Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Математический институт им. В.А. Стеклова Российской
академии наук

На правах рукописи
УДК 515.142.22 + 514.172.45

Соломадин Григорий Дмитриевич

Торические и квазиторические многообразия в проблеме представителей классов комплексных кобордизмов

Специальность:
01.01.04 – геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2018

Работа выполнена на кафедре высшей геометрии и топологии механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:

БУХШТАБЕР Виктор Матвеевич — доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, профессор, главный научный сотрудник отдела геометрии и топологии Федерального государственного бюджетного учреждения науки Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук (специальность 01.01.04).

Официальные оппоненты:

ПАНИН Иван Александрович — доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник лаборатории алгебры и теории чисел Федерального государственного бюджетного учреждения науки Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук (специальность 01.01.06).

НАТАНЗОН Сергей Миронович —доктор физико-математических наук, профессор факультета математики Национального исследовательского университета "Высшая школа экономики" (специальность 01.01.04).

Ведущая организация:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Новосибирский национальный исследовательский государственный университет".

Защита диссертации состоится 27 декабря 2018 г. в $14^{\underline{00}}$ на заседании диссертационного совета Д002.022.03 при МИАН по адресу: 119991, Москва, ул. Губкина, д. 8 , конференц-зал (9 этаж).

Ознакомиться с диссертацией можно в библиотеке МИАН и на сайте `http://www.mi-ras.ru/dis/ref18/solomadin/dis.pdf`

Автореферат разослан "   " ноября 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д002.022.03 при МИАН,
доктор физ.мат. наук | Королёв М.А.

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Теория комплексных (ко)бордизмов играет ключевую роль в аппарате алгебраической топологии. Задачи о представителях в кольце комплексных бордизмов Ω_*^U восходят к (открытому) вопросу Хирцебруха[1] об описании всевозможных наборов чисел, являющихся числами Черна некоторого неприводимого гладкого проективного комплексного (как следствие, алгебраического) многообразия.

Множество Ω_n^U классов эквивалентности стабильно комплексных замкнутых многообразий размерности n относительно отношения бордантности является абелевой группой с операцией несвязного объединения многообразий. Прямая сумма групп $\Omega_*^U = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Omega_n^U$ является градуированным кольцом с операцией декартова произведения многообразий. Градуированное кольцо Ω_*^U изоморфно кольцу $\mathbb{Z}[a_1, a_2, \dots]$, $\deg a_n = 2n$, и стабильно комплексное многообразие бордантно нулю, если и только если все соответствующие числа Черна равны нулю согласно Милнору[2] и Новикову[3]. Условие неразложимости класса комплексного бордизма многообразия дается в терминах соответствующего старшего числа Черна. Все соотношения между числами Черна стабильно комплексных многообразий были описаны Стонгом и Хаттори в следующем виде: характеристические числа стабильно комплексных многообразий в K-теории описывают все рациональные гомоморфизмы $\Omega_U^{2n} \to \mathbb{Q}$, $n \geqslant 1$, которые принимают целые значения на классах бордизмов стабильно комплексных многообразий[4]. Милнор доказал[4] существование в каждом элементе кольца Ω_*^U представителя, являющегося (вообще говоря, приводимым) гладким проективным комплексным многообразием. Связная сумма замкнутых комплексных алгебраических многообразий не является комплексным алгебраическим многообразием. Джонстон построил[5] неприводимые неособые проективные алгебраические многообразия, доставляющие образующие кольца Ω_U^* в каждой градуировке.

[1] Ф. Хирцебрух, *Комплексные многообразия*, Международный математический конгресс в Эдинбурге 1958г. (обзорные доклады), Современные проблемы математики, Физматгиз, М., 276с., 1962.

[2] J. Milnor, *On the cobordism ring* Ω^* *and a complex analogue, part* I, Amer. J. Math., 82:3, 505–521, 1960.

[3] С.П. Новиков, *О некоторых задачах топологии многообразий, связанных с теорией пространств Тома*, Докл. АН СССР, 132:5 (1960), 1031–1034

[4] Р. Стонг, *Заметки по теории кобордизмов*, Мир, М., 1973.

[5] B. Johnston, *The values of the Milnor genus on smooth projective connected complex varieties*, Topology Appl., V.138, No.1-3, 189–206, 2004.

Проблема Хирцебруха естественно обобщается на случай представителей классов комплексных бордизмов с фиксированной дополнительной структурой или принадлежащих фиксированному семейству. Эти обобщения вызваны актуальными задачами алгебраической топологии и ее приложений. Нормальное комплексное алгебраическое многообразие M, $\dim_{\mathbb{C}} M = n$, содержащее алгебраический тор $(\mathbb{C}^*)^n$ в качестве открытого всюду плотного по Зарисскому множества, называется *торическим многообразием*, если естественное действие тора $(\mathbb{C}^*)^n$ на себе продолжается до действия на всем M. Вильфонг построил[6] гладкие проективные торические многообразия, доставляющие образующие кольца Ω_*^U в размерностях $2n$, где n нечетно или имеет вид $n = p^s - 1$, где p простое и $s \in \mathbb{N}$. Бухштабер и Рэй построили[7] гладкие проективные торические многообразия, являющиеся мультипликативными порождающими кольца Ω_*^U. Позже Бухштабер, Панов и Рэй ввели понятие бриллиантовой суммы и доказали[8] существование в каждом элементе кольца Ω_U^* градуировки, большей 2, квазиторического многообразия в смысле Дэвиса-Янушкевича.

Примером структуры на стабильно комплексном многообразии M является фиксированное расщепление стабильно нормального (касательного, соотв.) расслоения на M в сумму Уитни комплексных линейных расслоений. Многообразие с данной структурой называется полностью нормально (касательно) расщепимым, или *ПНР-многообразием* (*ПКР-многообразием*, соотв.). Соответствующие обобщенные теории когомологий и гомологий представлены спектром $MU(1)^{\wedge\infty}$, т.е. бесконечным приведенным произведением. Артан и Буллет показали[9], что после локализации по любому простому числу p спектр $MU(1)^{\wedge\infty}$ обобщенной теории гомологий стабильно комплексных ПНР-многообразий расщепляется в букет копий надстроек спектров Брауна-Петерсона BP. Ошанин и Шварц доказали[10], что гомоморфизм забывания ПНР-структуры является эпиморфизмом на группу бордизмов Ω_*^U в каждой размерности, большей 2. Для этого они использовали методы гомотопической топологии: J-теорию и теорию перестроек многообразий. Чуть позже, Рэй предъявил[11] конструктивное доказательство вышеупомянутого результата Ошанина и Шварца.

[6] A. Wilfong, *Toric polynomial generators of complex cobordism*, Algebr. Geom. Topol., 16:3, 1473–1491, 2016.

[7] V.M. Buchstaber, N. Ray, *Toric manifolds and complex cobordisms*, Uspekhi Mat. Nauk, 53:2(320), 139–140, 1998.

[8] V.M. Buchstaber, T.E. Panov, N. Ray, *Spaces of polytopes and cobordism of quasitoric manifolds*, Mosc. Math. J., 7:2, 219–242pp., p.350, 2007.

[9] R. Arthan, S. Bullet, *The homology of $MO(1)^{\wedge\infty}$ and $MU(1)^{\wedge\infty}$*, J. Pure Appl. Algebra, V.26, 229–234, 1982.

[10] S. Ochanine, L. Schwartz, *Une remarque sur les générateurs du cobordisme complexe*, Mathematische Zeitschrift, 190:4, 543–557, 1985.

[11] N. Ray, *On a construction in bordism theory*, Proc. Edinburgh Math. Soc., 29:3, 413–422, 1986.

Топология ПНР-многообразий мало изучена. Теорема Ж. Ланна утверждает[10], что замкнутое односвязное многообразие M^4 является ПНР-многообразием тогда и только тогда, когда форма пересечения 2-циклов на M^4 является незнакоопределенной. Доказательство теоремы Ланна использовало результаты о классификации квадратичных форм конечного ранга над $\mathbb{Z}$.

Цель работы

Цель данной работы состояла в изучении классов комплексных кобордизмов, представленных торическими многообразиями, представленных полностью нормально расщепимыми квазиторическими многообразиями, а также в исследовании алгебротопологических свойств квазиторических ПНР-многообразий.

Методы исследования

В работе используются методы торической топологии, алгебраической топологии, теории многогранников, комбинаторики и теории чисел.

Научная новизна

Все основные результаты диссертации, выносимые на защиту, являются новыми и получены автором самостоятельно. Особо выделим следующие:

1. Получен ряд эквивалентных критериев свойства ПНР для квазиторического многообразия в терминах кольца когомологий, в терминах кольца K-теории, а также в терминах многочлена объема мультивеера данного многообразия. Для торического ПНР-многообразия M^{2n} показано отсутствие минимальных не-граней на n вершинах в соответствующем нерв-комплексе многогранника моментов многообразия M^{2n}.

2. Для каждого натурального n построено гладкое проективное торическое многообразие, класс комплексного бордизма которого является образующей кольца комплексных бордизмов Ω_*^U в размерности $2n$. (Опубликовано в совместной статье с Ю. Устиновским. В ней диссертанту принадлежат все разделы, кроме разделов $1, 2.2, 3, 4.1, 5.2, 6$.)

3. Для каждого натурального $n \geqslant 2$ показано, что любой класс комплексного бордизма $a \in \Omega_{2n}^U$ имеет представитель, являющийся квазиторическим ПНР- и ПКР-многообразием одновременно.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация носит теоретический характер. Полученные в диссертации результаты могут быть полезны для специалистов по торической и алгебраической топологии, теории многогранников, теории чисел и коммутативной алгебре.

Апробация диссертации

Результаты диссертации докладывались на следующих научно-исследовательских семинарах:

1. Семинар "Алгебраическая топология и ее приложения" им. М.М. Постникова под руководством чл.-корр. РАН В.М. Бухштабера, проф. А.В. Чернавского, проф. И.А. Дынникова, проф. Т.Е. Панова, доц. Л.А. Алания, чл.-корр. РАН А.А. Гайфуллина, доц. Д.В. Миллионщикова, ст.преп. Д.В. Гугнина; кафедра высшей геометрии и топологии Механико-математического факультета МГУ, 1 декабря 2015г.

2. Семинар "Дискретная геометрия и геометрия чисел" под руководством проф. Н.Г. Мощевитина, проф. Н.П. Долбилина и проф. М.Д. Ковалева; кафедра теории чисел Механико-математического факультета МГУ — неоднократно с 2015 по 2018г.

3. Семинар им. В.А. Исковских под руководством проф. Ю.Г. Прохорова, д.ф.-м.н. В.В. Пржиялковского, чл.-корр. РАН Д.О. Орлова, к.ф.-м.н. К.А. Шрамова; математический институт им. В.А. Стеклова, 14 апреля 2016г.

4. Семинар "Группы Ли и теория инвариантов" под руководством проф. Э.Б. Винберга, проф. А.Л. Онищика, доц. И.В. Аржанцева, к.ф.-м.н. Д.А. Тимашева; кафедра высшей алгебры Механико-математического факультета МГУ, 25 апреля 2018г.

5. Семинар "Римановы поверхности, алгебры Ли и математическая физика" под руководством д.ф.-м.н. С.М. Натанзона, к.ф.-м.н. О.В. Шварцмана и д.ф.-м.н. О.К. Шейнмана, 19 октября 2018г.

6. Семинар “Узлы и теория представлений” под руководством проф. РАН, доц. В.О. Мантурова, доц. Д.П. Ильютко и с.н.с. Д.А. Федосеева; кафедра дифференциальной геометрии и топологии Механико-математического факультета МГУ, 24 ноября 2015г.

Результаты диссертации докладывались на следующих научных конференциях:

1. Международная конференция “Торическая топология, теория чисел и их приложения”, г. Хабаровск, Россия, 6–12 сентября 2015г.

2. Международная конференция “Динамика в Сибири”, г. Новосибирск, Россия, 29 февраля–4 марта 2016г.

3. Международная конференция “Ломоносов 2018”, г. Москва, Россия, 9–13 апреля 2018г.

4. Международная конференция “Algebraic topology, Combinatorics and Mathematical Physics” посвященная 75-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН В.М. Бухштабера, Семинар для молодых исследователей “International Seminar on Toric Topology and Homotopy Theory”, г. Москва, Россия, 24–30 мая 2018г.

5. Международная конференция “Glances@Manifolds 2018”, постерный доклад, г. Краков, Польша, 2–6 июля 2018г.

Публикации

Результаты настоящей диссертации содержатся в 3 работах, из которых две опубликованы в рецензируемых журналах, и одна принята к печати в рецензируемом журнале. Список данных работ приведен в конце автореферата.

Структура и объем

Диссертация состоит из введения и 6 глав, разбитых на разделы. В конце приводится список литературы, состоящий из 70 наименований. Текст диссертации изложен на 138 страницах и содержит 3 рисунка.

Краткое содержание работы

В **первой** главе приведен обзор определений и основных результатов, которые используются в работе. Во **второй** главе подробно изучаются квазиторические многообразия с свойством полной нормальной расщепимости. Квазиторические
ПНР-многообразия являются одним из центральных предметов настоящей работы.

В разделе 2.1 даны формулировки и доказательства ПНР-критерия в терминах кольца K-теории квазиторического многообразия, а также теорему о стабильной полной расщепимости любого комплексного векторного расслоения над квазиторическим ПНР-многообразием.

В разделе 2.3 вводится конус $W(M^{2n})$ для произвольного квазиторического многообразия M^{2n}, играющий важную роль в изучении квазиторических ПНР-многообразий. В разделе 2.3 приведено описание конуса $W(\mathbb{C}P^n)$ и формула для конуса в случае декартова произведения двух квазиторических многообразий.

В разделе 2.4 доказан один из ключевых результатов настоящей работы.

Теорема. *Пусть M^{2n} есть квазиторическое многообразие размерности $2n$. Тогда M^{2n} есть ПНР-многообразие в том и только том случае, если для любого целого k, $0 < k \leqslant n$, и любого $a \in H^{2(n-k)}(M^{2n};\mathbb{Z})$, $a \neq 0$, форма Q_a степени k допустима (т.е. форма Q_a принимает значения различных знаков как вещественнозначная функция).*

В разделе 2.5 изучаются торические ПНР-поверхности и квазиторические ПНР-многообразия размерности 6. Выводится полиэдральность конуса $W(M^6)$ для любого 6-мерного квазиторического многообразия M^6.

В разделе 2.6 показано, что для торического ПНР-многообразия M^{2n} комплексной размерности $n \geqslant 3$ нерв-комплекс многогранника моментов многообразия M^{2n} не имеет минимальных не-граней на n вершинах. В случае комплексной размерности 3, это условие эквивалентно (в силу запрета на треугольные грани) флаговости многогранника моментов торического многообразия.

Формулировка ПНР-критерия в терминах многочлена объема содержится в разделе 2.7. Там же изложены естественно возникающие в этой связи задачи о положительно полуопределенных вещественных формах высших степеней (psd-forms) типа 17-ой проблемы Гильберта.

Третья глава содержит основные конструкции многообразий, используемых при доказательствах полученных утверждений в главах 5, 6. Введенные нами в этой главе конструкции используются для определения вспомогательных многообразий, необходимых для доказательства утверждений из главы 6.

В **четвертой** главе получены явные формулы для числа Милнора многообразия ограниченных флагов, а также изменения числа Милнора при B_k-модификациях. Данная глава является технически трудной частью работы. Необходимые вычисления составляют содержание разделов 4.1 и 4.2, соответственно. В разделе 4.3 выводятся формулы для чисел Милнора вспомогательных многообразий из главы 3.

Пятая глава содержит один из основных результатов работы. Мы дополняем набор мультипликативных образующих кольца Ω_U^*, построенных А. Вильфонгом, (представленных гладкими проективными торическими многообразиями комплексной размерности n) до полного набора образующих во всех градуировках, больших 2. (Т.е. в работе построены образующие комплексной размерности n, где $n+1$ не является степенью простого и $n+1$ нечетно одновременно.)

Теорема. *Существуют гладкие проективные торические многообразия, классы комплексного кобордизма которых являются мультипликативными образующими кольца Ω_*^U.*

Наконец, в **шестой** главе получен третий основной результат настоящей диссертации.

Теорема. *Каждый элемент кольца комплексных кобордизмов Ω_U^* градуировки больше 2 содержит представитель, являющийся гладким квазиторическим ПКР- и ПНР-многообразием одновременно.*

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю члену-корреспонденту РАН Виктору Матвеевичу Бухштаберу за постановку задач и неоценимую помощь при их исследованиях и оформлении текстов. Автор признателен Т.Е. Панову, С.М. Гусейн-Заде, А. Айзенбергу, В. Кириченко, Н. Ероховцу и И. Лимонченко за полезные обсуждения. Ю. Устиновскому автор выражает уважение как своему соавтору и коллеге. Автор также благодарен всему коллективу кафедры высшей геометрии и топологии механико-математического факультета МГУ и отделу геометрии и топологии МИАН за поддержку и внимание.

Список литературы

[1] Г. Соломадин, Ю. Устиновский, *Проективные торические полиномиальные образующие в кольце комплексных кобордизмов*, Матем. Сб., Т.11(207), 127–152, 2016.

[2] Г. Соломадин, *Квазиторические полностью нормально расщепимые представители в кольце комплексных кобордизмов*, Подано в печать: Мат. Заметки, 2018.

[3] Г. Соломадин, *Квазиторические полностью нормально расщепимые многообразия*, Труды МИАН, Т.302. DOI: 10.1134/S0371968518030196, 2018.

[4] Г. Соломадин, Ю. Устиновский, В.М. Бухштабер, *Двупараметрический род Тодда и торические разрешения особенностей*, Международная конференция "Торическая топология, теория чисел и их приложения", г.Хабаровск, Россия, 06–12 сентября 2016г., 112–113.

[5] Г. Соломадин, *Проективные торические полиномиальные образующие в кольце комплексных кобордизмов*, Международная конференция "Dynamics in Syberia", г.Новосибирск, Россия, 29 февраля–4 марта 2016г., 31–33.

[6] Г. Соломадин,*Квазиторические ПНР-многообразия*, Международная конференция "Ломоносов 2018", г.Москва, Россия, 9–13 апреля 2018г.

[7] G. Solomadin, *Totally normally split quasitoric manifolds*, Международная конференция "Algebraic topology, Combinatorics and Mathematical Physics" посвященная 75-летию В.М. Бухштабера, Семинар для молодых исследователей "International Seminar on Toric Topology and Homotopy Theory", г. Москва, Россия, 24–30 мая 2018г.