МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

СОЛОМАДИН ГРИГОРИЙ ДМИТРИЕВИЧ

УДК 515.142.22+514.172.45

Торические и квазиторические многообразия в проблеме представителей классов комплексных кобордизмов

01.01.04 геометрия и топология

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
член-корреспондент РАН,
доктор физико-математических наук,
профессор В. М. Бухштабер

Москва 2018

Оглавление

Введение

Актуальность темы

Популярность торической геометрии среди алгебраических геометров, топологов и специалистов в других областях математики в последние несколько десятилетий имеет несколько причин. Во-первых, методы и утверждения алгебраической, комбинаторной и симплектической геометрий принимают наглядную и замкнутую форму, будучи сформулированными в терминах теории алгебраических торических многообразий. Торическая геометрия стимулировала развитие торической топологии [63]. Благодаря торической геометрии и торической топологии, между перечисленными выше классическими областями математики возникают новые плодотворные взаимосвязи (см. [3], [34]). Во-вторых, исключительность торических многообразий среди произвольных алгебраических многообразий привела к явным формулам для важных геометрических величин этих многообразий (род Тодда, арифметический род, числа Черна и т.д.). Поэтому семейство торических многообразий является полигоном для явных вычислений формул алгебраической геометрии и проверки гипотез для алгебраических многообразий. Одним из источников гипотез является бурно развивающаяся зеркальная симметрия, в частности, соответствие Батырева между семействами гиперповерхностей Калаби-Яу, компактифицированных в проективных торических многообразиях, отвечающих паре рефлексивных многогранников [27]. Другим примером являются соотношения Дэна-Соммервиля на f-числа (эквивалентно, h-числа) простого выпуклого многогранника в случае дельзантова многогранника. Данные соотношения являются следствием двойственности Пуанкаре соответствующего торического многообразия. (В этом случае, h-числа совпадают с числами Бетти соответствующего торического многообразия.) А ответ на вопрос, какими могут быть h-числа простого многогранника, дает утверждение коммутативной алгебры, известное под названием g-теоремы [63, p. 23, Theorem 1.4.14].

Изначально [41] торические многообразия рассматривались как эквивариантные компактификации тора $(\mathbb{C}^*)^n$. Позже появилось определение аффинного торического многообразия, являющегося некомпактным алгебраическим многообразием. Торические многообразия полностью описываются рациональными веерами в соответствующей алгебре Ли $\mathfrak{t} \simeq \mathbb{R}^n$ тора $(\mathbb{C}^*)^n$ ([38]). В частности, полным веерам соответствуют компактные торические многообразия. На языке вееров, гладкости торического многообразия отвечает условие регулярности соответствующего веера. Регулярный веер состоит только из симплициальных конусов. Наибольший интерес представляет семейство проективных торических многообразий с веерами, являющимися нормальными веерами (рациональных) выпуклых простых многогранников в двойственном пространстве $\mathfrak{t}^*$. При этом многогранники с одним и тем же нормальным веером задают различные вложения соответствующего алгебраического многообразия в $\mathbb{C}P^N$ для $N >> n$. Отметим, что существуют полные неособые веера, не являющиеся нормальными веерами выпуклых целочисленных многогранников (т.е. соответствующие компактные торические многообразия не являются проективными) (см. [64, p.71]). Таким образом, интересующие нас проективные торические многообразия задаются целочисленными (т.е. координаты всех вершин целочисленны) простыми многогранниками. Данилов и Юркевич вычислили кольцо когомологий неособого компактного торического многообразия в терминах соответствующего веера [38, Теорема 10.8].

При симплектическом подходе торическое многообразие M^{2n} определяется как компактное симплектическое многообразие с гамильтоновым действием компактного тора $(S^1)^n$ половиной размерности. Из общей теоремы Атьи [24], Гийомина и Стенберга [44] о гамильтоновом действии тора на симплектическом многообразии вытекает, что образом отображения моментов торического многообразия M^{2n} является простой выпуклый n-мерный многогранник в алгебре Ли $\mathfrak{t}^*$. Теорема Дельзана [40] утверждает, что любое компактное связное симплектическое многообразие M^{2n} с эффективным гамильтоновым действием тора $(S^1)^n$ эквивариантно диффеоморфно гладкому проективному торическому многообразию. Гладкие торические проективные многообразия имеют целочисленную симплектическую форму. Им отвечают простые многогранники с целыми вершинами и целыми нормалями к гиперграням многогранника, так что при каждой вершине этого многогранника n векторов соответствующих нормалей порождают группу кохарактеров алгебры Ли $\mathfrak{t}$. Обратно, по любому такому многограннику, называемому дельзантовым многогранником, можно построить гладкое проективное торическое многообразие. Для этого имеется фактор-конструкция Кокса (в терминах рационального регулярного полного веера) и симплектическая редукция (в терминах дельзантова многогранника).

Среди нерешенных задач о топологии неприводимых неособых проективных алгебраических многообразий одной из наиболее известных является проблема описания векторов чисел, являющихся числами Черна многообразия из данного класса. Эта проблема была впервые сформулирована Хирцебрухом [20, с. 142] на математическом конгрессе в Эдинбурге в 1958 г. Для неособых комплексных проективных кривых имеется единственное число Черна c_1, совпадающее с эйлеровой характеристикой $2-2g$ соответствующей римановой поверхности рода g. То есть, ответом к проблеме Хирцебруха для комплексных кривых являются условия

$$\begin{cases} 2|c_1, \\ c_1 \leqslant 2. \end{cases} \tag{1}$$

Числа Черна *почти* комплексных компактных 4-многообразий суть те и только те, которые удовлетворяют условию целочисленности рода Тодда [62, p.290]

$$12|(c_1^2 + c_2). \tag{2}$$

В случае комплексных компактных неособых поверхностей операция раздутия в точке прибавляет к вектору чисел Черна (c_2, c_1^2) соответствующего многообразия вектор $(1, -1)$. Числа Черна минимальных комплексных компактных поверхностей (относительно операции раздутия в точке) не имеют полного описания. Сложность данной задачи иллюстрируется результатами о числах c_1^2, c_2 комплексных поверхностей, известными под названием “география чисел Черна комплексных поверхностей” [62, p.290]. Эти результаты являются частью классификации комплексных компактных поверхностей, полученной Кодаирой и Энриквесом [62, Chapter VI]. В частности, известно неравенство для чисел Черна комплексных поверхностей [62, p.291]:

$$c_1^2 \leqslant \max\{2c_2, 3c_2\}.$$

Отметим, что в общем виде задача об описании чисел Черна комплексных поверхностей является нерешенной (поэтому то же можно сказать и о проблеме Хирцебруха для неособых компактных алгебраических поверхностей, являющихся частным случаем комплексных неособых компактных поверхностей).

Задачу Хирцебруха также можно изучать при помощи теории комплексных кобордизмов. Кольцо комплексных кобордизмов Ω_U^* было вычислено С.П. Новиковым (мультипликативная структура, см. [5]). Аддитивная структура кольца Ω_U^* была вычислена независимо Милнором [50]. Теорема Милнора и Новикова утверждает, что градуированное кольцо Ω_U^* изоморфно кольцу полиномов $\Omega_*^U \simeq \mathbb{Z}[a_1, a_2, \dots]$, $\deg a_i = 2i$, от счетного числа образующих. Неразложимость элемента $a \in \Omega_U^*$, $\deg a = 2n$, кольца комплексных кобордизмов эквивалентна некоторому условию на число Милнора $s_n(a)$. Возникает проблема: найти набор алгебраических многообразий, классы комплексного кобордизма которых мультипликативно порождают кольцо Ω_U^*. С.П. Новиков использовал проективные алгебраические гиперповерхности $H_{i,j} \subset \mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j$ общего положения бистепени $(1,1)$ и показал, что набор комплексных кобордизмов данных гиперповерхностей мультипликативно порождает кольцо Ω_U^*. Эти гиперповерхности изучались Милнором и носят название гиперповерхностей Милнора. В свою очередь, Милнор показал, что в качестве представителя любого класса комплексных кобордизмов можно взять алгебраическое многообразие (см. [19, p.125]). Для этого Милнору потребовалось решить “-1-проблему”: он указал алгебраические многообразия, доставляющие аддитивно обратные элементы к гиперповерхностям Милнора. Например, обратным элементом к рациональной кривой $\mathbb{C}P^1$ является неособая проективная комплексная кривая рода 2. Полученные Милнором представители являются приводимыми (несвязными), вообще говоря. Для стабильно комплексных многообразий определена операция связной суммы многообразий в точках этих многообразий. Класс комплексного кобордизма связной суммы двух стабильно комплексных многообразий равен сумме кобордизмов этих многообразий. Но связная сумма алгебраических многообразий редко является алгебраическим многообразием. Из этого вытекает, что сформулированный результат Милнора не решает полностью проблему Хирцебруха. Джонстон в 2004 году построил неприводимые неособые проективные алгебраические многообразия, доставляющие образующие кольца Ω_U^* в каждой градуировке [46]. Для построения неприводимых многообразий с необходимыми числами Милнора он последовательно применял операцию раздутия вдоль полного пересечения в исключительных дивизорах данного многообразия.

Для связных стабильно комплексных многообразий был поставлен аналог проблемы Хирцебруха. Эту проблему независимо решили Стонг и Хаттори в следующем виде: характеристические числа стабильно комплексных многообразий в K-теории описывают все рациональные гомоморфизмы $\Omega_U^{2n} \to \mathbb{Q}$, $n \geqslant 1$, которые принимают целые значения на классах кобордизмов стабильно комплексных многообразий (см. [19, p.124]). В работе В.М. Бухштабера и А. Шокурова [1] каждому стабильно комплексному многообразию сопоставлен полином (с целыми коэффициентами) на группе $\mathrm{Diff}^1(\mathbb{Q})$ формальных степенных рядов вида $f(t) = t + \sum_{i\geqslant 1} a_i t^{i+1}$, $a_i \in \mathbb{Q}$, с умножением $\circ$, определяемым подстановкой ряда в ряд. Они доказали (ibid.), что утверждение теоремы Стонга и Хаттори эквивалентно следующему результату: полиномы $p(g)$, $g \in \mathrm{Diff}^1(\mathbb{Z})$ (т.е. коэффициенты ряда g целые), соответствующие классам кобордизмов стабильно комплексных многообразий, суть те и только те полиномы, которые остаются целочисленными при правом сдвиге на ряд $1 - e^{-t}$ (другими словами, функция $\widetilde{p}(g) := p(g \circ (1 - e^{-t}))$ целочисленна). Проиллюстрируем это утверждение в размерности 2. Для ряда $p(t) = t + a_1 t^2 + \mathrm{h.\,o.\,t.}$ соответствующая подстановка есть ряд $\widetilde{p}(t) = t - \frac{t^2}{2} + \mathrm{h.\,o.\,t.}$, где h. o. t. означает сумму слагаемых высших степеней. Значение соответствующего этому ряду характеристического класса на стабильно комплексном 2-многообразии M^2 есть однородная часть степени 2 ряда

$$\prod_{i=1}^{m} \frac{x_i}{\widetilde{p}(x_i)},$$

где x_i суть корни Черна многообразия M^2, $\deg x_i = 2$, $c_1 = \sum_{i=1}^{m} x_i$. Эта однородная часть равна $\frac{1}{2}c_1$, что дает условие четности эйлеровой характеристики многообразия M^2, см. условия (1). (Для M^4 тем же способом далее выводится условие целочисленности рода Тодда, см. условие (2).)

Проблема Хирцебруха естественно обобщается на случай представителей классов комплексных кобордизмов с фиксированной дополнительной структурой или принадлежащих фиксированному семейству. В случае, когда определено кольцо $\Omega_*^{U,Structure}$ (ко)бордизмов стабильно комплексных многообразий с фиксированной дополнительной структурой $Structure$ (см. также формализм (B,f)-многообразий, [19]), соответствующая версия проблемы Хирцебруха отвечает на вопрос о прообразе "гомоморфизма забывания"

$$\Omega_*^{U,Structure} \to \Omega_*^U.$$

Например, В.М. Бухштабер ввел понятие стабильно комплексных многообразий со структурой фиксированного расщепления нормального расслоения в упорядоченную сумму Уитни двух комплексных расслоений [33]. В этом случае, определена соответствующая теория удвоенных комплексных кобордизмов Ω^*_{DU}. Спектром этой обобщенной теории когомологий DU^* является приведенное произведение $MU \wedge MU$ двух копий спектра комплексных кобордизмов MU. Этот же спектр задает обобщенную теорию гомологий DU_*, определяемую стабильно комплексными многообразиями, у которых стабильное касательное расслоение расщепляется в упорядоченную сумму Уитни двух расслоений.

Примером другой известной структуры на стабильно комплексном многообразии M является фиксированное расщепление стабильно нормального (касательного, соотв.) расслоения на M в упорядоченную сумму Уитни комплексных линейных расслоений. Многообразие с данной структурой называется *полностью нормально (касательно) расщепимым*, или *ПНР-многообразием* (*ПКР-многообразием*, соотв.). Отметим, что аналогичные определения осмысленны для гладких вещественных многообразий. Однако в настоящей работе нам они не понадобятся. Соответствующие обобщенные теории когомологий и гомологий представлены спектром $MU(1)^{\wedge\infty}$, т.е. бесконечным приведенным произведением. Отметим, что упомянутые обобщенные теории когомологий обладают важным свойством мультипликативности пространства Тома, т.е. гомотопической эквивалентности

$$\mathrm{Th}(\xi \times \eta) \simeq \mathrm{Th}\,\xi \wedge \mathrm{Th}\,\eta$$

для любых векторных расслоений ξ, η над любым топологическим пространством X, где произведение $\xi \times \eta$ есть расслоение над $X \times X$ [19]. Артан и Буллет показали [23], что после локализации по любому простому числу p спектр $MU(1)^{\wedge\infty}$ обобщенной теории гомологий стабильно комплексных ПНР-многообразий расщепляется в букет копий надстроек спектров Брауна-Петерсона BP [23]. (Напомним, что Браун и Петерсон ввели спектр BP и показали расщепление спектра MU в прямую сумму сдвигов спектра BP после локализации в простом p [32]. Данный результат о расщеплении спектра MU был вскоре получен С.П. Новиковым другим способом [6].) Они также показали аналогичное утверждение для спектра $MO(1)^{\wedge\infty}$, получаемое из предыдущего заменой BP на спектр Эйленберга-Маклейна $H\mathbb{Z}/2$. Ошанин и Шварц доказали, что гомоморфизм забывания ПНР-структуры является эпиморфизмом на группу бордизмов Ω_*^U в каждой размерности, большей 2 [53]. Для этого они использовали методы гомотопической топологии: J-теорию и теорию перестроек многообразий. Чуть позже, Рэй предъявил конструктивное доказательство вышеупомянутого результата Ошанина и Шварца [53]. Он доказал, что в каждом элементе кольца бордизмов Ω_*^U градуировки, большей 2, имеется представитель, являющийся одновременно ПКР- и ПНР-многообразием [54]. Для этого Рэй явно построил набор многообразий, являющихся одновременно ПКР- и ПНР-многообразиями, используя для этого известную конструкцию Коннера и Флойда [17] башен $\mathbb{C}P^1$-расслоений. Связная сумма многообразий уважает свойства ПНР и ПКР в силу связности структурной группы $U(n)$. "-1-проблема" была решена Рэем при помощи построенных им образующих в свободном MU_*-модуле $MU_*(\mathbb{C}P_+^\infty)$ (представленных многообразиями ограниченных флагов BF_n с нестандартной стабильно комплексной структурой, бордантной нулю) и группы $U^2(\mathbb{C}P^\infty)$ геометрических кобордизмов. Многообразие ограниченных флагов является примером башни Ботта, т.е. гладкого проективного торического многообразия, являющегося башней $\mathbb{C}P^1$-расслоений (начиная с точки), где проективизируемые векторные расслоения ранга 2 есть суммы Уитни одномерных комплексных расслоений (см., например, [54]).

Перейдем к задаче построения представителей элементов кольца Ω_U^* в известном семействе квазиторических многообразий. Квазиторические многообразия возникли как топологический аналог алгебраических торических многообразий. Они были введены Дэвисом и Янушкевичем в известной работе [39]. Комбинаторными данными квазиторического многообразия являются простой многогранник $P^n \subset \mathbb{R}^n$ и целочисленная матрица Λ, столбцы которой биективно соответствуют гиперграням многогранника P^n. Условие Дельзана заменяется на условие обратимости миноров $\det \Lambda_v = \pm 1$ по всем вершинам $v \in P^n$, где матрица Λ_v образована столбцами матрицы Λ, отвечающими содержащим вершину v гиперграням многогранника P. Квазиторическое многообразие M^{2n} естественным образом является топологическим многообразием. Многообразие M^{2n} можно сгладить, т.е. существует эквивариантный гомеоморфизм многообразия M^{2n} и некоторого гладкого многообразия с действием тора [2], [36], см. также [63, Proposition 7.3.13, p.248]. Для этого вводится вещественная гладкая структура на момент-угол многообразии $\mathcal{Z}_P$, и главного расслоения $\mathcal{Z}_P \to M^{2n}$ со слоем $(S^1)^{m-n}$, где m есть число гиперграней многогранника P^n. Факторпространство $\mathcal{Z}_P$ по подходящему тору является гладким многообразием и эквивариантно гомеоморфно M^{2n}. Нормальное расслоение вложения многообразия $\mathcal{Z}_P$ в $\mathbb{C}^m$ является тривиальным с фиксированным оснащением [36], см. также [63, p.249]. Пользуясь главным расслоением $\mathcal{Z}_P \to M^{2n}$, можно также определить каноническую стабильно комплексную (полностью касательно расщепимую, как было обещано выше) структуру на M^{2n} (ibid.). Следовательно, задан класс комплексного кобордизма квазиторического многообразия.

В работе [35] Бухштабером и Рэем были предъявлены гладкие проективные торические многообразия $BR_{i,j} \subset BF_i \times \mathbb{C}P^j$, где BF_i является многообразием ограниченных флагов. Многообразие $BR_{i,j}$ является обратным образом $\mathbb{C}P^{j-1}$-расслоения $H_{i,j} \to \mathbb{C}P^i$ при отображении $BF_i \to \mathbb{C}P^i$ забывания компонент флагов размерности, большей 1. В [35] показано, что многообразия $BR_{i,j}$ доставляют семейство мультипликативных порождающих кольца Ω_U^*, $0 \leqslant i \leqslant j$, см. также Раздел 1.12. Отметим, что гиперповерхности Милнора $H_{i,j}$ не являются, вообще говоря, торическими многообразиями. Соответствующим препятствием является кольцо когомологий многообразия $H_{i,j}$.

Для двух квазиторических многообразий M_1^{2n}, M_2^{2n} с фисированными неподвижными точками $x_i \in M_i$, $i = 1, 2$, определена операция связной суммы в этих точках. Полученное многообразие является квазиторическим, и называется эквивариантной связной суммой $M_1^{2n} \widetilde{\#}_{x_1,x_2} M_2^{2n}$ многообразий M_1^{2n}, M_2^{2n} в данных неподвижных точках. Однако канонические стабильно комплексные структуры на квазиторических многообразиях M_1^{2n}, M_2^{2n} и их эквивариантной сумме $M_1^{2n} \widetilde{\#}_{x_1,x_2} M_2^{2n}$ не являются, вообще говоря, согласованными. Эквивариантная сумма $M_1^{2n} \widetilde{\#}_{x_1,x_2} M_2^{2n}$ ориентированно диффеоморфна либо $M_1^{2n} \#_{x_1,x_2} M_2^{2n}$, либо связной сумме $M_1^{2n} \#_{x_1,x_2} \overline{M_2^{2n}}$ с обращенной ориентацией на втором слагаемом.

Бухштабер, Панов и Рэй в ряде работ [35], [36] показали, что каждый элемент кольца Ω_U^* градуировки, большей 2, представляется квазиторическим многообразием. Важным понятием, введенным в работе [36], являлся знак $\sigma(x)$ неподвижной точки x квазиторического многообразия M^{2n}. Там же было показано, что для согласованности канонических стабильно комплексных структур на квазиторических многообразиях M_1, M_2 как подмногообразиях эквивариантной связной суммы $M_1^{2n} \widetilde{\#}_{x_1,x_2} M_2^{2n}$ необходимо и достаточно противоположности знаков неподвижных точек $\sigma(x_1) = -\sigma(x_2)$ (см., например, [63, p.352, Lemma 9.1.12]). Ключевой идеей доказательства результата Бухштабера, Панова и Рэя [36] было определение бриллиантовой суммы $M_1^{2n} \diamondsuit M_2^{2n}$ любых двух квазиторических многообразий M_1^{2n}, M_2^{2n}, т.е. эквивариантной суммы $M_1^{2n} \widetilde{\#} S(2n) \widetilde{\#} M_2^{2n}$, где $S(2n)$ есть фиксированное бордантное нулю квазиторическое многообразие над кубом I^n, имеющее неподвижные точки обоих знаков. Полученное многообразие $M_1^{2n} \widetilde{\#} S(2n) \widetilde{\#} M_2^{2n}$ имеет согласованную стабильно комплексную структуру и бордантно $[M_1^{2n}] + [M_2^{2n}]$.

Классы комплексного кобордизма, реализующиеся торическими многообразиями, образуют собственное подмножество в кольце Ω_U^*. Проще всего это показать, пользуясь классическим гомоморфизмом (колец) Тодда

$$Td : \Omega_U^* \to \mathbb{Z},$$

принимающего на любом неособом проективном торическом многообразии X значение, равное 1.

Упомянутый выше гомоморфизм Td является частным случаем гомоморфизмов колец $\Omega_U^* \to R$, называемых родами Хирцебруха (R есть коммутативное ассоциативное кольцо без кручения с единицей). Чрезвычайно полезно другое описание родов Хирцебруха, см. [66], [21], [63, Appendix E, p.473]. Конструкция Хирцебруха сопоставляет каждому нечетному ряду $f(t) \in t + t^2 \cdot R[[t]]$ некоторый функториальный R-значный характеристический класс ориентированных вещественных векторных расслоений. Каждый такой класс задает гомоморфизм колец $\Omega^*_O \to R$, т.е. функцию на классах ориентированных кобордизмов многообразий. В более общем случае комплексных кобордизмов, аналогичная конструкция сопоставляет произвольному ряду $f(t)$ гомоморфизм колец $\Omega^*_U \to R$ (см. [63]). Благодаря теореме Милнора и Новикова, верно и обратное. Фундаментальные инварианты комплексных многообразий выражаются в терминах соответствующих чисел Черна и представляют собой роды Хирцебруха (см. [66]). К примеру, род Тодда Td является частным случаем при $y = 0$ рода $\chi_y : \Omega^*_U \to \mathbb{Z}[y]$, введенного Хирцебрухом. Коэффициенты значения рода Хирцебруха $\chi_y(X)$ на гладком комплексном проективном многообразии X при y выражаются в виде линейных форм от соответствующих чисел Ходжа $h^{p,q}(X)$. При $y = -1$ и $y = 1$ род Хирцебруха $\chi_y(X)$ совпадает с сигнатурой и эйлеровой характеристикой многообразия X, соответственно. Отметим, что род Тодда однозначно характеризуется среди произвольных ($\mathbb{Q}$-значных) родов Хирцебруха тем, что принимает значение 1 на любом комплексном проективном пространстве $\mathbb{C}P^n$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Другим фундаментальным родом Хирцебруха является сигнатура. Сигнатура задается гомоморфизмом, который однозначно характеризуется тем, что принимает значение 0 и 1 на $\mathbb{C}P^{2n+1}$ и $\mathbb{C}P^{2n}$, соответственно, где $n = 0, 1, \ldots$.

Отметим результаты Ж. Лю и Панова [49], состоящие в нахождении двух новых семейств многообразий, первое из которых доставляет торические мультипликативные порождающие в кольце Ω^*_U (как и семейство из работы [35]), а второе доставляет мультипликативные образующие (полиномиального) кольца $\Omega^*_{SU}[1/2]$ специальных унитарных кобордизмов с обращенной двойкой в размерностях $\geqslant 10$. Первое семейство состоит из послойных проективизаций над $\mathbb{C}P^k$ суммы Уитни линейного и тривиального комплексного расслоений (являющихся торическими многообразиями). Второе семейство состоит из пространств, получаемых из итерированной послойной проективизации сумм линейных расслоений (обобщенной башни Ботта высоты 2 начиная с $\mathbb{C}P^k$,

$k \in \mathbb{Z}$) взятием некоторой нестандартной стабильно комплексной структуры. Важное наблюдение состоит в том, что построенные Лю и Пановым многообразия являются квазиторическими, однако с помощью квазиторических многообразий нельзя получить нетривиальный элемент кольца $\Omega^*_{SU}[1/2]$ в (положительных) размерностях, меньших 10. Причина состоит в том, что комплексный эллиптический род Кричевера-Хона обращается в нуль на квазиторических многообразиях, а также является изоморфизмом в размерностях < 10 (см. [37]).

Полный набор мультипликативных порождающих кольца $\Omega^*_{SU}[1/2]$ был получен Лимонченко, Лю и Пановым в [48]. Для этого они использовали конструкцию Батырева семейства гиперповерхностей в торическом многообразии Фано, двойственных соответствующему первому классу Черна [27].

Значительных успехов в изучении комплексных кобордизмов торических многообразий достиг А. Вильфонг. Им был получен полный набор условий на числа Черна неособых проективных торических многообразий в комплексных размерностях $2, 3$ [60]. Отметим, что для торического многообразия M^{2n} число $c_n(M^{2n})$ равно количеству неподвижных точек действия тора $(\mathbb{C}^\times)^n$, т.е. равно количеству вершин $\chi(M^{2n})$ многогранника P^n. Этот известный факт является прямым следствием разложения торического многообразия по орбитам, аддитивности эйлеровой характеристики и равенства $c_n(M) = \chi(M)$ для почти комплексных многообразий, см. [59]. Условия Вильфонга на числа Черна комплексной торической поверхности M^4 суть

$$\begin{cases} Td(M^4) = \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2) = 1, \\ c_2 \geqslant 3. \end{cases}$$

В комплексной размерности 3 условия Вильфонга состоят из комбинаторной части, доставляемой условиями g-теоремы на h-числа многогранника моментов торического многообразия (h-числа являются линейными формами от чисел Черна данного многообразия, т.к. доставляются коэффициентами χ_y-рода Хирцебруха, см. [63])

$$\begin{cases} Td(M^6) = \frac{1}{24}c_1c_2 = 1, \\ c_3 = 2g_1 + 4, g_1 \geqslant 0, \end{cases}$$

и условий теоремы Стонга и Хаттори:

- $c_1^3 = 64, c_3 = 4$,

- $c_1^3 = 2a^2 + 54,\ c_3 = 6,\ a \in \mathbb{Z}$,

- $c_3 \geqslant 8$.

В комплексной размерности 4 Вильфонг смог получить необходимые условия на числа Черна торических многообразий [60]. Также им были построены торические многообразия, доставляющие образующие кольца Ω_U^* в размерностях вида $n = p^s - 1$, где p простое и $s \in \mathbb{N}$, или n нечетном [61]. Для этого А. Вильфонг рассматривал торические башни проективных расслоений над $\mathbb{C}P^1$ (обобщенные башни Ботта) и их раздутия в неподвижных точках и вдоль инвариантных рациональных кривых.

Квазиторические многообразия (объекты) вместе с эквивариантными отображениями (морфизмами) образуют категорию. Имеется бóльшая категория квазиторических орбифолдов с соответствующими морфизмами. Саркар [56] построил и изучил ориентированные орбифолды с квазиторической границей, т.е. являющейся дизъюнктным объединением квазиторических орбифолдов. Он ввел стабильно комплексную структуру на построенных орбифолдах с квазиторической границей, что приводит к определению комплексных кобордизмов квазиторических орбифолдов. Определение $(2n+1)$-мерного орбифолда с квазиторической границей дано Саркаром в терминах комбинаторных данных: простого многогранника $P^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ размерности $n+1$ с набором выделенных гиперграней, содержащих все вершины многогранника P, и функции изотропии, сопоставляющей каждой гиперграни многогранника P целочисленный вектор из группы $\mathbb{Z}^n$. Функция изотропии должна удовлетворять дополнительному свойству линейной независимости векторов при каждом ребре многогранника P, аналогичному свойству характеристической функции квазиторического многообразия. Если данные векторы дополняются до базиса решетки $\mathbb{Z}^n$, то пространство из конструкции Саркара неособо и является стабильно комплексным многообразием с границей, состоящей из дизъюнктного объединения квазиторических многообразий.

Топология ПНР-многообразий мало изучена. Имеется теорема Ж. Ланна (опубликованная в статье Ошанина и Шварца [53]) о сигнатуре замкнутого односвязного ПНР-многообразия M^4. В частности, M^4 является ПНР-многообразием тогда и только тогда, когда форма пересечения 2-циклов на M^4 не является (знако-)определенной. Доказательство теоремы Ланна использовало результаты о классификации квадратичных форм конечного ранга над $\mathbb{Z}$. В высших размерностях, Имаока [47] заметил, что комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$ является ПНР-многообразием тогда и только тогда, когда $n \leqslant 1$.

Первая часть диссертации (Глава 2) посвящена изучению квазиторических ПНР-многообразий. Мы доказываем следующее: квазиторическое многообразие M^{2n} полностью нормально расщепимо тогда и только тогда, когда любое комплексное векторное расслоение ξ над многообразием M стабильно полностью расщепимо (см. Теорему 2.1.8). Это свойство является гомотопическим инвариантом топологического пространства M^{2n}. Мы даем различные версии критерия ПНР для квазиторического многообразия, основываясь на данном эквивалентном условии. Во-первых, нами вводится замкнутый выпуклый конус $W(M^{2n})$ в линейном пространстве $\widetilde{K}(M^{2n}) \otimes \mathbb{R}$ (см. Раздел 2.3). Один из критериев ПНР (Следствие 2.4.2) состоит в условии "развернутости"

$$W(M^{2n}) = \widetilde{K}(M^{2n}) \otimes \mathbb{R}.$$

Мы даем явное описание конуса $W(\mathbb{C}P^n)$, а также описываем конус $W(M_1^{2n_1} \times M^{2n_2})$ для декартова произведения квазиторических многообразий в терминах неоднородного тензорного произведения конусов $W(M_1^{2n_1})$, $W(M^{2n_2})$ при изоморфизме Кюннета. Конус $W(M^{2n})$ не является, вообще говоря, полиэдральным. Например, $W(\mathbb{C}P^4)$ и $W(\mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^2)$ не являются полиэдральными конусами, см. Предложение 2.3.1 и Пример 2.5.4. Однако при $n \leqslant 3$ конус $W(M^{2n})$ имеет конечное число порождающих (Предложение 2.5.3), которые нами явно выписаны. Это обстоятельство позволяет использовать компьютерные вычисления для изучения свойства ПНР квазиторических многообразий в размерностях $\leqslant 6$. Во-вторых, характер Черна доставляет градуированную когомологическую версию этого критерия. Необходимым и достаточным условием для полной нормальной расщепимости многообразия M^{2n} является "развернутость" конусов, порожденных степенями линейных форм в когомологиях (Следствие 2.4.9):

$$\mathbb{R}_{\geqslant 0}\langle x^k |\ x \in H^2(M^{2n};\mathbb{R})\rangle = H^{2k}(M^{2n};\mathbb{R}),$$

для всех четных $k = 1,\ldots,n$. Двойственность Пуанкаре дает эквивалентное условие ПНР (Теорема 2.4.4): вещественная k-форма $Q_a : H^2(M^{2n};\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, заданная по формуле $Q_a(x) = \langle a \cdot x^k, [M^{2n}]\rangle$ не полуопределена (такие формы мы называем допустимыми) для всех $a \in H^{2(n-k)}(M^{2n};\mathbb{R})$, $k = 1,\ldots,n$ (см. там же). Это условие похоже на изученные Тиморинным квадратичные формы (как правило, знакопеременные) в связи с соотношениями Ходжа-Римана торических многообразий [15]. Однако в отличие от работы [15] мы рассматриваем формы произвольных степеней, а также отвечающие не только степеням элемента Лефшеца. В-третьих, описание кольца когомологий квазиторического многообразия M^{2n} в терминах соответствующего мультивеера $\mathcal{F}$, полученное Айзенбергом и Масудой [26], дает критерий ПНР в терминах дифференцирований многочлена объема $V_{\mathcal{F}}$ (Теорема 2.7.4). Именно, для любого однородного дифференциального оператора $D \in DOp_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m)$, $\deg D = k$, если многочлен $DV_{\mathcal{F}}$ ненулевой, то $DV_{\mathcal{F}}$ принимает значения различных знаков, где k пробегает $0,\ldots,n-1$.

Нетрудно показать, что любое инвариантное подмногообразие квазиторического ПНР-многообразия M^{2n} является полностью нормально расщепимым (см. Раздел 1.6). Так как квазиторическое ПНР-многообразие не может иметь треугольный многогранник моментов, то многогранник моментов P^n квазиторического ПНР-многообразия M^{2n} не может иметь треугольных граней. Мы выводим другое необходимое условие на комбинаторику многогранника моментов торического ПНР-многообразия, используя когомологический ПНР-критерий: нерв-комплекс многогранника моментов P^n гладкого проективного торического ПНР-многообразия M^{2n}, т.е. симплициальный комплекс $\partial(P^n)^*$, не содержит минимальных не-граней мощности n, $n \geqslant 3$ (Теорема 2.6.12). В частности, при $n = 3$ в силу $P^3 \neq \Delta^3$ это условие равносильно флаговости многогранника P^3. Отметим, что аналогичное утверждение в более широком классе квазиторических многообразий неверно при $n \geqslant 3$. Более того, над квадратом I^2 имеются примеры квазиторических многообразий, как обладающих, так и не обладающих свойством ПНР.

В дальнейшем изложении мы используем несколько конструкций многообразий с необходимыми свойствами (Глава 3). Перечислим эти конструкции. В классе ПНР-многообразий, этими операциями являются раздутие гладкого комплексного проективного ПНР-многообразия X вдоль трансверсального пересечения $Z = D_1 \cap D_2 \subset X$ гладких гиперповерхностей (замечено автором), а также связная сумма замкнутых ПНР-многообразий $M_1 \# M_2$ (впервые замечено Рэем в [54]). Аналогами данных операций для квазиторических многообразий являются обобщение раздутия торического многообразия вдоль инвариантного подмногообразия комплексной коразмерности 2, а также эквивариантная и бриллиантовая суммы квазиторических многообразий. Мы также показываем, что любая башня Ботта является ПНР-многообразием.

Данные конструкции позволяют строить много квазиторических ПНР-многообразий. Приведем пример. Применение к любой башне Ботта последовательных раздутий любых инвариантных подмногообразий комплексной коразмерности 2 дает различные торические ПНР-многообразия. В работе Бухштабера и Володина [4] в ходе доказательства гипотезы Гала для флаговых нестоэдров было показано, что известные многогранники, такие как флаговые нестоэдры, граф-кубоэдры и граф-ассоциэдры, реализуются 2-усеченными кубами с канонической дельзантовой структурой. Соответствующие торические многообразия получаются из любой башни Ботта (размерности, равной удвоенной размерности соответствующего многогранника) последовательностями раздутий инвариантных подмногообразий комплексной коразмерности 2. Таким образом, над каждым (комбинаторным) флаговым нестоэдром, граф-кубоэдром и граф-ассоциэдром существует гладкое проективное торическое ПНР-многообразие.

Далее, мы доказываем, что эквивариантная связная сумма $M_1^{2n} \widetilde{\#} M_2^{2n}$ квазиторических многообразий размерности $2n$, где n нечетно, является ПНР-многообразием, если и только если M_1 и M_2 суть ПНР-многообразия (Предложение 3.5.3). Данное утверждение нетривиально обобщается на случай четного n (см. там же). В качестве иллюстрации, мы показываем, что эквивариантная связная сумма *любого* квазиторического 4-многообразия M^4 с фиксированным квазиторическим 4-многообразием B^4 в неподвижных точках противоположных знаков есть ПНР-многообразие (Предложение 3.5.5). (Многогранник моментов многообразия B^4 является четырехугольником.) Отметим, что данное утверждение обобщается без труда на случай произвольного четного n.

В следующей части диссертации (Глава 5) мы доказываем, что для каждого натурального n существует гладкое проективное торическое многообразие комплексной размерности n, доставляющее мультипликативную образующую кольца Ω_U^* в соответствующей градуировке (Теорема 5.1.1). Для построения торических многообразий с необходимым числом Милнора s_n мы вводим модификацию $B_k(M)$ торического многообразия M^{2n}, состоящую из двукратного раздутия торического многообразия M сначала в неподвижной точке $x \in M$, затем в инвариантном пространстве $\mathbb{C}P^k \subset \mathbb{C}P^{n-1} \simeq D$ вклеенного исключительного дивизора $D \subset Bl_x\ M$, $k = 0, \ldots, n-2$. Изменение класса комплексного кобордизма многообразия M^{2n} при B_k-модификации зависит только от чисел k и n. Это позволяет контролировать изменение числа Милнора при B_k-модификациях торических многообразий.

В последней части диссертации (Глава 6) мы доказываем, что каждый элемент кольца Ω_U^* градуировки, большей 2, представляется квазиторическим ПНР-многообразием (Теорема 6.1.1). Из данной Теоремы непосредственно вытекают упомянутые выше результаты Рэя, и Бухштабера, Панова и Рэя, о представителях в кольце комплексных кобордизмов Ω_U^*. В доказательстве мы рассматриваем локально тривиальные расслоения со слоем, являющимся многообразием ограниченных флагов BF_n (являющимся торической башней $\mathbb{C}P^1$-расслоений), а также используем вышеупомянутые раздутия торического многообразия вдоль инвариантного подмногообразия комплексной коразмерности 2 и эквивариантную связную сумму квазиторических многообразий в неподвижных точках.

Цель диссертации

Целью работы является изучение классов комплексных кобордизмов торических многообразий, квазиторических многообразий с дополнительным свойством полной нормальной расщепимости, а также топологии квазиторических ПНР-многообразий.

Методы исследования

В работе используются методы торической топологии, алгебраической топологии, теории многогранников, комбинаторики и алгебры.

Научная новизна

Основные результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно и заключаются в следующем:

1. Для квазиторического многообразия M^{2n} показана равносильность условия полной нормальной расщепимости многообразия M^{2n} и стабильной полной расщепимости любого комплексного расслоения ξ над многообразием M^{2n}.

2. Вводится выпуклый конус $W(M^{2n}) \subseteq \widetilde{K}^0(M^{2n}) \otimes \mathbb{R}$ для квазиторического многообразия M^{2n}. На основе этого конуса получены эквивалентные критерии ПНР: в терминах $K^0(M^{2n})$, в терминах $H^*(M^{2n}; \mathbb{R})$, в терминах многочлена объема $V_{\mathcal{F}}$ мультивеера $\mathcal{F}$ квазиторического многообразия M^{2n}. Вводятся вещественные однородные k-формы $Q_a : H^2(M^{2n}; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, где $a \in H^{2(n-k)}(M^{2n}; \mathbb{R})$, $k = 1, \ldots, n$. Показана эквивалентность следующих условий:

   (a) M^{2n} является ПНР-многообразием;

   (b) $W(M^{2n}) = \widetilde{K}^0(M^{2n}) \otimes \mathbb{R}$;

   (c) Форма Q_a является знакопеременной (т.е. как вещественнозначная функция Q_a принимает значения разных знаков) для любых $a \in H^{2(n-k)}(M^{2n}; \mathbb{R})$, $a \neq 0$, $k = 1, \ldots, n$.

   (d) Любой нетривиальный многочлен $DV_{\mathcal{F}}$ является знакопеременным (см. выше), где $D \in \mathbb{R}[\partial_1, \ldots, \partial_m]$ есть однородный дифференциальный оператор степени $k = 0, \ldots, n-1$ с постоянными вещественными коэффициентами, $V_{\mathcal{F}}$ есть многочлен от m переменных, где m есть количество лучей в $\mathcal{F}$.

3. Показано, что конус $W(M^6)$ для квазиторического многообразия M^6 размерности 6 является полиэдральным. Получены примеры неполиэдральных конусов $W(M^{2n})$ при $n \geqslant 4$. Показано, что многогранник моментов квазиторического ПНР-многообразия не содержит треугольных граней. Для торического ПНР-многообразия M^{2n} показано отсутствие минимальных не-граней мощности n в соответствующем нерв-комплексе многогранника моментов $P^n \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. В частности, при $n = 3$ квазиторическое ПНР-многообразие имеет флаговый многогранник моментов P^3.

4. Для каждого натурального $n \geqslant 2$ построено гладкое проективное торическое многообразие, класс комплексного кобордизма которого является образующей кольца комплексных кобордизмов Ω_U^* в соответствующей размерности. (Совместный результат с Ю. Устиновским. Дополняет частичный результат Вильфонга [61].)

5. Для каждого натурального $n \geqslant 2$ показано, что любой класс комплексного кобордизма $a \in \Omega_U^*$ имеет представитель, являющийся квазиторическим ПНР- и ПКР-многообразием одновременно.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация носит теоретический характер. Полученные в диссертации результаты представляют интерес для специалистов по торической и алгебраической топологии, теории многогранников и коммутативной алгебре.

Апробация диссертации

Результаты диссертации докладывались на следующих
научных конференциях и научно-исследовательских семинарах:

1. Международная конференция “Торическая топология, теория чисел и их приложения”, г. Хабаровск, Россия, 6–12 сентября 2015г.

2. Международная конференция “Динамика в Сибири”, г. Новосибирск, Россия, 29 февраля–4 марта 2016г.

3. Международная конференция “Ломоносов 2018”, г. Москва, Россия, 9–13 апреля 2018г.

4. Международная конференция “Algebraic topology, Combinatorics and Mathematical Physics” по случаю 75-летия В.М. Бухштабера, Семинар для молодых исследователей “International Seminar on Toric Topology and Homotopy Theory”, г. Москва, Россия, 24–30 мая 2018г.

5. Международная конференция “Glances@Manifolds 2018”, постерный доклад, г. Краков, Польша, 2–6 июля 2018г.

6. Семинар “Алгебраическая топология и ее приложения” им. М.М. Постникова под руководством чл.-корр. РАН В.М. Бухштабера, проф. А.В. Чернавского, проф. И.А. Дынникова, проф. Т.Е. Панова, доц. Л.А. Алания, чл.-корр. РАН А.А. Гайфуллина, доц. Д.В. Миллионщикова, ст.преп. Д.В. Гугнина; кафедра высшей геометрии и топологии Механико-математического факультета МГУ, 1 декабря 2015г.

7. Семинар “Дискретная геометрия и геометрия чисел” под руководством проф. Н.Г. Мощевитина, проф. Н.П. Долбилина и проф. М.Д. Ковалева; кафедра теории чисел Механико-математического факультета МГУ — неоднократно с 2015 по 2018г.

8. Семинар им. В.А. Исковских под руководством проф. Ю.Г. Прохорова, д.ф.-м.н. В.В. Пржиялковского, чл.-корр. РАН Д.О. Орлова, к.ф.-м.н. К.А. Шрамова; математический институт им. В.А. Стеклова, 14 апреля 2016г.

9. Семинар “Группы Ли и теория инвариантов” под руководством проф. Э.Б. Винберга, проф. А.Л. Онищика, доц. И.В. Аржанцева, к.ф.-м.н. Д.А. Тимашева; кафедра высшей алгебры Механико-математического факультета МГУ, 25 апреля 2018г.

10. Семинар “Узлы и теория представлений” под руководством проф. РАН, доц. В.О. Мантурова, доц. Д.П. Ильютко и с.н.с. Д.А. Федосеева; кафедра дифференциальной геометрии и топологии Механико-математического факультета МГУ, 24 ноября 2015г.

Публикации

Основные результаты настоящей диссертации опубликованы в 7 работах [9–14, 57], ссылки на которые даны в библиографии в конце диссертации.

Структура и объем

Диссертация состоит из введения и 6 глав. Текст диссертации изложен на 138 страницах и содержит 3 рисунка. Список литературы включает 70 наименований.

Содержание работы

Здесь мы кратко опишем структуру работы. Диссертация разбита на главы, главы — на разделы. Теоремы, предложения, примеры, замечания и т.д. нумеруются в пределах раздела. В конце введения мы приводим список часто встречающихся обозначений.

Глава 1. Обзор основных понятий и конструкций

В этой главе приведен обзор определений и основных результатов, которые используются в работе. Разделы 1.1, 1.2, 1.3 содержат структурные результаты о кольце комплексных кобордизмов, основные сведения о выпуклых многогранниках и (квази)торических многообразиях, соответственно. Разделы 1.4, 1.5 включают в себя описание колец когомологий и K-теории квазиторических многообразий, а также спектральной последовательности Атья и Хирцебруха. В Разделе 1.6 содержится определение и основные свойства ПКР- и ПНР-многообразий. Этих разделов достаточно для понимания формулировок утверждений Глав 2, 5, 6 (без доказательств). Раздел 1.7 посвящен основным источникам примеров многообразий в данной работе: проективизациям комплексных векторных расслоений. В Разделах 1.8, 1.9 дано определение и основные свойства важных операций над гладкими многообразиями: связной суммы двух многообразий в точках, и раздутия многообразия вдоль его гладкого подмногообразия. Эквивариантные аналоги данных операций определены в Разделах 1.10, 1.11, соответственно. Разделы 1.7-1.11 необходимы для понимания Главы 3. В Разделе 1.12 читатель найдет примеры известных многообразий, доставляющих мультипликативные порождающие кольца Ω_U^*. Раздел 1.13 содержит необходимые для обоснований некоторых утверждений из Глав 5, 6 сведения о вычетах биномиальных коэффициентов по модулю степени простого числа.

Глава 2. Квазиторические ПНР-многообразия

В главе 2 подробно изучаются квазиторические многообразия с свойством полной нормальной расщепимости. Квазиторические ПНР-многообразия являются одним из центральных предметов настоящей работы. Раздел 2.1 содержит формулировку и доказательство ПНР-критерия в терминах кольца K-теории квазиторического многообразия, а также теорему о стабильной полной расщепимости любого комплексного векторного расслоения над квазиторическим ПНР-многообразием. В Разделе 2.2 напоминаются некоторые определения и операции над выпуклыми конусами в $\mathbb{R}^n$. Также в Разделе 2.2 вводится компактное выпуклое тело $C_\infty^n \subset \mathbb{R}^n$, являющееся пределом некоторой последовательности циклических многогранников. В Разделе 2.3 определен конус $W(M^{2n})$ для произвольного квазиторического многообразия M^{2n}. Он играет важную роль в изучении квазиторических ПНР-многообразий. Там же приведено описание конуса $W(\mathbb{C}P^n)$ в терминах выпуклого тела C_∞^n, а также формула для конуса $W(M_1^{2n_1} \times M_2^{2n_2})$ для декартова произведения двух квазиторических многообразий $M_1^{2n_1}, M_2^{2n_2}$. ПНР-критерий в терминах K-теории и его градуированная версия в терминах кольца когомологий квазиторического многообразия (а также соответствующие доказательства) приведены в Разделе 2.4. Данные результаты являются ключевыми в настоящей работе. Для квазиторических многообразий размерности 4 когомологический ПНР-критерий вытекает из теоремы Ж. Ланна (см. Теорему 1.6.2). В Разделе 2.5 мы даем (элементарное) полное описание торических ПНР-поверхностей: единственной торической не-ПНР поверхностью (с точностью до изоморфизма) является комплексная проективная плоскость $\mathbb{C}P^2$. Там же мы частично изучаем квазиторические многообразия размерности 6. Из когомологического ПНР-критерия в Разделе 2.5 выводится полиэдральность конуса $W(M^6)$ для любого 6-мерного квазиторического многообразия M^6.

Другим приложением когомологического ПНР-критерия является необходимое условие для ПНР-свойства торического многообразия M^{2n} комплексной размерности $n \geqslant 3$. Именно, нерв-комплекс многогранника моментов многообразия M^{2n} не содержит минимальных не-граней мощности n. В случае комплексной размерности 3, это условие (в силу запрета на треугольные грани) эквивалентно флаговости многогранника моментов торического многообразия. Формулировка ПНР-критерия в терминах многочлена объема содержится в Разделе 2.7. Она приводит к вопросам о положительно полуопределенных вещественных формах высших степеней (psd-forms). Открытые вопросы о квазиторических ПНР-многообразиях приведены в Разделе 6.3.

Глава 3. Конструкции многообразий с требуемыми свойствами

Глава 3 содержит основные конструкции многообразий, используемых при доказательствах полученных утверждений в Главах 5, 6. Несмотря на вспомогательную роль, представленные в этой главе конструкции представляют самостоятельный интерес. В Разделе 3.1 определяются B_k-модификации комплексных n-мерных многообразий. Данные операции являются цепочками (длины 2) эквивариантных раздутий: в точке, затем в k-мерном подпространстве (со стандартным нормальным вложением $\mathbb{C}P^k \subset \mathbb{C}P^{n-1}$) вклеенного дивизора $\mathbb{C}P^{n-1}$. Их эквивариантные аналоги для торических многообразий определены в Разделе 3.2. Эти операции служат основным инструментом при доказательстве теоремы из Главы 5. Удобство B_k-модификаций состоит в том, что соответствующее изменение числа Милнора зависит только от чисел k и n, и не зависит от рассматриваемого многообразия. В результате применения B_k-модификаций к торическому многообразию M^{2n} получаются торические многообразия $B_k(M^{2n})$, $k = 0, \ldots, n-2$. Данные многообразия разбиваются на пары $\{B_k(M^{2n}),\ B_{n-k-2}(M^{2n})\}$, $k = 0, \ldots, \max\{0, [\frac{n-3}{2}]\}$ (округление в меньшую сторону), а также пару $\{B_{n/2-1}(M^{2n}),\ B_{n/2-1}(M^{2n})\}$ в случае четного n. Многогранники моментов многообразий из любой такой пары комбинаторно эквивалентны, см. Раздел 3.3. Необходимыми для Главы 6 инструментами являются расслоения ограниченных флагов, связные суммы и раздутия комплексной коразмерности 2 (а также их эквивариантные аналоги), которым посвящены Разделы 3.4, 3.5 и 3.6, соответственно.

Расслоение ограниченных флагов с базой (топологическим пространством) X является пространством локально тривиального расслоения со слоем BF_n (многообразием ограниченных флагов) над X, и является башней проективизаций расщепимых расслоений ранга 2 (с "нулевым этажом" X). В частности, башня Ботта BF_n сама по себе является расслоением ограниченных флагов над точкой. Этот пример разобран подробно также в Разделе 3.4. Поведение свойства ПНР при эквивариантных связных суммах квазиторических многообразий M_1^{2n}, M_2^{2n} изучено в Разделе 3.5. В частности, оно существенно зависит от четности n. Введенные нами в этой Главе конструкции используются для определения вспомогательных многообразий в Разделе 3.7. В свою очередь, эти многообразия используются в доказательствах утверждений из Главы 6.

Глава 4. Результаты о числах Милнора стабильно комплексных многообразий

Технически трудной частью работы (Глава 4) является получение формул для числа Милнора многообразия ограниченных флагов, а также изменения числа Милнора при B_k-модификациях, определенных в Главе 3. Необходимые вычисления составляют содержание Разделов 4.1 и 4.2, соответственно. В Разделе 4.3 выводятся формулы для чисел Милнора вспомогательных многообразий из Главы 3.

Глава 5. Торические представители мультипликативных образующих кольца Ω_U^*

Глава 5 содержит один из основных результатов работы. Мы дополняем набор мультипликативных образующих кольца Ω_U^*, построенных А. Вильфонгом, (представленных гладкими проективными торическими многообразиями комплексной размерности n) до полного набора образующих во всех градуировках, больших 2. (Т.е. в работе построены образующие комплексной размерности n, где $n+1$ не является степенью простого и $n+1$ нечетно одновременно.) Необходимые обоснования приведены в Разделах 5.1 и 5.2. В частности, Раздел 5.2 содержит обоснование взаимной простоты в совокупности изменений числа Милнора, когда $n+1$ не является степенью простого и $n+1$ нечетно одновременно.

Глава 6. Квазиторические ПНР-представители в кольце Ω_U^*

Глава 6 содержит последний основной результат настоящей диссертации. Мы предъявляем набор полиномиальных порождающих кольца комплексных кобордизмов Ω_U^*, представленных квазиторическими ПНР-многообразиями, во всех градуировках, больших 2. Доказательство написано в Разделах 6.1 и 6.2. Необходимые теоретико-числовые выкладки вынесены в Раздел 6.2. Раздел 6.3 посвящен открытой проблеме поиска других мультипликативных порождающих кольца Ω_U^*, представленных квазиторическими ПНР-многообразиями.

Соглашения и обозначения

- В работе рассматриваются только комплексные локально тривиальные векторные непрерывные расслоения. Символы тензорного произведения, а также обратных образов векторных расслоений опускаются, где это не приводит к путанице.

- $K^*(X)$ обозначает кольцо Гротендика комплексных расслоений над топологическим пространством X.

- Там, где не оговорено противное, мы рассматриваем C^∞-гладкие многообразия, комплексные или вещественные. Если не сказано иначе, указывается вещественная размерность многообразия.

- Все рассматриваемые нами ниже многогранники предполагаются выпуклыми, а конусы — замкнутыми и выпуклыми. Мы считаем, что и те, и другие принадлежат конечномерным векторным пространствам.

- Под торическими многообразиями мы понимаем гладкие проективные алгебраические торические многообразия.

- $H^*(X;R)$ и $\widetilde{H}^*(X;R)$ обозначают сингулярные обычные и приведенные когомологии топологического пространства X, где $R=\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R}$, соответственно.

Приведем теперь список основных обозначений.

$a\|b$	для целых чисел a, b число a делит число b.
$[\frac{a}{b}]$	для целых чисел a, b остаток от деления a на b.
$B \subset A$	множество B содержится в множестве A и не совпадает с ним.
$B \subseteq A$	множество B содержится в множестве A и, быть может, совпадает с ним.
$\underline{\mathbb{C}}^k$	тривиальное векторное расслоение ранга k.
D	полидиск, оператор двойственности Пуанкаре.
$\simeq$	изоморфизм алгебр, колец, векторных расслоений и других объектов в рассматриваемой категории.
S^n	n-мерная сфера.
T^m	компактный m-мерный тор, $T^m \cong (S^1)^m$.
$\#$	связная сумма многогранников в вершинах или связная сумма многообразий в точках.
$\widetilde{\#}$	эквивариантная связная сумма торических многообразий в неподвижных точках.
$\diamondsuit$	бриллиантовая сумма квазиторических многообразий.
$\sigma(x)$	знак точки x квазиторического многообразия.
$\simeq_{\mathbb{R}}$	изоморфизм вещественных расслоений.
$\simeq_{\mathbb{C}}$	изоморфизм комплексных расслоений.
$R\langle\rangle$	K-линейная оболочка множества, где $R = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.
$R_{\geqslant 0}\langle\rangle$	полугрупповая K-линейная оболочка множества, где $R = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Виктору Матвеевичу Бухштаберу за постановку задач, за его неоценимую помощь и советы на всех этапах написания работы, а также за общее математическое образование и мировоззрение, сформированное при общении автора с ним. Автор бесконечно благодарен Т.Е. Панову за замечательные курсы по алгебраической топологии и теории комплексных кобордизмов, а также за помощь, оказанную им автору на этапе редактирования диссертации. Автор прошел школу теории особенностей на семинаре С.М. Гусейн-Заде, в частности, научился методу разрешения особенностей алгебраических многообразий последовательностями раздутий, сыгравшим важную роль в проведенном исследовании, а также научился критически мыслить и оценивать написанный математический текст. Автор отдает дань уважения своему соавтору и коллеге Ю. Устиновскому. А. Айзенбергу автор выражает благодарность за полезные обсуждения и дружескую помощь при подготовке диссертации. В. Кириченко, Н. Ероховца и И. Лимонченко автор благодарит за проявленный интерес к работе и различные полезные обсуждения в области многочленов объема, комбинаторики выпуклых многогранников и зеркальной симметрии. Автор также благодарен всему коллективу кафедры высшей геометрии и топологии Механико-математического факультета МГУ за поддержку и внимание.

Глава 1

Обзор основных понятий и конструкций

1.1 Комплексные кобордизмы

C^∞-гладкие вещественные компактные замкнутые многообразия M_1^n, M_2^n размерности n называются *(неориентированно) бордантными*, если существует гладкое вещественное компактное многообразие W^{n+1} размерности $n+1$ такое, что $\partial W^{n+1} = M_1^n \sqcup M_2^n$. Бордизм есть отношение эквивалентности. Операция дизъюнктного объединения наделяет множество Ω_n^O классов эквивалентности неориентированных кобордизмов размерности n структурой (абелевой) группы. Прямая сумма абелевых групп $\Omega_*^O = \bigoplus_{i=0}^\infty \Omega_i^O$ является коммутативным кольцом относительно операции декартова произведения. Для ориентированных C^∞-гладких вещественных компактных замкнутых многообразий указание ориентации и условие согласованности индуцированных ориентаций на ∂W^{n+1} и M_i^n позволяет аналогичным образом определить кольцо ориентированных бордизмов Ω_*^{SO}.

Имеется также понятие кобордизма неориентированных (компактных замкнутых) многообразий M_1^n, M_2^n с гладкими вложениями

$$i_1: \ M_1^n \to \mathbb{R}^{n+k_1}, \ i_2: \ M_2^n \to \mathbb{R}^{n+k_2}.$$

Эти многообразия с вложениями называются неориентированно кобордантными, если существует компактное многообразие W^{n+1} размерности $n+1$ с вложением $i: \ W^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1+k}$ такое, что $\partial W^{n+1} = M_1^n \sqcup M_2^n$ и ограничения вложения i на компоненты края продолжают вложения $i_1, \ i_2$. Кольцо кобордизмов Ω_O^* определяется аналогично кольцу бордизмов Ω_*^O. Также имеет место определение ориентированных кобордизмов многообразий $M^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$

с заданной ориентацией стабильного нормального расслоения вложения.

Кольца неориентированных и ориентированных кобордизмов полностью известны, см., например, [19].

1.1.1 Комплексные кобордизмы

Напомним, что имеются канонические вложения

$$Gr_{\mathbb{R}}(r,n) \subset Gr_{\mathbb{R}}(r,n+1),\ Gr_{\mathbb{C}}(r,n) \subset Gr_{\mathbb{C}}(r,n+1),$$

где $Gr_{\mathbb{R}}(r,n)$ и $Gr_{\mathbb{C}}(r,n)$ суть грассманианы r-мерных плоскостей в $(r+n)$-мерном линейном пространстве над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, соответственно. Обозначим через

$$\gamma^O_{r,n} \to Gr_{\mathbb{R}}(r,n),\ \gamma^U_{r,n} \to Gr_{\mathbb{C}}(r,n)$$

соответствующие универсальные векторные расслоения. При переходе к пределу получаются классифицирующие пространства

$$BO(r) = \lim_{n\to+\infty} Gr_{\mathbb{R}}(r,n),\ BU(r) = \lim_{n\to+\infty} Gr_{\mathbb{C}}(r,n)$$

для вещественных и комплексных расслоений, соответственно, и универсальные векторные расслоения

$$\gamma^O_r = \lim_{n\to+\infty} \gamma^O_{r,n} \to BO(r),\ \gamma^U_r = \lim_{n\to+\infty} \gamma^O_{r,n} \to BU(r).$$

Для универсальных расслоений $\gamma^O_r \to BO(r)$, $\gamma^U_r \to BU(r)$ выполнены тождества

$$(j^O_r)^*\gamma^O_{r+1} = \gamma^O_r \oplus \underline{\mathbb{R}},\ (j^U_r)^*\gamma^O_{r+1} = \gamma^U_r \oplus \underline{\mathbb{C}}. \tag{1.1}$$

Имеются канонические вложения

$$j^O_r:\ BO(r) \to BO(r+1),\ j^U_r:\ BU(r) \to BU(r+1).$$

Относительно отображений j^O_r, j^U_r определены прямые пределы

$$BO = \lim_{r\to+\infty} BO(r),\ BU = \lim_{r\to+\infty} BU(r).$$

Предел отображений овеществления $f_r:\ BU(r) \to BO(2r)$ задает каноническое отображение $f:\ BU \to BO$.

Определение 1.1.1. Пусть задано вещественное расслоение $\kappa \to X$ ранга k над компактным хаусдорфовым топологическим пространством X. Если $k = 2r$ четно, то $(BU(r), f_r)$-структурой на расслоении ξ называется изоморфизм вещественных расслоений $\kappa \to \xi$, где $\xi \to X$ есть произвольное комплексное расслоение. (BU, f)-структурой на расслоении κ называется класс эквивалентности последовательностей $(BU(m), f_m)$-структур

$$c_r : \ \kappa \oplus \underline{\mathbb{R}}^{2m-k} \to \xi_m$$

на $\kappa \oplus \underline{\mathbb{R}}^{2m-k}$, где две последовательности объявляются эквивалентными, если совпадают начиная с некоторого достаточно большого m.

Из Определения 1.1.1 и Формул (1.1) вытекает, что $(BU(r), f_r)$-структура на расслоении корректно и однозначно определяет (BU, f)-структуру на нем. Получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} & BU \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[ur, "g^U"] \arrow[r, "g^O"] & BO, \end{tikzcd}$$

где g^O и g^U суть пределы классифицирующих отображений g^O_m и g^U_m расслоений $\kappa \oplus \underline{\mathbb{R}}^{2m-k}$ и ξ_m, соответственно. Если X имеет гомотопический тип конечного CW-комплекса размерности n (например, X есть гладкое компактное многообразие), то в качестве ξ_r можно выбрать комплексное расслоение, равное сумме Уитни некоторого комплексного расслоения $\xi'_r \to X$ вещественного ранга не более n и тривиального расслоения.

Для любого C^∞-гладкого вещественного замкнутого n-мерного многообразия M^n и его гладкого вложения $i : \ M^n \to \mathbb{R}^{n+2k}$ рассмотрим $(BU(k), f_k)$-структуру

$$c_{\mathrm{N}} : \ \nu(i) \to \eta, \tag{1.2}$$

на нормальном расслоении $\nu(i) \to M^n$ вложения i. Любое вложение $M^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ многообразия M^n продолжается до вложения $M^n \to \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^{n+k+1}$. Поэтому $(BU(k), f_k)$-структура на нормальном расслоении $\nu(i)$ определяет однозначно (B, f)-структуру на $\nu(i)$.

Определение 1.1.2. *Стабильной нормальной комплексной структурой* на многообразии M^n (с вложением i) называется представитель (BU, f)-структуры на нормальном расслоении $\nu(i)$. В случае, если на M фиксирована стабильная нормальная комплексная структура (заданная изоморфизмом $c_{\mathbb{N}}$), многообразие M (а также пара $(M, c_{\mathbb{N}})$) называется *стабильно нормально комплексным многообразием.*

Для достаточно большого k любые два гладких вложения $i_1,\ i_2$ многообразия M в $\mathbb{R}^{n+k}$ регулярно гомотопны и соответствующие нормальные расслоения $\nu(i_1),\ \nu(i_2)$ изоморфны. Поэтому (BU, f)-структуры на нормальных расслоениях вложений $i_1,\ i_2$ находятся во взаимно однозначном соответствии. Обозначим через $g_{\mathbb{N}} :\ M \to BO$ композицию классифицирующего отображения нормального расслоения вложения i_1 с естественным включением $BO(k) \to BO$. Мы получаем

Предложение 1.1.3. *Эквивалентные стабильные нормальные комплексные структуры на M находятся во взаимно однозначном соответствии с классами послойной гомотопической эквивалентности поднятий отображения $g_{\mathbb{N}}$.*

Нетрудно показать, что отношение эквивалентности на множестве стабильных нормальных комплексных структур на M порождено изоморфизмами комплексных векторных расслоений и прибавлением тривиальных векторных расслоений.

Определим для стабильно нормально комплексного многообразия $(M^n, c_{\mathbb{N}})$ (заданного с некоторым вложением $i :\ M \to \mathbb{R}^{n+k}$) стабильно нормально комплексную структуру $\overline{c_{\mathbb{N}}}$ на M по формуле

$$\overline{c_{\mathbb{N}}} :\ \nu(i) \oplus \underline{\mathbb{R}}^2 \xrightarrow{c_{\mathbb{N}} \oplus Id} \eta \oplus \underline{\mathbb{C}} \xrightarrow{Id \oplus J} \xi \oplus \underline{\mathbb{C}},$$

где $J :\ \underline{\mathbb{C}} \to \underline{\mathbb{C}}$ является послойным отображением комплексного сопряжения.

Определение 1.1.4. Стабильно нормально комплексные многообразия $(M_1^n, c_{\mathbb{N},1}),\ (M_2^n, c_{\mathbb{N},2})$ вещественной размерности n с гладкими вложениями

$$i_1 :\ M_1^n \to \mathbb{R}^{n+k_1},\ i_2 :\ M_2^n \to \mathbb{R}^{n+k_2},$$

называются *комплексно кобордантными*, если существует такое стабильно нормально комплексное многообразие $(W^{n+1}, c_{\mathbb{N}})$ с границей, и гладкое вложение $i :\ W \to \mathbb{R}^{n+1+k}$ для некоторого k такие, что $\partial W^{n+1} = M_1 \sqcup M_2$ и стабильные нормальные комплексные структуры $c_{\mathcal{N}}|_{M_1^n}$ и $c_{\mathcal{N}}|_{M_2^n}$ эквивалентны $c_{\mathcal{N},1}$ и $\overline{c_{\mathcal{N},2}}$, соответственно.

Проверка корректности Определения 1.1.4 состоит в применении теоремы о воротнике: нормальные расслоения вложений компонент края в W тривиальны, поэтому стабильная нормальная комплексная структура на W индуцирует стабильную нормальную комплексную структуру на компонентах края.

Предложение 1.1.5. *Для двух эквивалентных стабильных нормальных комплексных структур $c_{\mathcal{N},1}$, $c_{\mathcal{N},2}$ на многообразии M имеется комплексный кобордизм между $(M, c_{\mathcal{N},1})$ и $(M, c_{\mathcal{N},2})$.*

1.1.2 Комплексные бордизмы

Теперь приступим к опредению понятия комплексного бордизма многообразий.

Определение 1.1.6. *Стабильной касательной комплексной структурой* на M называется любой представитель (BU, f)-структуры на касательном расслоении TM, т.е. изоморфизм вещественных расслоений

$$c_{\mathcal{T}}:\ TM \oplus \underline{\mathbb{R}}^{2m-n} \to \xi, \tag{1.3}$$

для некоторого m, $2m \geqslant n$. В случае, если на M фиксирована стабильная касательная комплексная структура $c_{\mathcal{T}}$, пара $(M, c_{\mathcal{T}})$ называется *стабильно касательно комплексным многообразием.*

Если стабильная касательная комплексная структура $c_{\mathcal{T}}$ на многообразии M ясна из контекста, будем говорить о стабильно касательно комплексном многообразии M.

Удобно также определение стабильной касательной комплексной структуры на многообразии M в терминах (BU^*, f^*)-структуры, см. [19, Глава II]. Отображение

$$I_{r,n}:\ Gr_{\mathbb{R}}(r,n) \to Gr_{\mathbb{R}}(n,r),$$

сопоставляющее r-плоскости ее n-мерное ортогональное дополнение, индуцирует инволютивное отображение $I:\ BO \to BO$. Отображение $f:\ BU \to BO$

является расслоением, поэтому определено расслоение

$$f^* : \ BU^* = I^*BU \to BO.$$

Так как $I^2 = Id$, то $BU^* = BU$. Обозначим обратное отображение к $I^* : \ BU \to BU$ через I'.

Рассмотрим многообразие M^n с вложением $i : \ M^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ для достаточно большого k. Тогда классифицирующие отображения

$$g_{k,\mathcal{N}} : \ M \to Gr_{\mathbb{R}}(k,n), \ g_{k,\mathcal{T}} : \ M \to Gr_{\mathbb{R}}(n,k)$$

для касательного и нормального расслоений $\nu(i)$ и TM, соответственно, связаны соотношением $g_{k,\mathcal{T}} = I_{n,k} \circ g_{k,\mathcal{N}}$. Взяв композицию этих отображений с вложениями $Gr_{\mathbb{R}}(k,n) \to BO$, $Gr_{\mathbb{R}}(n,k) \to BO$, соответственно, получаем отображения

$$g_{\mathcal{N}} : \ M \to BO, \ g_{\mathcal{T}} : \ M \to BO,$$

связанные соотношением $g_{\mathcal{T}} = I \circ g_{\mathcal{N}}$.

Отображения I^*, I' устанавливают взаимно однозначное соответствие между послойными гомотопическими классами поднятий отображения $g_{\mathcal{N}}$ на BU и классами поднятий отображения $g_{\mathcal{T}}$ на BU^*. Следовательно, получаем следующие два утверждения (см. Предложение 1.1.3).

Предложение 1.1.7. *Эквивалентные стабильные касательные комплексные структуры на M находятся во взаимно однозначном соответствии с классами послойной гомотопической эквивалентности поднятий отображения $g_{\mathcal{T}}$.*

Предложение 1.1.8. *Существует взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентности стабильных касательных и нормальных комплексных структур на многообразии M.*

Для стабильно касательно комплексного многообразия $(M^n, c_{\mathcal{T}})$ зададим стабильную касательную комплексную структуру $\overline{c_{\mathcal{T}}}$ на M по формуле

$$\overline{c_{\mathcal{T}}} : \ TM \oplus \underline{\mathbb{R}}^{2m-n} \oplus \underline{\mathbb{R}}^2 \overset{c_{\mathcal{T}} \oplus Id}{\to} \xi \oplus \underline{\mathbb{C}} \overset{Id \oplus J}{\to} \xi \oplus \underline{\mathbb{C}}.$$

Стабильно касательно комплексное многообразие $(M^n, \overline{c_{\mathcal{T}}})$ будем также обозначать через $\overline{M}$.

Определение 1.1.9. Стабильно касательно комплексные многообразия $(M_1^n, c_{\mathfrak{T},1})$, $(M_2^n, c_{\mathfrak{T},2})$ вещественной размерности n *комплексно бордантны*, если существует такое стабильно касательно комплексное многообразие $(W^{n+1}, c_{\mathfrak{T}})$ с границей, что $\partial W^{n+1} = M_1 \sqcup M_2$, и что стабильные касательные комплексные структуры $c_{\mathfrak{T}}|_{M_1^n}$ и $c_{\mathfrak{T}}|_{M_2^n}$ эквивалентны $c_{\mathfrak{T},1}$ и $\overline{c_{\mathfrak{T},2}}$, соответственно.

Предложение 1.1.10. *Для двух эквивалентных стабильных касательных комплексных структур* $c_{\mathfrak{T},1}$, $c_{\mathfrak{T},2}$ *на многообразии* M *имеется комплексный бордизм между* $(M, c_{\mathfrak{T},1})$ *и* $(M, c_{\mathfrak{T},2})$.

Согласно Предложению 1.1.8, стабильная касательная комплексная структура на многообразии M определяет стабильную нормальную структуру на M, и наоборот. Построим явное соответствие между ними. Пусть дано стабильно касательно комплексное многообразие $(M, c_{\mathfrak{T}})$ (см. Определение 1.1.6). По теореме Уитни о вложении существует вложение $i:\ M \to \mathbb{R}^{n+k}$ с нормальным расслоением $\nu = \nu(i) \to M$ для некоторого k. Имеется изоморфизм вещественных расслоений

$$r:\ \nu \oplus \nu \to \nu_{\mathbb{C}},$$

обратный к изоморфизму овеществления комплексификации $\nu_{\mathbb{C}}$ векторного расслоения ν. Следовательно,

$$\nu \oplus \underline{\mathbb{R}}^{n+k} \oplus \underline{\mathbb{R}}^{2m-n} = \nu \oplus (\nu \oplus TM) \oplus \underline{\mathbb{R}}^{2m-n} = \\ = (\nu \oplus \nu) \oplus (TM \oplus \underline{\mathbb{R}}^{2m-n}) \stackrel{r\oplus c_{\mathfrak{T}}}{\to} \nu_{\mathbb{C}} \oplus \xi.$$

Мы получаем стабильную нормальную комплексную структуру на M. Обратно, пусть дано стабильно нормально комплексное многообразие $(M, c_{\mathfrak{N}})$ (см. (1.2)). Тогда имеет место изоморфизм

$$TM \oplus \underline{\mathbb{R}}^{n+k} = TM \oplus (TM \oplus \nu) = (TM \oplus TM) \oplus \nu \xrightarrow{r\oplus c_{\mathfrak{N}}} TM_{\mathbb{C}} \oplus \eta$$

в обозначениях выше.

1.1.3 Структурные результаты

Комплексный бордизм и комплексный кобордизм являются отношениями эквивалентности на множествах стабильно касательно и нормально комплексных многообразий размерности n, соответственно. Множества классов комплексного бордизма и кобордизма стабильно касательно и нормально комплексных многообразий размерности n обозначаются через Ω_n^U, Ω_U^n, соответственно.

Множества Ω_n^U, Ω_U^n наделяются структурами абелевых групп посредством дизъюнктного объединения. (Для определения сложения в терминах связной суммы многообразий см. Раздел 1.8.) Прямые суммы $\Omega_*^U := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Omega_n^U$, $\Omega_U^* := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Omega_U^n$ абелевых групп наделяются структурами коммутативных ассоциативных колец посредством декартова произведения стабильно касательно и нормально комплексных многообразий (с естественной стабильно комплексной структурой), соответственно. Единицей 1 в кольцах Ω_*^U, Ω_U^* служит точка с тривиальным одномерным комплексным расслоением, а минус единицей — точка с комплексно сопряженным тривиальным одномерным комплексным расслоением. Проверка корректности умножения на -1 класса бордизма $[(M^n, \iota)]$ состоит в рассмотрении в качестве "пленки" цилиндра $(M^n \times I, \iota \oplus Id)$.

Рассмотрим отображение $Inv:\ \Omega_*^U \to \Omega_U^*$, сопоставляющее стабильно касательно комплексному многообразию M^n любого представителя стабильной нормальной комплексной структуры на M согласно Предложению 1.1.8. В силу Предложений 1.1.10, 1.1.5, Inv корректно определено, и мы получаем

Теорема 1.1.11. *Отображение Inv корректно определено и устанавливает градуированный изоморфизм колец $\Omega_*^U \simeq \Omega_U^*$.*

Будем называть многообразие M с фиксированной стабильной касательной или нормальной комплексной структурой *стабильно комплексным многообразием*, когда это не вызывает путаницы. В силу Теоремы 1.1.11, всюду далее мы будем говорить о классах комплексных кобордизмов, представленных многообразиями с стабильной касательной или нормальной комплексной структурой. Также далее мы будем называть кольцо Ω_*^U кольцом комплексных кобордизмов. Это соглашение традиционно в данной тематике.

Для стабильно комплексного многообразия $(M^{2k}, c_{\mathfrak{T}})$ рассмотрим полный класс Черна комплексного расслоения ξ (см. (1.3)):

$$c(\xi) = 1 + c_1(\xi) + \cdots + c_k(\xi),\ \ c_i(\xi) \in H^{2i}(M; \mathbb{Z}).$$

Определение 1.1.12. Для произвольного разбиения $k = i_1 + \cdots + i_t$ рассмотрим когомологический класс $c_{i_1}(\xi)\dots c_{i_t}(\xi) \in H^{2k}(M;\mathbb{Z})$. Спаривание данного класса когомологий с фундаментальным классом $[M] \in H_{2k}(M;\mathbb{Z})$

$$\langle c_{i_1}(\xi)\dots c_{i_t}(\xi), [M]\rangle \in \mathbb{Z}$$

называется *характерическим числом Черна* (или просто числом Черна) стабильно комплексного многообразия M.

Представим формально полный класс Черна расслоения ξ в виде:

$$c(\xi) = \prod_{i=1}^{k}(1+t_i),$$

где t_i — корни Черна расслоения ξ. Так как $c_i(\xi)$ является элементарным симметрическим многочленом $\sigma_i(x_1,\dots,x_k)$, то по основной теореме о симметрических многочленах для любого симметрического многочлена $P(t_1,\dots,t_k)$ степени k определено спаривание с фундаментальным классом
$\langle P(t_1,\dots,t_k), [M]\rangle$.

Согласно Теореме Милнора и Новикова, кольцо комплексных кобордизмов изоморфно градуированному кольцу полиномов от счетного числа образующих: $\Omega_*^U \simeq \mathbb{Z}[a_1, a_2, \dots]$, $\deg(a_i) = 2i$ (см. [19]). Хорошо известно, что проективные пространства $\{\mathbb{C}P^k\}_{k=1}^{\infty}$ полиномиально порождают кольцо комплексных кобордизмов над $\mathbb{Q}$ (см. [19, Глава VII]):

$$\Omega_*^U \otimes \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}[[\mathbb{C}P^1], [\mathbb{C}P^2], \dots].$$

Как мы видим, над полем рациональных чисел кольцо $\Omega_*^U \otimes \mathbb{Q}$ имеет явный простой набор образующих.

Вся трудность поиска образующих кольца Ω_*^U обуславливается различными соотношениями делимости характеристических чисел стабильно комплексных многообразий. В связи с этим, как правило, поиск образующих кольца кобордизмов сводится к теоретико-числовым задачам ([49, 60]). Согласно общему результату Милнора и Новикова, задача поиска образующих кольца Ω_*^U эквивалентна построению многообразий со специальными значениями выделенного характеристического числа s_n:

Теорема 1.1.13 (Милнор, Новиков, [5, 19]). *Класс кобордизмов стабильно комплексного многообразия M^{2n}, $\dim M^{2n} = 2n$, может быть взят в качестве мультипликативного образующего тогда и только тогда, когда*

$$s_n(M^{2n}) = \begin{cases} \pm 1, \; n \neq p^k - 1 & \textit{ни для какого простого числа } p; \\ \pm p, \; n = p^k - 1 & \textit{для некоторого простого числа } p. \end{cases}$$

Здесь $s_n(M^{2n})$ это число Милнора многообразия M^{2n} (также называемое иногда старшим характеристическим числом):

$$s_n(M^{2n}) := \langle [M^{2n}], t_1^n + \cdots + t_n^n \rangle,$$

где $t_1, \ldots, t_n$ — корни Черна (комплексного) касательного расслоения TM^{2n}.

1.2 Выпуклые многогранники и операции над ними

Ниже мы приводим краткий обзор сведений из теории выпуклых многогранников. Более подробные сведения (вместе с доказательствами корректности определений) можно найти в монографии [22].

Определение 1.2.1. *Выпуклым многогранником* в (вещественном) векторном пространстве $V \simeq \mathbb{R}^n$ называется выпуклая оболочка конечного непустого множества точек в V. Выпуклый многогранник в V эквивалентно определяется как ограниченное непустое пересечение конечного числа полупространств:

$$P = \{v \in V | \; \langle v, a_i \rangle + b_i \geqslant 0, \; i = 1, \ldots, m\}, \tag{1.4}$$

где $a_i \in V^*$ — некоторые линейные функции на V, а $b_i \in \mathbb{R}$. *Размерностью* $\dim P$ выпуклого многогранника P называется размерность линейной оболочки его вершин. В дальнейшем мы будем считать, что система (1.4) *приведенная*, то есть ни одно из неравенств $\langle v, a_i \rangle + b_i \geqslant 0$ не является следствием остальных. В этом случае пересечение многогранника P с любой из гиперплоскостей $\langle v, a_i \rangle + b_i \geqslant 0$ называется *гипергранью* многогранника P. Любое непустое пересечение гиперграней многогранника P называется *гранью* многогранника P. Выпуклый многогранник P называется *простым*, если каждая его вершина принадлежит ровно $\dim P$ гиперграням.

Два многогранника $P_1, P_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ одинаковой размерности называются комбинаторно эквивалентными, если существует биекция между гранями многогранников P_1, P_2, сохраняющая отношения включения. Множество граней выпуклого многогранника $P^n \subseteq \mathbb{R}^n$ является частично упорядоченным по отношению к включению, и называется *решеткой граней* многогранника P. В случае простого многогранника $P^n \subseteq \mathbb{R}^n$ граница его двойственного симплициального многогранника $\partial(P)^*$ является симплициальным комплексом, и называется *нерв-комплексом* простого многогранника P. Таким образом, многогранники $P_1, P_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ комбинаторно эквивалентны, если соответствующие решетки граней изоморфны. Класс комбинаторной эквивалентности многогранников называется комбинаторным многогранником.

Зафиксируем в V свободную абелеву группу $N \simeq \mathbb{Z}^n$. Дополнительно предположим, что многогранник P *рационален*, то есть $a_i \in N^*$, $b_i \in \mathbb{Q}$. Рассмотрим примитивные векторы нормалей $\nu_1, \ldots, \nu_m$ ко всем гиперграням многогранника P.

Определение 1.2.2. Простой n-мерный многогранник $P \subset V$ называется *дельзантовым*, если для каждой вершины $v \in P$ векторы $\nu_{i_1}, \ldots, \nu_{i_n}$ нормалей к всем гиперграням, пересекающимся в вершине v, образуют базис свободной абелевой группы $N^* \subset V^*$.

Декартово произведение многогранников $P \times Q$ и срезка $\operatorname{cut}_G P$ грани G многогранника P являются операциями на множестве простых (дельзантовых) многогранников.

Определение 1.2.3. Рассмотрим грань G простого многогранника $P \subset \mathbb{R}^n$. Она имеет вид $G = F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_k}$ для некоторых гиперграней $F_{i_1}, \ldots, F_{i_k} \subset P$. Рассмотрим опорную гиперплоскость $H = \{v \in \mathbb{R}^n | \ \langle v, a \rangle = b\}$ многогранника P, содержащую грань G, где $a = a_{i_1} + \cdots + a_{i_k}$. Пусть
$P \subset H_{\leqslant}\{v \in \mathbb{R}^n | \ \langle v, a \rangle \leqslant b\}$. Возьмем число $\varepsilon > 0$ такое, что общие вершины многогранников P и $P \cap \{v \in \mathbb{R}^n | \ b - \varepsilon \leqslant \langle v, a \rangle \leqslant b\}$ лежат в грани G (в частности, $P \cap \{v \in \mathbb{R}^n | \ \langle v, a \rangle = b - \varepsilon\}$ не содержит вершин многогранника P). Тогда $P \cap \{v \in \mathbb{R}^n | \ \langle v, a \rangle \leqslant b - \varepsilon\}$ является простым многогранником и называется срезкой $\operatorname{cut}_G P$ грани G многогранника P. Если многогранник P дельзантов, то при указанном выборе нормали грани срезки равной многогранник $\operatorname{cut}_G P$ будет дельзантовым.

Все гиперграни многогранника P, кроме G, переходят в комбинаторно эквивалентные гиперграни многогранника $\mathrm{cut}_G P$ очевидным образом. Гипергрань $\mathrm{cut}_G P \cap \{v \in \mathbb{R}^n | \ \langle v, a\rangle = b - \varepsilon\}$ срезки комбинаторно эквивалентна декартовому произведению $G \times \Delta^{n-k-1}, \ k = \mathrm{codim} \ G$.

Другой известной операцией на множестве простых многогранников является связная сумма двух многогранников в вершинах. Пусть даны простые n-мерные многогранники $P, \ Q$ с выделенными вершинами $v \in P, \ w \in Q$. Неформальное описание связной суммы $P \#_{v,w} Q$ многогранников $P, \ Q$ в вершинах $v \in P, \ w \in Q$ состоит в следующем. Сначала вершины $v \in P, \ w \in Q$ срезаются. Затем связной суммой $P \#_{v,w} Q$ объявляется результат склейки полученных многогранников после применения подходящего проективного преобразования по граням срезки (т.е. $(n-1)$-мерным симплексам).

Определение связной суммы $P \#_{v,w} Q$ простых многогранников содержит произвол, состоящий в выборе отображения $f : \ \Delta_1^{n-1} \to \Delta_2^{n-1}$ склейки симплексов $\Delta_1^{n-1} \subset \mathrm{cut}_v P$, $\Delta_2^{n-1} \subset \mathrm{cut}_w Q$. Комбинаторный тип многогранника $P \#_{v,w} Q$ зависит, вообще говоря, от выбора вершин v, w и отображения склейки f. Там, где данный произвол не важен, будем использовать обозначение $P \# Q$ для связной суммы многогранников.

1.3 Торические многообразия

Определение 1.3.1. Нормальное комплексное алгебраическое многообразие M, $\dim_{\mathbb{C}} M = n$, содержащее алгебраический тор $(\mathbb{C}^*)^n$ в качестве открытого всюду плотного по Зарисскому множества, называется *торическим многообразием*, если естественное действие тора $(\mathbb{C}^*)^n$ на себе продолжается до действия на всем M.

Хорошо известно, что существует биекция между торическими многообразиями размерности n и рациональными веерами в алгебре Ли $\mathfrak{t}$ компактного тора $(S^1)^n \subseteq (\mathbb{C}^*)^n$, в которой зафиксирована группа, двойственная свободной абелевой группе характеров.

По каждому n-мерному простому дельзантову многограннику $P \subset V$ (где векторное пространство V изоморфно $\mathfrak{t}^*$) с вершинами в свободной абелевой группе $N \subset V$ можно построить рациональный нормальный веер Σ_P в двойственном пространстве V^*. Веер Σ_P соответствует некоторому гладкому торическому многообразию X_P. Многогранник P задает проективное вложение многообразия X_P и определятся им однозначно с точностью до трансляций в V. Многогранник P часто называют *многогранником моментов* многообразия X_P с зафиксированным проективным вложением. Подробнее об этих соответствиях см. [63, Ch.5]

Для гладкого проективного торического многообразия X_P имеется конечное число орбит действия тора $(\mathbb{C}^*)^n$. В частности, имеется лишь конечное число инвариантных дивизоров $D_i \subset X_P$. Стабилизатором инвариантного дивизора D_i является однопараметрическая подгруппа $\mathbb{C}^* \subset (\mathbb{C}^*)^n$. Кохарактер этой подгруппы задает нормаль к гиперграни H_i многогранника P^n. Любое инвариантное подмногообразие $Z^{n-k} \subset X_P$ коразмерности k является пересечением некоторых k инвариантных дивизоров D_{i_j}, $j = 1, \ldots, k$. Подмногообразию Z^{n-k} сопоставляется грань $\bigcap_{i=1}^k H_{i_j} \subset P$ коразмерности k, являющаяся пересечением гиперграней H_{i_j}.

1.4 Квазиторические многообразия

Определение 1.4.1. Пусть P^n есть комбинаторный простой многогранник размерности n. Гладкое многообразие M^{2n} называется *квазиторическим*, если существует гладкое, локально стандартное действие n-мерного тора T^n на M^{2n}, а также непрерывная проекция $\pi: \; M^{2n} \to P^n$ со слоями — орбитами действия тора T^n.

Обозначим через $F_1, \ldots, F_m$ гиперграни P. Прообраз $M_j := \pi^{-1}(F_j)$ является T^n-инвариантным подмногообразием M^{2n} коразмерности 2 со стабилизатором $T_{F_j} \simeq S^1$, $j = 1, \ldots, m$. Многообразие M_j также является квазиторическим относительно действия тора $T^n/T_{F_j} \simeq T^{n-1}$. M^j называется характеристическим подмногообразием, отвечающим гиперграни $F_j \subset P$. Отображение

$$\lambda : F_j \to T_{F_j}, \; j = 1, \ldots, m, \tag{1.5}$$

называется характеристическим отображением квазиторического многообразия M.

Рассмотрим грань $G \subset P$ коразмерности k. Она может быть представлена в виде $G = F_{j_1} \cap \dots \cap F_{j_k}$. Прообраз $M_G = \pi^{-1}(G)$ является T^n-инвариантным подмногообразием в M коразмерности $2k$, и неподвижен относительно действия окружностей $\lambda(F_j)$, $k = 1, \dots, k$. Из локальной стандартности действия T^n на M в окрестности неподвижных точек, отвечающих вершинам G, следует, что характеристические подмногообразия $M_{j_1}, \dots, M_{j_k}$ пересекаются трансверсально вдоль подмногообразия M_G, и отображение

$$\lambda(F_{j_1}) \times \dots \times \lambda(F_{j_k}) \to T^n$$

является мономорфизмом на k-мерный стабилизатор подмногообразия M_G. Таким образом, отображение $G \to \operatorname{Stab} M_G$ продолжает характеристическую функцию с решетки граней P на решетку подгрупп в T^n.

Определение 1.4.2. Пусть P есть комбинаторный n-мерный простой многогранник, и λ есть отображение из множества гиперграней P в множество одномерных подгрупп тора T^n. Набор (P, λ) называется характеристической парой, если гомоморфизм $\lambda(F_{j_1}) \times \dots \times \lambda(F_{j_k}) \to T^n$ мономорфен при $F_{j_1} \cap \dots \cap F_{j_k} \neq \varnothing$.

Если (P, λ) является характеристической парой, то отображение λ продолжается на решетку граней P. Поэтому для каждой грани $G \subset P$ определена подгруппа $T_G = \lambda(G) \subset T^n$.

По характеристической паре (P, λ) можно восстановить квазиторическое многообразие.

Определение 1.4.3. Пусть (P, λ) есть характеристическая пара. Для каждой точки $x \in P$ обозначим наименьшую грань, содержащую x, через $G(x)$. Канонической моделью $M(P, \lambda)$ называется факторпространство

$$P \times T^n / \sim, \ (x, t_1) \sim (x, t_2) \Leftrightarrow t_1^{-1} t_2 \in T_{\operatorname{Stab} x} = \lambda(G(x)).$$

Свободное действие T^n на $P \times T^n$ индуцирует действие на $P \times T^n / \sim$. Это действие свободно над внутренностью многогранника P и неподвижно в вершинах P. Пространство $P \times T^n / \sim$ покрывается открытыми множествами $U_v \times T^n / \sim$, где $v \in \mathbb{P}$ пробегает вершины многогранника и открытое множество U_σ по определению получается из P удалением всех граней P, не содержащих v. Для каждой вершины $v \in P$ множество $U_v \times T^n/\sim$ эквивариантно диффеоморфно $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}_{\geqslant 0} \times T^n/\sim$. Следовательно, $M(P,\lambda)$ есть (топологическое) многообразие с локально стандартным действием тора T^n и факторпространством P. Оно может быть снабжено гладкой структурой, доставляемой гладким свободным действием тора $K(\lambda) \simeq T^{m-n}$ на гладком момент-угол многообразии $\mathcal{Z}_P$: $\mathcal{Z}_P/K(\lambda) \simeq M(P,\lambda)$ (см. [63]).

Определение 1.4.4. Омниориентацией квазиторического многообразия M называется выбор ориентации многообразия M и всех его характеристических подмногообразий M_j, $j = 1,\dots,m$. Квазиторическое многообразие с фиксированной омниориентацией называется омниориентированным.

Стабилизатор $\operatorname{Stab} T_{F_j}$ характеристического подмногообразия $M_j \subset M$ имеет вид $T_{F_j} = \{(e^{2\pi i\lambda_j^1\varphi},\dots,e^{2\pi i\lambda_j^n\varphi}) \in \mathbb{T}^n\}$, где $\varphi \in \mathbb{R}$ и
$\lambda_j = (\lambda_j^1,\dots,\lambda_j^n)^t \in \mathbb{Z}^n$ примитивен, а $\mathbb{T}^n \subset \mathbb{C}^n$ есть стандартный координатный n-мерный компактный тор. Вектор λ_j задается подгруппой T_{F_j} с точностью до знака. Выбор знака, в свою очередь, определяет параметризацию подгруппы $T_{F_j} \subset T^n$.

Омниориентация квазиторического многообразия M дает канонический способ выбора векторов λ_j. Пусть M^{2n} есть омниориентированное квазиторическое многообразие. Действие параметризованной окружности
$\operatorname{Stab} M_j \subset T^n$ задает ориентацию на нормальном расслоении ν_j вложения $M_j \subset M$. Омниориентация также задает ориентацию на ν посредством разложения касательного расслоения: $TM|_{M_j} = TM_j \oplus \nu_j$. Теперь примитивный вектор λ_j выбирается так, чтобы две указанные ориентации на ν совпали.

Омниориентация квазиторического многообразия M позволяет продолжить характеристическое отображение λ (см. отображение (1.5)) до $\mathbb{Z}$-линейного отображения $\Lambda\colon\ \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n$, $\Lambda(e_j) = \lambda_j$. Для каждой вершины
$v = F_{j_1} \cap \dots \cap F_{j_n} \in P$ рассмотрим максимальный минор $\Lambda_{j_1,\dots,j_n}$ из столбцов $j_1,\dots,j_n$ матрицы Λ. Тогда

$$\det \Lambda_{j_1,\dots,j_n} = \pm 1 \tag{1.6}$$

в силу мономорфности λ.

Дадим общее определение.

Определение 1.4.5. Пусть P есть ориентированный комбинаторный простой n-многогранник с m гранями, и пусть Λ есть целочисленная $(n \times m)$-матрица, удовлетворяющая условию (1.6) для любой вершины $v \in P$. Тогда (P, Λ) называется комбинаторной квазиторической парой.

Квазиторическое многообразие, соответствующее комбинаторной квазиторической паре (P, Λ), будем также обозначать через $M(P, \Lambda)$. Заметим, что квазиторическое многообразие $M(P, \Lambda)$ является омниориентированным.

Имеется естественное левое $GL_n(\mathbb{Z})$-действие на множестве комбинаторных квазиторических пар (P, Λ): $A(P, \Lambda) = (P, A\Lambda)$, $A \in GL_n(\mathbb{Z})$. Квазиторические многообразия, принадлежащие одной орбите данного действия, эквивариантно диффеоморфны. В частности, пусть вершина $v \in P$ равна пересечению $F_1 \cap \dots \cap F_n$ гиперграней многогранника P, так что крайний левый $(n \times n)$-минор $\Lambda_{1,\dots,n}$ матрицы Λ имеет определитель ± 1. Тогда умножением слева на матрицу $\Lambda_{1,\dots,n}^{-1}$ матрица Λ приводится к виду

$$\Lambda_{\#} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1^{n+1} & \cdots & \lambda_1^m \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \lambda_2^{n+1} & \cdots & \lambda_2^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_n^{n+1} & \cdots & \lambda_n^m \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Каноническую стабильную комплексную структуру на омниориентированном квазиторическом многообразии дает следующая

Теорема 1.4.6. [63, Theorem 7.3.15] *Имеется изоморфизм вещественных T^n-расслоений над $M = M(P, \Lambda)$:*

$$TM^{2n} \oplus \underline{\mathbb{C}}^{m-n} \simeq \bigoplus_{i=1}^{m} \theta_i, \tag{1.8}$$

где $\theta_i \to M^{2n}$ суть комплексные линейные расслоения, $i = 1, \dots, m$.

Напомним сведения о знаке неподвижной точки квазиторического многообразия. (См. [63, Section 7.3].) Пусть M^{2n} есть $2n$-мерное квазиторическое многообразие, и пусть $x \in M^{2n}$ есть неподвижная точка относительно естественного действия тора T^n. Неподвижная точка x является пересечением попарно различных инвариантных подмногообразий $M_{j_1}, \dots, M_{j_n}$ коразмерности 2 в M^{2n}. Знак точки $\sigma(x)$ многообразия M^{2n} в неподвижной точке x

равен 1, если ориентация вещественного пространства $T_x M^{2n} \oplus \underline{\mathbb{R}}^{2(m-n)}$ совпадает с ориентацией (овеществления) векторного пространства $(\theta_{j_1} \oplus \dots \oplus \theta_{j_n})_x$, определенной канонической ориентацией комплексных линейных расслоений $\theta_{j_k},\ k = 1, \dots, n$; иначе знак равен -1. Также имеет место формула

$$\sigma(x) = \det(\lambda_{j_1}, \dots, \lambda_{j_n}), \tag{1.9}$$

в предположении, что внутренние нормальные векторы к гиперграням $F_{j_1}, \dots, F_{j_n}$ многогранника P^n образуют положительно ориентированный базис $\mathbb{R}^n$.

Напомним, что индекс $ind_\nu(v)$ вершины $v = F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n} \in P^n$ многогранника моментов относительно вектора $\nu \in N \otimes \mathbb{R}^n$ общего положения определяется как число отрицательных скалярных произведений ν с векторами базиса, сопряженного к $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n}$ (см. [63, Section 7.3]).

Предложение 1.4.7. [63, Theorem 9.4.8]

$$\sigma(M^{4n}) = \sum_{v \in M^T} (-1)^{ind_\nu(v)} \sigma(v).$$

Введем обозначение $x_i := c_1(\theta_i) \in H^2(M^{2n}; \mathbb{Z}),\ i = 1, \dots, m.$

Теорема 1.4.8. [39], [63, Theorem 7.3.28] *Имеется изоморфизм градуированных колец*

$$H^*(M^{2n}; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]/(I_H + J_H),\ \deg x_i = 2,\ i = 1, \dots, m,$$

где $I_H = (x_{i_1} \cdots x_{i_k} |\ F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k} = \varnothing)$, $J_H = (\lambda_i^1 x_1 + \dots + \lambda_i^m x_m |\ i = 1, \dots, n)$ *суть идеалы кольца многочленов. Кольцо* $H^*(M^{2n}; \mathbb{Z})$ *свободно от кручения и его компоненты нечетной градуировки тривиальны.*

1.5 Комплексная K-теория, характер Черна и спектральная последовательность Атья и Хирцебруха

Определение 1.5.1. Пусть X есть конечный CW-комплекс. Группа Гротендика комплексных векторных расслоений над X (относительно суммы Уитни векторных расслоений) является кольцом относительно тензорного умножения векторных расслоений и называется кольцом $K(X) = K^0(X)$ K-теории пространства X. Приведенное кольцо K-теории $\widetilde{K}(X) = \widetilde{K}^0(X)$ определяется как ядро гомоморфизма колец $\varepsilon : K^0(X) \to \mathbb{Z}$, сопоставляющего комплексному векторному расслоению $\xi \to X$ его ранг $\mathrm{rk}_{\mathbb{C}}\, \xi$. $(-n)$-ая группа $K^{-n}(X)$ определяется по формуле $K^{-n}(X) = \widetilde{K}^0(\Sigma^n(X_+))$ (где $\Sigma^n(X_+)$ есть n-ая итерация приведенной надстройки пространства $X_+ = X \sqcup \{pt\}$), $n \geqslant 0$. Для CW-пары (X, Y) конечных клеточных комплексов X, Y относительная K-группа определяется как $K^{-n}(X, Y) = K^{-n}(X/Y)$.

Функтор K^* является обобщенной теорией когомологий, т.е. удовлетворяет всем аксиомам Стинрода и Эйленберга, кроме аксиомы размерности.

Теорема 1.5.2. *(Периодичность Ботта) Имеет место естественный по X изоморфизм колец $\widetilde{K}(X) \to \widetilde{K}(\Sigma^2 X)$. В частности, $K^n(X) \simeq K^{n-2}(X)$ при $n \geqslant 2$.*

Определение 1.5.3. Пусть X есть конечный CW-комплекс. Рассмотрим полином Q_r от r переменных, заданный формулой

$$t_1^r + \cdots + t_s^r = Q_r(e_1, \ldots, e_r),$$

где e_i есть i-ый элементарный симметрический многочлен от переменных $t_1, \ldots, t_s$, $s \geqslant r$. Для любого комплексного векторного расслоения $\xi \to X$ положим

$$ch_r(\xi) = \frac{1}{r!} Q_r(c_1(\xi), \ldots, c_r(\xi)) \in H^{2r}(X; \mathbb{Q}).$$

Характеристический класс (с коэффициентами в $\mathbb{Q}$) $ch = ch_0 + ch_1 + \cdots$ называется характером Черна.

Для полностью расщепимого векторного расслоения $\xi = \bigoplus_{i=1}^s \xi_i \to X$ имеет место формула

$$ch(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{c_1(\xi_i)}. \tag{1.10}$$

Характер Черна является аддитивным и мультипликативным характеристическим классом:

$$ch(\xi \oplus \eta) = ch(\xi) + ch(\eta), \; ch(\xi \otimes \eta) = ch(\xi) ch(\eta).$$

Эти формулы вытекают из формулы (1.10) в случае полностью расщепимых расслоений ξ, η. Для их доказательства в общем случае следует воспользоваться принципом расщепления.

Характер Черна продолжается с полугруппы векторных расслоений до гомоморфизма колец $ch: \ K^0(X) \to \bigoplus_{i=0}^{\infty} H^{2i}(X;\ \mathbb{Q})$. Для остальных групп $K^{-n}(X) = \widetilde{K}^0(\Sigma^n(X_+))$ характер Черна задается следующим образом. Изоморфизм надстройки

$$\sigma^n : \ H^*(X;\ \mathbb{Q}) \to H^*(S^n X;\ \mathbb{Q})$$

повышает градуировку на n и задается умножением элемента $H^*(X;\ \mathbb{Q})$ с канонической порождающей $H^n(S^n;\ \mathbb{Q})$. Для элемента $\xi \in K^{-n}(X)$ рассмотрим соответствующий элемент $\xi' \in \widetilde{K}^0(\Sigma^n(X_+))$. Тогда характеристический класс $ch(\xi) \in H^*(X;\ \mathbb{Q})$ задается формулой $ch(\xi) = (\sigma^n)^{-1} ch(\xi')$. Таким образом,

$$ch: \ K^0(X) \to H^{ev}(S^n X;\ \mathbb{Q}), \ ch: \ K^1(X) \to H^{odd}(S^n X;\ \mathbb{Q}),$$

где $H^{ev}(X;\ \mathbb{Q}) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} H^{2i}(X;\ \mathbb{Q}), \ H^{odd}(X;\ \mathbb{Q}) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} H^{2i+1}(X;\ \mathbb{Q})$.

Обозначим r-остов CW-комплекса X через X_r. Положим $K^n_r(X) = \ker[K^n(X) \to K^n(X_r)]$. Введенные группы образуют убывающую фильтрацию

$$K^n(X) = K^n_{-1}(X) \supseteq K^n_0(X) \supseteq \cdots \supseteq K^n_N(X) = 0,$$

где $N = \dim X$.

Теорема 1.5.4. [25] *Существует мультипликативная спектральная последовательность $\{E^n_q(X), d_q\}$ такая, что*

$$E^n_1(X) = C^n(X;\ \mathbb{Z}), \ E^n_2(X) = H^n(X;\ \mathbb{Z}), \ E^q_\infty(X) = K^*_q(X)/K^*_{q+1}(X),$$

где $C^n(X;\ \mathbb{Z})$ есть клеточные коцепи клеточного комплекса X. $d_1 = \delta$ есть обычный кограничный оператор. Дифференциалы $d_q : \ E^n_q(X) \to E^{n+1}_q(X)$ тривиальны при четном q.

Теорема 1.5.5. [25] *Пусть $H^{2i+1}(X;\ \mathbb{Z}) = 0$ для всех $i = 0, 1, \ldots$. Тогда*

1) Спектральная последовательность $\{E^n_q(X), d_q\}$ сходится во втором члене, т.е. $d_q = 0, \ q \geqslant 2$, поэтому $E^n_\infty(X) = E^n_2(X)$;

2) $K^n(X)$ не имеет кручения;

3) Рациональный характер Черна $ch\otimes\mathbb{Q}:\ K^*(X)\otimes\mathbb{Q}\to H^*(X;\ \mathbb{Q})$ является градуированным изоморфизмом $\mathbb{Q}$-алгебр. Характер Черна $ch:\ K^*(X)\to H^*(X;\ \mathbb{Q})$ является мономорфизмом. В частности, $K(X):=K^0(X)$ есть свободная абелева группа (по сложению) ранга, равного эйлеровой характеристике $\chi(X)$ CW-комплекса X. $K^1(X)=0$.

Доказательство. Утверждение 1) вытекает из того, что при нечетном q хотя бы одна из групп $d_q:\ E_q^n(X)\to E_q^{n+q}(X)$ равна 0, а при четном q имеем $d_q=0$.

Утверждение 2) докажем от противного: пусть $a\in K^n(X)$ есть элемент кручения, $a\neq 0$. Рассмотрим наименьшее q такое, что $a\in K_q^n$, $a\notin K_{q+1}^n$. Тогда a дает нетривиальный элемент кручения в $H^q(X;\ \mathbb{Z})=E_2^q(X)=E_\infty^q(X)=K_q^*(X)/K_{q+1}^*(X)$ — противоречие.

Для доказательства утверждения 3) рассмотрим "тривиальную" спектральную последовательность $\{'E_q^n(X),' d_q\}$, где

$$'E_1^n(X)=C^n(X;\ \mathbb{Z}),\ 'd_1=\delta,\ 'E_q^n(X)=H^n(X;\ \mathbb{Z}),\ 'd_q=0,\ q\geqslant 2.$$

Характер Черна является коэффициентным гомоморфизмом $C^n(X;\ \mathbb{Z})\to C^n(X;\ \mathbb{Q})$ на уровне коцепей. Следовательно, характер Черна дает гомоморфизм спектральных последовательностей $\{E_q^n(X)\otimes\mathbb{Q},d_q\}\to\{'E_q^n(X),' d_q\}$, биективный на первом листе $q=1$. Заключаем, что $ch\otimes\mathbb{Q}:\ K^*(X)\otimes\mathbb{Q}\to H^*(X;\ \mathbb{Q})$ есть изоморфизм. Так как по доказанному $K^*(X)$ не имеет кручения, ch является мономорфизмом. □

В качестве следствия Теоремы 1.5.5 и описания кольца когомологий проективного пространства $\mathbb{C}P^n$ получаем изоморфизм

$$K(\mathbb{C}P^n)\simeq\mathbb{Z}[x]/(x-1)^{n+1}, \tag{1.11}$$

где x есть класс комплексно сопряженного расслоения $\overline{\eta_n}\to\mathbb{C}P^n$ к тавтологическому, и 1 есть класс тривиального линейного расслоения. (См. [16].)

1.6 Стабильно комплексные ПНР- и ПКР-многообразия

В данном Разделе мы приводим определение ПНР- и ПКР-многообразий, а также некоторые их свойства.

Определение 1.6.1. Стабильно комплексное многообразие M^{2n} называется полностью касательно (нормально) расщепимым, или сокращенно ПКР-многообразием (ПНР-многообразием), если стабильная касательная (нормальная) комплексная структура на M^{2n} стабильно эквивалентна сумме Уитни комплексных линейных расслоений над M^{2n}, соответственно.

Теорема 1.6.2 ([53], J. Lannes). *Пусть M^4 есть стабильно комплексное односвязное замкнутое многообразие.*

a) Если форма пересечения двумерных циклов многообразия M^4 является неопределенной, то комплексное нормальное расслоение многообразия M^4 стабильно эквивалентно сумме $\xi_1 \oplus \xi_2$ для некоторых комплексных линейных расслоений $\xi_1, \xi_2 \to M^4$.

b) Если форма пересечения M^4 является определенной, то M^4 не является ПНР-многообразием.

Предложение 1.6.3. *Пусть M^{2n} есть ПНР-многообразие размерности $2n$. Рассмотрим любое подмногообразие $Z^{2(n-1)} \subset M^{2n}$ коразмерности 2, нормальное расслоение $\xi \to Z$ вложения которого является комплексным (линейным) расслоением, с индуцированной стабильно комплексной структурой на Z. Тогда Z является ПНР-многообразием.*

Из (1.8) непосредственно вытекает

Предложение 1.6.4. *Любое омниориентированное квазиторическое многообразие M^{2n} с канонической стабильно комплексной структурой является ПКР-многообразием.*

Предложение 1.6.5 ([63]). *Любое квазиторическое многообразие M^{2n} над n-мерным симплексом Δ^n гомеоморфно $\mathbb{C}P^n$. Естественная стабильно комплексная структура на M^{2n} имеет вид $TM \oplus \underline{\mathbb{R}} \simeq k\eta_n \oplus (n+1-k)\overline{\eta_n}$ для $k = 0, \ldots, n+1$.*

Следующее Предложение обобщает результат [47, Theorem 1.5] о нормальной нерасщепимости $\mathbb{C}P^n, n > 1$.

Предложение 1.6.6. *Любое квазиторическое многообразие M^{2n} над n-мерным симплексом Δ^n при $n > 1$ не является полностью нормально расщепимым.*

Доказательство. Любое комплексное линейное расслоение над $\mathbb{C}P^n$ топологически изоморфно η_n^a, где $a \in \mathbb{Z}$. Положим $x = c_1(\overline{\eta_n})$. Для любого полностью расщепимого расслоения $\alpha = \bigoplus_{i=1}^k \eta^{a_i}$, $a_i \in \mathbb{Z}$, 4-компонента характера Черна равна $ch_2(\alpha) = \frac{x^2}{2}\sum_{i=1}^k a_i^2$. Следовательно, $\langle x^{n-2}ch_2(\alpha), [\mathbb{C}P^n]\rangle \geqslant 0$. Для нормального расслоения NM, при $n > 1$ по Предложению 1.6.5 имеем $\langle x^{n-2}ch_2(NM), [\mathbb{C}P^n]\rangle = -(n+1)/2 < 0$. Отсюда заключаем, что нормальное расслоение NM не является полностью расщепимым. □

Замечание 1.6.7. Проективная прямая $\mathbb{C}P^1$, как и любая другая риманова поверхность Σ_g рода g, является ПНР-многообразием. Это следует из (топологического) изоморфизма любого комплексного векторного расслоения над Σ_g сумме Уитни комплексного линейного расслоения и тривиального векторного расслоения.

Предложение 1.6.8. *Любое инвариантное подмногоообразие Z квазиторического ПНР-многообразия M полностью нормально расщепимо. В частности, M не содержит инвариантных подмногообразий над симплексом Δ^k, $k > 1$. Далее, многогранник моментов многообразия M не содержит треугольных граней.*

Доказательство. Существует максимальная цепочка включений $Z = Z_0 \subset \dots \subset Z_k = M$ некоторых инвариантных подмногообразий M (здесь последовательные включения имеют коразмерность 2). Теперь полная нормальная расщепимость Z вытекает из Теоремы 1.4.6 и трансверсальности пересечений характеристических подмногообразий M (см. [63, p. 245]). Остальные утверждения Предложения следуют из Предложений 1.6.5, 1.6.6. □

1.7 Проективизации комплексных расслоений

Мы начнем этот раздел с небольшого отступления о проективизациях векторных расслоений и стабильных комплексных структурах на них. Будем всюду в данном разделе считать, что B есть гладкое компактное комплексное многообразие.

Теорема 1.7.1 (Лере, Хирш, см. [30, §15]). *Пусть $\xi \to B$ комплексное векторное расслоение ранга $n - k + 1$ над B, $\dim_{\mathbb{C}} B = k$. Рассмотрим* *послойную проективизацию* $p\colon \mathbb{P}(\xi) \to B$ *расслоения* ξ. *Обозначим через* $v = c_1(\overline{\zeta}) \in H^2(\mathbb{P}(\xi);\mathbb{Z})$ *первый класс Черна двойственного к тавтологическому послойному расслоению* ζ *над* $\mathbb{P}(\xi)$. *Тогда имеет место изоморфизм колец:*

$$H^*(\mathbb{P}(\xi)) \simeq H^*(B)[v]/(v^{n-k+1} + v^{n-k}c_1(\xi) + \cdots + c_{n-k+1}(\xi)). \tag{1.12}$$

Индуцированный отображением проекции p гомоморфизм когомологий $p^* : H^*(B) \to H^*(\mathbb{P}(\xi))$ дает кольцу $H^*(\mathbb{P}(\xi))$ естественную структуру модуля над кольцом $H^*(B)$. Из формулы (1.12), следует (см. [19, §2.2]), что

$$\langle \omega \cdot v^l, [\mathbb{P}(\xi)]\rangle = \langle \omega \cdot c^{-1}(\xi), [B]\rangle, \tag{1.13}$$

где $\omega \in H^{2n-2l}(B;\mathbb{Z})$ — произвольный класс когомологий, а $c^{-1}(\xi) \in H^*(B;\mathbb{Z})$ — полный класс Сегре, то есть мультипликативно обратный класс к полному классу Черна $c(\xi) = 1 + c_1(\xi) + \cdots + c_{n-k+1}(\xi)$.

Проективизация $\mathbb{P}(\xi)$ может быть снабжена канонической стабильно комплексной структурой при помощи изоморфизма

$$T\mathbb{P}(\xi) \oplus \underline{\mathbb{C}} \simeq (p^*\xi \otimes \overline{\zeta}) \oplus p^*TB. \tag{1.14}$$

Отметим, что если расслоение ξ голоморфно, то стабильно комплексная структура (1.14) (стабильно) эквивалентна комплексной структуре на комплексном многообразии $\mathbb{P}(\xi)$. Ниже нас, однако, будут интересовать *нестандартные* стабильно комплексные структуры на многообразиях $\mathbb{P}(\xi)$.

Определение 1.7.2. Пусть над базой B имеется расщепимое расслоение $\xi = \xi' \oplus \underline{\mathbb{C}}$. Определим на многообразии $\mathbb{P}(\xi' \oplus \underline{\mathbb{C}})$ *нестандартную* стабильно комплексную структуру при помощи изоморфизма вещественных расслоений:

$$T\mathbb{P}(\xi' \oplus \underline{\mathbb{C}}) \oplus \underline{\mathbb{C}} \simeq (p^*\xi' \otimes \overline{\zeta}) \oplus \zeta \oplus p^*TB. \tag{1.15}$$

Многообразие $\mathbb{P}(\xi' \oplus \underline{\mathbb{C}})$ снабженное стабильно комплексной структурой (1.15) будет обозначаться через $\mathbb{P}(\xi' \oplus \overline{\underline{\mathbb{C}}})$.

Отличие от стандартной стабильно комплексной комплексной структуры на $\mathbb{P}(\zeta \oplus \underline{\mathbb{C}})$, заключается в использовании расслоения ζ вместо $\overline{\zeta}$. Слой стабильно комплексного многообразия $\mathbb{P}(\xi)$ есть проективное пространство

$\mathbb{C}P^{n-k}$ с нестандартной стабильно комплексной структурой, заданной изоморфизмом вещественных расслоений:

$$T\mathbb{C}P^{n-k} \oplus \underline{\mathbb{C}} \simeq (n-k)\overline{\eta_{n-k}} \oplus \eta_{n-k}. \tag{1.16}$$

Стабильно комплексное многообразие $\mathbb{C}P^n$ с нестандартной стабильно комплексной структурой (1.16) (как ориентированное многообразие) ориентированно диффеоморфно $\overline{\mathbb{C}P}^n$.

В случае, если B является гладким проективным торическим многообразием (комплексной размерности k) с действием тора T^B, а комплексное расслоение $\xi = \bigoplus_{i=1}^{n-k+1} \xi_i$ полностью расщепимо, то многообразие $\mathbb{P}(\xi)$ также является гладким проективным торическим многообразием (комплексной размерности n) относительно действия

$$(t^B, t)[\xi_{0,b} : \xi_{1,b} \cdots : \xi_{n-k+1,b}] = [\xi_{0,t^B b} : t_1\xi_{1,t^B b} \cdots : t_{n-k+1}\xi_{n-k+1,t^B b}]$$

тора $T^B \times T^{n-k}$ где $t^B \in T^B,\ (t_1, \ldots, t_{n-k}) \in T^{n-k}$, $b \in B$.

1.8 Связная сумма ориентированных и стабильно комплексных многообразий

Определение 1.8.1. Для ориентированных компактных связных многообразий M_1^n, M_2^n размерности n связная сумма $M_1\#M_2$ определяется следующим образом. Выберем точки $x_i \in M_i$ и замкнутые ε-шары $B_\varepsilon(x_i)$ вокруг них (относительно римановых метрик на M_i), $i = 1, 2,\ \varepsilon > 0$. Зафиксируем изометрическое вложение f пары стандартных ε-шаров $D^n \times S^0$ ($S^0 = \{0, 1\}$) в $M_1 \sqcup M_2$, которое отображает $D^n \times 0$ в $B_\varepsilon(x_0)$ и $D^n \times 1$ в $B_\varepsilon(x_1)$. Также потребуем сохранения (обращения) ориентации на первом (втором) шаре, соответственно. Используя это вложение, заменим в $M_1 \sqcup M_2$ пару шаров $D^n \times S^0$ трубкой $S^{n-1} \times D^1$. После стандартной процедуры сглаживания углов мы получим гладкое ориентированное многообразие $M_1\#M_2$.

Естественное отображение проекции $p_i :\ M_1\#M_2 \to M_i$ гладко и сохраняет ориентации. Имеется изоморфизм ориентированных расслоений

$$T(M_1\#M_2) \oplus \underline{\mathbb{R}}^n \simeq p_1^*TM_1 \oplus p_2^*TM_2. \tag{1.17}$$

Если дополнительно предположить, что M_1^n, M_2^n являются стабильно комплексными многообразиями, то существует каноническое определение стабильной комплексной структуры на $M_1 \# M_2$. Именно, пусть стабильная комплексная структура на M_1 задана изоморфизмом $\iota_i: TM_1 \oplus \underline{\mathbb{R}}^{k_i} \to \xi_i$, $i = 1, 2$. Стабильная комплексная структура на $M_1 \# M_2$ задается при помощи (1.17) изоморфизмом

$$T(M_1 \# M_2) \oplus \underline{\mathbb{R}}^{n+k_1+k_2} \to (p_1^* TM_1 \oplus \underline{\mathbb{R}}^{k_1}) \oplus (p_2^* TM_2 \oplus \underline{\mathbb{R}}^{k_2}) \stackrel{\iota_1 \oplus \iota_2}{\to} p_1^* \xi \oplus p_2^* \xi_2. \quad (1.18)$$

Указанная стабильно комплексная структура (1.18) на многообразии $M_1 \# M_2$ называется связной суммой стабильно комплексных структур многообразий $M_1,\ M_2$.

Стабильно комплексное многообразие $M_1 \# M_2$ комплексно кобордантно несвязному объединению $M_1 \sqcup M_2$. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим цилиндр $M_1 \times I$, из которого удалим ε-окрестность $U_\varepsilon(x_1 \times 1)$ точки $x_1 \times 1$. Также удалим окрестность $U_\varepsilon(x_2 \times 1)$ из $M_2 \times I$. Каждая из этих двух окрестностей отождествляется с половиной стандартного $n+1$-шара. Теперь соединим полученные пространства полутрубкой $S^n_\leqslant \times I$, так что полусфера $S^n_\leqslant \times 0$ отождествляется с полусферой на границе $U_\varepsilon(x_1 \times 1)$, и $S^n_\leqslant \times 1$ отождествляется с полусферой на границе $U_\varepsilon(x_2 \times 1)$. После сглаживания углов получается стабильно комплексное многообразие с границей $\overline{M_1} \sqcup \overline{M_2} \sqcup M_1 \# M_2$.

Предложение 1.8.2. *Пусть M_1, M_2 суть замкнутые стабильно комплексные многообразия размерности n. Тогда имеет место изоморфизм алгебр*

$$\tilde{H}^*(M_1 \# X; \mathbb{R}) \simeq (\tilde{H}^*(M_1; \mathbb{R}) \oplus \tilde{H}^*(M_2; \mathbb{R}))/I,$$

где $I = (D[*_{M_1}] - D[*_{M_2}])$, и D есть оператор двойственности Пуанкаре. Умножение между элементами положительной размерности из разных прямых слагаемых тривиально во всех размерностях.

Доказательство. Требуемый изоморфизм индуцирован отображением стягивания связной суммы ориентированных многообразий
$M_1 \# M_2 \to M_1 \vee M_2$. □

Положим $n = 2$.

Лемма 1.8.3. *Пусть* (a_i, b_i) *есть индекс формы пересечения замкнутого ориентированного односвязного* 4*-многообразия* $M_i^4, i = 1, 2$. *Тогда индексы форм пересечения многообразий* $M_1 \# M_2, M_1 \# \overline{M_2}$, *равны* $(a_1 + a_2, b_1 + b_2)$, $(a_1 + b_2, b_1 + a_2)$, *соответственно.*

Доказательство. По Предложению 1.8.2, форма пересечения многообразия $M_1 \# X$ равна прямой сумме соответствующих форм пересечения M_1, X, где $X = M_2, \overline{M_2}$. Остается заметить, что форма пересечения $\overline{M_2}$ равна минус форме пересечения M_2. $\square$

1.9 Раздутия комплексных многообразий вдоль подмногообразий

Рассмотрим единичный полидиск $D \subset \mathbb{C}^n$ комплексной размерности n с центром в начале координат. *Раздутием* D в начале координат называется пространство $Bl_0 D = \{(z, L) \in D \times \mathbb{C}P^{n-1} | z_i L_j = z_j L_i$ для всех $i,\ j\}$, где z_i суть комплексные координаты в D, и L_i суть однородные координаты в $\mathbb{C}P^{n-1}$.

Легко видеть, что $Bl_0 D = \{(z, L) \in D \times \mathbb{C}P^{n-1} |\ z \in L\}$, где $L \in \mathbb{C}P^{n-1}$ рассматривается как прямая в $\mathbb{C}^n$. Отсюда видно, что проекция $\pi :\ Bl_0 D \to D$ на первую координату является изоморфизмом всюду кроме начала координат, и что $\pi^{-1}(0) \simeq \mathbb{C}P^{n-1}$.

Для данного гладкого комплексного многообразия M^n комплексной размерности n *раздутием* M в точке $x \in M$ называется многообразие $Bl_x M$, получаемое применением описанной конструкции в некоторой окрестности точки $x \in M$.

Конструкция раздутия многообразия в точке обобщается до раздутия подмногообразий высших размерностей. Для этого определим раздутие подмножества

$$V = \{(z_1, \dots, z_n) \in D |\ z_{k+1} = \dots = z_n = 0\}$$

единичного полидиска $D \subset \mathbb{C}^n$. Введем в $\mathbb{C}P^{n-k-1}$ однородные координаты $[L_{k+1} : \ldots : L_n]$. *Раздутием* D вдоль подмногообразия V называется пространство

$$Bl_V D = \{(z, L) \in D \times \mathbb{C}P^{n-k-1} |\ z_i L_j = z_j L_i \text{ для всех } i, j = k+1, \dots, n\}.$$

Эта операция может быть применена локально к любому комплексному многообразию M и его комплексному подмногообразию $V \subset M$, чтобы получить $Bl_V M$ — раздутие многообразия M вдоль V.

Для многообразий $V \subset M$, $\dim_{\mathbb{C}} M = n$, $\dim_{\mathbb{C}} V = k$, имеется проекция $\pi : Bl_V M \to M$, являющаяся изоморфизмом везде кроме V, и $\pi^{-1}(v) \simeq \mathbb{C}P^{n-k-1}$ для любой точки $v \in V$.

Рассмотрим произвольное гладкое компактное комплексное многообразие X и его подмногообразие $Z \subset X$. Напомним, что $Bl_Z X$ обозначает результат раздутия многообразия X вдоль подмногообразия Z. Поскольку раздутие является *локальной* операцией, то есть определяется лишь трубчатой окрестностью подмногообразия $Z \subset X$, естественно ожидать, что разность $[Bl_Z X] - [X]$ полностью определяется нормальным расслоением $\nu(Z \subset X)$.

Предложение 1.9.1 (Хитчин, [45, §4.5]). *Рассмотрим раздутие $\pi : Bl_Z X \to X$ вдоль Z. Тогда разность классов многообразий $Bl_Z X$ и X в кольце комплексных кобордизмов задается формулой:*

$$[Bl_Z X] - [X] = -[\mathbb{P}(\nu(Z \subset X) \oplus \overline{\underline{\mathbb{C}}})], \tag{1.19}$$

где $\nu(Z \subset X)$ есть соответствующее нормальное расслоение над Z, а проективизация $\mathbb{P}(\nu(Z \subset X) \oplus \overline{\underline{\mathbb{C}}})$ снабжена нестандартной комплексной структурой (1.15).

Пример 1.9.2 (Раздутие в точке $Bl_x X \to X$). Применим Предложение 1.9.1 для раздутия $Bl_x X$ многообразия X в точке $x \in X$. В этом случае нормальное расслоение тривиально: $\nu = \underline{\mathbb{C}}^{\dim_{\mathbb{C}} X}$, и формула (1.19) принимает вид

$$[Bl_x X] - [X] = -[\mathbb{P}(\mathbb{C}^{\dim_{\mathbb{C}} X} \oplus \overline{\mathbb{C}})]. \tag{1.20}$$

Хорошо известно, что при раздутии $\pi\colon Bl_Z X \to X$ многообразие $Bl_Z X$ получается из многообразия X добавлением исключительного дивизора $E = \pi^{-1}(Z) \simeq \mathbb{P}(\nu(Z \subset X))$ с нормальным расслоением ζ, см., например [65, §6]. В частности, если $\pi\colon Bl_x X \to X$ — раздутие в точке $x \in X$ некоторого n-мерного комплексного многообразия, то исключительный дивизор $E = \pi^{-1}(x) \simeq \mathbb{C}P^{n-1}$ имеет нормальное расслоение $\nu(E \subset Bl_x X) \simeq \eta_{n-1}$.

Простейшее раздутие комплексного многообразия X — раздутия $Bl_x X$ в точке $x \in X$, — выражается в терминах связной суммой многообразий.

Предложение 1.9.3. [68, p.102] *Рассмотрим точку $x \in X$ комплексного многообразия X, $\dim_{\mathbb{C}} X = n$. Тогда пространство раздутия $Bl_x X$ ориентированно диффеоморфно $X\#_{x,y}\overline{\mathbb{C}P}^n$, где $y \in \overline{\mathbb{C}P}^n$ есть любая фиксированная точка.*

1.10 Эквивариантная и бриллиантова суммы квазиторических многообразий

Определение 1.10.1. Рассмотрим квазиторические многообразия $M = M(P,\Lambda),\ M' = M(P',\Lambda')$ над n-многогранниками $P,\ P'$, соответственно. Пусть характеристические матрицы $\Lambda,\ \Lambda'$ имеют выделенный вид (1.7) относительно вершин $v \in P,\ v' \in P'$, соответственно. Вершинам v, v' отвечают неподвижные точки $x \in M,\ x' \in M'$, соответственно. Рассмотрим связную сумму многогранников $P\#P' = P\#_{v,v'}P'$. По определению, эквивариантной связной суммой $M\widetilde{\#}M' = M\widetilde{\#}_{x,x'}M'$ называется квазиторическое многообразие над $P\#P'$ с характеристической матрицей

$$\Lambda_{\#} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1^{n+1} & \cdots & \lambda_1^m & \lambda_1'^{n+1} & \cdots & \lambda_1'^{m'} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \lambda_2^{n+1} & \cdots & \lambda_2^m & \lambda_2'^{n+1} & \cdots & \lambda_2'^{m'} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_n^{n+1} & \cdots & \lambda_n^m & \lambda_n'^{n+1} & \cdots & \lambda_n'^{m'} \end{pmatrix}$$

Отметим, что определение эквивариантной суммы $M\widetilde{\#}_{x,x'}M'$ имеет произвол, происходящий из выбора отображения склейки граней срезок вершин при взятии связной суммы $P\#_{v,v'}P'$ многогранников $P,\ P'$.

Многообразие $M\widetilde{\#}M'$ T^n-эквивариантно диффеоморфно многообразию, полученному удалением из многообразий M и M' инвариантных окрестностей неподвижных точек x и x', соответственно, и последующим T^n-эквивариантным отождествлением границ этих окрестностей. Полученное многообразие становится стандартной связной суммой $M\#M'$ после забывания действия тора.

Чтобы определить (инвариантную) стабильно комплексную структуру на $M_1\widetilde{\#}_{x_1,x_2}M_2$, необходимо снабдить данное многообразие ориентацией (например, данной соответствующей характеристической матрицей). Многообразие $M_1\widetilde{\#}_{x_1,x_2}M_2$ ориентированно диффеоморфно либо $M_1\#_{x_1,x_2}M_2$, либо $M_1\#_{x_1,x_2}\overline{M_2}$.

Ограничение ориентации $M_1\widetilde{\#}_{x_1,x_2}M_2$ на M_1 равно ориентации на M_1. Однако ограничение ее на M_2 либо равно, либо противоположно ориентации на M_2. В первом случае, введенная ориентация на $M_1\widetilde{\#}_{x_1,x_2}M_2$ называется *совместимой* с ориентациями на $M_i,\ i = 1, 2$.

Предложение 1.10.2. [63, Lemma 9.1.12] *Эквивариантная связная сумма $M_1\widetilde{\#}_{x_1,x_2}M_2$ омниориентированных квазиторических многообразий обладает ориентацией, совместимой с ориентациями на $M_i, i = 1, 2$, если и только если $\sigma(x_1) = -\sigma(x_2)$.*

Предложение 1.10.3. *Пусть эквивариантная связная сумма $M_1\widetilde{\#}_{x_1,x_2}M_2$ омниориентированных квазиторических многообразий обладает ориентацией, совместимой с ориентациями на $M_i, i = 1, 2$. Тогда каноническая стабильно комплексная структура квазиторическом многообразии $M_1\widetilde{\#}_{x_1,x_2}M_2$, доставляемая характеристической матрицей $\Lambda_{\#}$ и совместимой ориентацией, эквивалентна сумме канонических стабильно комплексных структур на $M,\ M'$. Класс комплексного кобордизма многообразия $M\widetilde{\#}M'$ равен сумме $[M] + [M']$.*

Обозначим через $S(2n)$ $2n$-мерное омниориентированное квазиторическое многообразие $M(I^n, (Id_n\ \ Id_n))$, где I^n есть n-мерный комбинаторный куб. Легко проверить, что многообразие $S(2n)$ имеет n различных неподвижных точек со знаком 1 и n различных неподвижных точек со знаком -1.

Определение 1.10.4. [36] Пусть $n > 1$. *Бриллиантовой суммой* $2n$-мерных омниориентированных квазиторических многообразий M, M' называется $2n$-мерное омниориентированное квазиторическое многообразие
$M\diamondsuit M' := M\widetilde{\#}_{x,y}S(2n)\widetilde{\#}_{y',x'}M'$, где эквивариантные связные суммы берутся в любых неподвижных точках $x \in M$, $y, y' \in S(2n)$, $x' \in M$ таких, что $\sigma(y) = -\sigma(x)$, $\sigma(y') = -\sigma(x')$.

Легко проверить следующее утверждение.

Лемма 1.10.5. [63, Example 9.1.15] *Стабильно комплексное многообразие $S(2n)$ является декартовым произведением n копий рациональных прямых $\mathbb{C}P^1$, взятых с нестандартной стабильно комплексной структурой (см.* (1.16)*):*

$$T\mathbb{C}P^1 \oplus \underline{\mathbb{C}} = \overline{\eta_1} \oplus \eta_1 = \underline{\mathbb{C}}^2.$$

$S(2n)$ гомеоморфно многообразию $(\mathbb{C}P^1)^n$. $S(2n)$ представляет нулевой класс комплексного кобордизма. Знак неподвижной точки $x \in S(2n)$ равен $(-1)^{\varepsilon_1} \cdots (-1)^{\varepsilon_n}$, где $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in I^n$ есть вершина куба, соответствующая точке x.

Из Леммы 1.10.5 и Предложения 1.10.3 вытекает

Следствие 1.10.6. *Класс комплексного кобордизма бриллиантовой суммы $M \diamondsuit M'$ равен сумме $[M] + [M']$. В частности, $M \diamondsuit M'$ не зависит от произволов в определениях связных сумм (т.е. выборов вершин и отображений склейки симплексов при взятии связной суммы соответствующих многогранников).*

1.11 Эквивариантные раздутия (квази)торических многообразий

Рассмотрим модель $M^{2n} = M(P, \Lambda)$ квазиторического многообразия, заданную характеристической парой (P, Λ). Для любой вершины $v = F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n} \in P$ векторы-столбцы $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n}$ характеристической $(n \times m)$-матрицы $\Lambda = (\lambda_i^j)$ порождают конус $\sigma_v = \mathrm{cone}(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_n}) \subset N \otimes \mathbb{R}$.

Рассмотрим две характеристические пары $(P, \Lambda), (P', \Lambda')$. Обозначим через N, N' свободные абелевы группы, порожденные векторами-столбцами матриц Λ, Λ', соответственно. Слабо эквивариантный морфизм $\varphi : M(P, \Lambda) \to M(P', \Lambda')$ двух квазиторических многообразий по определению задается отображением свободных абелевых групп $\psi : N \to N'$ таким, что для любой вершины $v \in P$ существует вершина $v' \in P'$ такая, что $\psi(\sigma_v) \subset \sigma_{v'}$.

Рассмотрим характеристическое подмногообразие $Z \subset M$ коразмерности $2k$, соответствующее грани $G = F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k} \subset P$. Далее, пусть $\widetilde{P} = \mathrm{cut}_G P$ есть дельзантов многогранник, полученный срезкой грани G многогранника P, так что соответствующая характеристическая матрица $\widetilde{\Lambda}$ получается из Λ добавлением вектора $\lambda = \lambda_{i_1} + \dots + \lambda_{i_k}$, отвечающего гиперграни срезки $\widetilde{P}$. Тождественное отображение свободных абелевых групп, порожденных столбцами $\Lambda, \widetilde{\Lambda}$, дает слабо эквивариантный морфизм $\pi : M(\widetilde{P}, \widetilde{\Lambda}) \to M(P, \Lambda)$.

Определение 1.11.1. Слабо эквивариантный морфизм $\pi : Bl_{Z^{2(n-k)}}M^{2n} = M(\widetilde{P}, \widetilde{\Lambda}) \to M(P, \Lambda)$ квазиторических многообразий называется эквивариантным раздутием квазиторического многообразия M в характеристическом подмногообразии $Z \subset M$.

На уровне многообразий, эквивариантное раздутие $Bl_{Z^{2(n-k)}}M^{2n}$ квазиторического многообразия в инвариантном подмногообразии $Z \subset M$ получается вклеиванием многообразия $\mathbb{P}(\nu) \to Z$, являющегося проективизацией комплексного расслоения $\nu \to Z$. Подмногообразие $\mathbb{P}(\nu) \to Z$ является квазиторическим. В самом деле, инвариантное подмногообразие $Z \subset M$ является трансверсальным пересечением характеристических подмногообразий $M_{i_1}^{2(n-1)}, \dots, M_{i_k}^{2(n-1)} \subset M^{2n}$ для некоторых $1 \leqslant i_1 < \dots < i_k \leqslant m$. Соответствующее нормальное расслоение $\nu(Z \subset M) \to Z$ есть овеществление комплексного векторного расслоения $\nu = (\theta_{i_1} \oplus \dots \oplus \theta_{i_k})|_Z$, т.е. ограничения расслоения $\theta_{i_1} \oplus \dots \oplus \theta_{i_k} \to M$ на Z. В частности, векторное расслоение ν полностью расщепимо.

1.12 Геометрические представители мультипликативных порождающих кольца Ω_U^*

1.12.1 Гиперповерхности Милнора

Гиперповерхность Милнора $H_{i,j}, 0 \leqslant i \leqslant j$, есть по определению гиперповерхность бистепени $(1,1)$ в $\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j$ (комплексной размерности $i+j-1$), заданная уравнением

$$\sum_{k=0}^{i} z_k w_k = 0$$

в однородных координатах $[z_0 : \dots : z_i], [w_0 : \dots : w_j]$ в $\mathbb{C}P^i$ и $\mathbb{C}P^j$, соотв. (По определению, $H_{0,0} = \varnothing$.) Слоем тавтологического линейного расслоения $\eta_i \to \mathbb{C}P^i$ над $[l] \in \mathbb{C}P^i$, $l \subset V$, является прямая l. Обозначим через η_i^* векторное расслоение над $\mathbb{C}P^i$, слоем которого над $[l] \in \mathbb{C}P^i, l \subset V$, является ортогональное дополнение $l^\perp$ в $\mathbb{C}^{i+1}$. Ясно, что $\operatorname{rk} \eta_i^* = i$ и $\eta_i \oplus \eta_i^* = \underline{\mathbb{C}}^{i+1}$.

Предложение 1.12.1 ([53], [51])**.** *Ограничение естественной проекции $\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j \to \mathbb{C}P^i$ на $H_{i,j}$ индуцирует структуру локально тривиального*

$\mathbb{C}P^{j-1}$*-расслоения*

$$H_{i,j} = \mathbb{P}(\overline{\eta_i^*} \oplus \underline{\mathbb{C}}^{j-i}) \to \mathbb{C}P^i.$$

Числа Милнора многообразий $H_{i,j}$ находятся легко. Далее выводится

Предложение 1.12.2 ([51], [20])**.** $H_{i,j},\ 0 \leqslant i \leqslant j,\ i+j = n+1$, *являются мультипликативными порождающими кольца* Ω_U^* *в градуировке* $2n$*.*

Заметим, что $H_{0,j} = \mathbb{C}P^{j-1}$ и $H_{1,j} = \mathbb{P}(\eta_1 \oplus \underline{\mathbb{C}}^{j-1}) \to \mathbb{C}P^1$ суть торические многообразия. На самом деле, этим исчерпываются все торические гиперповерхности Милнора. (Кольцо когомологий $H^*(H_{i,j};\mathbb{Z})$ доставляет соответствующее препятствие.)

Предложение 1.12.3. ([63, Theorem 9.1.5]) Многообразие $H_{i,j}$ при $2 \leqslant i \leqslant j$ не является торическим многообразием.

Дуализация первого класса Черна $c_1(\xi) \in H^2(X;\mathbb{Z})$ линейного векторного расслоения $\xi \to X$ над компактным стабильно комплексным многообразием доставляет стабильно комплексное *подмногообразие* $D \subset X$ вещественной коразмерности 2 (см. [19, p.78],[58]). Нормальное комплексное линейное векторное расслоение вложения $D \subset X$ совпадает с ограничением ξ на D. Первый класс Черна $c_1(\xi) \in H^2(X;\mathbb{Z})$ двойственнен по Пуанкаре классу $[D] \in H_{2(n-1)}(X;\mathbb{Z})$.

Предложение 1.12.4. ([19, с.71],[63, Proposition D.6.3]) Многообразие $H_{i,j}$ является дуализацией первого класса Черна комплексного линейного расслоения $\overline{\eta_i}\overline{\eta_j'}$ над $\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j$, где $\overline{\eta_i}$ и $\overline{\eta_j'}$ суть обратные образы тавтологических расслоений относительно канонических проекций $\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j \to \mathbb{C}P^i$ и $\mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j \to \mathbb{C}P^j$ на первый и второй сомножитель, соответственно.

1.12.2 Многообразия Бухштабера-Рэя и Панова-Лю

В [35], В.М. Бухштабер и Н. Рэй построили гладкие проективные торические многообразия $BR_{i,j}$, доставляющие мультипликативные порождающие кольца комплексных кобордизмов Ω_U^*. (Обозначение из статьи [35]: $B_{i,j}$.)

Определение 1.12.5 (См. [35])**.** Пусть $0 \leqslant i \leqslant j$. Тогда
$BR_{i,j} = \mathbb{P}(f_i^*\overline{\eta_i^*} \oplus \underline{\mathbb{C}}^{j-i}) \to BF_i$ есть обратный образ проективного расслоения

(гиперповерхности Милнора) $H_{i,j} = \mathbb{P}(\overline{\eta_i^*} \oplus \underline{\mathbb{C}}^{j-i}) \to \mathbb{C}P^i$ относительно отображения $f_i : BF_i \to \mathbb{C}P^i$. В частности, $BR_{0,j} = \mathbb{C}P^{j-1}$. (По определению, $BR_{0,0} = \varnothing$.)

Предложение 1.12.6. *Многообразие $BR_{i,j}$ является дуализацией первого класса Черна комплексного линейного расслоения $\overline{\beta_i \overline{\eta'_j}}$ над $BF_i \times \mathbb{C}P^j$.*

Многообразие $BR_{i,j}$ является гладким прообразом гиперповерхности Милнора $H_{i,j} \subset \mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j$ при отображении $f_i \times Id_j : BF_i \times \mathbb{C}P^j \to \mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j$. Следовательно, гиперповерхность $BR_{i,j} \subset BF_i \times \mathbb{C}P^j$ задается уравнением:

$$\sum_{k=0}^{i} z_{i,k} w_k = 0, \tag{1.21}$$

где $[w_0 : \cdots : w_j] \in \mathbb{C}P^j$ суть однородные координаты на $\mathbb{C}P^j$ и $z_{k,l}$ суть координаты на BF_i (см. Подраздел 3.4.2).

Предложение 1.12.7. ([63, Theorem 9.1.8]) Выполнено
$s_{i+j-1}(BR_{i,j}) = s_{i+j-1}(H_{i,j})$. Многообразия $BR_{i,j}$, $0 \leqslant i \leqslant j$, $i + j = n + 1$, являются мультипликативными порождающими кольца Ω_U^* в градуировке $2n$.

Из Предложений 1.12.7, 3.5.2 вытекает следующая важная

Теорема 1.12.8. ([35], [36], [63, Theorem 9.1.17]) Каждый элемент кольца комплексных кобордизмов Ω_U^* градуировки 4 и выше содержит гладкое квазиторическое ПКР-многообразие.

Подобно гиперповерхностям Милнора $H_{i,j}$, многообразия $BR_{i,j}$ являются проективными расслоениями.

Лемма 1.12.9. *Для любого $k = 1, \ldots, i$, над BF_i выполнено $f_i^* \eta_k^* \simeq \bigoplus_{q=1}^{k} \beta_q^*$.*

Предложение 1.12.10.

$$BR_{i,j} = \mathbb{P}(\bigoplus_{k=1}^{i} \overline{\beta_k^*} \oplus \underline{\mathbb{C}}^{j-i}) \to BF_i.$$

В отличие от гиперповерхностей Милнора, многообразия Бухштабера-Рэя являются торическими.

Следствие 1.12.11 (См. [35]). *$BR_{i,j}$ есть неособое проективное торическое многообразие.*

Замечание 1.12.12. Многообразие $BF_i \times \mathbb{C}P^j$, $0 \leqslant i \leqslant j$, является торическим с действием тора, индуцированным стандартным действием тора на комплексных проективных пространствах и эквивариантным вложением $BF_i \subset \prod_{k=1}^{n} \mathbb{C}P^k$. Уравнение (1.21) не является инвариантным при данном действии тора (при $i \neq 0$). Следовательно, многообразие $BR_{i,j}$, $1 \leqslant i \leqslant j$, не является инвариантным дивизором $BF_i \times \mathbb{C}P^j$. Тем не менее, формула (3.5) позволяет отождествить тривиальное $\mathbb{C}P^j$-расслоение над BF_i с проективизацией $\mathbb{P}(\overline{\beta_i} \oplus \bigoplus_{k=1}^{i} \overline{\beta_k^*} \oplus \underline{\mathbb{C}}^{j-i}) \to BF_i$. Теперь снабдим многообразие $BF_i \times \mathbb{C}P^j$ $(\mathbb{C}^\times)^n$-действием, индуцированным данной структурой проективизации полностью расщепимого расслоения. (Данное многообразие эквивариантно изоморфно предыдущему. Это следует, например, из основного результата [28].) Вложение

$$BR_{i,j} = \mathbb{P}(\bigoplus_{k=1}^{i} \overline{\beta_k^*} \oplus \underline{\mathbb{C}}^{j-i}) \subset \mathbb{P}(\overline{\beta_i} \oplus \bigoplus_{k=1}^{i} \overline{\beta_k^*} \oplus \underline{\mathbb{C}}^{j-i}) = BF_i \times \mathbb{C}P^j$$

эквивариантно относительно указанного выше действия тора на $BF_i \times \mathbb{C}P^j$.

В [49], Z. Lü и Т. Панов построили другое семейство полиномиальных порождающих Ω_U^* в связи с задачей построения порождающих кольца $\Omega_{SU}^*/Tors$. Именно, это проективные торические многообразия $L(i,j) := \mathbb{P}(\eta_i \oplus \underline{\mathbb{C}}^j) \to \mathbb{C}P^i$ комплексной размерности $i + j$.

Из Предложения 1.6.8 немедленно вытекает

Следствие 1.12.13. *Многообразия $H_{i,j}$ и $BR_{i,j}$, $i \leqslant j$, $2 < j$, не являются полностью нормально расщепимыми. Многообразие $L(i,j)$, $1 < j$, не является полностью нормально расщепимым.*

1.12.3 Торические образующие Вильфонга

Теорема 1.12.14 (Вильфонг, [61, Theorem 1.2])**.** *Если n нечетно или $n = p^m - 1$ для некоторого простого числа p, и $m \in \mathbb{N}$, то в качестве мультипликативной образующей кольца комплексных кобордизмов в размерности n может быть выбран класс некоторого проективного торического многообразия.*

Соответствующие торические многообразия в зависимости от размерности суть проективные пространства и многократные раздутия специальных проективных расслоений над проективными расслоениями над $\mathbb{C}P^1$ (являющихся обобщенными башнями Ботта высоты 1 и 2, соответственно) вдоль неподвижных точек и инвариантных рациональных кривых.

1.13 Вычеты по модулю p биномиальных коэффициентов

Нам понадобятся некоторые утверждения об остатках от деления биномиальных коэффициентов по модулю простого, а также по модулю степени простого числа.

Теорема 1.13.1 (Люка́, [42,43])**.** *Пусть p есть простое число. Рассмотрим разложения n и m натуральных чисел по основанию p:*

$$n = n_0 + n_1 p + \dots + n_{r-1}p^{r-1} + n_r p^r,$$
$$m = m_0 + m_1 p + \dots + m_{r-1}p^{r-1} + m_r p^r.$$

Тогда имеет место сравнение

$$\binom{n}{m} \equiv \binom{n_0}{m_0}\binom{n_1}{m_1}\dots\binom{n_r}{m_r} \pmod p.$$

Ниже используется запись $n = n_0 + n_1 p + \dots + n_d p^d = [n_d, \dots, n_0]_p$ числа по основанию p. Количество разрядов s в разложении чисел по основанию p всюду ниже опускается.

Обозначим через $k!_p$ произведение натуральных чисел от 1 до k, не делящихся на p.

Теорема 1.13.2. (См. [43, Theorem 1]). Рассмотрим степень p^q простого числа p и натуральные числа $m = n + r$. Запишем $n = n_0 + n_1 p + \dots + n_d p^d$ по основанию p. Для каждого $j \geqslant 0$, пусть N_j есть число $[n/p^j]$, приведенное по модулю p^q (т.е. $N_j = n_j + n_{j+1}p + \dots + n_{j+q-1}p^{q-1}$). Аналогично определим числа m_j, M_j, r_j, R_j. Пусть e_j есть количество индексов $i \geqslant j$, для которых $n_i < m_i$ (т.е. число “переносов” при сложении m и r по основанию p, до j-ого разряда включительно). Тогда

$$\frac{1}{p^{e_0}}\binom{n}{m} \equiv$$
$$(\pm 1)^{e_{q-1}}\left(\frac{(N_0)!_p}{(M_0)!_p(R_0)!_p}\right)\left(\frac{(N_1)!_p}{(M_1)!_p(R_1)!_p}\right)\cdots\left(\frac{(N_d)!_p}{(M_d)!_p(R_d)!_p}\right) \pmod{p^q},$$

где (± 1) есть (-1), за исключением случая $p = 2$ и $q \geqslant 3$.

Следствие 1.13.3 (Куммер; см. [43])**.** *Для любых натуральных чисел* n, m *и любого простого* p *наибольшая степень* p*, на которую делится биномиальный коэффициент* $\binom{n}{m}$*, равна числу "переносов" при сложении* m *и* $n - m$ *по основанию* p*.*

Глава 2

Квазиторические ПНР-многообразия

2.1 ПНР-свойство и стабильно полностью расщепимые расслоения

При помощи спектральной последовательности Атья и Хирцебруха (см. Теорему 1.5.5) а также Теоремы 1.4.8 доказывается

Предложение 2.1.1. *$K(M^{2n})$ есть свободная абелева группа (по сложению) ранга, равного эйлеровой характеристике $\chi(M^{2n})$ многообразия M^{2n}. Далее, $K^1(M^{2n}) = 0$.*

Предложение 2.1.2. *Для любого комплексного линейного расслоения $\xi \to M^{2n}$ над квазиторическим многообразием M^{2n} в кольце $K(M^{2n})$ выполнено $([\xi] - 1)^{n+1} = 0$.*

Доказательство. Заметим $ch(([\xi] - 1)^{n+1}) = 0$ (Теорема 1.4.8). Далее воспользуемся Теоремой 1.5.5. □

Теорема 2.1.3. [55, Proposition 3.2] *Имеет место изоморфизм градуированных колец*

$$K(M^{2n}) \simeq \mathbb{Z}[\theta_1, \dots, \theta_m]/(I_K + J_K),$$

где $I_K = ((\theta_{i_1} - 1) \cdots (\theta_{i_k} - 1)|\ F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_k} = \varnothing)$,
$J_K = (\theta_1^{\lambda_i^1} \cdots \theta_m^{\lambda_i^m} - 1|\ i = 1, \dots, n)$ суть идеалы кольца многочленов. В частности, классы $[\theta_i]$, $i = 1, \dots, m$, мультипликативно порождают кольцо $K(M^{2n})$.

Замечание 2.1.4. Отметим, что Теоремы 1.4.8, 2.1.3 могут быть также выведены из вычисления кольца комплексных кобордизмов данного квазиторического многообразия и последующей специализации универсального формального группового закона (для комплексно-ориентированных обобщенных теорий когомологий) к когомологическому или K-теорному, соответственно.

Следствие 2.1.5. *Для любого $k = 1, \dots, n$ выполнено*

$$H^{2k}(M^{2n}; \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}\langle x^k |\ x \in H^2(M^{2n}; \mathbb{Z})\rangle,$$

где $\mathbb{Q}\langle * \rangle$ означает взятие $\mathbb{Q}$-линейной оболочки данного множества.

Доказательство. Теорема 2.1.3 говорит, что $K(M^{2n}) \simeq \mathbb{Z}\langle \underline{\theta}^{\underline{v}} |\ \underline{v} \in \mathbb{Z}^m \rangle$, где $\underline{\theta}^{\underline{v}} := \theta_1^{v_1} \cdots \theta_m^{v_m}$, $\underline{v} = (v_1, \dots, v_m)$. Из Теорем 1.4.8 и 1.5.5 следует, что $ch_k(K(M^{2n}) \otimes \mathbb{Q}) = H^{2k}(M^{2n}; \mathbb{Q})$. Остается заметить, что $ch_k(\underline{\theta}^{\underline{v}}) = (c_1(\underline{\theta}^{\underline{v}}))^k / k!$. □

Определим полугруппу $C(M^{2n}) \subseteq \widetilde{K}(M^{2n})$, порожденную элементами вида $[\xi] - 1$, где $\xi \to M^{2n}$ есть комплексное линейное расслоение (по отношению к сумме Уитни векторных расслоений).

Следствие 2.1.6. *Выполнено*

$$C(M^{2n}) = \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\langle \underline{\theta}^{\underline{v}} - 1 |\ \underline{v} \in \mathbb{Z}^m \rangle,$$

где $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}\langle * \rangle$ означает взятие $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$-полугрупповой оболочки данной абелевой группы.

Пусть X есть гладкое замкнутое многообразие. Для любого комплексного расслоения $\alpha \to X$ существует единственное с точностью до стабильной эквивалентности векторных расслоений “обратное” комплексное расслоение $\theta \to X$, т.е. такое, что $\alpha \oplus \theta \simeq \underline{\mathbb{C}}^r$. Из общих свойств операций над векторными расслоениями вытекает следующая

Лемма 2.1.7. *Пусть $\alpha, \alpha' \to X$ суть комплексные линейные векторные расслоения, чьи стабильно обратные комплексные векторные расслоения полностью расщепимы. Пусть $f : Y \to X$ есть непрерывное отображение (Y есть произвольное гладкое замкнутое многообразие). Тогда стабильно обратные комплексные расслоения к $\overline{\alpha}, f^*\alpha, \alpha \oplus \alpha', \alpha\alpha'$ полностью расщепимы.*

Теорема 2.1.8. *Пусть M^{2n} есть квазиторическое многообразие размерности $2n$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) M^{2n} есть ПНР-многообразие;

(ii) Для любого $i = 1, \dots, m$, стабильно обратное расслоение к θ_i полностью расщепимо;

(iii) Для любого элемента $x \in K(M^{2n})$ существует такое $N \in \mathbb{Z}$, что

$$x = N + \sum_{\underline{v} \in \mathbb{Z}^m} c_{\underline{v}} [\underline{\theta}^{\underline{v}}], \tag{2.1}$$

где $c_{\underline{v}} \geqslant 0$ неотрицательны (суммирование ведется по $\underline{v} = (v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{Z}^m$, только конечное число коэффициентов $c_{\underline{v}} \in \mathbb{Z}$ отлично от 0);

(iv) Любое комплексное векторное расслоение $\xi \to M^{2n}$ стабильно полностью расщепимо.

Доказательство. $(i) \Rightarrow (ii)$. Согласно условию, существует полностью расщепимое комплексное векторное расслоение $\alpha = \bigoplus_{i=1}^{b} \alpha_i \to M^{2n}$ и число $N \in \mathbb{N}$ такие, что

$$\theta \oplus \alpha \simeq \underline{\mathbb{C}}^N.$$

Утверждение теперь вытекает из Формулы (1.8).

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Существуют комплексные векторные расслоения $\xi, \eta \to M^{2n}$ такие, что $x = [\xi] - [\eta]$ (см. [16]). Далее, для стабильно обратного ζ к η, т.е. $[\zeta] + [\eta] = k,\ k \in \mathbb{Z}$, выполнено

$$x = [\xi] + [\zeta] - k.$$

Следовательно, без ограничения общности можно считать, что $x = [\xi]$ есть класс комплексного линейного расслоения. По Теореме 2.1.3, равенство (2.1) выполнено с произвольными коэффициентами $c_{\underline{v}} \in \mathbb{Z}$ и $N = 0$ в кольце $K(M^{2n})$. Остается избавиться от отрицательных коэффициентов в данном тождестве. Согласно Лемме 2.1.7, для любого $\underline{v} \in \mathbb{Z}^m$, линейное векторное расслоение $\underline{\theta}^{\underline{v}}$ имеет полностью расщепимое стабильно обратное. Следовательно, для любого $\underline{v} \in \mathbb{Z}^m$ такого, что $c_{\underline{v}} < 0$ и некоторого числа $N_{\underline{v}} \in \mathbb{Z}$ класс $N_{\underline{v}} + c_{\underline{v}}[\underline{\theta}^{\underline{v}}]$ представлен полностью расщепимым векторным расслоением, что и требовалось.

Импликации $(iii) \Rightarrow (iv)$ и $(iv) \Rightarrow (i)$ тривиальны. $\square$

Условие (iv) из Теоремы 2.1.8 является гомотопическим инвариантом.

Предложение 2.1.9. *Рассмотрим гомотопически эквивалентные конечные CW-комплексы X, Y. Предположим, что каждое комплексное векторное расслоение над X полностью стабильно расщепимо. Тогда каждое комплексное векторное расслоение над Y также полностью стабильно расщепимо.*

Доказательство. По определению, существуют непрерывные отображения $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ такие, что $g \circ f \simeq_{hot} Id_X, f \circ g \simeq_{hot} Id_Y$, где $\simeq_{hot}$ означает гомотопическую эквивалентность отображений. Пусть $\xi \to Y$ есть комплексное векторное расслоение над Y. Согласно предположению, существует полностью расщепимое комплексное векторное расслоение $\alpha = \bigoplus_{i=1}^{k} \alpha_i \to X$ такое, что

$$f^*(\xi) \oplus \underline{\mathbb{C}}^N = \alpha$$

для некоторого $N \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$g^*(f^*(\xi) \oplus g^*(\underline{\mathbb{C}}^N)) = (f \circ g)^*(\xi) \oplus \underline{\mathbb{C}}^N = g^*(\alpha).$$

Векторное расслоение $g^*(\alpha) = \bigoplus_{i=1}^{k} g^*(\alpha_i)$ полностью расщепимо. Векторные расслоения $(fg)^*(\xi)$ и ξ топологически эквивалентны, т.к. имеют гомотопически эквивалентные классифицирующие отображения. Отсюда заключаем, что

$$\xi \oplus \underline{\mathbb{C}}^N = g^*(\alpha),$$

и ξ полностью стабильно расщепимо. Ч.т.д. $\square$

2.2 Выпуклые конусы и операции над ними

Всюду далее рассматриваются выпуклые конусы в конечномерных вещественных линейных пространствах.

Напомним стандартные определения выпуклой геометрии.

Определение 2.2.1. Выпуклым конусом σ в $\mathbb{R}^n$ (с вершиной в нуле $0 \in \mathbb{R}^n$) называется любое множество вида
$\operatorname{con} X := \{t_1 v_1 + \dots + t_k v_k |\ k \in \mathbb{N},\ t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}_{\geqslant 0};\ v_1, \dots, v_k \in X\}$, где $X \subset \mathbb{R}^n$. Максимальное по включению линейное подпространство конуса

σ называется пространством линейности $\operatorname{lin}\sigma \subset \mathbb{R}^n$. Конус σ называется замкнутым, если он замкнут как подмножество $\mathbb{R}^n$, и заостренным, если $\operatorname{lin}\sigma = 0$. Размерностью $\dim\sigma$ конуса σ называется размерность его линейной оболочки $\dim\mathbb{R}\langle\sigma\rangle$. В случае $\dim\sigma = n$, конус σ называется полноразмерным.

Предложение 2.2.2. *Для любого выпуклого конуса $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ существует заостренный конус $\sigma' \subset \mathbb{R}^n$ такой, что $\sigma = \sigma' + \operatorname{lin}\sigma$ (сумма в смысле Минковского), причем $\mathbb{R}\langle\sigma'\rangle \cap \operatorname{lin}\sigma = \{0\}$.*

Зафиксируем произвольный базис $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$.

Лемма 2.2.3. *Любой полноразмерный заостренный конус $\sigma \subset \mathbb{R}^n$ имеет опорную гиперплоскость с нормалью с рациональными координатами в базисе $e_1, \dots, e_n$.*

Доказательство. Нормаль любой опорной гиперплоскости к σ есть элемент двойственного конуса $\sigma^* \subset (\mathbb{R}^n)^*$. В силу заостренности σ, $\operatorname{int}(\sigma^*) \neq \varnothing$. Искомая нормаль есть любой элемент внутренности $\operatorname{int}(\sigma^*)$, у которого в двойственном базисе $e^1, \dots, e^n \in (\mathbb{R}^n)^*$ все координаты рациональны. □

Определение 2.2.4. Линейное подпространство $U \subset \mathbb{R}^n$ называется рациональным относительно базиса $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$, если U порождено векторами $u_1, \dots, u_k$ подпространства U, все координаты которых относительно базиса $e_1, \dots, e_n$ суть рациональные числа.

Предложение 2.2.5. *Пусть $\sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ есть полноразмерный конус с рациональным относительно базиса $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ пространством линейности $\operatorname{lin}\sigma$. Тогда σ имеет опорную гиперплоскость с нормалью, все координаты которой в данном базисе $\mathbb{R}^n$ рациональны.*

Следующий шаг состоит в определении двух различных произведений выпуклых конусов. Первое является тензорным произведением конусов (см. [29]), а второе отвечает декартовому произведению многообразий (см. Следствие 2.3.8).

Определение 2.2.6. Пусть $\sigma \subseteq U$, $\tau \subseteq V$ суть выпуклые конусы в $\mathbb{R}$-линейных пространствах U, V, соответственно. Выпуклый конус

$$\sigma \otimes \tau := \operatorname{con}\{u \otimes v |\ u \in U, v \in V\} \subseteq U \otimes V,$$

называется *тензорным произведением конусов* σ, τ. Для любого $u \in U, v \in V$ определим $u * v := u + v + u \otimes v$. Также определим произведение выпуклых конусов по формуле

$$\sigma * \tau := \operatorname{con}\{u * v | \ u \in U, v \in V\} \subseteq U \oplus V \oplus U \otimes V.$$

Легко видеть, что для замкнутых конусов $\sigma, \ \tau$ произведения $\sigma \otimes \tau$, $\sigma * \tau$ являются замкнутыми конусами. Рассматривая $(\sigma * \tau, 1)$, $(\sigma, 1)$, $(\tau, 1)$ как выпуклые конусы в соответствующих аффинных пространствах, получаем $(\sigma * \tau, 1) = (\sigma, 1) \otimes (\tau, 1)$. Заметим, что $*$-произведение коммутативно и ассоциативно, но вообще говоря не является линейным ни по одной из переменных. В случае, если U, V вложены в некоторую $\mathbb{R}$-алгебру, тензорное произведение будем заменять на соответствующее произведение. То же замечание относится к $*$-произведению.

Лемма 2.2.7. *Пусть $\sigma \subseteq U, \ \tau \subseteq V$. Тогда выполнены следующие утверждения.*

(1) *Если конусы σ, τ заостренные, то конус $\sigma \otimes \tau$ заостренный;*

(2) $(\operatorname{lin} \sigma) \otimes \tau = (\operatorname{lin} \sigma) \otimes \mathbb{R}\langle \tau \rangle$*;*

(3) *Пусть $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \subseteq U$, где $\sigma_1, \sigma_2 \subseteq U$ суть выпуклые конусы. Тогда $\sigma \otimes \tau = \sigma_1 \otimes \tau + \sigma_2 \otimes \tau$.*

(4) $\operatorname{lin}(\sigma \otimes \tau) = (\operatorname{lin} \sigma) \otimes \tau + \sigma \otimes \operatorname{lin} \tau = (\operatorname{lin} \sigma) \otimes \mathbb{R}\langle \tau \rangle + \mathbb{R}\langle \sigma \rangle \otimes \operatorname{lin} \tau$*.*

Доказательство. (1). Рассмотрим опорные функции $H \in U^*, \ L \in V^*$ конусов σ, τ, соответственно, такие, что для любых ненулевых элементов $u \in \sigma, \ v \in \tau$ выполнено $H(u), L(v) > 0$. Определим линейную функцию $H \otimes L \in (U \otimes V)^*$ по формуле $(H \otimes L)(u \otimes v) := H(u) \cdot L(v)$, далее продолжим по линейности. Тогда для любого ненулевого элемента $w \in \sigma \otimes \tau$ легко видеть, что $(H \otimes L)(w) > 0$, что и требовалось.

(2). Конус $(\operatorname{lin} \sigma) \otimes \tau$ содержится в линейном пространстве $(\operatorname{lin} \sigma) \otimes \mathbb{R}\langle \tau \rangle$. Обратное включение $(\operatorname{lin} \sigma) \otimes \tau \supseteq (\operatorname{lin} \sigma) \otimes \mathbb{R}\langle \tau \rangle$ вытекает из тождеств $(\operatorname{lin} \sigma) \otimes \tau = (-\operatorname{lin} \sigma) \otimes \tau = (\operatorname{lin} \sigma) \otimes (-\tau)$, $\mathbb{R}\langle \tau \rangle = \tau + (-\tau)$, где $-\tau$ есть образ конуса τ при умножении на -1.

(3). Тривиально.

(4). Второе равенство получается применением (1). Представим $\sigma = \sigma' + \operatorname{lin} \sigma$, $\tau = \tau' + \operatorname{lin} \tau$, причем $\mathbb{R}\langle \sigma' \rangle \cap \operatorname{lin} \sigma = \{0\}$, $\mathbb{R}\langle \tau' \rangle \cap \operatorname{lin} \sigma = \{0\}$ по

Предложению 2.2.2. Проделаем выкладку:

$$\sigma\otimes\tau = (\operatorname{lin}\sigma)\otimes\operatorname{lin}\tau+(\operatorname{lin}\sigma)\otimes\tau'+\sigma'\otimes\operatorname{lin}\tau+\sigma'\otimes\tau' = (\operatorname{lin}\sigma)\otimes\tau+\sigma\otimes\operatorname{lin}\tau+\sigma'\otimes\tau'.$$

Так как пространства $(\operatorname{lin}\sigma)\otimes\tau+\sigma\otimes\operatorname{lin}\tau$ и $\mathbb{R}\langle\sigma'\otimes\tau'\rangle$ пересекаются по нулю, получаем требуемое. $\square$

Следствие 2.2.8. *Пусть $\sigma\subseteq U$, $\tau\subseteq V$ суть полноразмерные выпуклые конусы с рациональными пространствами $\operatorname{lin}\sigma$, $\operatorname{lin}\tau$ в базисах $u_1,\dots,u_k$ и $v_1,\dots,v_l$ линейных пространств U,V, соответственно. Тогда $\operatorname{lin}(\sigma\otimes\tau)\subseteq U\otimes V$ рационально в базисе $u_1\otimes v_1,\dots,u_k\otimes v_l$ линейного пространства $U\otimes V$.*

Нам потребуются факты о циклических многогранниках (см. [22]). Пусть $\mathbf{x}_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_n(t):=(t,t^2,\dots,t^n)$. Образ вещественной прямой $\mathbb{R}$ при отображении $\mathbf{x}_n$ называется кривой моментов. Для любого $k>n$ циклический многогранник $C^n(t_1,\dots,t_k)$, $t_1,\dots,t_k\in\mathbb{R}$, определяется как выпуклая оболочка k различных точек $\mathbf{x}_n(t_1),\dots,\mathbf{x}_n(t_k)$ кривой моментов.

Теорема 2.2.9. [22] (i) *Циклический многогранник $C^n(t_1,\dots,t_k)$ является симплициальным n-многогранником;*

(ii) *$C^n(t_1,\dots,t_k)$ имеет ровно k вершин;*

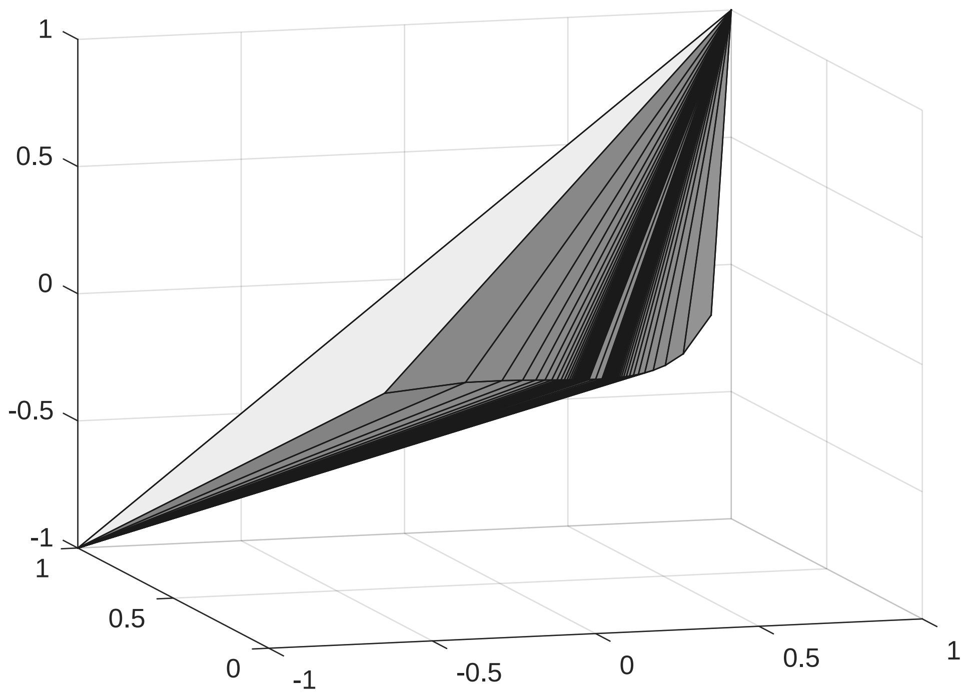
(iii) *Комбинаторный тип $C^n(t_1,\dots,t_k)$ не зависит от выбора $t_1,\dots,t_k$.*

Для любого k введем обозначение $C^n_k := C^n(-1,-1/2,\dots,-1/k,1/k,\dots,1/2,1)$. Также обозначим через C^n_∞ замыкание выпуклой оболочки точек $\{\mathbf{x}_n(1/k)|\ k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\mathbf{x}_n(0)\}$ (см. Рисунок 2.1).

Следствие 2.2.10. $C^1_\infty=[-1,1]$. *Для $n\geqslant 2$, вершины C^n_∞ суть $\{\mathbf{x}(1/k)|\ k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\mathbf{x}(0)\}$. $C^n_\infty=\overline{\bigcup_{k=1}^\infty C^n_k}$ является компактным выпуклым телом в $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Множество C^n_∞ замкнуто. Остается заметить, что $C^n_k\subset C^n_{k+1}$ и $C^n_\infty\subset\mathbb{I}^n$, где $\mathbb{I}^n=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n|-1\leqslant x_i\leqslant 1,\ i=1,\dots,n\}$ есть единичный n-куб. $\square$

Рис. 2.1: Многогранник C^3_{50}.



2.3 Конус $W(M^{2n})$

Обозначим через $W(M^{2n}) \subseteq \widetilde{K}(M^{2n}) \otimes \mathbb{R}$ замыкание конической выпуклой оболочки множества $C(M^{2n}) \subseteq \widetilde{K}(M^{2n})$, т.е. $W(M^{2n}) = \overline{\operatorname{con} C(M^{2n})}$. Иными словами, $W(M^{2n})$ есть замыкание конической выпуклой оболочки элементов вида $[\xi] - 1$, где $\xi \to M^{2n}$ есть комплексное линейное расслоение. В этом Подразделе мы изучим $W(M^{2n})$ для произвольного квазиторического многообразия M^{2n}.

Естественная проекция $\widetilde{K}(\mathbb{C}P^n) \to \widetilde{K}(\mathbb{C}P^{n-1})$ сюрьективно отображает конус $W(\mathbb{C}P^n)$ на $W(\mathbb{C}P^{n-1})$. Зафиксируем базис $(x-1), \ldots, (x-1)^n$ векторного пространства $\widetilde{K}(\mathbb{C}P^n) \otimes \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^n$, и пусть $e^1, \ldots, e^n$ суть соответствующие координаты в $\widetilde{K}(\mathbb{C}P^n) \otimes \mathbb{R}$. Обозначим через $A_n : \widetilde{K}(\mathbb{C}P^n) \otimes \mathbb{R} \to \widetilde{K}(\mathbb{C}P^n) \otimes \mathbb{R}$ матрицу линейной замены координат, определенной однозначно условиями:

$$A_n(\binom{k}{1}, \binom{k}{2}, \ldots, \binom{k}{n}) = (k, k^2, \ldots, k^n),\ k \in \mathbb{Z},$$

в введенных выше координатах. Здесь и далее $\binom{a}{b} := \frac{a(a-1)\cdots(a-b+1)}{b(b-1)\cdots 1}$ для $a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}_{>0}$; $\binom{a}{0} := 1$ для $a > 0$; $\binom{0}{b} := 0$ для $b \geqslant 0$. Матрица A_n корректно определена для любого $n \in \mathbb{N}$, так как многочлены $\binom{k}{1}, \binom{k}{2}, \ldots, \binom{k}{n}$

по переменной k порождают n-мерное линейное подпространство алгебры многочленов $\mathbb{R}[k]$ с вещественными коэффициентами от k (n фиксировано).

Предложение 2.3.1. *$W(\mathbb{C}P^2) = \mathbb{R}_{\geqslant 0}\langle (x-1), (\overline{x}-1)\rangle$. Если n нечетно, то $W(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{R}_{\geqslant 0}\langle (x-1)^n, -(x-1)^n, W(\mathbb{C}P^{n-1})\rangle$. Если n четно, то образ $A_n(W(\mathbb{C}P^n))$ есть конус над компактным выпуклым телом $P^{n-1} \subset \{e^n = 1\}$ размерности $n-1$. При естественной проекции $\{e^n = 1\} \to \mathbb{R}\langle (x-1), \ldots, (x-1)^{n-1}\rangle$, тело P^{n-1} отображается биективно на C_∞^{n-1}. В частности, подпространство $\operatorname{lin} W(\mathbb{C}P^n) \subseteq \widetilde{K}(\mathbb{C}P^n)$ рационально в указанном базисе $\widetilde{K}(\mathbb{C}P^n)$.*

Доказательство. В силу Формулы (1.11) и разложения Тейлора, в $K(\mathbb{C}P^n)$ имеет место формула:

$$x^k - 1 = \sum_{i=1}^{n} \binom{k}{i} (x-1)^i, \ k \in \mathbb{Z}. \tag{2.2}$$

По Формуле (2.2), $A_n(W(\mathbb{C}P^n))$ есть конус в $\mathbb{R}^n$, порожденный векторами $(k, k^2, \ldots, k^n), \ k \in \mathbb{Z}$.

Пусть n нечетно. Чтобы доказать утверждение, достаточно проверить, что любая опорная функция конуса $W(\mathbb{C}P^n)$ зануляется на $(x-1)^n$. Рассмотрим линейную функцию $H : \widetilde{K}(\mathbb{C}P^n) \otimes \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такую, что $H(W(\mathbb{C}P^n)) \geqslant 0$. В силу Формулы (2.2), $0 \leqslant \lim_{k\to+\infty} H(x^k - 1) = \lim_{k\to+\infty} k^n H((x-1)^n)$. Следовательно, $H((x-1)^n) \geqslant 0$. Далее, $\lim_{k\to-\infty} H(x^k - 1) = \lim_{k\to-\infty} k^n H((x-1)^n)$. Заключаем $H((x-1)^n) = 0$, что и требовалось.

Пусть n четно. Деля порождающие векторы $(k, k^2, \ldots, k^n), \ k \in \mathbb{Z}$, на $k^n, k \neq 0$, заключаем, что $A_n(W(\mathbb{C}P^n))$ является конусом над выпуклым телом C_∞^{n-1} в соответствующей аффинной гиперплоскости. Явная формула для $W(\mathbb{C}P^2)$ вытекает из Следствия 2.2.10. □

Следующее наблюдение было получено благодаря А. Айзенбергу.

Замечание 2.3.2. Для любого целого k коэффициенты разложения $x^k - 1 \in \widetilde{K}(\mathbb{C}P^n)$ по базису $(x-1), \ldots, (x-1)^n$ образуют набор биномиальных коэффициентов $(\binom{k}{1}, \binom{k}{2}, \ldots, \binom{k}{n})$. Несложная проверка индукцией по k показывает, что для любого неотрицательного целого l выполнено неравенство

$$\binom{k}{l}^2 \geqslant \binom{k}{l-1}\binom{k}{l+1}.$$

При $0 < l < k$ это известное неравенство на биномиальные коэффициенты. С другой стороны, данное неравенство означает, что последовательность $(\binom{k}{1}, \binom{k}{2}, \dots, \binom{k}{n})$ лог-вогнута (log-concave). Это свойство проективного пространства заслуживает внимания в связи с диссертацией [67].

Лемма 2.3.3. *Пусть $x_1, \dots, x_k \in K(M^{2n}), k \geqslant 2$. Тогда в $K(M^{2n})$ выполнены формулы:*

$$(\dots((x_1 * x_2) * x_3) * \dots) * x_k = \sum_{q=1}^{k} \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_q \leqslant k} x_{i_1} \cdots x_{i_q},$$

$$(x_1 - 1) * \dots * (x_k - 1) = x_1 \cdots x_k - 1. \tag{2.3}$$

Лемма 2.3.4. *Матрица перехода от базиса*
$\{(y_1 - 1)^{v_1} \cdots (y_m - 1)^{v_m} | \ \sum_i v_i \leqslant n, \ v_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$ *к базису*
$\{y_1^{v_1} \cdots y_m^{v_m} - 1| \ \sum_i v_i \leqslant n, \ v_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$ *линейного пространства* $\widetilde{K}((\mathbb{C}P^n)^m) \otimes \mathbb{R}$ *имеет только рациональные матричные элементы.*

Предложение 2.3.5. *Для любых $n, m \in \mathbb{N}$ выполнено*

$$W((\mathbb{C}P^n)^m) = W(\mathbb{C}P^n) * \dots * W(\mathbb{C}P^n). \tag{2.4}$$

Подпространство $\operatorname{lin} W((\mathbb{C}P^n)^m) \subseteq \widetilde{K}((\mathbb{C}P^n)^m)$ *рационально относительно базиса* $\{y_1^{v_1} \cdots y_m^{v_m} - 1| \ \sum_i v_i \leqslant n, \ v_i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$ *линейного пространства* $\widetilde{K}((\mathbb{C}P^n)^m) \otimes \mathbb{R}$.

Доказательство. Формула (2.4) есть прямое следствие Формулы (2.3) и формулы Кюннета в K-теории (см. [16]). Второе утверждение вытекает из Следствия 2.2.8, Предложения 2.3.1 и Леммы 2.3.4. $\square$

Рассмотрим квазиторическое многообразие M^{2n} с многогранником моментов, имеющим m гиперграней. Рассмотрим линейное отображение
$R : \widetilde{K}((\mathbb{C}P^n)^m) \otimes \mathbb{R} \to \widetilde{K}(M^{2n}) \otimes \mathbb{R}$, $R(y_i) = [\theta_i]$, где y_i есть класс двойственного к обратному образу тавтологического линейного расслоения над i-м сомножителем декартова произведения $(\mathbb{C}P^n)^m$. Корректность данного отображения вытекает из Предложения 2.1.2 и Теоремы 2.1.3. Так как для любого $\underline{v} \in \mathbb{Z}^m$ по определению выполнено $R(y_1^{v_1} \cdots y_m^{v_m}) = \underline{\theta}^{\underline{v}}$, то
$W(M^{2n}) = R(W((\mathbb{C}P^n)^m))$ (см. Следствие 2.1.6).

Лемма 2.3.6. *Существуют комплексные линейные векторные расслоения $\xi_i \to M^{2n}$, $i = 1, \ldots, \chi(M^{2n})-1$, такие, что $e_1-1, \ldots, e_{\chi(M^{2n})-1}-1$ образуют базис свободной абелевой группы $\widetilde{K}(M^{2n})$, где $e_i = [\xi_i]$, $i = 1, \ldots, \chi(M^{2n})-1$. Для любого комплексного линейного векторного расслоения $\xi \to M^{2n}$ элемент $[\xi]-1 \in \widetilde{K}(M^{2n})$ имеет рациональные координаты в данном базисе.*

Доказательство. Вытекает из Теоремы 2.1.3 и формулы Тейлора для функции нескольких переменных $f(v_1, \ldots, v_m) := \underline{\theta}^{\underline{v}} - 1$. $\square$

Следствие 2.3.7. *Пусть $W(M^{2n}) \neq \widetilde{K}(M^{2n}) \otimes \mathbb{R}$. Тогда конус $W(M^{2n})$ имеет опорную гиперплоскость с нормальным вектором, все координаты которого рациональны относительно базиса из Леммы 2.3.6.*

Доказательство. Из Теоремы 2.1.3 и Леммы 2.3.6 следует, что любой матричный элемент матрицы линейного отображения R относительно введенных выше базисов в линейных пространствах $\widetilde{K}((\mathbb{C}P^n)^m) \otimes \mathbb{R}$, $\widetilde{K}(M^{2n}) \otimes \mathbb{R}$ рационален. По Предложению 2.3.5 и Лемме 2.3.6, подпространство $\operatorname{lin} W(M^{2n}) \subseteq \widetilde{K}(M^{2n}) \otimes \mathbb{R}$ рационально относительно соответствующего базиса. Теперь требуемое вытекает из Предложения 2.2.5. $\square$

Следствие 2.3.8. *Для квазиторических многообразий $M_1^{2n_1}, M_2^{2n_2}$ выполнено*

$$W(M_1^{2n_1} \times M_2^{2n_2}) = W(M_1^{2n_1}) * W(M_2^{2n_2})$$

при изоморфизме Кюннета $K(M_1^{2n_1} \times M_2^{2n_2}) \simeq K(M_1^{2n_1}) \otimes K(M_2^{2n_2})$.

2.4 ПНР-критерий в терминах кольца когомологий и кольца K-теории

В этом Разделе мы доказываем ПНР-критерий в терминах кольца K-теории и его градуированный вариант ПНР-критерия в терминах кольца когомологий квазиторического многообразия M^{2n}, основываясь на полученных выше результатах.

Для доказательства ПНР-критерия нам понадобится дополнительная

Лемма 2.4.1. *Пусть $S \subseteq L$ есть подполугруппа свободной абелевой группы $L \simeq \mathbb{Z}^d$ такая, что S содержит $\mathbb{Z}$-базис $x_1, \ldots, x_d \in S$ группы L. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) $S = L$;

(ii) Существует элемент $v = \sum_i v^i x_i \in S$ *такой, что* $v^i < 0$, $i = 1, \dots, d$;

(iii) $0 \in \operatorname{int}\operatorname{conv} S$, *где* int *и* conv *означают внутренность и выпуклую оболочку подмножества* $\mathbb{R}^d$, *соответственно;*

(iv) Не существует линейной функции $H : L \otimes \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $H \not\equiv 0$, *такой, что* $S \subseteq \{H \geqslant 0\}$.

Доказательство. Следствия $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv)$ легко проверяются. $(iv) \Rightarrow (iii)$ вытекает из теоремы об опорной функции замкнутого выпуклого подмножества $\mathbb{R}^n$.

$(iii) \Rightarrow (ii)$. Из условия (iii) следует, что существует элемент $u = \sum_i u^i x_i \in \operatorname{int}\operatorname{conv} S$ с отрицательными координатами $u^i < 0, i = 1, \dots, d$. Рассмотрим элементы $u_1, \dots, u_d \in S$, положительные вещественные числа $a^1, \dots, a^d \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ такие, что $u = \sum_i a^i u_i$. Рассмотрим малое шевеление b^i чисел $a^i, i = 1, \dots, d$, для которого выполнено $u' := \sum_i b^i u_i \in \operatorname{int}\operatorname{conv} S$, все координаты (в базисе $x_1, \dots, x_d$) элемента u' отрицательны и $b^i \in \mathbb{Q}_{>0}$ являются рациональными положительными числами. Пусть $N \in \mathbb{N}$ таково, что $Nb^i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0},\ i = 1, \dots, d$. Тогда все координаты $v := Nu' \in S$ отрицательны (в базисе $x_1, \dots, x_d$), что и требовалось.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Пусть $x \in L$. Рассмотрим разложение $x = \sum_i a^i x_i$, $a^i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, d$. Пусть далее $L_{\geqslant 0} \subseteq S$ есть подполугруппа, порожденная элементами $x_1, \dots, x_d$. Возьмем число $N \in \mathbb{N}$, для которого $Nv < x$ (покоординатно). Тогда $x \in Nv + L_{\geqslant 0}$. Следовательно, $x \in S$, что и требовалось. □

Следствие 2.4.2. *Квазиторическое многообразие* M^{2n} *размерности* $2n$ *является ПНР-многообразием тогда и только тогда, когда* $W(M^{2n}) = \widetilde{K}(M^{2n}) \otimes \mathbb{R}$.

Доказательство. Условие ПНР многообразия M^{2n} эквивалентно условию (iii) Теоремы 2.1.8. Последнее, в свою очередь, равносильно условию

$$\widetilde{K}(M^{2n}) = C(M^{2n}). \tag{2.5}$$

По Лемме 2.3.6, полугруппа $C(M^{2n}) = \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\langle \underline{\theta}^{\underline{v}} - 1 |\ \underline{v} \in \mathbb{Z}^m \rangle$ содержит $\mathbb{Z}$-базис свободной абелевой группы $\widetilde{K}(M^{2n})$. Следовательно, по Лемме 2.4.1, равенство (2.5) равносильно требуемому. □

Каждому элементу $a \in H^{2(n-k)}(M^{2n}; K)$, $a \neq 0$, $0 < k \leqslant n$, кольца когомологий квазиторического многообразия M^{2n} сопоставим однородную (ненулевую) k-форму $Q_a : H^2(M^{2n}; K) \to K$, по формуле $Q_a(x) = \langle a \cdot x^k, [M^{2n}] \rangle$ где K есть $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ или $\mathbb{R}$. Данное сопоставление K-линейно по a.

Определение 2.4.3. Форма Q_a называется *допустимой*, если она не является полуопределенной (т.е. как вещественнозначная функция форма Q_a принимает значения различных знаков).

Теорема 2.4.4. *Пусть M^{2n} есть квазиторическое многообразие размерности $2n$. Тогда M^{2n} есть ПНР-многообразие в том и только том случае, если для любого целого $0 < k \leqslant n$, и любого $a \in H^{2(n-k)}(M^{2n}; \mathbb{Z})$, $a \neq 0$, форма Q_a степени k допустима.*

Для элемента $a \in H^{2(n-k)}(M^{2n}; \mathbb{Q})$, определим однородную $\mathbb{Q}$-форму $Q_a : H^2(M^{2n}; \mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}$ степени k по формуле

$$Q_a(x) := \langle x^k a, [M^{2n}] \rangle, \; x \in H^2(M^{2n}; \mathbb{Q}),$$

где $\langle *, * \rangle$ есть каноническое спаривание.

Замечание 2.4.5. Для многочлена объема $V_{\mathcal{F}}$ квазиторического многообразия M^{2n} (см. Определение 2.7.1) выполнено тождество
$Q_1(c_1x_1 + \cdots + c_mx_m) = \frac{1}{n!}V_{\mathcal{F}}(c_1, \ldots, c_m)$.

Предложение 2.4.6. *Пусть $K = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ или $\mathbb{R}$. Имеется взаимно однозначное соответствие между K-линейными функциями $L : H^{2k}(M^{2n}; K) \to K$ и однородными k-формами $Q_a : H^2(M^{2n}; K) \to K$, $a \in H^{2(n-k)}(M^{2n}; K)$.*

Доказательство. Проведем доказательство для $K = \mathbb{Q}$. По двойственности Пуанкаре, любая $\mathbb{Q}$-линейная функция $L : H^{2k}(M^{2n}; \mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}$ имеет вид $L(*) = \langle * \cdot a, [M^{2n}] \rangle$ для некоторого $a \in H^{2(n-k)}(M^{2n}; \mathbb{Q})$. Тогда Следствие 2.1.5 дает требуемое биективное соответствие. □

Доказательство Теоремы 2.4.4. $\Rightarrow$. От противного: предположим, что существует $a \in H^{2(n-2k)}(M^{2n}; \mathbb{Z})$ такой, что форма Q_a нетривиальна и является полуопределенной. Рассмотрим $x \in H^2(M^{2n}; \mathbb{Z})$ такой, что $Q_a(x) > 0$. Возьмем комплексное линейное расслоение $\xi \to M^{2n}$ с $c_1(\xi) = x$. По Теореме 2.1.8, стабильно обратное векторное расслоение $\alpha \to M^{2n}$ к ξ полностью расщепимо: $\alpha = \bigoplus_{i=1}^{l} \alpha_i$ для некоторых $\alpha_i \to M^{2n}$. Пусть $a_i := c_1(\alpha_i)$. Применим характер Черна к тождеству $l+1-\xi = \alpha$ в $K(M^{2n})$. Однородная $4k$-компонента полученного тождества есть

$$-x^{2k} = \sum_{i=1}^{l} a_i^{2k}.$$

Умножая левую и правую части последнего тождества на a и спаривая их с $[M^{2n}]$, получаем

$$-Q_a(x) = \sum_{i=1}^{l} Q_a(a_i).$$

Однако последнее противоречит полуопределенности Q_a.

$\Leftarrow$. От противного. Тогда по Следствию 2.3.7 и Лемме 2.3.6 существует линейная функция $H: K(M^{2n}) \otimes \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такая, что $H \not\equiv 0,\ H(1) = 0$ и для любого $\underline{v} \in \mathbb{Z}^m,\ H(\underline{\theta}^{\underline{v}}) \in \mathbb{Q}_{\geqslant 0}$. Определим линейную функцию $L:\ H^*(M^{2n}; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ по формуле

$$L(x) := H(ch^{-1}(x) + \overline{ch^{-1}(x)}),\ x \in H^*(M^{2n}; \mathbb{R}),$$

где черта означает комплексное сопряжение в K-теории. Заметим, что $L(1) = 0$ и $L|_{H^{2(2k+1)}(M^{2n};\mathbb{R})} \equiv 0$ для любого $k = 0, \ldots, [n/2]$. Предположим, что $L \equiv 0$. Подставляя $x = ch(\underline{\theta}^{\underline{v}})$, получаем

$$H(\underline{\theta}^{\underline{v}}) = -H(\underline{\theta}^{-\underline{v}}),$$

для любого $\underline{v} \in \mathbb{Z}^m$. Тогда $H \equiv 0$ — противоречие. Следовательно, $L \not\equiv 0$.

Рассмотрим наибольшее число k такое, что $L|_{H^{2k}(M^{2n};\mathbb{R})} \not\equiv 0$. Из определения характера Черна и $L \not\equiv 0$ следует, что $k > 0$ четно. По Предложению 2.4.6, линейная функция $L|_{H^{2k}(M^{2n};\mathbb{Q})}$ дает ненулевую k-форму $Q:\ H^2(M^{2n}; \mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}$ четной степени. Используя ее однородность, без ограничения общности можно считать, что Q целочисленна. По условию, данная форма не является полуопределенной. Следовательно, существует элемент $x \in H^2(M^{2n}; \mathbb{Z})$ такой, что $Q(x) = L(x^k) < 0$. Рассмотрим комплексное линейное векторное расслоение $\xi \to M^{2n}$, для которого $c_1(\xi) = x$. Тогда имеем

$$0 \leqslant H(\xi^a + \xi^{-a}) = L(ch(\xi^a)) = \sum_{i=1}^{k/2} \frac{a^{2i}}{(2i)!} L(x^{2i}),\ a \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно,

$$0 \leqslant \lim_{a\to+\infty} L(ch(\xi^a)) = L(x^k)\cdot(+\infty) = -\infty$$

— противоречие. Что и требовалось.

□

Замечание 2.4.7. $\mathbb{Q}$- и $\mathbb{R}$-аналоги Теоремы 2.4.4 также имеют место.

Пример 2.4.8. Рассмотрим $M^8 = \mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^2$. Соответствующее кольцо когомологий есть $H^*(M^8;\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}[x,y]/(x^3,y^3)$, где x,y суть первые классы Черна обратных образов комплексно сопряженных к тавтологическим расслоениям над соответствующими сомножителями в $\mathbb{C}P^2\times\mathbb{C}P^2$. Чтобы убедиться в том, что M^8 не является ПНР-многообразием, применим Теорему 2.4.4. 4-форма Q_1 является положительно полуопределенной формой: $Q_1(ax+by) = 6a^2b^2$, где $a,b \in \mathbb{Q}$. (Заметим, что форма пересечения M^8 не является определенной: $\sigma(M^8) = 1 < 3 = \dim H^2(M^8;\mathbb{R})$.) Любой элемент $H^4(M^8;\mathbb{Q})$ имеет вид $ax^2+bxy+cy^2$, где $a,b,c\in\mathbb{Q}$. Квадратичная форма $Q_{ax^2+bxy+cy^2}$ имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} c & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

в базисе $x,y\in H^2(M^8;\mathbb{Q})$. Ясно, что $Q_{x^2+y^2}$ является положительно определенной формой.

Следствие 2.4.9. *Пусть M^{2n} есть квазиторическое многообразие размерности $2n$. Тогда M^{2n} является ПНР-многообразием если и только если для любого $0<k\leqslant[n/2]$ выполнено $H^{4k}(M^{2n};\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{\geqslant 0}\langle x^{2k}|\ x\in H^2(M^{2n};\mathbb{Z})\rangle$.*

2.5 ПНР-многообразия в малых размерностях

Данный раздел посвящен квазиторическим ПНР-многообразиям в размерностях 4 и 6. Сведение условия Теоремы 2.4.4 к конечному числу квадратичных форм для 6-многообразий описано в Подразделе 2.5.2.

2.5.1 Квазиторические ПНР 4-многообразия

Полная классификация гладких проективных торических ПНР-поверхностей дана ниже.

Предложение 2.5.1. *Пусть M^4 есть гладкая проективная торическая поверхность с многоугольником моментов $P^2 \subset \mathbb{R}^2$. Тогда M^4 есть ПНР-многообразие в том и только том случае, если P^2 отличен от треугольника Δ^2.*

Доказательство. Напомним, что многогранник P^2 имеет m ребер. По Теореме 1.6.2, нужно показать, что равенство $|\sigma(M^4)| = \dim H^2(M^4;\mathbb{R})$ равносильно $P^2 = \Delta^2$. Согласно формуле для сигнатуры и эйлеровой характеристики торического многообразия (см. [63, Section 9.5]), выполнено
$|\sigma(M^4)| = |4 - \dim H^2(M^4;\mathbb{R})| \leqslant \dim H^2(M^4;\mathbb{R}),\ \dim H^2(M^4;\mathbb{R}) = m - 2$. Ясно, что равенство в последнем неравенстве достигается в единственном случае $m = 3$. Остается заметить, что единственной искомой поверхностью над треугольником является $\mathbb{C}P^2$. □

Квазиторические не-ПНР многообразия более разнообразны начиная с размерности 4. Непосредственно проверяется

Предложение 2.5.2. *Пусть M^4 есть квазиторическое не-ПНР многообразие размерности 4 над четырехугольником. Тогда характеристическая матрица M^4 $GL_2(\mathbb{Z})$-эквивалентна*

$$\begin{pmatrix} Id_2 & A \end{pmatrix},$$

где A есть матрица следующего вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Данные многообразия разбиваются на два различных класса ориентированного диффеоморфизма.

2.5.2 Квазиторические ПНР 6-многообразия

Рассмотрим квазиторическое многообразие M^6.

Предложение 2.5.3. $W(M^6) = \mathbb{R}\langle t_{i_1} * \cdots * t_{i_k} |\ 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant m,\ t_i = \theta_i^{\pm 1} - 1, \pm(\theta_i - 1)^3\rangle$.

Доказательство. Вытекает непосредственно из Следствия 2.2.8 и Предложений 2.3.1, 2.3.5. □

Предложение 2.5.3 не обобщается на большие размерности. Согласно Следствию 2.3.8, достаточно построить пример 8-мерного квазиторического многообразия M^8 с неполиэдральным конусом $W(M^8)$.

Пример 2.5.4. Положим $M^8 = \mathbb{C}P^2 \times \mathbb{C}P^2$. В обозначениях Примера 2.4.8, $ch_2(W(M^8)) = \mathbb{R}_{\geqslant 0}\langle (ax+by)^2 |\ a,b \in \mathbb{R}\rangle \subset H^4(M^8;\mathbb{R})$. Последний конус линейной заменой координат в $H^4(M^8;\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^3$ переводится в
$\sigma = \mathbb{R}_{\geqslant 0}\langle (1,0,0),(t^2,t,1) |\ t \in \mathbb{R}\rangle$. Конус σ не полиэдрален, следовательно, $W(M^8)$ тоже не полиэдрален.

Лемма 2.5.5. *Для любых классов $\alpha_1,\dots,\alpha_k \in K(M^6)$ комплексных линейных векторных расслоений над M^6 выполнено*

$$ch_2((\alpha_1-1)*\dots*(\alpha_k-1)) = \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{k} c_1(\alpha_i))^2.$$

Доказательство. По Лемме 2.3.3, имеем:

$$ch_2((\alpha_1-1)*\dots*(\alpha_k-1)) = ch_2(\sum_{q=1}^{k}\sum_{1\leqslant i_1<\dots<i_q\leqslant k}(\alpha_{i_1}-1)\cdots(\alpha_{i_q}-1)) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}(c_1(\alpha_i))^2 + \sum_{i<j}c_1(\alpha_i)c_1(\alpha_j) = \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{k}c_1(\alpha_i))^2.$$

□

Теорема 2.5.6. *M^6 является ПНР-многообразием тогда и только тогда, когда*

$$H^4(M^6;\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{\geqslant 0}\langle (\sum_{i=1}^{m} a_i x_i)^2 |\ a_i = -1,0,1;\ i=1,\dots,m\rangle.$$

Доказательство. По Следствию 2.4.9, достаточно проверить, что $ch_2(W(M^6)) = \mathbb{R}\langle (\sum_{i=1}^{m} a_i x_i)^2 |\ a_i = -1,0,1, i=1,\dots,m\rangle$. Заметим, что для любого $x \in K(M^6)$ выполнено $ch_2(x*(\pm(\theta_i-1)^3)) = ch_2(x)$. Остается воспользоваться Предложением 2.5.3 и Леммой 2.5.5. □

Замечание 2.5.7. Рассмотрим произвольную вершину v многогранника P^3. Без ограничения общности, пусть элементы x_1,x_2,x_3 отвечают гиперграням P^3, пересекающимся в v. Из соотношений в кольце $H^*(M^6;\mathbb{R})$ (см. Теорему

1.4.8) получаем равенство правой части условия 2.5.6 выражению

$$\mathbb{R}_{\geqslant 0}\langle(\sum_{i=1}^{m} a_i x_i)^2|\ a_i = -1, 0, 1;\ i = 4, \ldots, m\rangle.$$

Это замечание позволяет упростить условие Теоремы 2.5.6.

Пример 2.5.8. Конусы из Теоремы 2.5.6 для торических многообразий с комбинаторно эквивалентными многогранниками моментов различны, вообще говоря. Пусть $P_1^3, P_2^3 \subset \mathbb{R}^3$ суть выпуклые многогранники, как показано на Рисунок 2.2 (т.е. связная сумма двух кубов в вершинах) с нормальными векторами

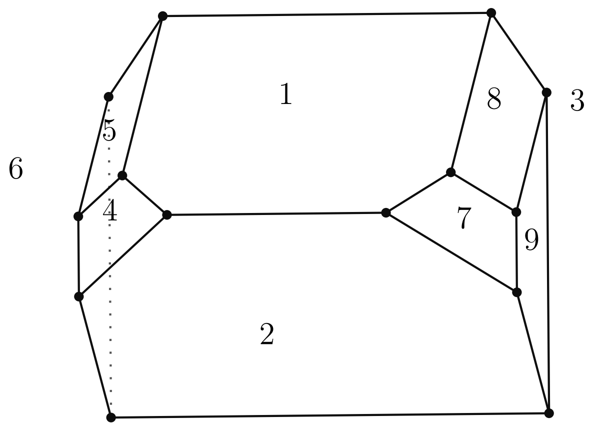
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

соответственно. (Нормальные векторы данных многогранников занумерованы, как на Рисунке 2.2.) Оба данных многогранника получены из соответствующих треугольных призм срезками двух вершин и ребер. Многогранники P_1^3, P_2^3 являются дельзантовыми. Рассмотрим (гладкие проективные) торические многообразия M_1^6, M_2^6 комплексной размерности 3, отвечающие многогранникам P_1^3, P_2^3, соответственно. Теорема 1.4.8 говорит, что $x_8x_9, x_7x_9, x_7x_8, x_6^2, x_5x_6, x_5^2$ и $x_9^2, x_8x_9, x_8^2, x_6^2, x_5x_6, x_3^2$ являются базисами $H^4(M_1;\mathbb{Q})$ и $H^4(M_2;\mathbb{Q})$, соответственно. Используя программные пакеты (например, Sage, Singular), можно вычислить конусы из Теоремы 2.5.6. Крайние лучи конусов $W(M_1), W(M_2)$ порождены векторами (в указанном выше базисе)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и имеют 4 и 7 гиперграней, соответственно. В частности, M_1, M_2 не являются ПНР-многообразиями.

Рис. 2.2: Комбинаторный многогранник с нумерацией граней.



2.6 Гладкие проективные торические ПНР-многообразия

Основным результатом данного Раздела является Теорема 2.6.12, описывающая свойство многогранника моментов гладкого проективного торического ПНР-многообразия.

Рассмотрим неособое проективное торическое многообразие M^{2n} комплексной размерности $n > 2$. Пусть $P^n \subset \mathbb{R}^n$ есть соответствующий многообразию M^{2n} многогранник моментов. Обозначим через $F_i,\ i = 1, \ldots, m$, гиперграни P^n, а соответствующие нормальные векторы через
$\lambda_i = (\lambda_i^1, \lambda_i^2, \ldots, \lambda_i^n)^T \in \mathbb{R}^n$. Пусть K есть нерв-комплекс многогранника P^n (т.е. симплициальный комплекс, отвечающий вершинам симплициальной сферы $P^* \subset (\mathbb{R}^n)^*$). Рассмотрим минимальную не-грань нерв-комплекса K мощности k. Без ограничения общности, можно считать, что вершины данной недостающей грани отвечают гиперграням $F_1, \ldots, F_k \subset P$:
$F_1 \cap \cdots \cap \widehat{F_i} \cap \cdots \cap F_k \neq \varnothing,\ 1 \leqslant i \leqslant k,\ F_1 \cap \cdots \cap F_k = \varnothing.$

Предложение 2.6.1. *Пусть $k > 2$. Тогда матрица $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ $GL_n(\mathbb{Z})$-эквивалентна либо*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ \textit{либо} } \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Рассмотрим индекс $i > k$ такой, что $F_1 \cap \dots \cap F_{k-1} \cap F_i$ содержит вершину P. Возьмем стандартный единичный базис $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$, $e_i^j = \delta_i^j$. Т.к. P^n является дельзантовым многогранником, существует $GL_n(\mathbb{Z})$-преобразование, переводящее $\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}$ в векторы $e_1, \dots, e_{k-1}$, соответственно. Матрица $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ имеет ранг $k-1$ или k. В первом случае, выполнено $\lambda_k = (a_1, \dots, a_{k-1}, 0, \dots, 0)^T$ для некоторых $a_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, k-1$. Для любого $i = 1, \dots, k-1$ найдем индекс грани $j > k$ такой, что $F_1 \cap \dots \cap \widehat{F_i} \cap \dots \cap F_k \cap F_j$ содержит вершину. Тогда условие дельзантовости влечет $a_i c_i = 1$ для некоторых $c_i \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $a_i = \pm 1$ для $i = 1, \dots, k-1$. Так как λ_k является внутренним нормальным вектором к F_k, заключаем $a_1 = \dots = a_k = -1$.

Теперь предположим, что $\mathrm{rk}(\lambda_1, \dots, \lambda_k) = k$. Применяя соответствующее $GL_n(\mathbb{Z})$-преобразование к P^n, получаем $\lambda_k = ce_k$ для некоторого $c \in \mathbb{Z}$. Из условия дельзантовости следует, что $cd = -1$ для некоторого $d \in \mathbb{Z}$. Поэтому $c = \pm 1$. Применяя соответствующее $GL_n(\mathbb{Z})$-преобразование, приводим матрицу нормалей к искомому виду. □

Положим $n = k = 3$. Ясно, что $\{1, \dots, m\} = \{1, 2, 3\} \sqcup S_1 \sqcup S_2$, где S_1, S_2 таковы, что $\bigcup_{i \in S_1} F_i$ и $\bigcup_{j \in S_2} F_j$ имеют пустое пересечение.

Рассмотрим случай $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Предложение 2.6.2. *Существует индекс $i \in \{1, 2\}$ такой, что для любых $p \in S_i$, $k = 1, 2, 3$ выполнено*

$$\lambda_p^k \geqslant 0.$$

Доказательство. Обозначим точку пересечения плоскостей, содержащих грани F_1, F_2, F_3, через $x \in \mathbb{R}^3$. Обозначим наименьший по включению выпуклый полиэдральный конус с вершиной в точке x, который содержит многогранник P^3, через $\sigma \subset \mathbb{R}^3$. Выберем индексы $\{i, j\} = \{1, 2\}$ так, что $\bigcup_{p \in S_i} F_p$ ближе к x. (Более точно, существует разделяющая плоскость $\{H = c\}$ такая, что $\bigcup_{p \in S_i} F_p \cap \{H < c\} = \bigcup_{p \in S_i} F_p$ и $\bigcup_{p \in S_j} F_p \cap \{H > c\} = \varnothing$.) Для любой грани F_p, $p \in S_i$, соответствующая плоскость пересекает внутренности всех 3 граней σ. Следовательно, нормальный вектор λ_p принадлежит конусу порожденному $(1,0,0)^T, (0,1,0)^T, (0,0,1)^T$, и имеет только неотрицательные координаты. □

Обозначим множества индексов $S_i, S_j, j \neq i$ из Предложения 2.6.2 через $S_+, S_\pm$, соответственно. (Таким образом, значения i, j не определены.) Характеристическая матрица M^6 имеет вид $(Id_3|A|B)$, где $A = (a_i^j)$, $a_i^j \geqslant 0$, $B = (b_i^j)$. По определению, M^6 является эквивариантной связной суммой квазиторических многообразий $M_+^6, M_\pm^6$, где $M_+^6 = M(P_+, (Id_3|A))$, $M_\pm^6 = M(P_\pm, (Id_3|B))$, и $P_+, P_\pm \subset \mathbb{R}^3$ суть соответствующие (комбинаторные) выпуклые многогранники. Обозначим через $F_{+,i}$ грани P_+, соответствующие $F_i \in P^3$, где $i \in \{1,2,3\} \cup S_+$. Определим $l_i := \sum_{j \in S_+} a_i^j x_j \in H^2(M^6; \mathbb{Z})$, $i = 1, 2, 3$.

Предложение 2.6.3. *Квадратичные формы Q_{l_i} нетривиальны и положительно полуопределенны для $i = 1, 2, 3$.*

Доказательство приведено ниже. Рассмотрим характеристическое подмногообразие $M_{+,i}^4$ в M_+^6, соответствующее грани $F_{+,i}$, $i = 1, 2, 3$. Соответствующий многогранник моментов и характеристическая матрица обозначены через $P_{+,i}^4, \Lambda_{+,i}$. Матрица $\Lambda_{+,i}$ получается из Λ выбрасыванием i-ой строки и взятием столбцов с индексом j таким, что $F_i \cap F_j \neq \varnothing$ (см. [63]).

Предложение 2.6.4. [63, Lemma 7.3.19] *Для любого неособого проективного торического многообразия X и любой неподвижной точки $x \in X$ выполнено $\sigma(x) = 1$.*

Лемма 2.6.5. *Для любого индекса $i = 1, 2, 3$ и вершины $v \in P^4_{+,i}$, выполнено*

$$\sigma(v) = \begin{cases} -1, & v \text{ если } v \text{ инцидентно и отлично от } F_{+,1} \cap F_{+,2} \cap F_{+,3}, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Доказательство. Без ограничения общности положим $i = 1$. Из Предложения 2.6.4 и Формулы (1.9) следует, что для любой вершины $v \in P^4_{+,1}$, не инцидентной $F_{+,1} \cap F_{+,2} \cap F_{+,3}$, выполнено $\sigma(v) = 1$. Характеристические векторы ребер $F_1 \cap F_2,\ F_1 \cap F_3$ направлены наружу многогранника, в то время, как характеристические векторы всех прочих ребер $P_{+,1}$ направлены внутрь. Отсюда находятся знаки остальных 3 вершин $P_{+,1}$. □

Лемма 2.6.6. *Пусть $i = 1, 2, 3$. Тогда существуют вектор $\nu \in \mathbb{R}^2$ (в общем положении) и вершина $w \in P^4_{+,i}$, где w не инцидентна и отлична от $F_{+,1} \cap F_{+,2} \cap F_{+,3}$, такие, что для любой вершины $v \in P^4_{+,i}$, выполнено $ind_\nu(v) = 0$, если $v = F_{+,1} \cap F_{+,2} \cap F_{+,3}$ или $v = w$, и $ind_\nu(v) = 1$, иначе.*

Предложение 2.6.7. *Для любого $i = 1, 2, 3$, $M^4_{+,i}$ не является ПНР-многообразием.*

Доказательство. Из Лемм 2.6.5, 2.6.6 и Предложения 1.4.7 следует, что $\sigma(M^4_{+,i}) = (m-2)(-1)^1 \cdot 1 + (-1)^0 \cdot 1 + (-1)^0 \cdot (-1) = 2 - m = -\dim H^2(M^4_{+,i}; \mathbb{R})$. Остается воспользоваться Теоремой 1.6.2. □

Следствие 2.6.8. *Многообразия M^6_+, M^6 не являются ПНР-многообразиями.*

Рассмотрим другой случай: $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Вернемся к прежним обозначениям $S_1, S_2 \subset \{1, \dots, m\}$. Определим $l := \sum_{i \in S_1} \lambda^i_3 x_i$, $l' := \sum_{i \in S_2} \lambda^i_3 x_i$.

Предложение 2.6.9. *Квадратичная форма Q_l имеет ранг 1. В частности, форма Q_l является полуопределенной.*

Доказательство. Из Теоремы 1.4.8 следует, что выполнено $l = -l'$ в кольце когомологий M^6, и $\dim\langle x_3, \dots, x_m\rangle = m - 3$. Следовательно, это единственное линейное соотношение между элементами $x_3, \dots, x_m$ в $H^2(M^6; \mathbb{R})$, с точностью до умножения на скаляр. Для любого $x \in H^2(M^6; \mathbb{Z})$ выполнено

$Q_l(x) = -Q_{l'}(x)$. Заметим, что для любых $i \in S_1, j \in S_2$ выполнено $F_i \cap F_j = \varnothing$, то есть $x_i x_j = 0$ (см. Теорему 1.4.8). Теперь получаем, что для любого $x \in \mathbb{R}\langle x_i | i \in S_1 \cup S_2 \rangle$ выполнено $Q_l(x) = 0$. Из двойственности Пуанкаре следует, что $Q_l \not\equiv 0$. Заключаем, что форма Q_l имеет ранг 1, принимая ненулевое значение на x_3. □

Лемма 2.6.10. *Пусть $n, k > 2$. Предположим, что P^n имеет гиперграни $F_1, \ldots, F_k$, соответствующие минимальной не-грани нерв-комплекса P^n. Тогда для любого $i = 1, \ldots, k$ нерв-комплекс многогранника F_i имеет минимальную не-грань $F_1 \cap F_i, \ldots, \widehat{F_i \cap F_i}, \ldots, F_k \cap F_i$ мощности $k-1$.*

Доказательство. Вытекает из того, что пересечение любых двух гиперграней простого выпуклого n-многогранника ($n > 2$) либо пусто, либо имеет коразмерность 2. □

Лемма 2.6.11. [22] *Простой выпуклый многогранник P^3 флаговый, если и только если P^3 не имеет 3-поясов и $P \neq \Delta^3$.*

Согласно Предложению 1.6.8, многогранник моментов P^n квазиторического ПНР-многообразия M^{2n} не имеет треугольных граней. Поэтому из результатов данного Подраздела непосредственно вытекает

Теорема 2.6.12. *Рассмотрим неособое проективное торическое многообразие M^{2n} комплексной размерности $n \geqslant 3$. Предположим, что M^{2n} является ПНР-многообразием. Тогда нерв-комплекс многогранника моментов P^n не имеет минимальных не-граней мощности n. В частности, многогранник моментов P^3 торического ПНР-многообразия размерности 6 флаговый.*

Пример 2.6.13. Для торических многообразий M_1^6, M_2^6 из Примера 2.5.8 индексы квадратичных форм $Q_{x_4+x_5+x_6}, Q_{2x_4+2x_5+x_6}, Q_{2x_4+x_5+x_6}$ равны $(2,0),(2,0),(2,0)$ и $(1,0),(2,1),(2,1)$, соответственно.

2.7 ПНР-критерий в терминах многочлена объема мультивеера квазиторического многообразия

Связь между формой старшей степени в критерии ПНР (Теорема 2.4.4) и многочленом объема мультивеера квазиторического многообразия (см. Замечание 2.4.5) продолжается на формы меньших степеней. Приведем вспомогательные результаты. Напомним, что для любого однородного многочлена $V(x_1,\ldots,x_m)\in\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_m]$ степени $d\geqslant 0$ алгебра

$$A(V):=DOp_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m)/\operatorname{Ann}V$$

является алгеброй Пуанкаре виртуального ранга d (см. [15]), где $DOp_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m)$ есть алгебра дифференциальных операторов от m переменных с постоянными вещественными коэффициентами и $\operatorname{Ann}V$ есть аннигилятор многочлена V. Естественная градуировка на алгебре $DOp_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m)$ индуцирует градуировку на $A(V)=A_*(V)=\bigoplus_{i=0}^{d}A_i(V)$.

Определение 2.7.1. Многочленом объема мультивеера $\mathcal{F}$ квазиторического многообразия M^{2n} называется многочлен

$$V_{\mathcal{F}}(c_1,\ldots,c_m):=\frac{1}{n!}\langle(c_1x_1+\cdots+c_mx_m)^n,[M^{2n}]\rangle,\ c_i\in\mathbb{R},\ i=1,\ldots,m$$

(см. [26]).

Следующая теорема для гладкого проективного торического многообразия M^{2n} и соответствующего веера $\mathcal{F}$ была сформулирована Пухликовым и Хованским (в терминах кольца Чжоу, [8]) и доказана Тимориным [15]. Для квазиторического многообразия M^{2n} она вытекает из результата Айзенберга-Масуды [26] о двойственной алгебре мультивеера, в частном случае симплициального разбиения сферы.

Теорема 2.7.2. [26, Theorem 8.2] *Пусть M^{2n} есть квазиторическое многообразие с мультивеером $\mathcal{F}\subset\mathbb{R}^n$ с m одномерными конусами. Тогда имеет место изоморфизм алгебр*

$$H^*(M^{2n};\mathbb{R})\simeq A_*(V_{\mathcal{F}}),\ a\mapsto D_a.$$

Каноническое спаривание $\langle a,[M^{2n}]\rangle,\ a\in H^{2n}(M^{2n};\mathbb{R})$, совпадает с результатом дифференцирования $D_aV_{\mathcal{F}}$.

Имеет место

Лемма 2.7.3. [26, p.19] *Рассмотрим однородный многочлен $V(x_1,\ldots,x_m)\in\mathbb{R}[x_1,\ldots,x_m]$ степени $d\geqslant 0$. Пусть $c_1,\ldots,c_m\in\mathbb{R}$. Тогда* *для линейного дифференциального оператора* $D_{\underline{c}} := c_1\partial_{x_1} + \cdots + c_m\partial_{x_m}$, $\underline{c} = (c_1, \ldots, c_m)$, *имеет место формула:*

$$D_{\underline{c}}^d V = d! V(c_1, \ldots, c_m).$$

Определим для любого $k = 1, \ldots, n$ и любого $\alpha \in A_{d-k}(V_{\mathcal{F}})$ однородную форму $Q_\alpha : A_1(V_{\mathcal{F}}) \to \mathbb{R}$ степени k по формуле $Q_\alpha(x) := \alpha x^k V_{\mathcal{F}}$. Теорема 2.7.2 и Лемма 2.7.3 позволяют переформулировать критерий ПНР (Теорема 2.4.4) следующим образом.

Теорема 2.7.4. *Пусть M^{2n} есть квазиторическое многообразие с мульти-веером $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^n$, имеющим m одномерных конусов. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *M^{2n} есть ПНР-многообразие;*

(ii) *Выполнено*

$$\mathbb{R}_{\geqslant 0}\langle x^k \mid x \in A_1(V_{\mathcal{F}})\rangle = A_k(V_{\mathcal{F}}),$$

где k пробегает $1, \ldots, n$;

(iii) *Однородная k-форма Q_α допустима для любых $k = 1, \ldots, n$ и $\alpha \in A_{n-k}(V_{\mathcal{F}})$;*

(iv) *Для любого однородного дифференциального оператора $D \in DOp_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m)$, $\deg D = k$, если многочлен $DV_{\mathcal{F}}$ ненулевой, то $DV_{\mathcal{F}}$ принимает значения различных знаков, где k пробегает $0, \ldots, n-1$.*

Отметим, что имеет место аналог эквивалентностей из Теоремы 2.7.4 для *произвольного* однородного многочлена $V(x_1, \ldots, x_m)$ степени d с вещественными коэффициентами.

Теорема 2.7.5. *Пусть $V(x_1, \ldots, x_m)$ есть однородный многочлен степени d с вещественными коэффициентами. Тогда следующие условия равносильны:*

(i) *Выполнено*

$$\mathbb{R}_{\geqslant 0}\langle x^k \mid x \in A_1(V)\rangle = A_k(V),$$

где k пробегает $1, \ldots, d$;

(ii) *Однородная форма $Q_\alpha : A_1(V) \to \mathbb{R}$ допустима для любых $k = 1, \ldots, d$ и $\alpha \in A_{d-k}(V)$;*

(iii) *Для однородного дифференциального оператора $D \in DOp_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m)$, $\deg D = k$, если многочлен DV ненулевой, то DV принимает значения различных знаков, где k пробегает $0, \ldots, d-1$.*

Доказательство. Равносильность $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ вытекает из Леммы 2.7.3. Равносильность $(i) \Leftrightarrow (ii)$ нетрудно показать, используя рассуждение из доказательства Теоремы 2.4.4, см. Раздел 2.4. Для этого необходимо воспользоваться двумя фактами об алгебре $A(V)$. Во-первых, $A(V)$ является алгеброй Пуанкаре (см. [15]). Во-вторых, для любого $k = 1, \dots, d$ выполнено $A_k(V) = \mathbb{R}\langle x^k |\, x \in A_1(V)\rangle$. Последнее есть следствие легко проверяемой формулы $(-1)^r r! y_1 \cdots y_r = \sum_{I \subseteq \{1,\dots,r\}} (-1)^{|I|} (\sum_{i \in I} y_i)^r$, имеющей место в алгебре многочленов $\mathbb{R}[y_1, \dots, y_r]$, $r \in \mathbb{N}$. □

Следующее наблюдение принадлежит А. Айзенбергу.

Следствие 2.7.6. *Условие (iii) Теоремы 2.7.5 (и условие (iv) Теоремы 2.7.4) алгоритмически проверяемо.*

Доказательство. Легко видеть, что данное условие записывается в виде замкнутой арифметической формулы первого порядка на коэффициенты $d_{i_1,\dots,i_m}$ дифференциальных операторов:

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}\ \forall \{d_{i_1,\dots,i_m} | i_1 + \dots + i_m = k\} :$$
$$\sum_{i_1+\dots+i_m=k} d_{i_1,\dots,i_m} \partial_1^{i_1} \cdots \partial_m^{i_m} V_{\mathfrak{F}} \not\equiv 0 \Rightarrow$$
$$\left(\neg \sum_{i_1+\dots+i_m=k} d_{i_1,\dots,i_m} \partial_1^{i_1} \cdots \partial_m^{i_m} V_{\mathfrak{F}} \geqslant 0\right) \wedge \left(\neg \sum_{i_1+\dots+i_m=k} d_{i_1,\dots,i_m} \partial_1^{i_1} \cdots \partial_m^{i_m} V_{\mathfrak{F}} \leqslant 0\right).$$

Следовательно, требуемый результат вытекает из алгоритма Тарского [70]. □

2.8 Гипотезы

Возникает аналог 17-ой проблемы Гильберта для конечномерных алгебр (см. [18, Глава 7]).

Задача. *Описать явно семейство однородных многочленов $V(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_m]$ степени $d \geqslant 2$, $m \geqslant 1$, для которых выполнены условия Теоремы 2.7.5.*

Предложение 2.5.1 и Теорема 2.6.12 намекают на возможную связь между комбинаторным типом многогранника моментов неособого проективного торического многообразия и соответствующего ПНР-свойства.

Гипотеза 2.8.1. *Пусть X, Y суть неособые проективные торические многообразия комплексной размерности n с комбинаторно эквивалентными многогранниками моментов. Тогда X является ПНР-многообразием, если и только если Y является ПНР-многообразием.*

Предложение 2.5.2 показывает, что аналог Гипотезы 2.8.1 в категории квазиторических многообразий неверен, вообще говоря, в любой размерности больше 2. В самом деле, достаточно рассмотреть декартово произведение любого многообразия M^4 из Предложения 2.5.2 с $(\mathbb{C}P^1)^{n-2}$. Полученное многообразие является торическим не-ПНР многообразием над кубом I^n. Однако $(\mathbb{C}P^1)^n$ также является квазиторическим многообразием над I^n, и обладает ПНР-свойством. Теорема 2.6.12 также позволяет выдвинуть следующую гипотезу:

Гипотеза 2.8.2. *Пусть M^{2n} есть неособое проективное торическое многообразие комплексной размерности n. Тогда M^{2n} является ПНР-многообразием если и только если многогранник моментов P^n для M^{2n} флаговый.*

Естественно предположить, что условие (iii) Теоремы 2.7.5 равносильно условию только на знакопеременность ненулевых *квадратичных* форм $DV_{\mathcal{F}}$, $D \in DOp_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m)$. Эта равносильность вытекает из следующей Гипотезы о неотрицательных однородных многочленах с вещественными коэффициентами.

Гипотеза 2.8.3. *Рассмотрим однородный многочлен $V(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_m]$ степени $d \geqslant 3$, $m \geqslant 1$. Пусть многочлен V неотрицателен, т.е. для любых $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$, $V(x_1, \ldots, x_m) \geqslant 0$. Тогда существует однородный дифференциальный оператор $D \in DOp_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m)$ с постоянными вещественными коэффициентами, $0 < \deg D < d$, такой, что многочлен DV ненулевой и неотрицательный.*

Выпуклый n-многогранник $P^n \subset \mathbb{R}^n$ флаговый тогда и только тогда, когда любая минимальная не-грань соответствующего нерв-комплекса имеет мощность 2. Следовательно, для изучения приведенных выше Гипотез в вещественной размерности 8 необходимо найти пример дельзантова 4-многогранника только с гипергранями без 3-поясов и треугольников, имеющего минимальную не-грань мощности 3. Автору неизвестны соответствующие примеры. Также закономерно предположить, что возможные доказательства приведенных Гипотез будут опираться на существование комплексной/алгебраической структуры на данном торическом многообразии. В связи с этим упомянем хорошо известные различные результаты о K-теории торического многообразия Пухликова и Хованского [7], Морелли [52] и Клячко.

Глава 3

Конструкции многообразий с требуемыми свойствами

3.1 B_k-модификации комплексных многообразий

Определение 3.1.1 ($B_k(X)$-модификации)**.** Для произвольного гладкого комплексного многообразия X комплексной размерности n рассмотрим раздутие $\pi\colon Bl_xX \to X$ в точке $x \in X$. Зафиксируем число $0 \leqslant k \leqslant n-2$ и выберем в исключительном дивизоре $E = \pi^{-1}(x) \simeq \mathbb{C}P^{n-1}$ подмногообразие $Z^k \simeq \mathbb{C}P^k$ с нормальным расслоением $\nu(Z \subset E) \simeq (n-k-1)\overline{\eta_k}$. Другими словами, многообразие $Z \subset E$ это k-мерное проективное подпространство в E. По определению *B_k-модификацией* $B_k(X)$ многообразия X называется раздутие $Bl_Z(Bl_xX)$ многообразия Bl_xX вдоль Z.

Замечание 3.1.2. Обозначение $B_k(X)$ не вполне строго, поскольку модификация $B_k(X)$, вообще говоря, зависит от выбора точки $x \in X$ и подмногообразия $Z \subset E$. В дальнейшем нас будет интересовать лишь класс кобордизма $[B_k(X)]$, который, согласно Предложению 1.9.1, от этого произвола не зависит. Поэтому мы не будем дополнительно указывать какие именно выбраны точка $x \in X$ и подмногообразие $Z \subset E$.

Отметим, что нормальное расслоение $\nu(Z \subset Bl_xX)$ изоморфно $\eta_k \oplus (n-k-1)\overline{\eta_k}$, где $\dim_{\mathbb{C}} X = n$, $\dim_{\mathbb{C}} Z = k$. Поэтому, согласно Предложению 1.9.1, имеет место следующая формула для разности классов кобордизма $[B_k(X)]$ и $[Bl_xX]$:

$$[B_k(X)] - [Bl_xX] = -[\mathbb{P}(\eta_k \oplus (n-k-1)\overline{\eta_k} \oplus \underline{\mathbb{C}})]. \tag{3.1}$$

Стабильно комплексное многообразие

$$D_{k,n} := \mathbb{P}(\eta_k \oplus (n-k-1)\overline{\eta_k} \oplus \underline{\overline{\mathbb{C}}})$$

является проективизацией $(n-k+1)$-мерного расслоения $\eta_k \oplus (n-k-1)\overline{\eta_k} \oplus \underline{\mathbb{C}}$ над $Z \simeq \mathbb{C}P^k$ с нестандартной стабильной комплексной структурой, см. Определение 1.7.2. Из определения $D_{k,n}$ следует, что

$$s_n(B_k(X)) - s_n(Bl_x X) = -s_n(D_{k,n})$$

В разделе 4.1 мы вычислим числа Милнора $s_n(D_{k,n})$.

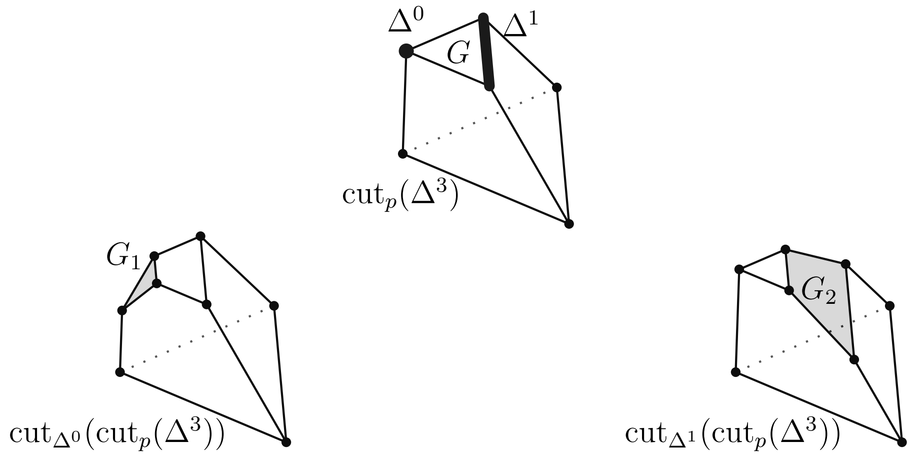
3.2 Эквивариантные B_k-модификации торических многообразий

В предыдущем разделе мы определили семейство модификаций произвольных гладких комплексных многообразий $B_k(X) \to X$, $k = 0, \dots, n-2$. Теперь мы определим эквивариантные аналоги операций $B_k(X)$ в категории гладких проективных торических многообразий.

Предположим, что исходное многообразие $X = X_P$ проективное, торическое, соответствующее простому дельзантову многограннику P. Хорошо известно (см. [63]), что раздутие X вдоль инвариатного подмногообразия $Z \subset X$ доставляет эквивариантную модификацию $Bl_Z X \to X$ (см. Раздел 1.11). Напомним, что для гладкого проективного торического многообразия X, соответствующего дельзантову многограннику P, имеется взаимно однозначное соответствие между инвариантными подмногообразиями X размерности k и k-мерными гранями многогранника P (см. Раздел 1.3).

Модификация $B_k(X)$ определяется выбором точки $x \in X$ и k-мерного проективного подпространства $Z = \mathbb{C}P^k$ в исключительном дивизоре $E \subset Bl_x X$. При этом многообразие $Bl_x X$ отвечает многограннику $\mathrm{cut}_p P$, получающемуся из P операцией срезки вершины p, соответствующей неподвижной точке $x \in X$. Исключительный дивизор $E \subset Bl_x X$ является $(\mathbb{C}^*)^n$-инвариантным подмногообразием в $Bl_x X$. Аналогично случаю раздутия неподвижной точки, если мы зафиксируем $(\mathbb{C}^*)^n$-инвариантное подмногообразие $Z \simeq \mathbb{C}P^k$,

Рис. 3.1: Многогранники, соответствующие модификациям $Bl_x\mathbb{C}P^3$ (сверху), $B_0(\mathbb{C}P^3)$ (слева) и $B_1(\mathbb{C}P^3)$ (справа).



$Z \subset E \subset Bl_x(X)$, то раздутие $B_k(X) = Bl_Z(Bl_x X) \to X$ является эквивариантной модификацией, и многообразие $B_k(X)$ является торическим с соответствующим многогранником $P'_k = \mathrm{cut}_{\Delta^k}(\mathrm{cut}_p P)$. Другими словами, многогранник P'_k получается из P путем двух последовательных срезок: вершины p и одной из вновь образовавшихся k-мерных симплициальных граней Δ^k.

Итак, имеет место следующее:

Предложение 3.2.1. *В категории торических многообразий при выборе инвариантных точки x и подмногообразия Z многообразие $B_k(X) = Bl_Z(Bl_x X)$ является торическим, а модификация $B_k(X) \to X$ эквивариантной.*

3.3 B_k-модификации и операции над многогранниками

В этом разделе мы чуть более подробно изучим связь эквивариантных B_k-модификаций с операциями над дельзантовыми многогранниками (в контексте торических многообразий).

Напомним, что, если проективное торическое многообразие X отвечает многограннику P размерности n, то торическое многообразие $B_k(X)$ отвечает многограннику $\mathrm{cut}_{\Delta^k}(\mathrm{cut}_p P)$, полученному из P последовательной срезкой вершины p и k-мерной симплициальной грани Δ^k. Конкретный выбор вершины и грани соответствует выбору раздуваемой точки $x \in X$ и подмногообразия $Z \subset E \subset Bl_x(X)$. Оказывается, что при специальном выборе подмногообразий $Z_1 = \mathbb{C}P^k, Z_2 = \mathbb{C}P^{n-k-2}$ модификации $B_k(X^n)$ и $B_{n-k-2}(X^n)$ торического многообразия X^n разбиваются на пары торических многообразий с комбинаторно эквивалентными многогранниками моментов.

Предложение 3.3.1. *Пусть после усечения вершины p простого n-мерного многогранника P образовался многогранник $\operatorname{cut}_p P$ с новой симплициальной гипергранью $G \subset \operatorname{cut}_p P$. Для любых двух дополнительных (непересекающихся) подсимплексов $\Delta_1 \simeq \Delta^k$ и $\Delta_2 \simeq \Delta^{n-k-2}$, лежащих в симплициальной грани G, многогранники $P_1 = \operatorname{cut}_{\Delta_1}(\operatorname{cut}_p P)$ и $P_2 = \operatorname{cut}_{\Delta_2}(\operatorname{cut}_p P)$ комбинаторно эквивалентны (см. Рисунок 3.1).*

Доказательство. Рассмотрим множества гиперграней многогранников P_1 и P_2

$$\mathcal{F}_1 = \{F | F \in P_1\}, \quad \mathcal{F}_2 = \{F | F \in P_2\}.$$

Введем множество $\mathcal{F} = \{F | F \in P\}$ гиперграней многогранника P. Обозначим гипергрань многогранника P_1, образующуюся в результате срезки грани S_1 через G_1. Аналогично определим гипергрань G_2 многогранника P_2. Тогда $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F} \cup \{G_1, G\}$ и $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F} \cup \{G_2, G\}$

Зададим теперь отображение $f\colon \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$:

$$\begin{cases} f(G) = G_2, \\ f(G_1) = G, \\ f(F) = F, \text{ если } F \neq G, G_1. \end{cases}$$

Докажем, что биекция f индуцирует комбинаторный изоморфизм многогранников P_1 и P_2, т. е. что гиперграни $F_{i_1}, \dots, F_{i_k}$ многогранника P_1 пересекаются тогда и только тогда, когда пересекаются гиперграни $f(F_{i_1}), \dots, f(F_{i_k})$ многогранника P_2. Поскольку многогранники P_1 и P_2 простые, последнее свойство достаточно проверять только для максимальных (n-кратных) пересечений $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n}$.

Пусть в вершине $p \in P$ сходятся гиперграни $H_1, \dots, H_n$. Из условия дополнительности симплексов Δ_1 и Δ_2 следует, что (после подходящей перенумерации гиперграней H_i) $\Delta_1 = G \cap H_1 \cap \dots H_{n-k-1}$, и $\Delta_2 = G \cap H_{n-k} \cap \dots \cap H_n$ в многограннике $\operatorname{cut}_p P$. Поскольку вне окрестностей граней G, G_1 и, соответственно, G, G_2 многогранники P_1 и P_2 одинаковы, f индуцирует комбинаторный изоморфизм $\mathcal{F}_1 \backslash \{G, G_1\} \to \mathcal{F}_2 \backslash \{G, G_2\}$. Остается рассмотреть n-кратные пересечения $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n}$, включающие одну из гиперграней G, G_1 в P_1 (соответственно G, G_2 в P_2)

Выпишем все непустые пересечения $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n}$ включающие одну из граней G или G_1 многогранника P_1:

$$G \cap H_1 \cap \dots \cap \widehat{H_j} \cap \dots \cap H_n, \text{ где } 1 \leqslant j < n-k,$$
$$G_1 \cap H_1 \cap \dots \cap \widehat{H_j} \cap \dots \cap H_n, \text{ где } n-k \leqslant j \leqslant n,$$
$$G \cap G_1 \cap H_1 \cap \dots \cap \widehat{H_{j_1}} \cap \dots \cap \widehat{H_{j_2}} \cap \dots \cap H_n, \text{ где } 1 \leqslant j_1 < n-k \leqslant j_2 \leqslant n.$$

Аналогично все непустые пересечения $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_n}$ включающие одну из граней G или G_2 многогранника P_2 имеют вид:

$$G_2 \cap H_1 \cap \dots \cap \widehat{H_j} \cap \dots \cap H_n, \text{ где } 1 \leqslant j < n-k,$$
$$G \cap H_1 \cap \dots \cap \widehat{H_j} \cap \dots \cap H_n, \text{ где } n-k \leqslant j \leqslant n,$$
$$G \cap G_2 \cap H_1 \cap \dots \cap \widehat{H_{j_1}} \cap \dots \cap \widehat{H_{j_2}} \cap \dots \cap H_n, \text{ где } 1 \leqslant j_1 < n-k \leqslant j_2 \leqslant n.$$

Из этих двух описаний и того факта, что отображение f тождественно сопоставляет все грани, за исключением G и G_1, вытекает, что отображение f задает комбинаторный изоморфизм между P_1 и P_2. $\square$

Замечание 3.3.2. Утверждение 3.3.1, вообще говоря, неверно без предположения о дополнительности подсимплексов Δ_1 и Δ_2 в G.

Следствие 3.3.3. *Для произвольного гладкого проективного торического многообразия X^n зафиксируем неподвижную точку $x \in X$ и раздутие $\pi\colon Bl_x X \to X$. Выберем в исключительном дивизоре непересекающиеся, инвариантные относительно действия тора $(\mathbb{C}^*)^n$ подпространства $\mathbb{C}P^k \simeq Z_1 \subset E \subset Bl_x X$ и $\mathbb{C}P^{n-k-2} \simeq Z_2 \subset E \subset Bl_x X$. Тогда раздутия $B_k(X) = Bl_{Z_1}(Bl_x X)$ и $B_{n-k-2}(X) = Bl_{Z_2}(Bl_x X)$ являются торическими многообразиями с комбинаторно эквивалентными многогранниками моментов.*

Пример 3.3.4. Рассмотрим дельзантов трехмерный симплекс $P = \Delta \subset \mathbb{R}^3$. Зафиксируем одну из вершин p симплекса P. Для многогранника P определены операции, соответствующие модификациям B_0 и B_1 соответствующего торического многообразия $\mathbb{C}P^3$: срезка вершины и срезка ребра новой грани многогранника $\mathrm{cut}_p P$, соответственно. Грань срезки $\mathrm{cut}_p P$ является двумерным симплексом. Выберем произвольную вершину Δ^0 и не содержащее ее ребро Δ^1 в грани срезки многогранника $\mathrm{cut}_p\, P$. Легко непосредственно убедиться в комбинаторной эквивалентности многогранников $\mathrm{cut}_{\Delta^0}(\mathrm{cut}_p\, P)$, $\mathrm{cut}_{\Delta^1}(\mathrm{cut}_p\, P)$, см. Рисунок 3.1.

3.4 Расслоения ограниченных флагов

В этом Разделе мы изучаем локально тривиальное расслоение над любым гладким компактным стабильно комплексным многообразием X^{2n} со слоем, являющимся многообразием ограниченных флагов (см. [35], [63, §7.7], а также Подраздел 3.4.2). Расслоение ограниченных флагов является башней $\mathbb{C}P^1$-расслоений, начиная с X^{2n}. Мы показываем, что расслоение ограниченных флагов над ПНР-многообразием также является ПНР-многообразием. В случае базы, являющейся квазиторическим многообразием X, расслоение ограниченных флагов над X естественно наделяется структурой квазиторического многообразия. (Проективизируемые комплексные расслоения ранга 2 расщепляются в сумму одномерных.) В доказательствах следующих глав мы будем использовать только расслоения ограниченных флагов, тотальные пространства которых являются башнями Ботта (см. Подраздел 3.7). Тем не менее, формализм расслоений ограниченных флагов оказывается удобным для вычислений.

3.4.1 Определение и свойства

Пусть даны гладкое компактное стабильно комплексное многообразие X^{2n} и комплексные линейные расслоения $\xi_i \to X,\ i = 1, \ldots, k+1$, над ним.

Определение 3.4.1. Положим $BF(\xi_1) := X$. Обозначим линейное расслоение $\xi_1 \to X = BF(\xi_1)$ через ζ_1. Для $1 \leqslant i \leqslant k$, $BF(\xi_{i+1}, \ldots, \xi_1)$ есть по определению $\mathbb{C}P^1$-расслоение над $BF(\xi_i, \ldots, \xi_1)$. Именно:

$$BF(\xi_{i+1}, \ldots, \xi_1) = \mathbb{P}(\zeta_i \oplus \xi_{i+1}) \to BF(\xi_i, \ldots, \xi_1). \tag{3.2}$$

Тавтологическое линейное расслоение этого $\mathbb{C}P^1$-расслоения обозначим через $\zeta_{i+1} \to BF(\xi_{i+1}, \ldots, \xi_1)$.

Проективизация суммы Уитни комплексных линейных расслоений над гладким комплексным (алгебраическим, торическим, соотв.) многообразием имеет естественную комплексную (алгебраическую, торическую, соотв.) структуру. (См. Раздел 1.7.) Следовательно, расслоение ограниченных флагов $BF(\xi_{n+1}, \ldots, \xi_1)$ имеет естественную комплексную (алгебраическую, торическую, соотв.) структуру, в соответствующем предположении о базе X. Для естественной комплексной структуры на расслоении ограниченных флагов $BF(\xi_{n+1}, \ldots, \xi_1)$ над комплексным многообразием X имеет место тождество:

$$TBF(\xi_{k+1}, \ldots, \xi_1) \oplus \underline{\mathbb{C}}^k \simeq \bigoplus_{i=1}^{k} (\zeta_i \oplus \xi_{i+1})\overline{\zeta_{i+1}} \oplus TX. \tag{3.3}$$

Замечание 3.4.2. Стабильно комплексная структура расслоения ограниченных флагов $BF(\xi_{k+1}, \ldots, \xi_1)$, вообще говоря, зависит от порядка последовательности $\{\xi_{k+1}, \ldots, \xi_1\}$. (См. формулу (3.3).)

Обозначим через $\zeta_{k+1}^* \to BF(\xi_{k+1}, \ldots, \xi_1) = \mathbb{P}(\zeta_k \oplus \xi_{k+1}) \to BF(\xi_k, \ldots, \xi_1)$ векторное расслоение, слоем которого над точкой $l \subset (\zeta_k \oplus \xi_{k+1})_x$, где $x \in BF(\xi_k, \ldots, \xi_1)$, является комплексная прямая $l^\perp$, ортогональная l. (Расслоение $\zeta_k \oplus \xi_{k+1}$ наделяется послойно эрмитовой метрикой, т.к. является векторным расслоением над компактным стабильно комплексным многообразием.) Обозначим через $\zeta_i^* \to BF(\xi_{k+1}, \ldots, \xi_1)$ обратный образ раслоения $\zeta_i^* \to BF(\xi_i, \ldots, \xi_1)$ по отношению к композиции проекций (см. (3.2)) $BF(\xi_{k+1}, \ldots, \xi_1) \to BF(\xi_i, \ldots, \xi_1)$, $i = 1, \ldots, k+1$. Векторное расслоение $\zeta_i^* \to BF(\xi_{k+1}, \ldots, \xi_1)$ линейно и удовлетворяет тождествам (см. [54]):

$$\zeta_{i+1} \oplus \zeta_{i+1}^* \simeq \zeta_i \oplus \xi_{i+1}, \ \zeta_{i+1} \oplus \bigoplus_{j=1}^{i} \zeta_{j+1}^* \simeq \bigoplus_{j=1}^{i+1} \xi_j, \tag{3.4}$$

где $i = 1, \ldots, k$.

Из Леммы 2.1.7 и Формул (3.3), (3.4) индукцией по k легко проверяется

Предложение 3.4.3. *Пусть X есть ПНР-многообразие, и стабильно обратные к $\xi_i \to X$ расслоения полностью расщепимы при $i = 1, \ldots, k+1$. Тогда $BF(\xi_{k+1}, \ldots, \xi_1) \to X$ есть ПНР-многообразие.*

3.4.2 Башни Ботта и многообразия ограниченных флагов

Рассмотрим произвольную башню Ботта $X_n := \mathbb{P}(\xi_n \oplus \underline{\mathbb{C}}) \to X_{n-1}$, где $\xi_n \to X_{n-1}$ есть линейное расслоение, $X_0 = \{pt\}$ и $n \geqslant 0$. Башня Ботта X_n является гладким проективным комплексным торическим многообразием.

Предложение 3.4.4. *Башня Ботта X_n является ПНР-многообразием.*

Доказательство. Проведем индукцию по n. В случае $n = 0$ доказательство тривиально. Докажем шаг индукции. Стабильно обратное расслоение к $\xi \to X_{n-1}$ полностью расщепимо (это вытекает из Теоремы 2.1.8 (iv)). Остается воспользоваться Предложением 3.4.3. □

Пусть $X = pt$. Тогда $BF(\xi_{n+1}, \dots, \xi_1) = BF(\underline{\mathbb{C}}, \dots, \underline{\mathbb{C}})$. Данное многообразие называется *многообразием ограниченных флагов* и обозначается через BF_n. Многообразие BF_n является торическим многообразием комплексной размерности n. Обозначим векторные расслоения $\zeta_{i+1}, \zeta^*_{i+1} \to BF_n$ через $\beta_i, \beta^*_i,\ i = 0, \dots, n$, соответственно. Тождество (3.4) для BF_n принимает вид:

$$\beta_{i+1} \oplus \beta^*_{i+1} \simeq \beta_i \oplus \underline{\mathbb{C}};\ \beta_i \oplus \bigoplus_{j=1}^{i} \beta^*_j \simeq \underline{\mathbb{C}}^{i+1}, \tag{3.5}$$

где $i = 0, \dots, n$ (см. [54]).

Следствие 3.4.5. *BF_n есть ПНР-многообразие.*

Доказательство. Следует из Предложения 3.4.4. □

Пусть $e_0, \dots, e_n$ и $z_0, \dots, z_n$ есть двойственные базисы в $\mathbb{C}^{n+1}$ и $(\mathbb{C}^{n+1})^*$, соответственно. Введем обозначение $\mathbb{C}_i := \mathbb{C}\langle e_i \rangle,\ i = 0, \dots, n$, где $\mathbb{C}\langle e_i \rangle$ есть линейная оболочка вектора e_i. Тогда BF_n отождествляется с множеством последовательностей прямых $(l_0, \dots, l_n)$ в $\mathbb{C}^{n+1}$, где $l_0 := \mathbb{C}_0$, удовлетворяющих включениям

$$l_{i+1} \subset l_i \oplus \mathbb{C}_{i+1},\ i = 0, \dots, n-1. \tag{3.6}$$

Из (3.6) получаем включение

$$l_i \subset \mathbb{C}\langle e_0, \dots, e_i \rangle$$

для $i = 0, \dots, n$. Следовательно, BF_n является подмногообразием в $\prod_{i=1}^n \mathbb{C}P^i$, заданным (алгебраическими) условиями (3.6). Пусть $[z_{i,0} : \dots : z_{i,i}]$ суть однородные координаты i-ого множителя в произведении $\prod_{i=1}^n \mathbb{C}P^i$. Тогде условия (3.6) равносильны условию

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix} z_{i+1,0} & z_{i+1,1} & \dots & z_{i+1,i} \\ z_{i,0} & z_{i,1} & \dots & z_{i,i} \end{pmatrix} = 1,$$

где $i = 1, \dots, n-1$.

Обозначим через f_n отображение $f_n:\ BF_n \to \mathbb{C}P^n$, $(l_0, \dots, l_n) \mapsto l_n$. Отображение f_n есть ограничение морфизма проекции $\prod_{i=1}^n \mathbb{C}P^i \to \mathbb{C}P^n$ на BF_n. Поэтому $f_n^*\eta_n = \beta_n$. Можно показать, что f_n является композицией последовательных раздутий собственных прообразов проективных подпространств $\{z_0 = \dots = z_{n-1} = 0\} \subset \dots \subset \{z_0 = z_1 = 0\} \subset \mathbb{C}P^n$, заданных соответствующими уравнениями в однородных координатах $[z_0 : \dots : z_n]$ пространства $\mathbb{C}P^n$.

Замечание 3.4.6. Приведенное выше описание многообразия ограниченных флагов отличается от стандартного (см. [35], [63, p. 292]), которое обозначим через BF_n'. Однако данные многообразия изоморфны. Сперва нужно заменить базис $\{e_0, \dots, e_n\}$ пространства $\mathbb{C}^{n+1}$ на базис $\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$, где $v_i = e_{n+1-i}$, $i = 0, \dots, n$. Включение (3.6) примет вид $l_{i+1} \subset l_i \oplus \mathbb{C}\langle v_{n-i}\rangle$ для $i = 0, \dots, n$. Затем нужно изменить порядок прямых: $L_i = l_{n-i+1}$, так что $L_{n-i} \subset L_{n-i+1} \oplus \mathbb{C}\langle v_{n-i}\rangle$ для $i = 0, \dots, n$. Чтобы получить BF_n', остается сделать замену $i = j - 1$.

3.5 Операции на квазиторических многообразиях, сохраняющие свойство ПНР и аддитивные в кобордизмах

Для определения квазиторического многообразия $S(2n)$, участвующего в бриллиантовой сумме, см. Раздел 1.10.

Лемма 3.5.1. *$S(2n)$ является ПНР-многообразием.*

Доказательство. Вытекает из Леммы 1.10.5. □

Предложение 3.5.2. *Пусть M_1, M_2 суть квазиторические $2n$-мерные ПНР-многообразия. Тогда $\overline{M_1}, M_1 \diamondsuit M_2$ являются квазиторическими ПНР-многообразиями и представляют классы комплексного кобордизма $-[M_1], [M_1] + [M_2]$, соответственно.*

Доказательство. В работе [54, Lemma 3.5] показано, что связная сумма двух ПКР-многообразий (ПНР-многообразий, соотв.) является ПКР-многообразием (ПНР-многообразием, соотв.). Также отметим, что засчет выбора другой омниориентации стабильно комплексная структура на произвольном омниориентированном квазиторическом многообразии M изменяется на противоположную. Поэтому существует квазиторическое многообразие $\overline{M}$, представляющее класс комплексного кобордизма $-[M]$. Остается воспользоваться Следствием 1.10.6. $\square$

Предложение 3.5.3. *Рассмотрим эквивариантную связную сумму $M^{2n} = M_1^{2n} \widetilde{\#} M_2^{2n}$ квазиторических многообразий M_1^{2n}, M_2^{2n} с ориентацией, совместимой с ориентациями на многообразиях M_1^{2n}, M_2^{2n}.*

a) Пусть n нечетно. Тогда M^{2n} есть ПНР-многообразие в том и только том случае, если M_i^{2n} суть ПНР-многообразия, $i = 1, 2$;

b) Пусть n четно. Тогда M^{2n} есть ПНР-многообразие в том и только том случае, если однородные формы Q_a, $a \in H^{2(n-2k)}(M_i^{2n}; \mathbb{Z})$ степени $0 < k < [\frac{n}{2}]$ допустимы для M_i, $i = 1, 2$, и (прямая) сумма форм $Q + Q'$ допустима, где $Q:\ H^2(M_1^{2n}; \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$, $Q':\ H^2(M_2^{2n}; \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ суть однородные формы старшей степени, соответствующие единицам $1_{M_1^{2n}} \in H^0(M_1^{2n}; \mathbb{Z})$, $1_{M_2^{2n}} \in H^0(M_2^{2n}; \mathbb{Z})$ в смысле Предложения 2.4.6, соответственно.

Доказательство. Вытекает из Следствия 2.4.9 и Предложения 1.8.2. $\square$

Индексы форм пересечения квазиторических многообразий $\mathbb{C}P^2, \overline{\mathbb{C}P^2}$ равны $(1,0), (0,1)$, соответственно. Знаки всех неподвижных точек $\mathbb{C}P^2$ ($\overline{\mathbb{C}P^2}$, соотв.) равны 1 (-1, соотв.). Рассмотрим квазиторическое многообразие $B^4 := \mathbb{C}P^2 \widetilde{\#} \overline{\mathbb{C}P^2}$. Каноническая ориентация на омниориентированном квазиторическом многообразии B^4 совместима с каноническими ориентациями на слагаемых. Определение многообразия B^4 не зависит от выбора неподвижных точек. Проверим при помощи Теоремы 2.1.3 следующее

Предложение 3.5.4. *B^4 является ПНР-многообразием.*

Доказательство. Достаточно доказать, что для любого комплексного линейного векторного расслоения $\xi \to B^4$ стабильно обратное расслоение к $\xi \oplus \overline{\xi}$ полностью расщепимо. По Предложению 1.8.2,

$$H^*(B^4; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x, y]/(x^3, y^3, xy, x^2 + y^2).$$

Обозначим $t := c_1(\xi)$. Имеем $t^2 = ax^2$ для порождающей $x^2 \in H^4(B^4; \mathbb{Z})$ и $a \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим обратные образы $\eta_2, \eta_2' \to B^4$ тавтологических расслоений относительно канонических отображений стягивания второго и первого слагаемого в $B^4 = \mathbb{C}P^2 \widetilde{\#} \overline{\mathbb{C}P^2}$, соответственно. Выполнено $c_1^2(\overline{\eta_2}) = x^2$, $c_1^2(\overline{\eta_2'}) = -x^2$. Рассмотрим три случая.

1) $a = 0$. Тогда $\xi \oplus \overline{\xi}$ тривиально, и доказывать нечего.

2) $a < 0$. Имеем

$$ch([\xi \oplus \overline{\xi} \oplus |a|(\eta_2' \oplus \overline{\eta_2'})]) = 2 + 2|a|.$$

3) $a > 0$. Тогда выполнено

$$ch([\xi \oplus \overline{\xi} \oplus a(\eta_2 \oplus \overline{\eta_2})]) = 2 + 2a.$$

Требуемое теперь вытекает из Теоремы 1.5.5. $\square$

Многообразие B^4 имеет ровно по 2 неподвижных точки каждого знака. Выберем неподвижные точки $x_+, x_- \in B^4$ так, что $\sigma(x_+) = 1, \sigma(x_-) = -1$.

Предложение 3.5.5. *Для неподвижной точки $x \in M^4$ произвольного квазиторического многообразия M^4 эквивариантная связная сумма $M^4 \widetilde{\#}_{x,x_+} B^4$ ($M^4 \widetilde{\#}_{x,x_-} B^4$, соотв.) есть ПНР-многообразие, если $\sigma(x) = -1$ ($\sigma(x) = 1$, соотв.). Каноническая ориентация на полученном омниориентированном квазиторическом многообразии совместима с ориентациями на M^4, B^4.*

3.6 Раздутия вещественной коразмерности 4 и ПНР-многообразия

Раздутие неособого проективного торического многообразия X в его инвариантном подмногообразии доставляет неособое проективное торическое многообразие (см. Раздел 1.9). Имеет место следующее

Предложение 3.6.1. *Пусть X есть неособое проективное комплексное ПНР-многообразие комплексной размерности n. Пусть $Z \subset X$ есть трансверсальное пересечение $Z = D_1 \cap D_2$ двух гладких гиперповерхностей $D_1, D_2 \subset X$. Тогда $Bl_Z X$ есть ПНР-многообразие.*

Доказательство. По определению (см. [69, §6.2.1]), $Bl_Z X$ есть гиперповерхность в пространстве проективизации $\mathbb{P}(L(D_1) \oplus L(D_2)) \to X$, где $L(D_1), L(D_2) \to X$ суть линейные расслоения, отвечающие гиперповерхностям $D_1, D_2 \subset X$, соответственно. Обозначим соответствующий морфизм вложения $Bl_Z X \to \mathbb{P}(L(D_1) \oplus L(D_2))$ через ι. Пусть $\nu \to Bl_Z X$ есть нормальное (линейное) расслоение данного вложения. Пространство $\mathbb{P}(L(D_1) \oplus L(D_2))$ является расслоением ограниченных флагов над ПНР-многообразием X. По Предложению 3.4.3, $\mathbb{P}(L(D_1) \oplus L(D_2))$ является ПНР-многообразием. Это означает, что существует полностью расщепимое комплексное векторное расслоение $\xi = \bigoplus_{i=1}^{k} \xi_i \to \mathbb{P}(L(D_1) \oplus L(D_2))$, $\mathrm{rk}_{\mathbb{C}}\, \xi_i = 1$, т.ч. $T\mathbb{P}(L(D_1) \oplus L(D_2)) \oplus \xi \simeq \underline{\mathbb{C}}^{n+k+1}$. Остается ограничить последнее расслоение на $Bl_Z X$: $TBl_Z X \oplus \big(\nu \oplus \iota^* \xi\big) \simeq \underline{\mathbb{C}}^{n+k+1}$. □

Предложение 3.6.2. *Рассмотрим характеристическое подмногообразие Z квазиторического многообразия M коразмерности 4. Пусть M является ПНР-многообразием. Тогда эквивариантное раздутие $Bl_Z M^{2n}$ есть ПНР-многообразие.*

Доказательство. Рассмотрим комплексные линейные расслоения $\widetilde{\theta}, \widetilde{\theta}_1, \ldots, \widetilde{\theta}_m \to Bl_Z M^{2n}$, отвечающие гиперграни срезки и всем прочим гиперграням многогранника $\mathrm{cut}_G\, P$ в том же порядке, как и в P, соответственно. По Теореме 2.1.8 (ii), достаточно проверить, что любое из линейных расслоений $\widetilde{\theta}, \widetilde{\theta}_1, \ldots, \widetilde{\theta}_m$ имеет полностью расщепимое стабильно обратное. Для любого $i = 1, \ldots, m$, имеем $\widetilde{\theta}_i = \pi^* \theta_i$, где $\pi :\ Bl_Z M \to M$ есть морфизм раздутия вдоль Z. Следовательно, расслоение $\widetilde{\theta}_i$ имеет полностью расщепимое стабильно обратное для любого $i = 1, \ldots, m$ (см. Лемму 2.1.7).

Остается разобраться со стабильно обратным расслоением к $\widetilde{\theta}$. Обозначим $y_i := c_1(\widetilde{\theta}_i)$, $y := c_1(\widetilde{\theta})$. Рассмотрим грань $G = F_{i_1} \cap F_{i_2} \subset P^n$. Осуществляя необходимую замену координат, без ограничения общности можно считать, что $\lambda_{i_1} = (1, 0, 0 \ldots, 0)^T, \lambda_{i_2} = (0, 1, 0 \ldots, 0)^T$. Имеем соотношения

$y_{i_1}y_{i_2} = 0,\ y_{i_1} = -y + a,\ y_{i_2} = -y + b$ в кольце когомологий $H^*(Bl_Z M;\mathbb{Z})$, где $a = -\sum_{i=3}^m \lambda^i_{i_1} y_i,\ b = -\sum_{i=3}^m \lambda^i_{i_2} y_i$. В самом деле, первое вытекает из пустого пересечения гиперграней F_{i_1}, F_{i_2} многогранника $\widetilde{P}$, а остальные есть следствия линейных соотношений в $H^*(Bl_Z M;\mathbb{Z})$ (см. Теорему 1.4.8). Рассмотрим комплексные линейные расслоения $\alpha, \beta \to Bl_Z M$ такие, что $c_1(\alpha) = a, c_1(\beta) = b$. Заметим, что

$$c(\widetilde{\theta}(\alpha \oplus \beta)) = (1 + y + a)(1 + y + b) = 1 + 2y + a + b = c(\widetilde{\theta}^2\alpha\beta),$$

следовательно, $\widetilde{\theta}(\alpha\oplus\beta) \simeq \widetilde{\theta}^2\alpha\beta\oplus\underline{\mathbb{C}}$. Заключаем, что $\widetilde{\theta}(\alpha\oplus\beta)\oplus\overline{\widetilde{\theta}(\alpha \oplus \beta)} \simeq \underline{\mathbb{C}}^4$, т.е. стабильно обратное расслоение к $\widetilde{\theta}\alpha$ полностью расщепимо. По Лемме 2.1.7, расслоения α, β имеют полностью расщепимые стабильно обратные. Применяя Лемму 2.1.7 к тензорному произведению $\widetilde{\theta}\alpha$ и $\overline{\alpha}$, приходим к требуемому. □

В работе [4] В.М. Бухштабер и В. Володин доказали теорему о реализации любого флагового нестоэдра в $\mathbb{R}^n$ (т.е. флагового многогранника, представимого в виде суммы Минковского симплексов, где суммирование ведется по производящему множеству).

Теорема 3.6.3. [4, Теорема 6.6, Следствие 7.6] *Каждый n-мерный флаговый нестоэдр получается из любого дельзантова куба I^n последовательной срезкой граней коразмерности 2. Полученный многогранник является дельзантовым.*

Используя Теорему 3.6.3 и Предложения 3.6.1, 3.4.4, получаем следующее утверждение.

Теорема 3.6.4. *Для любого комбинаторного n-мерного флагового нестоэдра P^n существует гладкое проективное торическое ПНР-многообразие M^{2n} с многогранником моментов класса P^n.*

3.7 Многообразия $X_{i,j},\ M_{i,j},\ N_{i,j}$

Определение 3.7.1. Для $1 \leqslant i \leqslant j$ положим $X_{i,j} = BF(\overline{\beta}_i, \overline{\beta}^*_i, \ldots, \overline{\beta}^*_2, \overline{\beta}^*_1, \underline{\mathbb{C}}, \ldots, \underline{\mathbb{C}}) \to BF_i$ ($j - i$ копий тривиальных одномерных комплексных расслоений), $X_{0,j} = BF_j$.

Для $i > 0$ обозначим через $Z_{i,j}$ инвариантное подмногообразие $X_{i,j}$ комплексной коразмерности 2, заданное условиями на тавтологические расслоения: $\beta_i = \beta_{i-1}, \zeta_{j+1} = \zeta_j$.

Предложение 3.7.2. *Для $i > 0$ имеем*
$Z_{i,j} = BF(\underline{\mathbb{C}}, \overline{\beta}^*_{i-1}, \dots, \overline{\beta}^*_2, \overline{\beta}^*_1, \underline{\mathbb{C}}, \dots, \underline{\mathbb{C}}) \to BF_{i-1}$ *($j - i$ копий тривиальных одномерных комплексных расслоений). Нормальное расслоение вложения выше $Z_{i,j} \subset X_{i,j}$ равно $\overline{\zeta_j \beta_{i-1}} \oplus \overline{\beta_{i-1}} \to Z_{i,j}$.*

Определение 3.7.3. Положим $M_{i,j} := Bl_{Z_{i,j}} X_{i,j}$. Для четного n положим
$N_{0,n} := \overline{M_{1,n-1}},\ N_{1,n-1} = M_{1,n-1}$. Для нечетного n положим
$N_{0,n} := \overline{M_{1,n-1}} \diamondsuit BF_n \diamondsuit BF_n$, $N_{1,n-1} = M_{1,n-1} \diamondsuit BF_n$. Для $1 < i \leqslant j$ положим
$N_{i,j} := M_{i,j}$.

Предложение 3.7.4. *Многообразия $X_{i,j}$, $M_{i,j}$, $N_{i,j}$ являются квазиторическими ПКР- и ПНР-многообразиями.*

Доказательство. Многообразие BF_i является полностью нормально расщепимым по Следствию 3.4.5. Стабильно обратные комплексные расслоения к $\overline{\beta}_k, \overline{\beta^*_k},\ k = 1, \dots, i$, полностью расщепимы по формуле (3.5). Следовательно, многообразие $X_{i,j}$ полностью нормально расщепимо по Предложению 3.4.3. Тогда $M_{i,j}$ полностью нормально расщепимо по Предложению 3.6.1. Утверждение о многообразии $N_{i,j}$ теперь вытекает из свойства бриллиантовой суммы, см. Предложение 3.5.2. □

Предложение 3.7.5. *Имеет место формула $s_n([N_{0,n}]) = n + 1$. При $0 < i \leqslant j,\ n = i + j$, выполнено*

$$s_n([N_{i,j}]) = (-1)^{n+1} \binom{n}{j} - \sum_{k=j}^{n-1} \binom{k}{j}.$$

Доказательство. Напомним, что число Милнора линейно относительно бриллиантовой суммы квазиторических многообразий и обращения ориентации многообразия. Теперь требуемые формулы вытекают из нахождения чисел Милнора многообразия BF_n (Следствие 4.3.2) и многообразия $M_{i,j}$ (Предложение 4.3.5). □

Глава 4

Результаты о числах Милнора стабильно комплексных многообразий

4.1 Изменение числа Милнора при B_k-модификации

Сначала мы выводим формулу для чисел Милнора $s_n(D_{k,n})$ многообразий $D_{k,n} = \mathbb{P}(\eta_k \oplus (n-k-1)\overline{\eta_k} \oplus \overline{\mathbb{C}})$. Рассмотрим естественную проекцию $p\colon D_{k,n} \to \mathbb{C}P^k$ и обозначим образующую $H^2(\mathbb{C}P^k;\mathbb{Z})$, равную первому классу Черна $c_1(\overline{\eta_k})$, за u. Определим также класс $v = c_1(\overline{\zeta}) \in H^2(D_{k,n};\mathbb{Z})$, где ζ — тавтологическое расслоение вдоль слоев проекции p. Согласно изоморфизму (1.12), когомологии $H^*(D_{k,n};\mathbb{Z})$ мультипликативно порождены классами u и v:

$$H^*(D_{k,n};\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}[u,v]/(u^{k+1}, v(v+u)^{n-k-1}(v-u)).$$

Полный класс Черна нестандартной стабильно комплексной структуры (1.15) на многообразии $D_{k,n} = \mathbb{P}(\eta_k \oplus (n-k-1)\overline{\eta_k} \oplus \overline{\mathbb{C}})$ равен

$$c(TD_{k,n}) = (1+u+v)^{n-k-1}(1-u+v)(1-v)(1+u)^{k+1},$$

где последний сомножитель отвечает $c(T\mathbb{C}P^k)$. Поскольку $u^n = 0$, из этой формулы вытекает, что

$$s_n(D_{k,n}) = \langle (n-k-1)(u+v)^n + (-u+v)^n + (-v)^n, [D_{k,n}] \rangle. \tag{4.1}$$

Чтобы явно вычислить $s_n(D_{k,n})$ нам потребуются следующие леммы.

Лемма 4.1.1. *Для любых $n, 0 \leqslant k \leqslant n-2$ имеет место*

$$\langle v^n, [D_{k,n}]\rangle = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i 2^{k-i}\binom{n-1}{i}.$$

Доказательство. Согласно формуле (1.13), имеем

$$\langle v^n, [D_{k,n}]\rangle = \langle c^{-1}(\xi), [\mathbb{C}P^k]\rangle.$$

Полный класс Сегре расслоения $\xi = \eta_k \oplus (n-k-1)\overline{\eta_k} \oplus \mathbb{C}$ над $\mathbb{C}P^k$ равен $c^{-1}(\xi) = (1+u)^{-(n-k-1)}(1-u)^{-1}$, поэтому

$$\begin{aligned}
&\langle c^{-1}(\xi), [\mathbb{C}P^k]\rangle = \\
&= \langle (1+u)^{-(n-k-1)}(1-u)^{-1}, [\mathbb{C}P^k]\rangle = \langle (1+u)^{-(n-k)}\left(1-\frac{2u}{1+u}\right)^{-1}, [\mathbb{C}P^k]\rangle = \\
&= \langle \sum_{i=0}^{\infty} 2^i u^i (1+u)^{-(n-k+i)}, [\mathbb{C}P^k]\rangle = \sum_{i=0}^{k} 2^i (-1)^{k-i}\binom{n-1}{k-i},
\end{aligned}$$

где в последнем равенстве мы воспользовались тем, что коэффициент при члене u^{k-i} в ряде $(1+u)^{-(n-k+i)}$ равен $(-1)^{k-i}\binom{n-1}{k-i}$. □

Лемма 4.1.2. *Для любых $n, 0 \leqslant k \leqslant n-2$ выполнено*

$$\langle (u+v)^n, [D_{k,n}]\rangle = 2^{k+1}-1.$$

Доказательство. Снова применим формулу (1.13) и подставим выражение для класса Сегре $c^{-1}(\xi) = (1+u)^{-(n-k-1)}(1-u)^{-1}$:

$$\begin{aligned}
\langle (u+v)^n, [D_{k,n}]\rangle &= \langle \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}u^i v^{n-i}, [D_{k,n}]\rangle = \langle \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}u^i c^{-1}(\xi), [\mathbb{C}P^k]\rangle = \\
&= \langle (1+u)^n c^{-1}(\xi), [\mathbb{C}P^k]\rangle = \langle (1+u)^{k+1}(1+u+u^2+\cdots), [\mathbb{C}P^k]\rangle = \\
&= \langle \sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}u^k, [\mathbb{C}P^k]\rangle = 2^{k+1}-1.
\end{aligned}$$

□

Лемма 4.1.3. *Для любых $n, 0 \leqslant k \leqslant n-2$ выполнено*

$$\langle (-u+v)^n, [D_{k,n}]\rangle = \sum_{i=0}^{k}(-2)^i\binom{n-1}{i}.$$

Доказательство. Аналогично двум предыдущим леммам имеем:

$$\langle(-u+v)^n,[D_{k,n}]\rangle = \langle\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}u^iv^{n-i},[D_{k,n}]\rangle =$$

$$= \langle\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}u^ic^{-1}(\xi),[\mathbb{C}P^k]\rangle = \langle(1-u)^{n-1}(1+u)^{-(n-k-1)},[\mathbb{C}P^k]\rangle =$$

$$= \langle((1+u)-2u)^{n-1}(1+u)^{-(n-k-1)},[\mathbb{C}P^k]\rangle =$$

$$= \langle\sum_{i=0}^{n-1}(-2)^i\binom{n-1}{i}u^i(1+u)^{n-1-i}(1+u)^{-(n-k-1)},[\mathbb{C}P^k]\rangle =$$

$$= \sum_{i=0}^{k}(-2)^i\binom{n-1}{i}.$$

□

Собирая вместе результаты Лемм 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3, и подставляя их в формулу (4.1), мы получаем следующее предложение:

Предложение 4.1.4. *Число Милнора многообразия $D_{k,n}$ есть*

$$s_n(D_{k,n}) = (n-k-1)(2^{k+1}-1) + \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\Big(2^i+(-1)^n2^{k-i}\Big)\binom{n-1}{i}. \quad (4.2)$$

Пример 4.1.5. В частном случае $k=0$ мы получаем стандартное утверждение об изменении числа Милнора n-мерного комплексного многообразия при раздутии в точке, см. формулу (1.20):

$$s_n(Bl_xX) - s_n(X) = -s_n(D_{0,n}) = -(n+(-1)^n), \quad (4.3)$$

Приведем также значения чисел $s_n(D_{k,n})$ для $k=1$ и $k=n-2$:

$$s_n(D_{1,n}) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ четно,} \\ 2(n-3), & \text{если } n \text{ нечетно;} \end{cases}$$

$$s_n(D_{n-2,n}) = \begin{cases} 2^n-1, & \text{если } n \text{ четно,} \\ 0, & \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Следствие 4.1.6. *Для произвольного компактного комплексного многообразия X^n изменение числа Милнора при двукратном раздутии*

$B_k(X) = Bl_{Z^k}(Bl_x X)$ равно:

$$\begin{gathered}s_{k,n} = s_n(B_k(X)) - s_n(X) = \\ = \big(s_n(B_k(X)) - s_n(Bl_x X)\big) + \big(s_n(Bl_x X) - s_n(X)\big) = -s_n(D_{k,n}) - (n + (-1)^n) = \\ = -\left((n-k-1)(2^{k+1}-1) + \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\left(2^i + (-1)^n 2^{k-i}\right)\binom{n-1}{i} + n + (-1)^n\right),\end{gathered} \tag{4.4}$$

где $Z^k \simeq \mathbb{C}P^k \subset E$ — проективное подпространство в исключительном дивизоре раздутия $Bl_x X \to X$.

4.2 Число Милнора расслоения ограниченных флагов

Рассмотрим расслоение ограниченных флагов $BF(\xi_{k+1}, \ldots, \xi_1) \to X$. Обозначим $x_i := c_1(\xi_i) \in H^2(X; \mathbb{Z})$.

Предложение 4.2.1.

$$\begin{gathered}s_{n+k}(BF(\xi_{k+1}, \ldots, \xi_1)) = \\ = \big(1 + (-1)^{n+k-1}\big)\langle(1 + x_{k+1})^{n+k-1}(1 + x_k)^{-1} \cdots (1 + x_1)^{-1}, [X]\rangle.\end{gathered}$$

Доказательство. Положим $X_{n+i} := BF(\xi_{i+1}, \ldots, \xi_1), i = 0 \ldots, k$. В этих обозначениях по формуле (3.3) имеем

$$TX_{n+k} \oplus \underline{\mathbb{C}} \simeq (\zeta_k \oplus \xi_{k+1})\overline{\zeta_{k+1}} \oplus TX_{n+k-1}.$$

Пусть $y_i := c_1(\overline{\zeta_i})$. По определению,

$$s_{n+k}(X_{n+k}) = \langle(y_{k+1} + x_{k+1})^{n+k} + (y_{k+1} - y_k)^{n+k}, X_{n+k}\rangle. \tag{4.5}$$

Вычислим слагаемые в выражении выше.

$$\begin{gathered}\langle(y_{k+1} + x_{k+1})^{n+k}, X_{n+k}\rangle = \langle(1 + x_{k+1})^{n+k-1}(1 - y_k)^{-1}, X_{n+k-1}\rangle = \\ = \langle(1 + x_{k+1})^{n+k-1}(1 + x_k)^{-1}(1 - y_{k-1})^{-1}, X_{n+k-2}\rangle = \cdots = \\ = \langle(1 + x_{k+1})^{n+k-1}(1 + x_k)^{-1} \cdots (1 + x_3)^{-1}(1 - y_2)^{-1}, X_{n+1}\rangle = \\ = \langle(1 + x_{k+1})^{n+k-1}(1 + x_k)^{-1} \cdots (1 + x_2)^{-1}(1 + x_1)^{-1}, X^n\rangle.\end{gathered} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}\langle (y_{k+1}-y_k)^{n+k}, X_{n+k}\rangle &= \langle (1-y_k)^{n+k-1}(1+x_{k+1})^{-1}, X_{n+k-1}\rangle = \\ &= \langle \sum_{i=0}^{n+k-1}\binom{n+k-1}{i}(-y_k^i)(-x_{k+1})^{n+k-1-i}, X_{n+k-1}\rangle = \\ &= (-1)^{n+k-1}\langle (1+x_{k+1})^{n+k-1}(1+x_k)^{-1}(1-y_k)^{-1}, X_{n+k-1}\rangle = \cdots = \\ &= (-1)^{n+k-1}\langle (1+x_{k+1})^{n+k-1}(1+x_k)^{-1}\cdots(1+x_2)^{-1}(1+x_1)^{-1}, X^n\rangle. \quad (4.7)\end{aligned}$$

Подстановка тождеств (4.6),(4.7) в (4.5) приводит к требуемой формуле. □

4.3 Числа Милнора торических многообразий $X_{i,j}$ и $M_{i,j}$

Данный раздел посвящен нахождению числа Милнора s_n торических многообразий $X_{i,j}$ и их эквивариантных раздутий $M_{i,j}$, определенных в Подразделе 3.7.

Кольцо когомологий BF_i легко находится по теореме Лере-Хирша:

Предложение 4.3.1. (См. [63, Theorem 7.8.2]). Имеется изоморфизм градуированных колец:

$$H^*(BF_i;\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}[t_1,\dots,t_i]/(t_a^2 - t_a t_{a-1}|\ a=1,\dots,i),$$

где $t_0 := 0$.

Фундаментальный класс BF_i двойственнен по Пуанкаре элементу $t_i^i = t_i\cdots t_1 \in H^*(BF_i;\mathbb{Z})$. В кольце $H^*(BF_i;\mathbb{Z})$ имеется тождество

$$(1+t_i)\prod_{a=1}^{i}(1-t_a+t_{a-1}) = 1. \tag{4.8}$$

Число Милнора многообразия $X_{i,j}$, определенного в Подразделе 3.7, находится при помощи Предложения 4.2.1.

Предложение 4.3.2. $s_{i+j}(X_{i,j}) = (1+(-1)^{i+j+1})\binom{i+j}{i}$.

Доказательство. Случай четного $i+j$ тривиален. Предположим, что $i+j$ нечетно. Тогда

$$s_{i+j}(X_{i,j}) = 2\langle (1+t_i)^{i+j}\big((1+t_i)\prod_{a=1}^{i}(1-t_a+t_{a-1})\big)^{-1}, BF_i\rangle \overset{(4.8)}{=}$$

$$= 2\langle (1+t_i)^{i+j}, BF_i\rangle = 2\binom{i+j}{i}.$$

□

Следствие 4.3.3.
$$s_n(BF_n) = 1 + (-1)^{n+1}. \tag{4.9}$$

Положим $Z_{i+j-2} := Z_{i,j}$ и обозначим "этаж" комплексной размерности k данной башни Ботта через Z_k. По определению, $Z_{i-1} = BF_{i-1}$ при $i > 0$. Для $i > 0$ положим $Y_{i,j} := \mathbb{P}(\overline{\zeta_j \beta_{i-1}} \oplus \overline{\beta_{i-1}} \oplus \overline{\mathbb{C}}) \to Z_{i,j}$.

Предложение 4.3.4.

$$s_{i+j}(Y_{i,j}) = \begin{cases} \sum_{k=j}^{i+j} \binom{k}{j}, & \textit{для } i \geqslant 2; \\ j + 1 + (-1)^{j+1}, & \textit{для } i = 1. \end{cases}$$

Доказательство. Положим $y_k := c_1(\overline{\zeta_k})$ для $\zeta_k \to Z_{i,j}$, и пусть $y = c_1(\overline{\zeta})$ для тавтологического линейного расслоения ζ над $Y_{i,j}$ ($Y_{i,j}$ является проективным расслоением над $Z_{i,j}$). Соответствующее касательное расслоение удовлетворяет тождеству:

$$TY_{i,j} \oplus \underline{\mathbb{C}} \cong \overline{\zeta\zeta_j\beta_{i-1}} \oplus \overline{\zeta\beta_{i-1}} \oplus \zeta.$$

Следовательно,

$$s_{i+j}(Y_{i,j}) = \langle (y + x_{i-1} + y_j)^{i+j} + (y + x_{i-1})^{i+j} + (-y)^{i+j}, Y_{i,j} \rangle.$$

Пусть $i > 1$. Проведем вычисления:

$$\langle (y + x_{i-1} + y_j)^{i+j}, Y_{i,j} \rangle = \langle (1 + x_{i-1} + y_j)^{i+j-1} (1 + x_{i-1})^{-1}, Z_{i+j-2} \rangle =$$
$$= \langle \sum_{k=0}^{i+j-1} \binom{i+j-1}{k} (1 + x_{i-1})^{k-1} y_j^{i+j-1-k}, Z_{i+j-2} \rangle =$$
$$= \langle \sum_{k=1}^{i+j-1} \binom{i+j-1}{k} x_{i-1}^{k-1} y_j^{i+j-1-k}, Z_{i+j-2} \rangle =$$
$$= \langle (\sum_{k=1}^{i+j-1} \binom{i+j-1}{k} x_{i-1}^{k-1}) (1 - x_{i-1} + x_{i-2})^{-1} \cdots (1 - x_1)^{-1}, BF_{i-1} \rangle \overset{(4.8)}{=}$$
$$= \langle (\sum_{k=1}^{i+j-1} \binom{i+j-1}{k} x_{i-1}^{k-1}) (1 + x_{i-1}), BF_{i-1} \rangle =$$
$$= \binom{i+j-1}{i} + \binom{i+j-1}{i-1} = \binom{i+j}{i}.$$

$$\langle (y+x_{i-1})^{i+j}, Y_{i,j}\rangle = \langle (1+x_{i-1})^{i+j-2}(1+y_j(1+x_{i-1})^{-1})^{-1}, Z_{i+j-2}\rangle =$$
$$= \langle \sum_{k=0}^{i+j-2}(-1)^k(1+x_{i-1})^{i+j-2-k}y_j^k, Z_{i+j-2}\rangle = \langle \sum_{k=0}^{i+j-2}(-1)^k x_{i-1}^{i+j-2-k}y_j^k, Z_{i+j-2}\rangle =$$
$$= \langle (1+x_{i-1})^{-1}(1+y_{j-1})^{-1}, Z_{i+j-3}\rangle =$$
$$= \langle (1+x_{i-1})^{-1}(1-x_{i-1}+x_{i-2})^{-1}(1-y_{j-2})^{-1}, Z_{i+j-4}\rangle = \dots =$$
$$= \langle (1+x_{i-1})^{-1}(1-x_{i-1}+x_{i-2})^{-1}\cdots(1-x_1)^{-1}, BF_{i-1}\rangle \overset{(4.8)}{=}$$
$$= \langle (1+x_{i-1})^{-1}(1+x_{i-1}), BF_{i-1}\rangle = (-1)^{j-1}+(-1)^j = 0.$$

$$(-1)^{i+j}\langle y^{i+j}, Y_{i,j}\rangle = (-1)^{i+j}\langle (1+x_{i-1})^{-1}(1+x_{i-1}+y_j)^{-1}, Z_{i+j-2}\rangle =$$
$$= \langle \sum_{a=0}^{i+j-2} x_{i-1}^a(x_{i-1}+y_j)^{i+j-2-a}, Z_{i+j-2}\rangle =$$
$$= \langle \sum_{a=0}^{i+j-2}\sum_{b=0}^{i+j-2-a}\binom{i+j-2-a}{b}x_{i-1}^{a+b}y_j^{i+j-2-a-b}, Z_{i+j-2}\rangle =$$
$$= \dots = \langle \Big(\sum_{a=0}^{i+j-2} x_{i-1}^a(1+x_{i-1})^{i+j-2-a}\Big)(1-x_{i-1}+x_{i-2})^{-1}\cdots(1-x_1)^{-1}, BF_{i-1}\rangle \overset{(4.8)}{=}$$
$$= \langle \Big(\sum_{a=0}^{i+j-2} x_{i-1}^a(1+x_{i-1})^{i+j-2-a}\Big)(1+x_{i-1}), BF_{i-1}\rangle =$$
$$= \sum_{a=0}^{i-1}\binom{i+j-1-a}{i-1-a} = \sum_{a=0}^{i-1}\binom{j+a}{j}.$$

Утверждение доказано для $i>1$.

Пусть $i=1$. По Предложению 3.7.2, $Z_{1,j}=BF_{j-1}$. Следовательно,

$$s_{1+j}(Y_{1,j}) = \langle (y+y_j)^{1+j} + (1+(-1)^{j+1})y^{1+j}, Y_{1,j}\rangle =$$
$$= \langle (1+y_j)^j + (1+(-1)^{j+1})(1+y_j)^{-1}, BF_{j-1}\rangle = j+1+(-1)^{j+1}.$$

□

Наконец, найдем число Милнора многообразия $M_{i,j}$.

Предложение 4.3.5. *Пусть* $1 \leqslant i \leqslant j$; $n := i + j$. *Тогда имеет место формула:*

$$s_n(M_{i,j}) = \begin{cases} (-1)^{n+1}\binom{n}{j} - \sum_{k=j}^{n-1}\binom{k}{j}, \ \textit{для } i \geqslant 2; \\ (-1)^{n+1}(n-1) - 2, \ \textit{для } i = 1. \end{cases}$$

Доказательство. Вытекает из Предложений 1.9.1, 4.3.2, 4.3.4 и аддитивности числа Милнора. □

Глава 5

Торические представители мультипликативных образующих кольца Ω_U^*

5.1 Построение торических мультипликативных образующих кольца Ω_*^U

В этой части мы для любого четного натурального числа n, не представимого в виде $p^m - 1$ ни для какого простого числа p, построим торическое многообразие X комплексной размерности n с числом Милнора $s_n(X) = 1$. По Теореме 1.1.13, этого достаточно для доказательства существования торических полиномиальных образующих кольца Ω_*^U, поскольку во всех остальных размерностях торические многообразия с необходимыми числами Милнора были построены Вильфонгом, см. Теорему 1.12.14. Изложение следует работе [13].

Теорема 5.1.1. *Существуют гладкие проективные торические многообразия X^n, классы комплексного кобордизма которых являются мультипликативными образующими кольца Ω_*^U.*

Согласно Утверждению 3.2.1 в категории торических многообразий определены эквивариантные модификации $B_k(X) \to X$, $k = 0, \dots, n-2$. В Разделе 4.1 было введено обозначение

$$s_{k,n} := s_n(B_k(X)) - s_n(X).$$

Из соотношений (1.20) и (3.1) следует, что числа $s_{k,n}$ не зависят от выбора исходного многообразия X.

Определение 5.1.2. Целые числа $t_1, \ldots, t_l \in \mathbb{Z}$ называются *взаимно простыми в совокупности*, если порождаемый ими идеал в кольце целых чисел $\mathbb{Z}$ совпадает с $\mathbb{Z}$.

Для доказательства существования торических образующих кольца комплексных кобордизмов нам потребуется следующая ключевая техническая

Лемма 5.1.3. *Пусть четное натуральное число n не представимо в виде $p^m - 1$ ни для какого простого числа p. Тогда числа $s_{0,n}, s_{1,n}, \ldots, s_{n-2,n}$ взаимно просты в совокупности.*

Лемма 5.1.3 будет доказана в Разделе 5.2, а пока выведем из нее Теорему 5.1.1.

Для доказательства теоремы нам также понадобится несколько утверждений.

Лемма 5.1.4 ([13]). *Пусть целые числа $t_0, \ldots, t_l$ взаимно просты в совокупности. Пусть также $t_0 > 0$. Тогда существует такое натуральное число $N = N(t_0, \ldots, t_l)$, что для любого целого числа $x > N$ существует представление вида $x = \sum_{i=0}^{l} a_i t_i$ с целыми неотрицательными коэффициентами $a_i \geqslant 0$, $i = 0, \ldots, l$.*

Доказательство. В случае, когда все числа t_i неотрицательны это элементарное утверждение из теории чисел, лежащее в основе классической задачи Фробениуса, см., например, [31].

Если не все из чисел t_i положительны, сведем ситуацию к предыдущему случаю. Найдем сначала число $N = N(|t_0|, |t_1|, \ldots, |t_l|)$ удовлетворяющее условию предложения для набора абсолютных значений $\{|t_i|\}_{i=0}^{l}$. Мы утверждаем, что всякое число $x > N$ представимо в виде неотрицательной целочисленной комбинации чисел $\{t_i\}_{i=0}^{l}$. Действительно, пусть $x > N$. Тогда по определению N существует комбинация вида

$$x = \sum_{i=0}^{l} a_i \cdot |t_i| = \sum_{i=0}^{l} (a_i \cdot \operatorname{sgn}(t_i)) \cdot t_i$$

с неотрицательными целыми коэффициентами a_i, где $\operatorname{sgn}(t)$ — знак числа t. Напомним, что по условию $t_0 > 0$, то есть $\operatorname{sgn}(t_0) = 1$. Если для некоторого индекса j число t_j отрицательно, заменим a_0 на $a'_0 = a_0 - kt_j$, а $a_j \cdot \mathrm{sgn}(t_j)$ на $a'_j = a_j \cdot \mathrm{sgn}(t_j) + kt_0$, где $k \in \mathbb{N}$. Легко видеть, что сумма выше при указанной замене не меняется. Если число k достаточно велико ($k > a_j/t_0$), то коэффициенты при t_0 и t_j оказываются положительными. Проделывая эту операцию для всех отрицательных t_j, получаем требуемое представление. $\square$

Лемма 5.1.5 ([13]). *Зафиксируем $n > 2$. Для всякого натурального числа N существует гладкое проективное торическое многообразие X, $\dim_{\mathbb{C}} X = n$, с числом Милнора $s_n(X) > N$.*

Доказательство. Рассмотрим расслоение $\xi = \pi_1^*\eta_1 \oplus \pi_2^*\overline{\eta_1^a} \oplus \underline{\mathbb{C}}^{n-3}$ над $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$, где $\pi_1, \pi_2 \colon \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ проекции на первый и второй сомножители. Обозначим через $u_1 = \pi_1^* c_1(\overline{\eta_1})$ и $u_2 = \pi_2^* c_1(\overline{\eta_1})$ образующие $H^2(\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1; \mathbb{Z})$. Легко видеть, что $u_1^2 = u_2^2 = 0$, $\langle u_1 u_2, [\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1] \rangle = 1$. Полные классы Черна и Сегре расслоения ξ суть

$$c(\xi) = 1 - u_1 + au_2 - au_1u_2, \quad c^{-1}(\xi) = 1 + u_1 - au_2 - au_1u_2,$$

соответственно.

Рассмотрим проективизацию $\mathbb{P}(\xi)$. Аналогично Теореме 1.7.1 обозначим через $v = c_1(\overline{\zeta})$ первый класс Черна двойственного к послойному тавтологическому расслоению ζ над $\mathbb{P}(\xi)$ и будем рассматривать $H^*(\mathbb{P}(\xi))$ как $H^*(\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1)$-модуль. Из изоморфизма (1.14) следует, что

$$\begin{aligned} c(T\mathbb{P}(\xi)) = (1 - u_1 + v)(1 + au_2 + v)(1+v)^{n-3} c(T(\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1)) = \\ = (1 - u_1 + v)(1 + au_2 + v)(1+v)^{n-3}(1 + 2u_1)(1 + 2u_2). \end{aligned}$$

Следовательно, число Милнора многообразия $\mathbb{P}(\xi)$ есть

$$s_n(\mathbb{P}(\xi)) = \langle (v - u_1)^n + (au_2 + v)^n + (n-3)v^n + (2u_1)^n + (2u_2)^n, [\mathbb{P}(\xi)] \rangle.$$

Поскольку $u_1^2 = u_2^2 = 0$, после раскрытия скобок выражение для s_n можно переписать следующим образом:

$$s_n(\mathbb{P}(\xi)) = \langle (n-1)v^n - nu_1 v^{n-1} + nau_2 v^{n-1}, [\mathbb{P}(\xi)] \rangle.$$

Наконец, используя тождество (1.13), получаем

$$
\begin{aligned}
s_n(\mathbb{P}(\xi)) = \langle (n-1)v^n - nu_1v^{n-1} + nau_2v^{n-1}, [\mathbb{P}(\xi)]\rangle = \\
= \langle (n-1+n(au_2-u_1))\cdot c^{-1}(\xi), [\mathbb{C}P^1\times\mathbb{C}P^1]\rangle = \\
= \langle -(n-1)au_1u_2 - n(au_2-u_1)^2, [\mathbb{C}P^1\times\mathbb{C}P^1]\rangle = \\
= 2na-(n-1)a = (n+1)a.
\end{aligned}
$$

Итак, $s_n(\mathbb{P}(\xi)) = (n+1)a$. Поэтому при $a > N/(n+1)$ имеем $s_n(\mathbb{P}(\xi)) > N$. Поскольку тотальное пространство расслоения $\xi \to (\mathbb{C}P^1\times\mathbb{C}P^1)$ естественным образом допускает действие тора $(\mathbb{C}^*)^{n+1}$, многообразие $\mathbb{P}(\xi)$ также является торическим. $\square$

Доказательство Теоремы 5.1.1. Как было сказано в начале этого раздела, нам достаточно предъявить торические многообразия с числом Милнора 1 во всех четных комплексных размерностях n, где $n+1$ не является степенью простого числа. Зафиксируем произвольное такое n.

Согласно Лемме 5.1.3, числа $s_{0,n},\ldots,s_{n-2,n}$ взаимно просты в совокупности. Далее,

$$
\begin{aligned}
s_{0,n} = s_n(B_0(X)) - s_n(X) = s_n(Bl_{x'}Bl_xX) - s_n(X) = \\
= s_n(Bl_{x'}Bl_xX) - s_n(Bl_xX) + s_n(Bl_xX) - s_n(X) \overset{(4.3)}{=} -2(n+1) < 0.
\end{aligned}
$$

Применим к набору чисел $-s_{0,n},\ldots,-s_{n-2,n}$ Лемму 5.1.4 и найдем такое натуральное число $N = N(-s_{0,n},\ldots,-s_{n-2,n})$, что всякое число $m > N$ представимо в виде линейной комбинации чисел $-s_{0,n},\ldots,-s_{n-2,n}$ с некоторыми неотрицательными целыми коэффициентами $a_0,\ldots,a_{n-2}$.

Найдем теперь торическое многообразие X, $\dim_{\mathbb{C}} X = n$, с числом Милнора $s_n(X) > N+1$ и представим число $s_n(X)-1$ в виде целочисленной линейной комбинации

$$
s_n(X) - 1 = -\sum_{i=0}^{n-2} a_i\cdot s_{i,n},
$$

где все числа a_i неотрицательны.

Применим к многообразию X последовательно a_i раз B_i-модификацию для каждого $i=0,\ldots,n-2$. В результате мы получим n-мерное торическое многообразие Y, число Милнора которого выражается формулой:

$$s_n(Y) = s_n(X) + \sum_{i=0}^{n-2} a_i s_{i,n} = 1.$$

Что и требовалось. $\square$

Замечание 5.1.6. Если исходное торическое многообразие X в доказательстве теоремы было проективным, то проективным является и построенное нами многообразие Y. Многогранник отображения моментов многообразия $X = \mathbb{P}(\pi_1^*\eta_1 \oplus \pi_2^*\overline{\eta_1^a} \oplus \underline{\mathbb{C}}^{n-3}) \to \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ (из доказательства Леммы 5.1.5) комбинаторно есть произведение симплексов $P = \Delta^1 \times \Delta^1 \times \Delta^{n-2}$. Согласно описанию эквивариантных модификаций в Разделе 3.2, многогранник соответствующий многообразию Y получается из P последовательной срезкой вершин и симплициальных граней.

Пример 5.1.7. Построим явно гладкое проективное торическое многообразие в (комплексной) размерности 14, дословно следуя намеченной схеме. Это первая размерность, которая не покрывается Теоремой 1.12.14, то есть минимальное натуральное четное число n, что $n+1$ не является степенью простого числа. Набор чисел $s_{k,14}$ в порядке возрастания $k = 0, \ldots, 12$, составляют числа: -30, -15, -435, 2010, -10100, 31779, -79593, 140520, -190768, 174195, -120879, 36858, -16398. Ниже мы используем вычисления в программном пакете Singular.

Полугруппа S, порожденная модулями $|s_{k,14}|$ при всевозможных k, имеет минимальное множество порождающих $|s_{1,14}|$, $|s_{4,14}|$, $|s_{5,14}|$, $|s_{12,14}|$. Кондуктор данной полугруппы, т.е. наименьшее натуральное число N, начиная с которого все натуральные числа принадлежат данной полугруппе, равен 68363. Рассмотрим теперь торическое многообразие $X = \mathbb{P}(\pi_1^*\eta_1 \oplus \pi_2^*\overline{\eta_1^a} \oplus \underline{\mathbb{C}}^{n-3})$ из Замечания 5.1.6 для параметра $a = 4558$. Согласно тому же Замечанию, $s_{14}(X) = 68370$. Рассмотрим теперь разложение числа $s_{14}(X) - 1 = 68369$ по полугруппе $S : 68369 = 1766 \cdot 15 + 10100 + 31779$. Чтобы получить аналогичное представление $s_{14}(X) - 1$ по элементам полугруппы, порожденной $-s_{k,14}$ для всевозможных k, применим к полученному представлению операцию из Леммы 5.1.4: $68369 = (1766 + 31779d) \cdot 15 + 10100 + (-1 + 15d) \cdot (-31779)$, где d — произвольное целое число. Для неотрицательности коэффициентов разложения в полученном равенстве достаточно положить $d = 1$. Таким образом, искомое разложение есть $68369 = 33545 \cdot 15 + 10100 + 14 \cdot (-31779)$. Следовательно, чтобы получить искомое торическое многообразие с числом Милнора, равным 1, достаточно применить к X 33545 операций B_1, одну операцию B_4 и 14 операций B_5.

5.2 Взаимная простота изменений числа Милнора при модификациях B_k

В Разделе 4.1 мы вывели формулу (4.2) для чисел Милнора $s_n(D_{k,n})$, из которой следует формула (4.4) для изменения числа Милнора при модификации $B_k(X) \to X$.

В этом разделе мы доказываем Лемму 5.1.3 о взаимной простоте в совокупности набора чисел $s_{0,n}, s_{1,n}, \ldots, s_{n-2,n}$ для специальных значений n (т.е. где n четно и $n+1$ не является степенью простого числа). Для начала заметим, что $s_{1,n} = -(n+1)$ для четных n (см. Пример 4.1.5 и формулу (4.4)). Доказательство взаимной простоты чисел $s_{k,n}$ будет состоять в указании для каждого простого делителя p числа $n+1$ целочисленной линейной комбинации чисел $s_{k,n}$, не кратной p.

Предъявим семейство линейных комбинаций чисел $s_{k,n}$, выражающихся более компактной формулой по сравнению с (4.4). Нам понадобится вспомогательное вычисление.

Предложение 5.2.1. *Для любых $n \geqslant 2$ и $n-2 \geqslant k \geqslant 2$ положим $L_{k,n} = s_{k,n} - 3s_{k-1,n} + 2s_{k-2,n}$. Имеет место тождество:*

$$L_{k,n} = 2^k + 1 - (-2)^k \binom{n}{k} - (-1)^{n+k} \binom{n}{k}.$$

В частности, при четном n:

$$L_{k,n} = (2^k + 1)\Big(1 + (-1)^{k+1} \binom{n}{k}\Big).$$

Доказательство. Сперва вычислим $-s_{k,n} + 2s_{k-1,n}$ для $k = 1, \ldots, n-2$, пользуясь формулой (4.4):

$$
\begin{aligned}
-s_{k,n} + 2s_{k-1,n} &= \\
&= \Bigg((n-k+1)(2^{k+1}-1) + \sum_{i=0}^{k}(-1)^i(2^i + (-1)^n 2^{k-i})\binom{n-1}{i} + n + (-1)^n\Bigg) - \\
&- \Bigg((n-k)(2^{k+1}-2) + \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i(2^{i+1} + (-1)^n 2^{k-i})\binom{n-1}{i} + 2n + 2(-1)^n\Bigg) = \\
&= -k - 2^{k+1} + 1 - (-1)^n + \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i(2^i - 2^{i+1})\binom{n-1}{i} + \\
&\qquad + (-1)^k(2^k + (-1)^n)\binom{n-1}{k} = \\
&= -k - 2^{k+1} + 1 - (-1)^n + \sum_{i=0}^{k}(-2)^i\binom{n-1}{i} + \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{k}(-2)^i\binom{n-1}{i-1} + (-1)^{n+k}\binom{n-1}{k} = \\
&= -k - 2^{k+1} + 1 - (-1)^n + \sum_{i=0}^{k}(-2)^i\binom{n}{i} + (-1)^{n+k}\binom{n-1}{k},
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

где в последнем равенстве мы воспользовались биномиальным тождеством $\binom{n}{i} = \binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}$. Применяя формулу (5.1) дважды, мы находим:

$$
\begin{aligned}
s_{k,n} - 3s_{k-1,n} + 2s_{k-2,n} &= (-s_{k-1,n} + 2s_{k-2,n}) - (-s_{k,n} + 2s_{k-1,n}) = \\
&= \left(-k - 2^k + 2 - (-1)^n + \sum_{i=0}^{k-1}(-2)^i\binom{n}{i} + (-1)^{n+k-1}\binom{n-1}{k-1}\right) - \\
&- \left(-k - 2^{k+1} + 1 - (-1)^n + \sum_{i=0}^{k}(-2)^i\binom{n}{i} + (-1)^{n+k}\binom{n-1}{k}\right) = \\
&= 2^k + 1 - (-2)^k\binom{n}{k} - (-1)^{n+k}\binom{n}{k},
\end{aligned}
$$

где в последнем равенстве мы снова воспользовались биномиальным тождеством. $\square$

Теперь мы можем перейти непосредственно к доказательству Леммы 5.1.3.

Замечание 5.2.2. Ограничение на размерность n в условии Леммы 5.1.3 существенно. Если $n = p^m - 1$ для некоторого простого p, то, как следует из свойств чисел Милнора (т.е. аддитивности и зануления на разложимых элементах Ω^U_*, см. [19]) и Теоремы 1.1.13, все величины $s_{k,n}$ делятся на p. Следовательно числа $L_{k,n}$ тоже делятся на p. В качестве примера этих делимостей приведем значения $L_{k,n}$ для некоторых n и $k = 2, \dots, n-2$ (по возрастанию k):

$$n = 4 = 5 - 1: \ -25;$$

$$n = 6 = 7 - 1: \ -70, 189, -238;$$

$$n = 8 = 3^2 - 1: \ -135, 513, -1173, 1881, -1755.$$

Доказательство Леммы 5.1.3. Так как $s_{1,n} = -(n+1)$, нам достаточно доказать, что для любого простого делителя p числа $n+1$ существует линейная комбинация чисел $s_{0,n}, \dots, s_{n-2,n}$ не кратная p. Пользуясь Предложением 5.2.1, будем искать ее среди чисел $L_{k,n} = (1+2^k)(1+(-1)^{k+1}\binom{n}{k})$,
$k = 2, \dots, n-2$. Итак, нам достаточно найти такое число k, что оба сравнения

$$2^k \equiv -1 \pmod p \tag{5.2}$$

$$\binom{n}{k} \equiv (-1)^k \pmod p \tag{5.3}$$

не выполнены. Выпишем разложение $n = n_0 + n_1 p + \dots + n_r p^r$ числа n по основанию p, где $0 \leqslant n_i \leqslant (p-1)$, $n_r \neq 0$. Заметим, что $n_0 = p - 1$, так как число $n+1$ кратно p. Кроме того существует такой индекс $j \leqslant r$, что $n_j < p - 1$, так как число $n+1$ не является степенью простого числа. Пусть j — минимальный такой индекс. Рассмотрим число $k = p^j$. Тогда по Теореме Люка́

$$\binom{n}{k} \equiv \binom{n_j}{1} = n_j \pmod p$$

Поскольку число k нечетно, а $0 \leqslant n_j < p - 1$, для данного k сравнение (5.3) не выполнено. Далее возможны два случая:
Случай 1. Сравнение (5.2) также не имеет места, тогда число $k = p^j$ искомое.
Случай 2. Сравнение (5.2) выполнено: $2^k \equiv -1 \pmod p$. Тогда заменим k на $k' = k + 1$. По Теореме Люка́, биномиальный коэффициент $\binom{n}{k'}$ сравним с

$\binom{n_j}{1}\binom{p-1}{1} = -n_j \pmod p$ и по-прежнему не равен $(-1)^{k'} = 1$, так как $n_j < p-1$. При этом $2^{k'} = -2 \not\equiv -1 \pmod p$.

В обоих случаях для одного из чисел $k \in \{p^j, p^j+1\}$ комбинация $L_{k,n} = s_{k,n} - 3s_{k-1,n} + 2s_{k-2,n}$ не делится на p. Индекс $j \geqslant 1$, следовательно $k \geqslant p > 2$. Осталось убедиться, что $k \leqslant n-2$. В разложении числа n по основанию p имеем $n_0 = p-1$ и $n_r \geqslant 1$. Следовательно, $n \geqslant p^r + (p-1) \geqslant p^j + (p-1) \geqslant k + (p-2)$. Если $p > 3$ или $r > j$, то $k \leqslant n-2$, как и требовалось. В противном случае, если $j = r$ и $p = 3$, то, поскольку j это минимальный такой разряд, что $n_j \neq p-1 = 2$, имеем $n = 3^r + \sum_{i=0}^{r-1} 2 \cdot 3^i$. Однако тогда число n нечетно, в то время как в утверждении Леммы 5.1.3 нас интересуют только четные n. $\square$

Глава 6

Квазиторические ПНР-представители в кольце Ω_U^*

6.1 Построение квазиторических ПНР-представителей в каждом элементе кольца Ω_*^U

Этот раздел содержит доказательство следующей Теоремы.

Теорема 6.1.1. *Каждый элемент кольца комплексных кобордизмов Ω_U^* градуировки больше 2 и выше содержит представитель, являющийся одновременно гладким квазиторическим ПКР- и ПНР-многообразием.*

Мы используем построенные в Разделе 3.7 вспомогательные квазиторические ПНР-многообразия $X_{i,j},\ M_{i,j},\ N_{i,j}$. Технически трудная часть доказательства Теоремы 6.1.1 (вычеты биномиальных коэффициентов по модулю p и p^2) вынесена в Раздел 6.2 для удобства чтения.

Доказательство следующего вспомогательного Предложения содержится в Разделе 6.2.

Предложение 6.1.2. *Пусть $s \geqslant 2$. Тогда для любого простого p выполнено*

$$\sum_{k=p^s-p^{s-1}-1}^{p^s-1} \binom{k}{p^s-p^{s-1}-1} \equiv p \pmod{p^2}.$$

Покажем, что НОД чисел Милнора многообразий $BF_n,\ N_{i,j},\ i+j=n$, равен p при $n=p^s-1$, где p любое простое, $s \in \mathbb{N}$, и равен 1, иначе.

Предложение 6.1.3. *Пусть $n=p^s-1$ для $s \geqslant 1$ и простого числа p. Тогда НОД$(s_n(BF_n), s_n(N_{i,j})|\ i+j=n,\ 0 \leqslant i \leqslant j) = p$.*

Доказательство. Введем обозначение $a_{i,j} := s_n([N_{i,j}]),\ 0 \leqslant i \leqslant j,\ i+j=n$. Рассмотрим случаи. Если $s=1$, то $s_n(N_{0,n}) = n+1 = p$. Иначе, для $p=2$ имеем $s_n(BF_n) = 2$ (см. Формулу (4.9)). Наконец, пусть $s \geqslant 2$, $p > 2$. Тогда $p^{s-1} < p^s - p^{s-1} - 1$. Далее, по Предложению 3.7.5 имеем $a_{0,n} = p^s$,

$$a_{p^{s-1},p^s-p^{s-1}-1} = -\binom{n}{p^s-p^{s-1}-1} - \sum_{k=p^s-p^{s-1}-1}^{p^s-2} \binom{k}{p^s-p^{s-1}-1} =$$

$$= -\sum_{k=p^s-p^{s-1}-1}^{p^s-1} \binom{k}{p^s-p^{s-1}-1}.$$

Следовательно, по Предложению 6.1.2 имеем $a_{p^{s-1},p^s-p^{s-1}-1} \equiv -p \pmod{p^2}$. Мы получаем, что НОД$(a_{0,n}, a_{p^{s-1},p^s-p^{s-1}-1}) = p$. □

Предложение 6.1.4. *Рассмотрим число n т.ч. $n+1$ не является степенью простого числа. Тогда НОД$(s_n(N_{i,j})|\ i+j=n,\ 0 \leqslant i \leqslant j) = 1$.*

Доказательство. Для доказательства достаточно предъявить для любого простого делителя q числа $n+1$ взаимно простое число $a_{i,j}$ с q. Запишем n в виде $[x_{s-1}, x_{s-2}, \dots, x_0]_q$. Рассмотрим случаи.

1) $n = 2q^{s-1} - 1 = [1, q-1, \dots, q-1]_q$. Тогда $n+1 = 2q^{s-1}$ четно, и $q > 2, s > 1$ из условия на n. Положим $j = [1, q-1, \dots, q-1, 0]_q$. Заметим, что $n - j = q - 1 < j$. Из Теоремы Люка́ тогда следует, что
$a_{n-j,j} \equiv 1 - (q-1) \equiv 2 \not\equiv 0 \pmod q$.

2) $n = (x_{s-1}+1)q^{s-1} - 1 = [x_{s-1}, q-1, \dots, q-1]_q,\ x_{s-1} > 1$. Тогда
$1 < x_{s-1} < q-1,\ s > 1, q > 3$. Положим
$j = x_{s-1}q^{s-1} - 1 = [x_{s-1}-1, q-1, \dots, q-1]_q$. Заметим, что $n - j = q^{s-1}$. Так как $1 < x_{s-1}$, получаем $n - j < j$. По Теореме Люка́,
$a_{n-j,j} \equiv \pm x_{s-1} - 1 \not\equiv 0 \pmod q$.

3) $n = [x_{s-1}, \dots, x_a, \dots, x_b, q-1, \dots, q-1]_q$, где
$0 < x_a;\ x_b < q-1;\ b < a;\ 0 < x_{s-1}$ (q^b есть наибольшая степень q, делящая $n+1$). Положим $j = [x_{s-1}, \dots, x_a - 1, q-1, \dots, q-1]_q$, где $x_a - 1$ стоит в a-ом разряде. Тогда $n - j = [0, \dots, x_{a-1}, \dots, x_b + 1, 0, \dots, 0]_q < j$. По Теореме Люка́, $\binom{k}{j} \equiv 0 \pmod q$ for $j < k \leqslant n$, и $\binom{j}{j} = 1$. Напомним, что
$a_{n-j,j} = (-1)^{n+1}\binom{n}{j} - \sum_{k=j}^{n-1}\binom{k}{j}$. Заключаем, что $a_{n-j,j} \equiv -1 \pmod q$.

Итак, все возможные значения n, удовлетворяющие условию, были рассмотрены. □

Доказательство Теоремы 6.1.1. В Подразделе 3.7 мы построили квазиторические ПНР-многообразия $BF_n, N_{i,j},\ 0 \leqslant i \leqslant j$. Их числа Милнора найдены в Предложении 3.7.5. В Предложении 3.5.2 было показано, что целочисленные комбинации квазиторических ПНР-многообразий (в смысле бриллиантовой суммы и изменения ориентации) также являются квазиторическими ПНР-многообразиями. НОД чисел Милнора многообразий $BF_n, N_{i,j}$,
$0 \leqslant i \leqslant j,\ i + j = n$, вычислен в Предложениях 6.1.3, 6.1.4. Значит, для любого $n \in \mathbb{N}$ можно построить квазиторическое ПНР-многообразие с числом Милнора p при $n = p^s - 1$, где p простое, $s \in \mathbb{N}$, и числом Милнора 1, иначе. По Теореме 1.1.13, это многообразие представляет образующую кольца Ω_U^* в градуировке $2n,\ n \in \mathbb{N}$. Теорема Милнора-Новикова говорит, что любой элемент кольца Ω_U^* представляется в виде линейной комбинации декартовых произведений построенных нами многообразий, т.е. имеет представителем квазиторическое ПНР-многообразие. □

6.2 Вспомогательные теоретико-числовые результаты

В этом Разделе мы доказываем Предложение 6.1.2.

Напомним, что для любой натуральной степени p^n простого числа p группа обратимых элементов $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$ кольца вычетов $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ равна
$\{k \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} |\ \text{НОД}(k, p) = 1\}$. Будем далее понимать выражения вида
$\frac{a}{b} = ab^{-1},\ a \in \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z},\ b \in (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$, в смысле обращения в этой группе.

Нетрудно показать, что имеют место следующие леммы.

Лемма 6.2.1. *Рассмотрим целые неотрицательные числа $0 \leqslant r < p$, где p простое. Тогда:*

$$\prod_{k=1}^{p-1}(pr + k) \equiv (p-1)! \pmod{p^2}.$$

Доказательство. Вытекает из вычисления:

$$(pr + k)(pr + p - k) \equiv k(p - k) + p(kr + (p - k)r) \equiv k(p - k) \pmod{p^2}.$$

□

Лемма 6.2.2. *Для натуральных чисел $0 < a < p$ (p простое) выполнено:*

$$\frac{\prod_{k=1}^{a}(p(p-1)+k)}{a!} \equiv 1 - p\sum_{k=1}^{a}\frac{1}{k} \pmod{p^2}.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\prod_{k=1}^{a}(k-p) \equiv a!\left(1 - p\sum_{k=1}^{a}\frac{1}{k}\right) \pmod{p^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{\prod_{k=1}^{a}(p(p-1)+k)}{a!} \equiv \frac{\prod_{k=1}^{a}(k-p)}{a!} \equiv 1 - p\sum_{k=1}^{a}\frac{1}{k} \pmod{p^2}.$$

□

Лемма 6.2.3. *Для натуральных чисел $0 < a < p$ (p простое) выполнено:*

$$\sum_{a=1}^{p-1}\frac{\prod_{k=1}^{a-1}(p(p-1)+k)}{a!} \equiv 0 \pmod{p^2}. \tag{6.1}$$

Доказательство. Для доказательства Леммы достаточно показать, что слагаемые (6.1) для a, $p-a$ сокращаются по модулю p. Заметим, что

$$p\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{p-a}\right) \equiv 0 \pmod{p^2}. \tag{6.2}$$

По Лемме 6.2.2,

$$\frac{\prod_{k=1}^{a-1}(p(p-1)+k)}{a!} \equiv \frac{1}{a+p(p-1)}\left(1 - p\sum_{k=1}^{a}\frac{1}{k}\right) \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{a-p}\left(1 - p\sum_{k=1}^{a}\frac{1}{k}\right) \pmod{p^2},$$

$$\frac{\prod_{k=1}^{p-a-1}(p(p-1)+k)}{(p-a)!} \equiv \frac{1}{p-a}\left(1 - p\sum_{k=1}^{p-a-1}\frac{1}{k}\right) \overset{(6.2)}{\equiv} \frac{1}{p-a}\left(1 + p\sum_{k=p-a}^{p-1}\frac{1}{k}\right) \overset{(6.2)}{\equiv}$$

$$\equiv \frac{1}{p-a}\left(1 - p\sum_{k=1}^{a}\frac{1}{k}\right) \pmod{p^2}.$$

□

Лемма 6.2.4. (См. [43, §2, Lemma 1]).

$$(p^2)!_p \equiv -1 \pmod{p^2}.$$

При помощи Теоремы 1.13.2 доказывается

Лемма 6.2.5.
$$\binom{p^s-1}{p^s-p^{s-1}-1} \equiv p-1 \pmod{p^2}.$$

Доказательство. По определению,

$$[p-1,p-1,\ldots,p-1]_p = [p-2,p-1,\ldots,p-1]_p + [1,0\ldots,0]_p.$$

По Теореме 1.13.2,

$$\begin{aligned}\binom{p^s-1}{p^s-p^{s-1}-1} = \binom{[p-1,p-1,\ldots,p-1]_p}{[p-2,p-1,\ldots,p-1]_p} \equiv \\ \equiv (p-1)\frac{(p-1+p(p-1))!_p}{(p-1+p(p-2))!_p p!_p} \equiv \\ \equiv (p-1)\frac{\prod_{k=0}^{p-1}(p(p-1)+k)}{p!_p} \equiv p-1 \pmod{p^2}.\end{aligned}$$

□

Лемма 6.2.6.

$$\sum_{k=p^s-p^{s-1}}^{p^s-2} \binom{k}{p^s-p^{s-1}-1} \equiv 0 \pmod{p^2}.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}\sum_{k=p^s-p^{s-1}}^{p^s-2} \binom{k}{p^s-p^{s-1}-1} = \\ = \sum_{k=0}^{s-2} \sum_{\substack{x_k,\ldots,x_{s-2}=0\\ x_k<p-1}}^{p-1} \binom{[p-1,x_{s-2},x_{s-3},\ldots,x_k,p-1,\ldots,p-1]_p}{[p-2,p-1,p-1,\ldots,p-1,p-1,\ldots,p-1]_p}.\end{aligned} \tag{6.3}$$

По Теореме Куммера (см. Следствие 1.13.3), если хотя бы два числа среди $x_k,\ldots,x_{s-2}$ отличны от $p-1$, то

$$\binom{[p-1,x_{s-2},x_{s-3},\ldots,x_k,p-1,\ldots,p-1]_p}{[p-2,p-1,p-1,\ldots,p-1,p-1,\ldots,p-1]_p} \equiv 0 \pmod{p^2}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{s-2} \sum_{\substack{x_k,\ldots,x_{s-2}=0 \\ x_k<p-1}}^{p-1} \binom{[p-1, x_{s-2}, x_{s-3}, \ldots, x_k, p-1, \ldots, p-1]_p}{[p-2, p-1, p-1, \ldots, p-1, p-1, \ldots, p-1]_p} \equiv$$

$$\equiv \sum_{k=0}^{s-2} \sum_{x_k=0}^{p-2} \binom{[p-1, p-1, \ldots, x_k, p-1, \ldots, p-1]_p}{[p-2, p-1, \ldots, p-1, p-1, \ldots, p-1]_p} \pmod{p^2}, \quad (6.4)$$

где x_k находится в k-ом разряде. Пусть $k = s-2$. По Теореме 1.13.2 и Леммам 6.2.3, 6.2.4 имеем:

$$\frac{1}{p} \cdot \sum_{x_{s-2}=0}^{p-2} \binom{[p-1, x_{s-2}, p-1, \ldots, p-1]_p}{[p-2, p-1, p-1, \ldots, p-1]_p} \equiv$$

$$\equiv \pm \sum_{x_{s-2}=0}^{p-2} (p-1) \frac{(x_{s-2} + p(p-1))!_p}{(p-1+p(p-2))!_p (x_{s-2}+1)!} \equiv$$

$$\equiv \pm(p-1) \sum_{a=1}^{p-1} \frac{\prod_{r=1}^{a-1}(p(p-1)+r)}{a!} \equiv 0 \pmod{p^2}. \quad (6.5)$$

Пусть $0 \leqslant k < s-2$. Тогда по Теореме 1.13.2 и Леммам 6.2.3, 6.2.4 имеем:

$$\frac{1}{p} \cdot \sum_{x_k=0}^{p-2} \binom{[p-1, p-1, \ldots, p-1, x_k, p-1, \ldots, p-1]_p}{[p-2, p-1, \ldots, p-1, p-1, p-1, \ldots, p-1]_p} \equiv$$

$$\equiv \pm \sum_{x_k=0}^{p-2} (p-1) \frac{(x_k + p(p-1))!_p}{(p-1+p(p-1))!_p (x_k+1+p(p-1))!} \equiv \pm(p-1) \sum_{a=1}^{p-1} \frac{1}{a-p} \equiv$$

$$\equiv \pm(p-1) \sum_{a=1}^{(p-1)/2} \frac{p}{a(a-p)} \pmod{p^2}.$$

Следовательно,

$$\sum_{x_k=0}^{p-2} \binom{[p-1, p-1, \ldots, p-1, x_k, p-1, \ldots, p-1]_p}{[p-2, p-1, \ldots, p-1, p-1, p-1, \ldots, p-1]_p} \equiv 0 \pmod{p^2}. \quad (6.6)$$

Требуемое утверждение вытекает теперь из сравнений (6.3),(6.4),(6.5),(6.6). □

Доказательство Предложения 6.1.2 теперь вытекает из Лемм 6.2.5, 6.2.6.

6.3 Поиск других ПНР-порождающих кольца Ω_*^U

Естественно искать более короткое доказательство Теоремы 6.1.1. Введем семейство гладких проективных комплексных многообразий.

Определение 6.3.1. Обозначим через $S_{i,j}, 0 \leqslant i \leqslant j$, гиперповерхность в $BF_i \times BF_j$, заданную уравнением:

$$\sum_{k=0}^{i} z_{i,k} w_{j,k+j-i} = 0. \tag{6.7}$$

Отметим, что, $S_{0,j} = BF_{j-1}$, $S_{0,0} = \varnothing$.

Замечание 6.3.2. Порядок w-переменных в (6.7) важен. Например, рассмотрим подмногообразие $S'_{1,2} \subset BF_1 \times BF_2$, заданное уравнением:

$$z_{1,0}w_{2,0} + z_{1,1}w_{2,1} = 0.$$

Напомним, что $BF_1 \times BF_2 \subset \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^2$ задано единственным уравнением:

$$w_{2,0}w_{1,1} - w_{2,1}w_{1,0} = 0.$$

Легко видеть, что многообразие $S'_{1,2}$ является особым вдоль подмногообразия $\{w_{2,0} = w_{2,1} = 0, z_{1,0}w_{1,0} + z_{1,1}w_{1,1}\}$, изоморфного $\mathbb{C}P^1$.

Данные многообразия заданы явно. Нетрудно доказать

Предложение 6.3.3. (1) *Многообразие $S_{i,j}$ есть дуализация первого класса Черна комплексного линейного расслоения $\overline{\beta_i \beta'_i}$ в $BF_i \times BF_j$;*

(2) *При $0 < i \leqslant j$, $s_{i+j-1}(S_{i,j}) = -\binom{i+j}{i}$;*

(3) *Многообразия $N_{0,n}$ и $S_{i,j}$ при $i + j = n + 1$, $n \in \mathbb{N}$ доставляют мультипликативные порождающие кольца Ω_U^*;*

(4) *Многообразие $S_{i,j}$ есть собственный прообраз $BR_{i,j}$ при последовательности раздутий собственных прообразов подмногообразий $\{w_1 = \cdots = w_k\} \subset BF_i \times \mathbb{C}P^j$, где k пробегает $j-1, \ldots, 2$ в порядке убывания.*

Подмногообразия $BF_i \times \mathbb{C}P^j$ из Предложения 6.3.3 при пересечении с $BR_{i,j}$ не являются, вообще говоря, инвариантными при введенном действии тора на $BR_{i,j}$. Однако последнее не запрещает существования эффективного действия тора с плотной орбитой на $S_{i,j}$. Возникает

Вопрос. Является ли $S_{i,j}$ торическим многообразием при $0 \leqslant i \leqslant j$?

Литература

[1] В.М. Бухштабер, А.В. Шокуров, *Алгебра Ландвебера-Новикова и формальные векторные поля на прямой*, Функц. анализ и его прил. **12** (1978), no. 3, 1–11.

[2] В.М. Бухштабер, *Алгебраическая топология многообразий, определяемых простыми многогранниками*, УМН **53** (1998), no. 3, 195–196.

[3] В.М. Бухштабер, *Комплексные кобордизмы и формальные группы*, УМН **67** (2012), no. 5, 111–174.

[4] Виктор М. Бухштабер, Вадим Д. Володин, *Точные верхние и нижние границы для нестоэдров*, Изв. Мат. **75** (2011), no. 6, 17–46.

[5] С.П. Новиков, *Гомотопические свойства комплексов Тома*, Матем. сб. **57(99)** (1962), no. 4, 407–442.

[6] С.П. Новиков, *Методы алгебраической топологии с точки зрения теории кобордизмов*, Изв. АН СССР. Сер. матем. **31** (1967), no. 4, 855–951.

[7] А.В. Пухликов, А.Г. Хованский, *Конечно-аддитивные меры виртуальных многогранников*, Алгебра и анализ **4** (1992), 161–185.

[8] А.В. Пухликов, А.Г. Хованский, *Теорема Римана-Роха для интегралов и сумм квазиполиномов по виртуальным многогранникам*, Алгебра и анализ **4** (1992), no. 4, 188–216.

[9] Г. Соломадин, *Квазиторические ПНР-многообразия*, Международная конференция "Ломоносов 2018", г.Москва, Россия, 9–13 апреля 2018г. `https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2018/data/13556/72448_uid69740_report.pdf`.

[10] Г. Соломадин, *Квазиторические полностью нормально расщепимые представители в кольце комплексных кобордизмов*, Подано в печать: Мат. Заметки, available at `arXiv:1704.07403[math.AT]`.

[11] Г. Соломадин, *Квазиторические полностью нормально расщепимые многообразия*, Тр. Мат. Инст. им. В.А. Стеклова (в печати) **302** (2018), available at `arXiv:1802.02176[math.AT]`.

[12] Г. Соломадин, *Проективные торические полиномиальные образующие в кольце комплексных кобордизмов*, Международная конференция “Dynamics in Syberia”, г.Новосибирск, Россия, 29 февраля–4 марта 2016г., 31–33. `http://semr.math.nsc.ru/v13/a1-41.pdf`.

[13] Григорий Соломадин, Юрий Устиновский, *Проективные торические полиномиальные образующие в кольце комплексных кобордизмов*, Матем. Сб. **11 (207)** (2016), 127–152; English transl., Grigory Solomadin, Yury Ustinovsky, *Projective toric polynomial generators in the unitary cobordism ring*, Sb. Mat. **11 (207)** (2016), 1601–1624. available at `https://arxiv.org/abs/1602.02448`.

[14] Г. Соломадин, Ю. Устиновский, and В.М. Бухштабер, *Двупараметрический род Тодда и торические разрешения особенностей*, Международная конференция “Торическая топология, теория чисел и их приложения”, г.Хабаровск, Россия, 06–12 сентября 2016г., 112–113. `http://www.iam.khv.ru/ttnt-2015/files/TTNT-2015_proceedings.pdf`.

[15] В.А. Тиморин, *Аналог соотношений Ходжа-Римана для простых выпуклых многогранников*, УМН **54** (1999), no. 2(326), 113–162.

[16] Майкл Атья, *Лекции по K-теории*, Москва: Мир, 1967. Пер. с англ. В. М. Бухштабера [и др.]

[17] Пьер Коннер, Эдвин Флойд, *Гладкие периодические отображения*, М.: Мир, 1969.

[18] В.В. Прасолов, *Многочлены*, М.: МЦНМО, 2003. 3-е изд., исправленное.

[19] Роберт Стонг, *Заметки по теории кобордизмов*, Мир, М., 1973.

[20] Ф. Хирцебрух, *Комплексные многообразия*, Международный математический конгресс в Эдинбурге 1958г. (обзорные доклады), 1962, pp. 276. Современные проблемы математики, Физматгиз, М..

[21] Ф. Хирцебрух, *Топологические методы в алгебраической геометрии*, Мир, М., 1973.

[22] Гюнтер Циглер, *Теория многогранников*, Москва,: Изд-во МЦНМО, 2014. пер. с англ. А. И. Гарбера [и др.]

[23] Rob Arthan, Shaun Bullet, *The homology of $MO(1)^{\wedge\infty}$ and $MU(1)^{\wedge\infty}$*, Journal of Pure and Applied Algebra **26** (1982), 229–234.

[24] Michael Atiyah, *Convexity and commuting Hamiltonians*, Bull. London Math. Soc. **14** (1982), no. 1, 1–15.

[25] Michael Atiyah, Fridriech Hirzebruch, *Vector Bundles and Homogeneous Spaces*, AMS Symposium in Pure Math. III **64** (1960), 197–222.

[26] Anton Ayzenberg, Mikiya Masuda, *Volume polynomials and duality algebras of multi-fans*, Arnold Math. J. **2** (2016), no. 3, 329–381, available at `arXiv:1509.03008[math.CO]`.

[27] Victor Batyrev, *Dual polyhedra and mirror symmetry for Calabi-Yau hypersurfaces in toric varieties*, J. Algebraic Geom. **3** (1994), no. 3, 493–535.

[28] Florian Berchtold, *Lifting of morphisms to quotient presentations*, Manuscripta Math. **110** (2003), no. 1, 33–44, DOI https://doi.org/10.1007/s00229-002-0297-5.

[29] Tristram Bogart, Mark Contois, and Joseph Gubeladze, *Hom-polytopes*, Mathematische Zeitschrift **273** (2013), no. 3-4, 1267–1296.

[30] Armand Borel, Fridriech Hirzebruch, *Characteristic classes and homogeneous spaces.* I, Amer. J. Math. **80** (1958), no. 2, 458–538.

[31] Alfred Brauer, *On a problem of partitions*, Amer. J. Math. **64** (1942), 299–312.

[32] Edgar Jr. Brown, Franklin Peterson, *A spectrum whose $\mathbb{Z}_p$ cohomology is the algebra of reduced p^{th} powers*, Topol. **5** (1966), no. 2, 149–154.

[33] Victor M. Buchstaber, *Semigorups of maps into groups, operator doubles, and complex cobordisms*, Topics in topology and mathematical physics, 1995, pp. 9–31. Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 Adv. Math. Sci., Providence, RI.

[34] Victor M. Buchstaber, Nigel Ray, *An invitation to toric topology: vertex four of a remarkable tetrahedron*, Contemporary Mathematics **460** (2008), 1–27.

[35] Victor M. Buchstaber, Nigel Ray, *Toric manifolds and complex cobordisms*, Uspekhi Mat. Nauk **53** (1998), no. 2(320), 139–140 (Russian); English transl., Russian Math. Surveys **53** (1998), no. 2, 371–373.

[36] Victor M. Buchstaber, Taras E. Panov, and Nigel Ray, *Spaces of polytopes and cobordism of quasitoric manifolds*, Mosc. Math. J. **7** (2007), no. 2, 219–242, 350 (English, with English and Russian summaries).

[37] Victor M. Buchstaber, Taras E. Panov, and Nigel Ray, *Toric genera*, Internat. Math. Research Notices **16** (2010), 3207–3262.

[38] Vladimir I. Danilov, *The geometry of toric varieties*, Uspekhi Mat. Nauk **33** (1978), no. 2(200), 85–134, 247 (Russian); English transl., Russian Math. Surveys, 97–154.

[39] Michael W. Davis, Tadeusz Januszkiewicz, *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions*, Duke Math. J. **62** (1991), no. 2, 417–451.

[40] Thomas Delzant, *Hamiltoniens périodiques et images convexes de l'application moment*, Bull. Soc. Math. France **116** (1988), no. 3, 315–339.

[41] Michel Demazure, *Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **3** (1970), no. 4, 507–588.

[42] Nathan J. Fine, *Binomial coefficients modulo a prime*, Amer. Math. Monthly **54** (1947), 589–592.

[43] Andrew Granville, *Arithmetic properties of binomial coefficients, I, Binomial coefficients modulo prime powers*, Organic mathematics (Burnaby, BC, 1995), CMS Conf. Proc. **20** (1997), 253–276.

[44] Victor Guillemin, Shlomo Sternberg, *Convexity properties of the moment mapping*, Inv. Math. **67** (1982), no. 3, 491–513.

[45] Nigel J. Hitchin, *Harmonic spinors*, Advances in Math. **14** (1974), 1–55.

[46] Bryan Johnston, *The values of the Milnor genus on smooth projective connected complex varieties*, Topology Appl. **138** (2004), no. 1-3, 189–206.

[47] Mitsunori Imaoka, *Extendibility of negative vector bundles over the complex projective space*, Hiroshima Math. J. **36** (2006), no. 1, 49–60.

[48] Ivan Limonchenko, Zhi Lü, and Taras E. Panov, *Calabi-Yau hypersurfaces and SU-bordism*, To appear in: Tr. Mat. Inst. Skeklova (2018), available at `arXiv:1712.07350[math.AT]`.

[49] Zhi Lü, Taras E. Panov, *On toric generators in the unitary and special unitary bordism groups*, Alg. & Geom. Topol. **16** (2016), no. 5, 2865–2893, available at `arXiv:1412.5084[math.AT]`.

[50] John W. Milnor, *On the cobordism ring* Ω^* *and a complex analogue, part* I, Amer. J. Math. **82** (1960), no. 3, 505–521.

[51] John W. Milnor, *On the Stiefel-Whitney numbers of complex manifolds and of spin manifolds*, Topology **3** (1965), 223–230.

[52] Robert Morelli, *The K theory of a toric variety*, Adv. Math. **100** (1993), 154–182.

[53] S. Ochanine, L. Schwartz, *Une remarque sur les générateurs du cobordisme complexe*, Mathematische Zeitschrift **190** (1985), no. 4, 543–557.

[54] Nigel Ray, *On a construction in bordism theory*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **29** (1986), no. 3, 413–422.

[55] P. Sankaran, V. Uma, *K-theory of quasi-toric manifolds*, Osaka J. Math. **44** (2007), no. 1, 71–89.

[56] Soumen Sarkar, *Complex cobordism of quasitoric orbifolds*, Topol. Its Appl. **194** (2015), 386–399.

[57] G. Solomadin, *Totally normally split quasitoric manifolds*, Международная конференция "Algebraic topology, Combinatorics and Mathematical Physics" по случаю 75-летия В.М. Бухштабера, Семинар для молодых исследователей "International Seminar on Toric Topology and Homotopy Theory", г. Москва, Россия, 24–30 мая 2018г. `http://www.mathnet.ru/ConfLogos/1289/VMB75.pdf`.

[58] René Thom, *Quelques propriétés globales des variétés différentiables*, Commen. Math. Helv. **28** (1954), 17–86.

[59] Alan Thomas, *Almost complex structures on complex porjective spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **193** (1974), 123–132.

[60] Andrew Wilfong, *Smooth projective toric variety representatives in complex cobordism*, Algebraic topology, convex polytopes, and related topics, 2014, pp. 324–367, available at `arXiv:1312.4192v1[math.AT]`. Collected papers. Dedicated to Victor Matveevich Buchstaber, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, on the occasion of his 70th birthday.

[61] Andrew Wilfong, *Toric polynomial generators of complex cobordism*, Algebr. Geom. Topol. **16** (2016), no. 3, 1473–1491, available at `arXiv:1308.2010[math.AT]`.

[62] Wolf Barth, Klaus Hulek, Chris Peters, and Antonius Van de Ven, *Compact complex surfaces*, Springer Verlag Berlin-Heidelberg, 2004. Second enlarged edition.

[63] Victor M. Buchstaber, Taras E. Panov, *Toric topology*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 204, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.

[64] W. Fulton, *Introduction to toric varieties*, Ann. of Math. Studies, vol. 131, Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1993.

[65] Phillip Griffiths, Joseph Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1978. Pure and Applied Mathematics.

[66] Friedrich Hirzebruch, Thomas Berger, and Rainer Jung, *Manifolds and modular forms*, Aspects of Mathematics, E20, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1992. With appendices by Nils-Peter Skoruppa and by Paul Baum.

[67] June Huh, *Rota's conjecture and positivity of algebraic cycles in permutohedral varieties*, Ph.D. Thesis, The University of Michigan, 2014.

[68] Daniel Huybrechts, *Complex Geometry: An Introduction*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.

[69] Igor Shafarevich, *Basic algebraic geometry* 2*: schemes and complex manifolds*, Third enlarged edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.

[70] A. Tarski, *A decision method for elementary algebra and geometry*, The RAND Corp., 1948. 2-nd ed.