$, поскольку поверхности

дель Пецо степени 1 являются супержесткими, см. [50, теорема 2.6]. В частности, группы из таблицы 4.6 не линеаризуются.

Автоморфизмы вещественных расслоений на КОНИКИ

5.1. Линейчатые поверхности

Напомним, что для $n \geq 0$ через \mathbb{F}_n мы обозначаем поверхность Хирцебруха индекса n

$$\mathbb{F}_n = \{([x_0 : x_1 : x_2], [u, v]) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 : x_1 v^n = x_2 u^n\},$$

снабженную стандартной антиголоморфной инволюцией на $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$. Обозначим через π проекцию на второй сомножитель. Напомним, что $\mathbb{F}_0 \cong \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ и $\text{Aut}(\mathbb{F}_0, \pi) \cong \text{PGL}_2(\mathbb{R}) \times \text{PGL}_2(\mathbb{R})$. В этом случае все возможные конечные подгруппы $\text{Aut}(\mathbb{F}_0)$ могут быть описаны с использованием леммы Гурса, см. [13, Theorem 4.9]. Поверхность \mathbb{F}_1 изоморфна раздутию $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ в единственной (вещественной) точке, поэтому никогда не является G -минимальной.

Предложение 5.1.1. *Пусть G — конечная группа, действующая на \mathbb{F}_n с $\text{rk Pic}(X)^G = 2$. Тогда G является либо циклической, либо диэдральной. Более того, пара (X, G) бирациональна (\mathbb{F}_0, G) или $(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2, G)$.*

Доказательство. Следуя [13, Theorem 4.10], легко показать, что над \mathbb{R} имеем

$$\text{Aut}(\mathbb{F}_n) \cong \mathbb{R}^{n+1} \rtimes \text{GL}_2(\mathbb{R})/\mu_n,$$

где $\mu_n = \{\pm 1\}$ для четных n и $\mu_n = \{1\}$ для нечетных n . Каждая конечная подгруппа $G \subset \text{Aut}(\mathbb{F}_n)$ содержится в $\text{GL}_2(\mathbb{R})/\mu_n$. Если n нечетно, утверждение очевидно. Предположим, что n четно. Имеем цепочку нормальных подгрупп $\{\pm 1\} \triangleleft \mathbb{R}^* \triangleleft \text{GL}_2(\mathbb{R})$, поэтому

$$(\text{GL}_2(\mathbb{R})/\{\pm 1\})/(\mathbb{R}^*/\{\pm 1\}) \cong \text{GL}_2(\mathbb{R})/\mathbb{R}^* \cong \text{PGL}_2(\mathbb{R}),$$

но $\mathbb{R}^*/\{\pm 1\} \cong \mathbb{R}_{>0}^*$. Значит, все конечные подгруппы вкладываются в $\text{PGL}_2(\mathbb{R})$ в данном случае.

Рассмотрим теперь короткую точную последовательность

$$1 \longrightarrow G_F \longrightarrow G \xrightarrow{\varphi} G_B \longrightarrow 1.$$

Предположим, что группа G циклическая. Тогда G_B также циклическая и существует пара комплексно сопряженных точек¹ $p_1, p_2 = \sigma(p_1) \in B_{\mathbb{C}}$, неподвижных относительно G_B . Группа G действует на слоях $F_i = \pi^{-1}(p_i)$ и фиксирует по две точки на каждом из них. Делая G -эквивариантные элементарные преобразования с центрами в двух комплексно сопряженных точках G -неподвижных точках $q_i \in F_i$, не лежащих на исключительном $(-n)$ -сечении, мы получаем поверхность $X' \cong \mathbb{F}_{n-2}$. Продолжая этот процесс, мы получим либо поверхность \mathbb{F}_1 , которая не G -минимальна, либо \mathbb{F}_0 .

Пусть теперь G — диэдральная группа D_n . Тогда либо (i) $G_B \cong \mathbb{Z}/2$, $G_F \cong D_{n/2}$, либо (ii) $G_B \cong D_k$, $G_F \cong \mathbb{Z}/(n/k)$. В случае (i) G_B фиксирует две вещественные точки $p_i \in B(\mathbb{R})$ и G действует на каждом слое $F_i = \pi^{-1}(p_i) \cong \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$, $i = 1, 2$. Существует две сопряженных точки $q_1, q_2 \in F_1(\mathbb{C})$, которые переставляются группой G . Ни одна из них не лежит на $(-n)$ -сечении, так как последнее Γ -инвариантно и пересекает F_1 с кратностью один. Значит, мы можем совершать G -эквивариантные элементарные преобразования с центрами в q_1, q_2 , завершая доказательство как в предыдущем случае.

Наконец, предположим, что имеет место случай (ii). Пусть $p_1, p_2 \in B(\mathbb{C})$ — сопряженные точки, фиксируемые циклической подгруппой $G'_B \subset G_B$ индекса 2. Группа $G' = \varphi^{-1}(G'_B)$ действует на каждом слое $F_i = \pi^{-1}(p_i)$, $i = 1, 2$. Поскольку G_F циклическая, G' фиксирует две точки, скажем, q_{i1} и q_{i2} на каждом F_i . Ясно, что множество $\{q_{ij}\}$ содержит пару сопряженных точек, переставляемых группой G и не лежащих на $(-n)$ -сечении. Дальнейшее очевидно. \square

5.2. Группы нечетного порядка

Основным результатом данного параграфа является следующее утверждение (теорема 1.2.5 из введения).

Теорема 5.2.1. *Любая конечная подгруппа $\text{Cr}_2(\mathbb{R})$ нечетного порядка сопряжена подгруппе в группе автоморфизмов некоторой вещественной поверх-*

¹Мы предполагаем, что $|G_F|, |G_B| > 2$; остальные случаи разбираются аналогично.

ности дель Пеццо. Более точно, справедливо одно из следующих утверждений:

1. $\text{rk Pic}(X)^G = 1$, и X является \mathbb{R} -рациональной;
2. $\text{rk Pic}(X)^G = 2$, $X \cong \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ и G изоморфна произведению не более чем двух циклических групп.

Доказательство. Можем считать, что группа G действует минимально на вещественном расслоении на коники X . Поскольку поверхность X предполагается \mathbb{R} -рациональной, имеем $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$. Значит, $C(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ и $C \cong \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$.

Кроме того, мы можем предполагать X относительно минимальной. Действительно, предположим, что существует исключительная кривая E , чья неприводимая компонента содержится в особых слоях π . Возможны следующие два случая:

- (a) E — вещественная неприводимая компонента некоторого особого слоя $E + E'$;
- (b) $E = F + \sigma(F)$, $F \cap \sigma(F) = \emptyset$, где $F + N_1$ и $\sigma(F) + N_2$ — два различных особых слоя.

Заметим, что G -минимальность X влечет существование $g \in G$, такого что $g(E) = E'$ в случае **(a)**, и $g(F) = N_1$ или $g(\sigma(F)) = N_1$ в случае **(b)**. В обоих случаях g имеет четный порядок, поэтому мы приходим к противоречию. Действительно, в случае **(a)** имеем $g(E') = E$ (поскольку g сохраняет форму пересечения), $g^2(E') = E'$ и $\text{ord } g = 2n + 1$ влечет $E = g^{2n+1}(E) = g^{2n}(E') = E'$, противоречие. Рассмотрим случай, когда $g(\sigma(F)) = N_1$ (если $g(F) = N_1$, аргументы те же, что и выше). Имеем $g(N_2) = F$, $\sigma(N_2) = N_1$, поэтому $g(N_1) = g(\sigma(N_2)) = \sigma(g(N_2)) = \sigma(F)$. Значит, $g^2(N_1) = g(\sigma(F)) = N_1$ и $\text{ord } g = 2n + 1$ влечет $\sigma(F) = g^{2n+1}(\sigma(F)) = g^{2n}(N_1) = N_1$, противоречие.

Итак, $\rho(X) = 2$ и G действует тривиально на $\text{Pic}(X)$. Если поверхность X не минимальна, то существует бирациональный морфизм $X \rightarrow X'$, где X' — поверхность дель Пеццо [49, теорема 4]. Поскольку G действует тривиально на $\text{Pic}(X)$, этот морфизм является G -эквивариантным и утверждение доказано.

Пусть теперь поверхность X минимальна. Это означает, что $X \cong \mathbb{F}_n$, $n \neq 1$. Обозначим через G' образ G в $\text{Aut}(C) \cong \text{PGL}_2(\mathbb{R})$. Поскольку G имеет

нечетный порядок, группа G' обязана быть циклической. Предположим, что $n > 0$. Имеется две возможности.

1. $G' \neq \{\text{id}\}$. Тогда существует две G' -неподвижные точки $p_1, p_2 = \sigma(p_1) \in C_{\mathbb{C}} \cong \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, соответствующие G -инвариантным слоям F_1 и $F_2 = \sigma(F_1)$. Делая G -эквивариантные элементарные преобразования с центрами в двух комплексно сопряженных G -неподвижных точках $q_i \in F_i$, не лежащих на исключительном $(-n)$ -сечении, получаем поверхность $X' \cong \mathbb{F}_{n-2}$. Продолжая этот процесс, мы в конце концов получим либо поверхность \mathbb{F}_1 , которая не G -минимальна, либо $\mathbb{F}_0 \cong \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$.

2. $G' = \{\text{id}\}$. Тогда G действует автоморфизмами слоев, которые изоморфны $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$, поэтому на каждом слое имеется две комплексно сопряженных неподвижных точки. Одна из этих точек лежит на $(-n)$ -сечении C_n , а другая лежит на некотором n -сечении. Однако $(-n)$ -сечение всегда Γ -инвариантно и пересекает каждый слой ровно в одной точке. Значит, этот случай не реализуется (поскольку сопряженные точки не могут лежать одновременно на одном и том же слое и на $(-n)$ -сечении).

Итак, нам осталось рассмотреть случай $n = 0$, то есть $X \cong \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$.

Предложение 5.2.2. Пусть $X \cong \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ и $\text{Pic}(X)^G \cong \mathbb{Z}^2$. Тогда

$$G \subseteq \langle R_l \rangle \times \langle R_m \rangle$$

для некоторых $l, m \in \mathbb{Z}_{>1}$.

Доказательство. Напомним, что

$$\text{Aut}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1) = (\text{PGL}_2(\mathbb{R}) \times \text{PGL}_2(\mathbb{R})) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Поскольку G имеет нечетный порядок, $G \subset \text{PGL}_2(\mathbb{R}) \times \text{PGL}_2(\mathbb{R})$. Пусть

$$\pi_i : \text{PGL}_2(\mathbb{R}) \times \text{PGL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \text{PGL}_2(\mathbb{R}), \quad i = 1, 2,$$

— проекция на i -й сомножитель. Тогда $G \subseteq \pi_1(G) \times \pi_2(G)$ и утверждение следует из предложения 2.6.1. □

Теорема 5.2.1 доказана. □

Некоторые классы конечных групп

В этой главе мы даем полное описание некоторых классов конечных групп, действующих на вещественных рациональных поверхностях и представляющих отдельный интерес.

6.1. Простые группы

Наша цель — классифицировать конечные простые группы, действующие на вещественных \mathbb{C} -рациональных поверхностях. Напомним сначала, что известно в случае $\mathbb{k} = \mathbb{C}$. Следствием работы [13] является следующая теорема.

Теорема 6.1.1. *Пусть $G \subset \mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ — конечная неабелева простая группа. Тогда G изоморфна одной из следующих групп:*

$$\mathfrak{A}_5, \quad \mathfrak{A}_6, \quad \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7).$$

Более точно, имеется следующая характеристика этих групп.

- Имеется ровно два класса сопряженности группы $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$. Во-первых, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$ вкладывается в $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$ и сохраняет кватрику Клейна $x^3y + y^3z + z^3x = 0$. Во-вторых, эта группа вкладывается в автоморфизмы двойного накрытия $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, разветвленного вдоль кватрики Клейна.
- Имеется 3 вложения группы \mathfrak{A}_5 в $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ с точностью до сопряженности. Во-первых, она вкладывается в $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$. Во-вторых, она вкладывается в $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$. В-третьих, она вкладывается в группу автоморфизмов поверхности дель Пецо степени 5.
- С точностью до сопряженности, имеется лишь одна копия группы Валентинера \mathfrak{A}_6 , действующая линейно на $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ и сохраняющая секстику

$$10x^3y^3 + 9x^5z + 9y^5z + 27z^6 - 45x^2y^2z^2 - 135xyz^4 = 0.$$

Замечание 6.1.2. Хотя полная классификация конечных подгрупп $\mathrm{Cr}_3(\mathbb{C})$ в настоящее время кажется недостижимой, Ю. Г. Прохоров нашел полный список конечных простых групп, которые вкладываются в $\mathrm{Cr}_3(\mathbb{C})$. Помимо \mathfrak{A}_5 , \mathfrak{A}_6 и $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$, имеется три новые группы

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_8), \quad \mathfrak{A}_7, \quad \mathrm{PSp}_4(\mathbb{F}_3).$$

в $\mathrm{Cr}_3(\mathbb{C})$, см. [25].

В случае $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ имеем следующий результат.

Теорема 6.1.3. *Пусть X — вещественная геометрически рациональная поверхность с $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, и $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ — конечная неабелева простая группа. Тогда $G \cong \mathfrak{A}_5$. Эта группа имеет три несопряженных вложения в $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{R})$. Первое — в $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$, второе — в $\mathrm{Aut}(Q_{3,1}) \cong \mathrm{PO}(3,1)$, третье — в группу автоморфизмов вещественной поверхности дель Пеццо степени 5, полученной раздутием $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ в точках $[1 : 0 : 0]$, $[0 : 1 : 0]$, $[0 : 0 : 1]$, $[1 : 1 : 1]$.*

Доказательство. Как обычно, мы считаем, что G действует минимально либо на расслоении на коники $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$, либо на поверхности дель Пеццо. Рассмотрим первый случай. Поскольку мы предполагаем $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, имеем $C(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, так что $C \cong \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$. Гомоморфизм $G \rightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1) \cong \mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$ либо инъективен, либо тривиален. В обоих случаях G вкладывается в группу $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$, а потому является либо циклической группой, либо диэдральной.

Будем предполагать теперь, что G действует минимально на поверхности дель Пеццо X степени $d = K_X^2 \neq 7$. Рассмотрим каждое значение d отдельно.

$d = 9$ В этом случае $G \subset \mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$, поэтому $G \cong \mathfrak{A}_5$.

$d = 8$ Поверхность $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2(1,0)$ никогда не является G -минимальной. Если $X \cong \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$, мы применяем те же рассуждения, что и для расслоений на коники. Если $X \cong Q_{3,1}$, то $G \cong \mathfrak{A}_5$ реализуется как группа автоморфизмов икосаэдра, вписанного в сферу

$$\left(\frac{x}{w}\right)^2 + \left(\frac{y}{w}\right)^2 + \left(\frac{z}{w}\right)^2 = 1.$$

Действие минимально, поскольку $\mathrm{Pic}(Q_{3,1}) \cong \mathbb{Z}$.

$d = 6$ Тогда G — подгруппа $\text{Aut}(X_{\mathbb{C}}) \cong (\mathbb{C}^*)^2 \rtimes D_6$, а потому изоморфно отображается на подгруппу D_6 . Но D_6 не содержит неабелевых простых подгрупп.

$d = 5$ Тогда G — подгруппа $\text{Aut}(X_{\mathbb{C}}) \cong \mathfrak{S}_5$, поэтому $G \cong \mathfrak{A}_5$. Как мы уже видели, это действие может быть определено над \mathbb{R} и минимально.

$d = 4$ Тогда $X = Q_1 \cap Q_2 \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^4$ — пересечение двух квадрик и G действует на пучке $\mathcal{Q} = \langle Q_1, Q_2 \rangle \cong \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$. Значит, G действует тривиально на пучке \mathcal{Q} и фиксирует вершины его особых элементов (конусов). Но эти вершины порождают $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^5$, поэтому G абелева.

$d = 3$ Все возможные группы автоморфизмов комплексных кубических поверхностей хорошо известны, см. [12, Table 9.6]. Нам необходимо рассмотреть только группу $G \cong \mathfrak{A}_5$. Группа $G = \mathfrak{A}_5$ действует точно на $H^0(X, -K_X) \cong \mathbb{R}^4$. Известно¹, что существует ровно одно вещественное четырехмерное неприводимое представление группы \mathfrak{A}_5 . Значит, существует единственная \mathfrak{A}_5 -инвариантная кубическая поверхность в $\mathbb{P}H^0(X, -K_X)$; мы можем предполагать, что она задается уравнением

$$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 = 0$$

в $\text{Proj } \mathbb{R}[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$ (это знаменитая *кубика Клебша*). Более того, $S = S_6 \sqcup S'_6 \sqcup S_{15}$, $|S_k| = k$, где прямые из S_6 и S'_6 не пересекаются. Далее, имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \pi \swarrow & & \searrow \pi' \\ \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 & \text{-----} & \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2 \end{array}$$

такая что π (соотв. π') — бирациональный \mathfrak{A}_5 -морфизм, стягивающий S_6 (соотв. S'_6) в единственную \mathfrak{A}_5 -орбиту длины 6 на $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$. Следовательно, $\text{rk Pic}(X)^G = 2$, поэтому поверхность X не G -минимальна.

¹А именно, количество вещественных неприводимых представлений конечной группы G равно числу «классов вещественной сопряженности». По определению, два элемента вещественно сопряжены, если они либо сопряжены, либо обратный к одному из них принадлежит классу сопряженности другого. Известно, что для группы \mathfrak{A}_5 (как для частного случая *амбивалентной* (ambivalent) группы) число классов вещественной сопряженности равно числу классов обычной сопряженности, т. е. числу неприводимых комплексных представлений (при этом все эти представления могут быть определены над \mathbb{R}), см. [16, Chapter 23].

$d = 2$ Тогда G вкладывается в $\text{Aut}(B) \subset \text{PGL}_3(\mathbb{R})$, где B — гладкая кривая степени 4 над \mathbb{R} . Значит, $G \cong \mathfrak{A}_5$. С другой стороны, хорошо известно, что гладкая плоская кривая рода 3 не может иметь автоморфизм порядка 5.

$d = 1$ Любая группа $G \subset \text{Aut}(X)$ фиксирует единственную базисную точку $p \in X(\mathbb{R})$ эллиптического пучка $|-K_X|$. Значит, имеется точное представление $G \rightarrow \text{GL}(T_p X) \cong \text{GL}_2(\mathbb{R})$, и группа G — либо циклическая, либо диэдральная.

Наконец, заметим, что все три класса сопряженности \mathfrak{A}_5 в $\text{Cr}_2(\mathbb{R})$ (соответствующие $d = 5, 8, 9$) различны, поскольку они различны в $\text{Cr}_2(\mathbb{C})$. \square

Напомним, что группа G называется *квазипростой*, если $[G, G] = G$ и $G/Z(G)$ — простая группа. В [26] Ю. Г. Прохоровым было доказано, что каждая конечная квазипростая подгруппа $G \subset \text{Cr}_2(\mathbb{C})$, не являющаяся простой, изоморфна $2 \bullet \mathfrak{A}_5$ и вложение $G \subset \text{Cr}_2(\mathbb{C})$ индуцировано либо действием на $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, либо на расслоении на коники. Над \mathbb{R} ситуация следующая.

Предложение 6.1.4. *Каждая квазипростая подгруппа $\text{Cr}_2(\mathbb{R})$ является простой (и описана в теореме 6.1.3).*

Доказательство. Пусть $G \subset \text{Cr}_2(\mathbb{R})$ — конечная квазипростая группа, не являющаяся простой. Как обычно, считаем, что G действует бирегулярно на некоторой \mathbb{R} -рациональной поверхности X . Простая группа $H = G/Z(G)$ действует на $Y = X/Z(G)$. Поверхность Y , очевидно, унирациональна над \mathbb{C} , а потому \mathbb{C} -рациональна по теореме Кастельнуово. По теореме 6.1.3 получаем $H \cong \mathfrak{A}_5$. Как и в [26], несложно показать, что $Z(G) \cong \mathbb{Z}/2$ и G — бинарная группа икосаэдра $2 \bullet \mathfrak{A}_5$.

Предположим, что на X имеется G -эквивариантная структура расслоения на коники над $B \cong \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$. Ядро гомоморфизма $G \rightarrow \text{Aut}(B)$ совпадает с $Z(G) = \mathbb{Z}/2$, поскольку это единственная собственная нормальная подгруппа $2 \bullet \mathfrak{A}_5$. Значит, \mathfrak{A}_5 точно действует на общем слое, что невозможно.

Пусть теперь X — поверхность дель Пеццо, такая что $\text{rk Pic}(X)^G = 1$. Мы используем те же аргументы, что и в доказательстве теоремы 6.1.3. Заметим, что образ каждого нетривиального гомоморфизма из $2 \bullet \mathfrak{A}_5$ либо содержит \mathfrak{A}_5 , либо совпадает со всей группой. Это наблюдение позволяет

исключить все случаи² кроме $d = 3$. Остается заметить, что группа $2 \cdot \mathfrak{A}_5$ не действует ни на какой кубической поверхности, см. [12, Table 9.6]. \square

6.2. Неразрешимые группы

Следствием работы [13] является то, что группа $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ содержит восемь спорадических неразрешимых групп

\mathfrak{S}_5 , $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7)$, $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_7) \times \mathbb{Z}/2$, \mathfrak{A}_6 , $\mathfrak{A}_5 \times \mathfrak{A}_4$, $\mathfrak{A}_5 \times \mathfrak{S}_4$, $\mathfrak{A}_5 \times \mathfrak{A}_5$, $(\mathfrak{A}_5 \times \mathfrak{A}_5) \rtimes \mathbb{Z}/2$,

и четыре бесконечные серии $\mathfrak{A}_5 \times \mathbb{Z}/n$, $\mathfrak{A}_5 \times D_n$, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_5) \times \mathbb{Z}/n$ и $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_5) \times D_n$. Оказывается, над \mathbb{R} классификация существенно упрощается.

Теорема 6.2.1. *Пусть X — вещественная геометрически рациональная поверхность и $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ — конечная неразрешимая группа. Тогда пара (X, G) бирационально эквивалентна одной (и лишь одной) паре из следующих:*

- $(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2, \mathfrak{A}_5)$;
- $(Q_{3,1}, \mathfrak{A}_5)$ или $(Q_{3,1}, \mathfrak{A}_5 \times \mathbb{Z}/2)$;
- $(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2(4, 0), \mathfrak{A}_5)$ или $(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2(4, 0), \mathfrak{S}_5)$;
- (Y, \mathfrak{S}_5) , где Y — кубика Клебша.

Доказательство. Если G действует минимально на расслоении на коники, то имеет место короткая точная последовательность групп

$$1 \rightarrow G_F \rightarrow G \rightarrow G_B \rightarrow 1,$$

где группы G_F и G_B — либо циклические, либо диэдральные. Значит, G разрешима.

Таким образом, можем предполагать, что G минимально действует на вещественной поверхности дель Педро степени d . Если $d = 9$, то $G \cong \mathfrak{A}_5$. Если $d = 8$ и $X \cong Q_{2,2}$, то $G \cong H \cdot (\mathbb{Z}/2)^r$, где $r \in \{0, 1\}$ и H — подгруппа $H_1 \times H_2$, причем группы H_1 и H_2 — циклические либо диэдральные. Ясно, что

²Заметим, что $\mathrm{Aut}(Q_{3,1}) \cong \mathrm{PO}(3, 1)$ не содержит $2 \cdot \mathfrak{A}_5$, см. [22].

G разрешима в этом случае. Если $d = 8$ и $X \cong Q_{3,1}$, то $G \subset \text{PO}(3, 1)$, поэтому $G \cong \mathfrak{A}_5$ или $\mathfrak{A}_5 \times \mathbb{Z}/2$, см. [22]. При $d = 6$ предложение 4.4.2 показывает, что $G \cong H \bullet N$, где H — абелева группа и N — группа порядка не выше 6, поэтому G разрешима. Для $d = 5$ либо $G \cong \mathfrak{A}_5$, либо $G \cong \mathfrak{S}_5$ по предложению 4.5.1. Пусть $d = 4$. Тогда G — подгруппа $\mathscr{W}(D_5) \cong (\mathbb{Z}/2)^4 \rtimes \mathfrak{S}_5$, поэтому $G \cong A \bullet H$, где A — абелева группа и $H \subset \mathfrak{S}_5$. Более того, согласно [12, Theorem 8.6.8] имеем $|H| < 10$, что влечет разрешимость G .

Пусть $d = 3$. Таблица [12, Table 9.6] показывает, что $G \cong \mathfrak{A}_5$ или \mathfrak{S}_5 . Более того, мы уже знаем, что X изоморфна кубике Клебша, которая не является \mathfrak{A}_5 -минимальной. Пусть в обозначениях доказательства теоремы 6.1.3 ℓ_i , $i = 1, \dots, 6$ — элементы S_6 (напомним, что все прямые на кубике Клебша вещественны). Известно, что классы дивизоров ℓ_i и K_X порождают $\text{Pic}(X) \otimes \mathbb{R}$, поэтому $\text{Pic}(X)^{\mathfrak{A}_5} \otimes \mathbb{R}$ порождается K_X и суммой $\sum \ell_i$. Поскольку \mathfrak{S}_5 не сохраняет эту сумму, группа \mathfrak{S}_5 действует минимально на X .

Для $d = 2$ имеем $G \cong (\mathbb{Z}/2)^r \times H$, где $r \in \{0, 1\}$, и H — либо циклическая группа, либо диэдральная, либо имеет порядок < 60 . Значит, G разрешима. При $d = 1$ группа G вкладывается в $\text{GL}(T_q X) \cong \text{GL}_2(\mathbb{R})$, поэтому также разрешима.

Наконец, как было замечено в теореме 6.1.3, пары $(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2, \mathfrak{A}_5)$, $(Q_{3,1}, \mathfrak{A}_5)$ и $(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2(4, 0), \mathfrak{A}_5)$ попарно неизоморфны. Осталось заметить, что пара $(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2(4, 0), \mathfrak{S}_5)$ является супержесткой [13, 8.1]. \square

Приложение: классы сопряженности в некоторых группах Вейля

Таблица 6.1: Элементы порядка 2, 3 и 6 в $\mathcal{W}(E_7)$.

Порядок	Граф Картера	Характ. многочлен
2	A_1	$p_1(t-1)^6$
2	A_1^2	$p_1^2(t-1)^5$
2	$(A_1^3)'$	$p_1^3(t-1)^4$
2	$(A_1^3)''$	$p_1^3(t-1)^4$
2	$(A_1^4)'$	$p_1^4(t-1)^3$
2	$(A_1^4)''$	$p_1^4(t-1)^3$
2	A_1^5	$p_1^5(t-1)^2$
2	A_1^6	$p_1^6(t-1)$
2	A_1^7	p_1^7
3	A_2	$p_2(t-1)^5$
3	A_2^2	$p_2^2(t-1)^3$
3	A_2^3	$p_2^3(t-1)$
6	$A_2 \times A_1$	$p_2 p_1 (t-1)^4$
6	$A_2 \times A_1^2$	$p_2 p_1^2 (t-1)^3$
6	D_4	$(t^3 + 1)(t + 1)(t - 1)^3$
6	$A_2 \times A_1^3$	$p_2 p_1^3 (t-1)^2$
6	$A_2^2 \times A_1$	$p_2^2 p_1 (t-1)^2$
6	$(A_5)'$	$p_5(t-1)^2$
6	$(A_5)''$	$p_5(t-1)^2$
6	$D_4 \times A_1$	$(t^3 + 1)(t + 1)^2(t - 1)^2$
6	$(A_5 \times A_1)'$	$p_5 p_1 (t-1)$
6	$(A_5 \times A_1)''$	$p_5 p_1 (t-1)$
6	$D_4 \times A_1^2$	$(t^3 + 1)(t + 1)^3(t - 1)$
6	$D_6(a_2)$	$(t^3 + 1)^2(t - 1)$
6	$E_6(a_2)$	$(t^2 + t + 1)(t^2 - t + 1)^2(t - 1)$
6	$A_5 \times A_2$	$p_5 p_2$
6	$D_4 \times A_1^3$	$(t^3 + 1)(t + 1)^4$
6	$D_6(a_2) \times A_1$	$(t^3 + 1)^2(t + 1)$
6	$E_7(a_4)$	$(t^2 - t + 1)^2(t^3 + 1)$

Таблица 6.2: Элементы порядка 6 в $\mathcal{W}(E_8)$

Порядок	Граф Картера	Характ. многочлен
6	$A_2 \times A_1$	$p_2 p_1 (t - 1)^5$
6	$A_2 \times A_1^2$	$p_2 p_1^2 (t - 1)^4$
6	D_4	$(t^3 + 1)(t + 1)(t - 1)^4$
6	$A_2 \times A_1^3$	$p_2 p_1^3 (t - 1)^3$
6	$A_2^2 \times A_1$	$p_2^2 p_1 (t - 1)^3$
6	A_5	$p_5 (t - 1)^3$
6	$D_4 \times A_1$	$(t^3 + 1)(t + 1)^2 (t - 1)^3$
6	$A_2 \times A_1^4$	$p_2 p_1^4 (t - 1)^2$
6	$A_2^2 \times A_1^2$	$p_2^2 p_1^2 (t - 1)^2$
6	$(A_5 \times A_1)'$	$p_5 p_1 (t - 1)^2$
6	$(A_5 \times A_1)''$	$p_5 p_1 (t - 1)^2$
6	$D_4 \times A_1^2$	$(t^3 + 1)(t + 1)^3 (t - 1)^2$
6	$D_4 \times A_2$	$p_2 (t^3 + 1)(t + 1)(t - 1)^2$
6	$D_6(a_2)$	$(t^3 + 1)^2 (t - 1)^2$
6	$E_6(a_2)$	$(t^2 + t + 1)(t^2 - t + 1)^2 (t - 1)^2$
6	$A_2^3 \times A_1$	$p_2^3 p_1 (t - 1)$
6	$A_5 \times A_1^2$	$p_5 p_1^2 (t - 1)$
6	$A_5 \times A_2$	$p_5 p_2 (t - 1)$
6	$D_4 \times A_1^3$	$(t^3 + 1)(t + 1)^4 (t - 1)$
6	$D_6(a_2) \times A_1$	$(t^3 + 1)^2 (t + 1)(t - 1)$
6	$E_6(a_2) \times A_1$	$(t^2 - t + 1)^2 (t^2 + t + 1)(t + 1)(t - 1)$
6	$E_7(a_4)$	$(t^2 - t + 1)^2 (t^3 + 1)(t - 1)$
6	$A_5 \times A_2 \times A_1$	$p_5 p_2 p_1$
6	$D_4 \times A_1^4$	$(t^3 + 1)(t + 1)^5$
6	D_4^2	$(t^3 + 1)^2 (t + 1)^2$
6	$E_6(a_2) \times A_2$	$p_2 (t^2 - t + 1)^2 (t^2 + t + 1)$
6	$E_7(a_4) \times A_1$	$p_1 (t^2 - t + 1)^2 (t^3 + 1)$
6	$E_8(a_8)$	$(t^2 - t + 1)^4$

Публикации по теме диссертации

- [1] E. Yasinsky, “Subgroups of odd order in the real plane Cremona group”, *Journal of Algebra*, **461** (2016), 87–120.
- [2] E. Yasinsky, “The Jordan constant for Cremona group of rank 2”, *Bull. Korean Math. Soc.*, **54**:5 (2017), 1859–1871.
- [3] Е. А. Ясинский, “Константа Жордана для плоской группы Кремоны”, *Шестая школы-конференции «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов»*, Москва, Россия, 30 января–4 февраля, 2017.
- [4] Е. А. Ясинский, “Подгруппы нечетного порядка в группе Кремоны вещественной проективной плоскости”, *Тезисы докладов V школы-конференции по алгебраической геометрии и комплексному анализу для молодых математиков России, г. Коряжма Архангельской области, Филиал С(А)ФУ им. М.В. Ломоносова, 17-22 августа 2015 г.*, 2015.

Список литературы

- [1] L. Bayle, A. Beauville,, “Birational involutions of \mathbb{P}^2 ”, *Asian J. Math.*, **4**:1 (2000), 11–17.
- [2] E. Bertini, “Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano”, *Annali di Mat. (8)*, 1877, 244–286.
- [3] J. Blanc,, “Finite abelian subgroups of the Cremona group of the plane”, *C.R. Acad. Sci. Paris Ser. I*, **344**:1 (2007), 21–26.
- [4] J. Blanc, J.-P. Furter,, “Topologies and structures of the Cremona groups”, *Ann. of Math.*, **178**:3 (2013), 1173–1198.
- [5] J. Blanc, S. Zimmermann,, “Topological simplicity of the Cremona groups”, *Amer. J. Math.*, to appear.
- [6] G. Bredon, *Introduction to Compact Transformation Groups, Volume 46*, Academic Press, 1972.
- [7] E. Bujalance, J. J. Etayo, J. M. Gamboa,, “Automorphism groups of real algebraic curves of genus 3”, *Proc. Japan Acad.*, **62** (1986), 40–42.
- [8] S. Cantat, S. Lamy,, “Normal subgroups in the Cremona group”, *Acta Math.*, **210**:1 (2013), 31–94.
- [9] G. Castelnuovo, “Sulla razionalità delle involuzioni piane”, *Math. Ann.*, **44** (1894), 125–155.
- [10] M. J. Collins,, “On Jordans theorem for complex linear groups”, *J. Group Theory*, **10** (2007), 411–423.
- [11] T. de Fernex,, “On planar Cremona maps of prime order”, *Nagoya Math. J.*, **174** (2004).
- [12] I. Dolgachev, *Classical algebraic geometry: a modern view*, Cambridge University Press, 2012.
- [13] I. V. Dolgachev, V. A. Iskovskikh, “Finite subgroups of the plane Cremona group”, *In: Algebra, arithmetic, and geometry, vol. I: In Honor of Yu. I. Manin, Progr. Math.*, **269**, 443–548.
- [14] I. V. Dolgachev, V. A. Iskovskikh, “On elements of prime order in the plane Cremona group over a perfect field”, *Int. Math. Res. Not. IMRN*, **18** (2009), 3467–3485.
- [15] M. Isaac, *Finite Group Theory (Graduate Studies in Mathematics, Vol. 92)*, American Mathematical Society, 1st Edition, 2008.
- [16] G. James, M. Liebeck, *Representations and Characters of Groups*, Cambridge University Press, 2003.

- [17] S. Kantor, “Theorie der endlichen Gruppen von eindeutigen Transformationen in der Ebene”, 1895.
- [18] J. Kollár., “Real algebraic surfaces”, *arXiv:alg-geom/9712003*, 1997.
- [19] J. Kollár, F. Mangolte, “Cremona transformations and diffeomorphisms of surfaces”, *Adv. Math.*, **222**:1 (2009), 44–61.
- [20] F. Mangolte, *Variétés algébriques réelles*, Société mathématique de France, Cours spécialisés, 24, 2017.
- [21] I. Pan, “Une remarque sur la génération du groupe de Cremona”, *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)*, **30**:1 (1999), 95–98.
- [22] J. Patera, Y. Saint-Aubin, “Finite Subgroups of the Lorentz Group and their Generating Functions”, *Symmetries in Science*, 1980, 297–308.
- [23] V. L. Popov, “On the Makar-Limanov, Derksen invariants, and finite automorphism groups of algebraic varieties”, *Affine algebraic geometry: the Russell Festschrift, CRM Proceedings and Lecture Notes*, **54** (2011), 289–311.
- [24] V. L. Popov, “Jordan groups and automorphism groups of algebraic varieties”, *Automorphisms in birational and affine geometry, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, **79** (2014), 185–213.
- [25] Yu. Prokhorov, “Simple finite subgroups of the Cremona group of rank 3”, *J. Algebraic Geom.*, **21**:3 (2012), 563–600.
- [26] Yu. Prokhorov, “Quasi-simple finite groups of essential dimension 3”, <https://arxiv.org/abs/1703.10780>.
- [27] Yu. Prokhorov, C. Shramov, “Jordan property for Cremona groups”, *Amer. J. Math.*, **138**:2 (2016), 403–418.
- [28] Yu. Prokhorov, C. Shramov, “Jordan constant for Cremona group of rank 3”, *Mosc. Math. J.*, **17**:3 (2017), 457–509.
- [29] Yu. Prokhorov, C. Shramov, “Jordan property for groups of birational selfmaps”, *Compositio Math.*, **150**:12 (2014), 2054–2072.
- [30] Yu. Prokhorov, C. Shramov, “ p -subgroups in the space Cremona group”, <https://arxiv.org/abs/1610.02990>.
- [31] Yu. Prokhorov, C. Shramov, “Automorphism groups of compact complex surfaces”, <https://arxiv.org/abs/1708.03566>.
- [32] M.-F. Robayo, S. Zimmermann, “Infinite algebraic subgroups of the real Cremona group”, *Osaka J. of Math.*, to appear.
- [33] R. Silhol, *Real algebraic surfaces*, Springer, 1989.
- [34] A. Trepalin, “Rationality of the quotient of \mathbb{P}^2 by finite group of automorphisms over arbitrary field of characteristic zero”, *Central European Journal of Mathematics*, **12**:2 (2014), 229–239.
- [35] A. Trepalin, “Quotients of conic bundles”, *Transform. Groups*, **21**:1 (2016), 275–295.
- [36] A. Trepalin, “Quotients of del Pezzo surfaces of high degree”, *Transactions of the American Mathematical Society*.
- [37] A. Trepalin, “Quotients of cubic surfaces”, *European Journal of Mathematics*, **2**:1 (2016), 333–359.
- [38] A. Trepalin, “Quotients of del Pezzo surfaces of degree 2”, <https://arxiv.org/abs/1709.02006>.
- [39] C.T.C. Wall, “Real forms of smooth del Pezzo surfaces”, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **375-376** (1987), 47–66.
- [40] A. Wiman, *Math. Ann.*, **48** (1896), 497–498, 195–241.
- [41] Yu. G. Zarhin, “Theta groups and products of abelian and rational varieties”, *Proc. Edinb. Math. Soc.*, **57**:1 (2014), 299–304.

- [42] H. G. Zeuthen, “Sur les differentes formes des courbes du quatrième ordre”, *Math. Ann.*, **7** (1874), 410–432.
- [43] B. Zimmermann, “On finite groups acting on spheres and finite subgroups of orthogonal groups”, *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, **9** (2012), 1–12.
- [44] S. Zimmermann, “The Abelianisation of the real Cremona group”, *Duke Math. Journal*, to appear.
- [45] А. А. Авилов, “Существование стандартных моделей расслоений на коники над алгебраически незамкнутыми полями”, *Матем. сб.*, **205**:12 (2014), 3–16.
- [46] А. А. Авилов, “Автоморфизмы особых трехмерных кубических гиперповерхностей и группа Кремоны”, *Матем. заметки*, **100**:3 (2016), 461–464.
- [47] В. Е. Воскресенский, *Бирациональная геометрия линейных алгебраических групп*, МЦНМО, 2009.
- [48] М. Х. Гизатуллин, “Определяющие соотношения для кремоновой группы плоскости”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **46**:5 (1982), 909–970.
- [49] В. А. Исковских, “Минимальные модели рациональных поверхностей над произвольными полями”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **43**:1 (1979), 19–43.
- [50] В. А. Исковских, “Факторизация бирациональных отображений рациональных поверхностей с точки зрения теории Мори”, *УМН*, **51**:4(310) (1996), 3–72.
- [51] В. А. Исковских, “Образующие в двумерной группе Кремоны над незамкнутым полем”, *Теория чисел, алгебра, математический анализ и их приложения*, Сб. ст. Посвящается 100-летию со дня рождения Ивана Матвеевича Виноградова, Тр. МИАН, **200**, Наука, 1991, 157–170.
- [52] В. А. Исковских, Ф. К. Кабдыкаиров, С. Л. Трегуб, “Соотношения в двумерной группе Кремоны над совершенным полем”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **57**:3 (1993), 3–69.
- [53] Ю. И. Манин, “Рациональные поверхности над совершенными полями. II”, *Матем. сб.*, **72(114)**:2 (1967), 161–192.
- [54] Ю. И. Манин, *Кубические формы: алгебра, геометрия, арифметика*, Наука, Москва, 1972.
- [55] Ю. М. Полякова, “Факторизация бирациональных отображений рациональных поверхностей над полем вещественных чисел”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **3**:2 (1997), 519–547.
- [56] Ю. Г. Прохоров, “О трехмерных G -многообразиях Фано”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **79**:4 (2015), 159–174.
- [57] Ю. Г. Прохоров, “О бирациональных инволюциях \mathbb{P}^3 ”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **77**:3 (2013), 199–222.
- [58] Ю. Г. Прохоров, “Рациональные поверхности”, Лекц. курсы НОЦ, **24**, МИАН, М., 2015, 3–76.
- [59] А. Хатчер, *Алгебраическая топология*, МЦНМО, 2011.