Российская Академия наук

Математический институт им. В. А. Стеклова

На правах рукописи
УДК 512.7

Горчинский Сергей Олегович

Вычеты и символы в K-теории и группы Чжоу

01.01.06 – математическая логика,
алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2018

Работа выполнена в отделе алгебры Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Официальные оппоненты:

КУЗЬМИН Леонид Викторович – доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией Института информационных технологий ФГБУ НИЦ "Курчатовский институт" (специальность 01.01.06)

ПАНИН Иван Александрович — доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник лаборатории алгебры и теории чисел ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук (специальность 01.01.06).

ШАБАТ Георгий Борисович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики, логики и интеллектуальных систем в гуманитарной сфере Института лингвистики ФГБОУ ВО "Российский государственный гуманитарный университет" (РГГУ) (специальность 01.01.06)

Ведущая организация:

ФГБУН Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича Российской академии наук (ИППИ РАН)

Защита диссертации состоится " 25 " апреля 2019 г. в 14 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 002.022.03 при Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук по адресу: 119991, г. Москва, ул. Губкина, д. 8, 9-ый этаж, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Математического института им. В. А. Стеклова РАН и на сайте

`http://www.mi-ras.ru/dis/ref18/gorchinskiy/dis.pdf`

Автореферат разослан "____" января 2019 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 002.022.03 при МИАН,
д. ф.-м. н. профессор М. А. Королев

Актуальность темы

Теория мотивов гладких проективных алгебраических многообразий была задумана Гротендиком, ему же принадлежат первые шаги в становлении этой теории. Основы теории мотивов были изложены в статье Манина[1]. С тех пор теория мотивов интенсивно развивалась, особенно в контексте групп Чжоу и алгебраической K-теории, в работах многочисленных авторов: Блох, Делинь, Бейлинсон, Фридландер, Колье-Телен, Суле, Суслин, Меркурьев, Панин, Яннсен, Вуазен, Рост и многие другие. Подробный обзор состояния теории мотивов до появления триангулированных категорий мотивов содержится в двухтомнике[2]. Настоящая революция в теории мотивов произошла в результате прорыва, совершенного Воеводским, построившим триангулированную категорию мотивов и стабильную гомотопическую мотивную категорию. Кульминацией этого развития явилось полученное в циклах работ Воеводского и Роста доказательство знаменитой гипотезы об изоморфизме норменного вычета, сформулированной в частном случае Милнором, а в общем случае Блохом и Като.

Мотив многообразия — это то общее, что стоит за его конкретными реализациями в виде различных когомологий этого многообразия, возможно, с дополнительными структурами, такими как структура Ходжа, представление группы Галуа и т.д. Терминологию можно отчасти объяснить тем, что мотив мелодии — это то общее, что стоит за его конкретными реализациями в виде исполнений мелодии на различных музыкальных инструментах. При этом мотив многообразия понятие столь же абстрактное, сколь и мотив мелодии.

Теория мотивов является категорным подходом к описанию различных инвариантов алгебраических многообразий когомологического характера. Помимо когомологий Бетти или этальных когомологий к таким инвариантам относятся группы Чжоу, группы Гротендика векторных расслоений, группа Брауэра, неразветвленные когомологии и множество других инвариантов. Часто описание мотива многообразия дает возможность проще и лучше понять структуру подобных инвариантов.

[1] Yu. I. Manin, *Correspondences, motifs and monoidal transformations*, Math. USSR-Sb., **6** (1968), 439–470.

[2] U. Jannsen, S. Kleiman, J.-P. Serre, *Motives* (Seattle, WA, 1991), Proc. Sympos. Pure Math., **55**, Part 1, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1994).

В свою очередь, это помогает ответить на многие геометрические вопросы, связанные, например, с рациональностью многообразий, см. в этом направлении пионерскую работу Вуазен[3].

Тем не менее, мир мотивов до сих пор хранит в себе множество тайн и загадок. Это объясняется тем, что в описании групп Чжоу алгебраических многообразий на данный момент имеется несравнимо больше открытых вопросов, чем известных фактов. Каждое новое существенное утверждение о группах Чжоу и мотивах требует значительных усилий и не бывает простым.

Точное определение категории мотивов зависит от выбора так называемой глобальной теории пересечений, каждая из них приводит к своей категории мотивов. Среди различных категорий мотивов можно выделить категорию мотивов Чжоу, построенную по группам Чжоу, и категорию K-мотивов, построенную по группам Гротендика K_0 векторных расслоений. Мотив Чжоу гладкого проективного многообразия контролируется алгебраическими циклами, точнее, группами Чжоу его произведений с другими многообразиями. В то же время, K-мотив гладкого проективного многообразия контролируется векторными расслоениями, точнее, группами K_0 его произведений с другими многообразиями.

Один из главных принципов теории мотивов заключается в том, что мотивы многообразий можно раскладывать на меньшие части, из которых потом можно составлять мотивы других многообразий. Данный метод позволяет весьма плодотворно работать с когомологическими инвариантами многообразий. Ясно, что в таком контексте важно понимать условия, при которых мотив многообразия раскладывается на более простые части. К таким простейшим частям относятся мотив точки и мотив проективной прямой, точнее, приведенный мотив проективной прямой, называемый мотивом Лефшеца. Следующими по сложности является мотивы Артина, т.е. мотивы нульмерных многообразий (которые могут быть нетривиальны в случае не алгебраически замкнутого базового поля), мотивы кривых, поверхностей и т.д. Возникает вопрос о том, как установить, что мотив данного многообразия имеет лефшецев тип, т.е. состоит из тензорных степеней мотива Лефшеца. Помимо простых геометрических аспектов, такой вопрос имеет глубокую арифметиче-

[3] C. Voisin, *Unirational threefolds with no universal codimension* 2 *cycle*, Invent. Math., **201**:1 (2015), 207–237.

скую природу, поскольку тесно связан с кручением в группах Чжоу, в том числе в группе нуль-циклов, над незамкнутыми полями. Например, мотив Чжоу коники имеет лефшецев тип тогда и только тогда, когда она имеет точку над базовым полем. Другой вопрос подобного вида заключается в том, как установить, что мотив данного многообразия состоит из мотивов многообразий меньшей размерности. Ряд результатов диссертации посвящен именно этим вопросам. Отметим, что данные результаты, а также разработанные при их получении методы, нашли дальнейшее интенсивное развитие в серии работ Виала[4].

Кроме того, естественная проблема заключается в сравнении разных мотивов, в частности, мотива Чжоу и K-мотива, одного и того же проективного многообразия. Между категориями мотивов Чжоу и K-мотивов нет естественных функторов, что обуславливает нетривиальность данной проблемы. Заметим, что мотив Лефшеца в контексте K-мотивов изоморфен мотиву точки. Это отражает тот фундаментальный факт, что в некоммутативной геометрии нет теории весов. Возникает вопрос о равносильности того, что мотив Чжоу многообразия имеет лефшецев тип и того, что его K-мотив имеет единичный тип, т.е. равен кратной прямой сумме единичного K-мотива точки с самим собой. В работе Бернардара и Табуады[5] был предложен пример, показывающий, что в общем случае данные условия не равносильны. С другой стороны, Виал[6] получил положительный ответ на этот вопрос для поверхностей, в случае, когда для них существует полный исключительный набор, при помощи тонкой техники работы с исключительными наборами на поверхностях, развитой в работах Перлинга[7] и Кузнецова[8]. В диссертации совершенно другими методами полностью исследуется случай про-

[4] C. Vial, *Pure motives with representable Chow groups*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, **348**:21–22 (2010), 1191–1195; C. Vial, *Niveau and coniveau filtrations on cohomology groups and Chow groups*, Proc. Lond. Math. Soc. (3), **106**:2 (2013), 410–444.; C. Vial, *Projectors on the intermediate algebraic Jacobians*, New York J. Math., **19** (2013), 793–822.

[5] M. Bernardara, G. Tabuada, *Relations between the Chow motive and the noncommutative motive of a smooth projective variety*, Journal of Pure and Applied Algebra, **219**:11 (2015), 5068–5077.

[6] C. Vial, *Exceptional collections, and the Néron–Severi lattice for surfaces*, Advances in Math., **305** (2017), 895–934.

[7] M. Perling, *Combinatorial aspects of exceptional sequences on (rational) surfaces*, Math. Z., **288**:1–2 (2018), 243–286.

[8] A. G. Kuznetsov, *Exceptional collections in surface-like categories*, Sb. Math., **208**:9 (2017), 1368–1398.

извольных трехмерных многообразий, при этом общий результат для поверхностей получается существенно более простым способом, чем в работе Виала.

Важно отметить, что K-мотив многообразия определяется производной категорией когерентных пучков на данном многообразии и тесно связан с ее описанием, являясь тем самым важным объектом для рассмотрения в контексте некоммутативной геометрии. При изучении производных категорий алгебраических многообразий естественным образом возникает понятие допустимой подкатегории, дающее адекватный способ раскладывать производные категории на более простые части, подобно разложению мотивов. Для любой допустимой подкатегории корректно определен ее K-мотив. Важная проблема заключается в исследовании того, насколько K-мотив "видит" исходную допустимую подкатегорию. Данная проблема играет значительную роль при поиске полных исключительных наборов на многообразиях, и долгое время она оставалась совершенно открытой. В частности, стоит вопрос о построении геометрических фантомов, т.е. нетривиальных допустимых подкатегорий с нулевым K-мотивом. Заметим, что для таких категорий их группа Гротендика обращается в нуль. Рядом авторов были построены так называемые квазифантомы, т.е. допустимые подкатегории с конечной группой Гротендика, см. работы Бенинга–Граф фон Бетмера–Сосны[9], Алексеева–Орлова[10], Галкина–Шиндера[11]. В диссертации представлена первая известная конструкция геометрического фантома. Вскоре после того, как данный результат был опубликован, появилась работа Бенинга–граф фон Бетмера–Кацаркова–Сосны[12], в которой тоже был построен геометрический фантом, но совершенно другим способом. Недавно появилась еще одна конструкция геометрического фантома в работе Чо–Ли[13].

[9] Ch. Böhning, H-Ch. Graf von Bothmer, P. Sosna, *On the derived category of the classical Godeaux surface*, Adv. Math., **243** (2013), 203–231.

[10] V. Alexeev, D. Orlov, *Derived categories of Burniat surfaces and exceptional collections*, Math. Ann., **357**:3 (2013), 743–759.

[11] S. Galkin, E. Shinder, *Exceptional collection on the Beauville surface*, Adv. Math., **244** (2013), 1033–1050.

[12] Ch. Böhning, H-Ch. Graf von Bothmer, L. Katzarkov, P. Sosna, *Determinantal Barlow surfaces and phantom categories*, J. Eur. Math. Soc., **17**:7 (2015), 1569–1592.

[13] Y. Cho, Y. Lee, *Exceptional collections on Dolgachev surfaces associated with degenerations*, Adv. Math., **324** (2018), 394–436.

При построении различных теорий когомологий алгебраических многообразий один из возможных подходов заключается в следующей аналогии с сингулярными гомологиями вещественных многообразий, которая рассматривалась многими авторами, включая Арнольда, Виттена[14], Дональдсона–Томаса[15], Френкеля–Хесина[16] и Рослого–Хесина[17].

Аналогия основана на словаре между вещественными и комплексными многообразиями, отправной точкой которого является соответствие между дифференциалом де Рама и дифференциалом Дольбо. При этом когомологии де Рама плоских расслоений на вещественных многообразиях соответствуют когомологиям Дольбо голоморфных расслоений на комплексных многообразиях. Для вещественных многообразий теорема де Рама сравнивает когомологии де Рама и сингулярные когомологии. Применяя данный словарь, можно увидеть, что ориентированная сингулярная цепь соответствует комплексному подмногообразию с логарифмической мероморфной дифференциальной формой старшей степени на нем, или, обобщая, конечному набору таких данных. Такой объект называется полярной цепью. Взятие границы ориентированных сингулярных цепей соответствует рассмотрению вычета логарифмических форм. Возникающий при этом аналог сингулярного комплекса называется полярным комплексом. Теорема Стокса об интегралах гладких дифференциальных форм по ориентированным сингулярным цепям с краем соответствует теореме Коши об интегралах логарифмических форм и их вычетах. Частный случай этой теоремы для одномерной полярной цепи, представленной комплексной плоскостью с координатой z вместе с стандартной логарифмической формой dz/z, совпадает с теоремой Помпейю, утверждающей, что $(\pi z)^{-1}$ является фундаментальным решением для дифференциального оператора Коши–Римана $\partial/\partial\bar{z}$.

[14] E. Witten, *Chern–Simons gauge theory as a string theory*, The Floer memorial volume, Progr. Math., **133**, Birkhäuser, Basel (1995), 637–678.

[15] S. K. Donaldson, R. P. Thomas, *Gauge theory in higher dimensions*, The geometric universe (Oxford, 1996), Oxford Univ. Press, Oxford (1998), 31–47.

[16] I. B. Frenkel, B. A. Khesin, *Four-dimensional realization of two-dimensional current groups*, Comm. Math. Phys., **178**:3 (1996), 541–562.

[17] B. Khesin, A. Rosly, *Symplectic geometry on moduli spaces of holomorphic bundles over complex surfaces*, The Arnoldfest (Toronto, ON, 1997), Fields Inst. Commun., **24**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1999) 311–323; B. Khesin, A. Rosly, *Polar homology and holomorphic bundles*, R. Soc. Lond. Philos. Trans. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci., **359**:1784 (2001), 1413–1427.

Естественный вопрос заключается в том, соответствует ли при данной аналогии теорема де Рама корректному математическому утверждению. Иными словами, вопрос заключается в описании гомологий полярного комплекса в терминах когомологий расслоений. В простейшем частном случае описание гомологий полярного комплекса приобретает следующую классическую интерпретацию: дивизор с комплексными коэффициентами на компактной римановой поверхности является вычетом логарифмической 1-формы тогда и только тогда, когда степень дивизора равна нулю. Данную степень, т.е. комплексное число, следует интерпретировать, как первые когомологии пучка голоморфных 1-форм. В многомерном случае в работе Рослого–Томаса–Хесина[18] было показано, что препятствия к тому, чтобы представить одну полярную цепь как вычет другой полярной цепи, лежат в когомологиях пучка голоморфных дифференциальных форм старшей степени в случае, когда полярные цепи рассматриваются на гладком проективном комплексном многообразии.

С другой стороны, мотивировкой для развития теории полярных гомологий является знаменитая теорема Виттена[19], утверждающая, что корреляторы в вещественной теории Черна–Саймонса тесно связаны с инвариантами узлов и зацеплений. Виттеном было также указано на возможность существования голоморфного аналога данного утверждения. Это было доведено до точного результата в работах Рослого–Хесина[20] в терминах голоморфного индекса зацепления полярных циклов, т.е. полярных цепей с нулевой границей.

Для построения нетривиальных полярных циклов надо располагать запасом ненулевых голоморфных дифференциальных форм старших степеней на подмногообразиях. Часто таких дифференциальных форм может не быть. Однако если рассматривать дифференциальные формы с коэффициентами в расслоениях, то выбор становится гораздо шире. Например, на проективной прямой в проективном трехмерном про-

[18] B. Khesin, A. Rosly, R. Thomas, *A Polar de Rham Theorem,* Topology, **43** (2004), 1231–1246.

[19] E. Witten, *Quantum field theory and the Jones polynomial*, Commun. Math. Phys., **121**:3 (1989), 351–399.

[20] B. Khesin, A. Rosly, *Polar homology and holomorphic bundles*, R. Soc. Lond. Philos. Trans. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci., **359**:1784 (2001), 1413–1427; B. Khesin, A. Rosly, *Polar homology*, Canad. J. Math., **55** (2003), 1100–1120.

странстве нет голоморфных 1-форм, в то время как на ней однозначно с точностью до константы определена голоморфная 1-форма со значением в расслоении $\mathcal{O}(2)$, задающая полярный цикл с коэффициентами в $\mathcal{O}(2)$. В работе Атьи[21] был определен голоморфный индекс зацепления проективных прямых в проективном трехмерном пространстве, существование которого обусловлено тем, что указанный выше полярный цикл является границей в полярном комплексе. Последнее обстоятельство связано с обращением в нуль вторых когомологий пучка $\mathcal{O}(2) \otimes \omega_{\mathbb{P}^3} \simeq \mathcal{O}(-2)$ на $\mathbb{P}^3$. В работе Атьи было показано, что такой индекс зацепления, являющийся сечением естественно определенного линейного расслоения на конфигурационном пространстве пар прямых в $\mathbb{P}^3$, может быть использован для построения фунции Грина некоторого оператора Лапласа. Кроме того, было показано, что данное сечение голоморфно на пространстве пар непересекающихся прямых и имеет полюс первого порядка вдоль дискриминантного дивизора, образованного парами пересекающихся прямых. Отметим параллель с тем, что классический, вещественный индекс зацепления является локально постоянной функцией на конфигурационном пространстве, испытывающей скачок на границе.

Итак, видна необходимость построения полярных цепей с коэффициентами в векторном расслоении и в получении соответствующего аналога теоремы да Рама. С одной стороны, такая теорема должна давать препятствия для представления набора логарифмических форм на подмногообразиях с коэффициентами в расслоении как вычета другого набора подобного вида. С другой стороны, такая теорема дает новую интерпретацию когомологий расслоений в терминах логарифмических форм на подмногообразиях. Внутренняя сложность подобной теоремы обусловлена тем, что в случае нетривиального расслоения ее можно интерпретировать как утверждение о локальной точности комплекса Герстена для некоторого непостоянного модуля циклов Роста над многообразием, в то время как такая локальная точность известна лишь для постоянных модулей циклов Роста. Всем этим вопросам посвящена значительная часть диссертации. Отметим, что наши методы совершенно отличаются от аналитических методов из работы Рослого–Томаса–

[21] M. Atiyah, *Green's Functions for Self-Dual Four-Manifolds*, Adv. Math., Suppl. Stud., **7A** (1981), 129–158.

Хесина[22], где был рассмотрен случай тривиального расслоения на гладком проективном комплексном многообразии.

Для комплексов Герстена многообразий, построенных по алгебраическим K-группам, определено отображение прямого образа относительно собственных морфизмов. Это влечет за собой закон взаимности Вейля для кривых, а также многомерные законы взаимности. В простейшем случае закон взаимности Вейля утверждает, что для двух общих многочленов f и g с единичными старшими коэффициентами над алгебрически замкнутым полем произведение значений многочлена f по корням многочлена g равно произведению значений многочлена g по корням многочлена f с точностью до знака $(-1)^{mn}$, где m — степень многочлена f, а n — степень многочлена g. В общем виде закон взаимности Вейля утверждает, что для гладкой проективной кривой C над произвольным полем k и для ненулевых рациональных функций $f, g \in k(C)$ выполняется равенство

$$\prod_{x\in C} \mathrm{Nm}_{k(x)/k}(f,g)_x = 1\,,$$

где

$$(f,g)_x = (-1)^{\nu_x(f)\nu_x(g)}\big(f^{\nu_x(g)}g^{-\nu_x(f)}\big)(x) \in k(x)^*$$

является ручным символом Гильберта, а $\nu_x\colon k(C)^* \to \mathbb{Z}$ обозначает дискретное нормирование, заданное точкой x. Существует множество разнообразных доказательств данного утверждения, все из которых так или иначе используют конечномерность когомологий когерентных пучков на C. Наиболее подходящее для обобщений доказательство заключается в использовании существования прямого образа на комплексе Герстена для алгебраических K-групп из работы Квиллена[23], а также сравнение между вычетом для алгебраических K-групп и ручным символом Гильберта, полученное Грейсоном[24]. Паршин[25] определил многомерное обобщение ручного символа Гильберта и сформулировал многомерное обобщение закона взаимности Вейля. Данное обобщение также можно доказать при помощи алгебраической K-теории и сравнения вычета для алгебраических K-групп с многомерным ручным символом.

[22] B. Khesin, A. Rosly, R. Thomas, *A Polar de Rham Theorem*, Topology, **43**(2004), 1231–1246.
[23] D. Quillen, *Algebraic K-theory I*, Lecture Notes in Mathematics, **341** (1973), 85–147.
[24] D. Grayson, *Localization for flat modules in algebraic K-theory*, J. Algebra, **61**:2 (1979), 463–496.
[25] A. N. Parshin, *Local class field theory*, Proc. Steklov Inst. Math., **165** (1985), 157–185; A. N. Parshin, *Galois cohomology and the Brauer group of local fields*, Proc. Steklov Inst. Math., **183** (1991), 191–201.

Далее, используя работу Томасона–Тробо[26], несложно показать, что многомерные законы взаимности обобщаются на схемы вида $X \times_k A$, где X является неприводимым многообразием над полем k, а A является k-алгеброй. Это было подробно прописано в работе Музыкантова–Йом Дина[27]. А именно, пусть $F = (F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_{n-1} \subset F_n = X)$ является полным флагом на X, т.е. неуплотняемой цепочкой неприводимых подмногообразий, где $n = \dim(X)$. Граничные отображения ∂_i для алгебраических K-групп вдоль флага $F \times_k A$ на схеме $X \times_k A$ определяют символ

$$(\cdot, \ldots, \cdot)_F \ : \ K^M_{n+1}\big(k(X) \otimes_k A\big) \longrightarrow K_{n+1}\big(k(X) \otimes_k A\big) \xrightarrow{\partial_{n+1}}$$

$$\xrightarrow{\partial_{n+1}} K_n\big(k(F_{n-1}) \otimes_k A\big) \xrightarrow{\partial_n} \ldots \xrightarrow{\partial_2} K_1\big(k(F_0) \otimes_k A\big) \xrightarrow{\mathrm{Nm}} K_1(A) \xrightarrow{\det} A^* \,.$$

Из работы Томасона–Тробо следует, что некоторые (конечные) произведения таких символов равны 1. Таким образом, для получения конкретного вида таких многомерных законов взаимности, необходимо иметь явную формулу для символов $(\cdot, \ldots, \cdot)_F$. Важность данной задачи объясняется тем, что, как было показано Андерсеном и Паблосом Ромо[28], в одномерном случае из таких законов взаимности можно получить множество других законов взаимности, в частности, закон взаимности Артина в теории полей классов для кривых над конечным полем.

Заметим, что определение символов $(\cdot, \ldots, \cdot)_F$ формально локально, т.е. они пропускаются через вложение $k(X) \otimes_k A \to A((t_1)) \ldots ((t_n))$, заданное пополнением во флаге F (для простоты мы будем предполагать, что флаг регулярен), и композицию граничных отображение для алгебраических K-групп колец итерированных рядов Лорана

$$K^M_{n+1}\big(A((t_1)) \ldots ((t_n))\big) \longrightarrow K_{n+1}\big(A((t_1)) \ldots ((t_n))\big) \xrightarrow{\partial_{n+1}}$$

$$\xrightarrow{\partial_{n+1}} K_n\big(A((t_1)) \ldots ((t_{n-1}))\big) \xrightarrow{\partial_n} \ldots \xrightarrow{\partial_2} K_1(A) \xrightarrow{\det} A^* \,.$$

Итак, мы видим, что важный вопрос заключается в нахождении явной формулы для данных символов.

[26] R. W. Thomason, T. Trobaugh, *Higher algebraic K-theory of schemes and of derived categories*, The Grothendieck Festschrift, vol. III, Progr. Math. Birkhäuser, **88** (1990), 247–435.

[27] A. Musicantov, A. Yom Din, *Reciprocity laws and K-theory*, Annals of K-theory, **2-1** (2017), 27–46.

[28] G. Anderson, F. Pablos Romo, *Simple proofs of classical explicit reciprocity laws on curves using determinant groupoids over an artinian local ring*, Comm. Algebra, **32**:1, 79–102 (2004).

В одномерной ситуации такие формулы были найдены Конту-Каррером[29] и Делинем[30]. Соответствующее отображение из $K_2^M\big(A((t))\big)$ в A^* теперь называется символом Конту-Каррера. В двумерной ситуации аналогичные результаты были получены Осиповым и Жу[31]. В многомерной ситуации наличие явной формулы оставалось открытым вопросом, пока не были получены соответствующие результаты диссертации.

Специалистам, занимающимся подобными адельными вопросами, хорошо известно, что обычно при обобщении с одномерного случая на многомерный сложность возрастает коренным образом, так как многие важные одномерные факты перестают быть верными в двумерной ситуации. В данном случае это связано со следующим обстоятельством. В одномерной ситуации любой элемент из группы $A((t))^*$ раскладывается единственным образом в произведение степени элемента t, элемента из группы A^*, и бесконечного произведения элементов вида $1 - u_i t^i$, где $i \neq 0$, $u_i \in A$. Этот факт полезен сам по себе, а также из него следует, что функтор группы петель $L\mathbb{G}_m \colon A \mapsto A((t))^*$ на категории колец представим инд-плоской инд-аффинной схемой. Однако, как объясняется в работе Осипова–Жу, уже в двумерной ситуации неясно, как мог бы работать такой подход, а именно, неизвестно, раскладываются ли все элементы из группы $A((t_1))((t_2))^*$ в произведение элементов вида $1 - u_{i,j} t_1^i t_2^j$ для произвольного кольца A. Также неизвестно, представим ли функтор итерированной группы петель $L^2\mathbb{G}_m \colon A \mapsto A((t_1))((t_2))^*$ инд-плоской инд-аффинной схемой. Для того, чтобы обойти эту проблему в многомерной ситуации, в диссертации развивается принципиально новый метод работы с инд-аффинными схемами, а именно, теория так называемых толстых инд-конусов.

[29] C. Contou-Carrère, *Jacobienne locale, groupe de bivecteurs de Witt universel, et symbole modéré*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **318**:8 (1994), 743–746; C. Contou-Carrère, *Jacobienne locale d'une courbe formelle relative*, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova, **130** (2013), 1–106.

[30] P. Deligne, *Le symbole modéré*, Publ. Math. IHES, **73** (1991), 147–181.

[31] D. Osipov, X. Zhu, *The two-dimensional Contou-Carrère symbol and reciprocity laws*, J. Algebraic Geom., **25** (2016), 703–774.

Цель работы

— Исследование рациональных мотивов Чжоу трехмерных многообразий с представимыми нуль-циклами, а также целочисленных мотивов Чжоу трехмерных многообразий с K-мотивами единичного типа. Решение проблемы существования геометрических фантомов.

— Построение полярных комплексов с коэффициентами в расслоениях на гладких алгебраических многообразиях и описание когомологий данных комплексов.

— Нахождение нового геометрического подхода к итерированным группам петель, обходящего проблему отсутствия инд-плоского представления для итерированной группы петель группы $\mathbb{G}_m$. Описание непрерывных гомоморфизмов между алгебрами итерированных рядов Лорана.

— Построение и изучение многомерного символа Конту-Каррера. В частности, решение проблемы целочисленности явной формулы для многомерного символа Конту-Каррера над $\mathbb{Q}$-алгебрами, нахождение универсального свойства многомерного символа Конту-Каррера, его сравнение с композицией граничных отображений для алгебраических K-групп. Описание касательного пространства к K-группам Милнора в терминах абсолютных кэлеровых дифференциалов.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми. Основные из них состоят в следующем.

1. Доказано, что рациональный мотив Чжоу гладких проективных трехмерных многообразий с представимыми нуль-циклами раскладывается в прямую сумму прямых слагаемых в рациональных мотивах Чжоу кривых, подкрученных на степени мотива Лефшеца. Найден критерий того, что мотив Чжоу поверхности имеет лефшецев тип. При помощи данного критерия построен геометрический фантом в виде допустимой подкатегории в производной категории

произведения двух поверхностей общего типа. Доказана лефшецевость мотивов Чжоу гладких проективных трехмерных многообразий, K-мотив которых имеет единичный тип.

2. Для алгебраического многообразия над полем характеристики нуль определен полярный комплекс с коэффициентами в произвольном векторном расслоении. В случае гладкого многообразия доказано, что полярный комплекс векторного расслоения локально ацикличен в топологии Зарисского. При помощи этого доказано, что когомологии полярного комплекса векторного расслоения канонически изоморфны когомологиям данного векторного расслоения, подкрученного на канонический пучок.

3. Построена теория толстых инд-конусов, дающая принципиально новую технику работы с итерированными группами петель. Дано полное описание непрерывных гомоморфизмов между алгебрами итерированных рядов Лорана. При помощи теории толстых инд-конусов получен критерий обратимости таких эндоморфизмов, причем для обратного автоморфизма найдена явная формула, являющаяся новой даже в одномерном случае.

4. Доказано, что многомерный символ Конту-Каррера, заданный естественной формулой для $\mathbb{Q}$-алгебр, однозначно продолжается до морфизма функторов на категории всех колец, причем продолжение полилинейно и для него выполняется соотношение Стейнберга. При помощи теории толстых инд-конусов доказана целочисленность коэффициентов в явной формуле для многомерного символа Конту-Каррера над $\mathbb{Q}$-алгебрами. Доказано, что построенное Блохом отображение задает изоморфизм между касательным пространством к K-группам Милнора и абсолютными кэлеровыми дифференциалами при выполнении условия слабой 5-стабильности для рассматриваемого кольца. При помощи этого факта доказано универсальное свойство многомерного символа Конту-Каррера, утверждающее, что он является порождающей циклической группы всех возможных морфизмов групповых функторов из n-кратной группы петель $L^n K^M_{n+1}$ группы K^M_{n+1} в $\mathbb{G}_m$. Данное универсальное свойство является новым даже в одномерном случае. Из универсального свойства выведено, что многомерный символ Конту-

Каррера совпадет с композицией граничных отображений для алгебраических K-групп.

Методы исследования

В работе используются методы теории мотивов Чжоу, групп Чжоу, алгебраической K-теории, теории инд-схем, методы работы с разрешениями особенностей и общие методы теории многомерных локальных полей. Кроме того, для получения ряда существенных результатов диссертации был развит принципиально новый метод работы с инд-аффинными схемами, а именно, теория толстых инд-конусов.

Теоретическая и практическая ценность

Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в алгебраической геометрии, некоммутативной геометрии, арифметической геометрии, алгебраической K-теории и теории чисел.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались автором на семинаре отдела алгебры и отдела алгебраической геометрии (семинар И. Р. Шафаревича) и общеинститутском семинаре "Математика и ее приложения" Математического института им. В. А. Стеклова, семинаре "Глобус" Независимого московского университета, семинаре "Алгебро-геометрические методы в интегрируемых системах и квантовой физике" Моковского физико-технического университета, семинаре "Узлы и теория представлений" механико-математического факультета МГУ, семинаре Лаборатории алгебраической геометрии НИУ ВШЭ, коллоквиуме Исследовательской лаборатории им. П. Л. Чебышева (Санкт-Петербург), семинаре по алгебраической геометрии Университета Цюриха (Швейцария), семинаре "Algebra, Zahlentheorie und algebraische Geometrie" Университета Фрайбурга (Германия), семинаре "Géométrie et analyse" Математического института Марселя (Франция), семинаре по теории чисел Математического института Бордо (Франция), на семинарах "Autour des cycles algébriques" и "Géométrie algébrique" Математического института Жюссье (Париж, Франция), семинаре по алгебре Университета Индианы (Блумингтон, США), семинаре Института физики и математики Вселенной (Кашива, Япония), а также на международных конференциях, в том числе:

— летняя школа-конференция по проблемам алгебраической геометрии и комплексного анализа, 30 мая–4 июня 2008, ЯГПУ, Ярославль,

— международная конференция "Finiteness for Motives and Motivic Cohomology", 9–13 февраля 2009, Университет Регенсбурга, Германия,

— летняя школа-конференция по проблемам алгебраической геометрии и комплексного анализа, 11–16 мая 2009, ЯГПУ, Ярославль,

— международная конференция "Workshop on Integrable Systems, Random Matrices, Algebraic Geometry and Geometric Invariants", 7–10 февраля 2011, МИАН, Москва,

— международная конференция "Instantons in complex geometry", 14–15 марта 2011, НИУ ВШЭ и МИАН, Москва,

— международная конференция "Russian–German conference on higher-dimensional complex analysis", 27 февраля–2 марта 2012, МИАН, Москва,

— мемориальная конференция "Алгебраическая и дифференциальная геометрии Андрея Тюрина", 24–26 октября 2012, МИАН, Москва,

— международная конференция "Геометрия алгебраических многообразий", посвященная памяти В. А. Исковских, 22–25 октября 2013, МИАН, Москва,

— международная конференция "Caucasian Mathematics Conference CMC I", 5–6 сентября 2014, Тбилиси, Грузия,

— международная конференция "Zeta functions 5", 1–5 декабря 2014, Лаборатория Понселе, Москва,

— традиционная зимняя сессия МИАН–ПОМИ, посвященная теме "Алгебраическая геометрия, K-теория и мотивы", 18–20 декабря 2014, ПОМИ РАН, Санкт-Петербург,

— международная конференция "Magadan Algebraic Geometry International Conference", 6–12 декабря 2015, Магадан,

— международная конференция "Arithmetic and Geometry: Ten years in Alpbach", 26 июня–1 июля 2016, Альпбах, Австрия,

— международная конференция "Zeta functions 6", 14–18 декабря 2016, Лаборатория Понселе, Москва,

— международная конференция “Informal Geometry/Topology workshop”, 16–19 января 2017, SwissMAP, Бельальп, Швейцария,

— международная конференция “Motives, Periods and L-functions”, 10–12 апреля 2017, НИУ ВШЭ, Москва,

— международная конференция “Algebraic Geometry and its Applications”, 28 мая–2 июня 2018, Международный институт им. Леонарда Эйлера, Санкт-Петербург,

— международная конференция “Alpbach 2018: Galois Representations and Heights”, 1–6 июля 2018, Альпбах, Австрия,

— международная конференция “Motives and their applications”, 10–14 сентября 2018, Международный институт им. Леонарда Эйлера, Санкт-Петербург.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 11 работах автора, список которых приведен в конце автореферата.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, 5 глав, разбитых на параграфы, и списка литературы.

Содержание работы

Во введении приводится краткий обзор ранее известных результатов и результатов диссертации.

В первой главе приводятся все необходимые предварительные сведения, которые будут использоваться в остальных частях диссертации. За исключением § 1.5, а также предложения 1.4.11, все факты в этой главе хорошо известны.

В § 1.1 напоминаются определения и известные факты, относящиеся к мотивам Чжоу и K-мотивам. В частности, предложение 1.1.8 в § 1.1.2 утверждает, что из отсутствия кручения в K_0 следует отсутствие кручения в первой группе Чжоу. В § 1.1.4 объясняется эквивалентность между категорией рациональных K-мотивов и категорией, состоящей из рациональных мотивов Чжоу с морфизмами во все подкрутки на целые степени мотива Лефшеца.

Далее в § 1.2 рассматриваются K-группы Милнора, алгебраические K-группы, а также топологические и этальные K-группы. В 1.2.1 мы определяем K-группы Милнора $K_n^M(R)$ кольца R как фактор тензорной алгебры группы его обратимых элементов R^* по двустороннему идеалу, порожденному соотношением Стейнберга. В 1.2.2 мы напоминаем, следуя Грейсону[32] и Като[33], конструкцию граничного отображения для алгебраических K-групп $\partial\colon K_{n+1}\big(A((t))\big) \to K_n(A)$ и показываем его функториальность, где $A((t)) = A[[t]][t^{-1}]$ является кольцом рядов Лорана над A. В § 1.2.3 приводятся хорошо известные факты о K-когомологиях и спектральной последовательности Брауна–Герстена. Мы напоминаем в § 1.2.4 вытекающую из теоремы Меркурьева–Суслина точную последовательность (1.2.15), связывающую первые K-когомологии, третие этальные когомологии и кручение во второй группе Чжоу. В § 1.2.5 мы обсуждаем спектральную последовательность Атьи–Хирцебруха для топологических K-групп многообразий над полем $\mathbb{C}$ и этальных K-групп многообразий над произвольным сепарабельно замкнутым полем. Лемма 1.2.23 утверждает, что спектральная последовательность Атьи–Хирцебруха вырождается для гладких проективных трехмерных многообразий.

В § 1.3 обсуждаются K-мотивы в контексте производных категорий когерентных пучков. После краткого напоминания в § 1.3.1 о допустимых подкатегориях, мы объясняем в § 1.3.2 как для них строятся K-мотивы. В § 1.3.3 вводятся понятия фантомов и квазифантомов, см. определение 1.3.4, а в лемме 1.3.5 приводится один известный подход к построению квазифантомов для поверхностей общего типа, удовлетворяющих гипотезе Блоха. Также в теоремах 1.3.6, 1.3.7 и 1.3.8 приводятся примеры конкретных построений таких квазифантомов из работ других авторов.

Мы приводим общие свойства логарифмических форм в § 1.4. В § 1.4.1 определяются сами логарифмические формы, а также отображение вычета для них. В леммах 1.4.2 и 1.4.4 в § 1.4.2 обсуждается обратный образ

[32] D. Grayson, *Higher algebraic K-theory. II (after Daniel Quillen)*, Algebraic K-theory (Proc. Conf., Northwestern Univ., Evanston, Ill., 1976), Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, **551** (1976), 217–240.

[33] K. Kato, *A generalization of local class field theory by using K-groups. II*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math., **27**:3 (1980), 603–683.

и след для логарифмических форм. Мы приводим в § 1.4.3 полезные для нас в дальнейшем факты о разрешении особенностей многообразий над полем нулевой характеристики. В предложении 1.4.11 дано доказательство логарифмического варианта теоремы Грауэрта–Рименшнайдера о производном прямом образе пучка старших дифференциальных форм с полюсами первого порядка вдоль дивизора с простыми нормальными пересечениями. Отметим, что наше доказательство этого факта чисто алгебраическое.

В § 1.5 содержатся общие сведения о кольце итерированных рядов Лорана $\mathcal{L}^n(A)$ от n переменных над произвольным кольцом A. Оригинальность нашего подхода заключается в систематическом использовании некоторых явно определенных подмножеств $\mathbb{Z}^n_\lambda \subset \mathbb{Z}^n$, где λ принадлежит направленному множеству Λ_n, состоящему из специальных наборов целозначных функций, см. подробнее в § 1.5.1. Приведенные в лемме 1.5.1 комбинаторные факты о множествах $\mathbb{Z}^n_\lambda$ позволяют эффективно применять эти множества к описанию различных важных свойств топологии на кольце $\mathcal{L}^n(A)$, см. § 1.5.2. В предложении 1.5.9 в § 1.5.3 мы даем явное описание кольца ограниченных по степени элементов $\mathcal{L}^n(A)^0$ в $\mathcal{L}^n(A)$, а также его идеала топологически нильпотентных элементов $\mathcal{L}^n(A)^\sharp$. В § 1.5.4 приводятся элементарные свойства некоторых естественных факторов $\widetilde{\Omega}^i_{\mathcal{L}^n(A)}$ модулей абсолютных дифференциальных форм $\Omega^i_{\mathcal{L}^n(A)}$.

Во второй главе мы доказываем различные утверждения о мотивах Чжоу, K-мотивах, а также приводим их приложения.

В § 2.1 мы изучаем мотивы Чжоу многообразий, для которых нуль-циклы или, более обще, алгебраические циклы могут быть выражены в правильном смысле через нуль-циклы на многообразиях меньшей размерности. В § 2.1.1 мы приводим один удобный способ представить эффективный мотив Чжоу в виде прямого слагаемого в других мотивах Чжоу, см. предложение 2.1.6. У данного способа есть несколько полезных приложений, см. следствия 2.1.10, 2.1.11 и 2.1.12. В § 2.1.2 при помощи этих фактов мы доказываем теорему 2.1.24, утверждающую, что если для равноразмерного гладкого проективного многообразия X размерности d его группы Чжоу $CH^i(X)$, $d - r \leqslant i \leqslant d$, можно выразить через группы Чжоу нуль-циклов некоторого многообразия размерности $e < d-2r$, см. подробнее в определении 2.1.22(ii), то мотив Чжоу $M(X)$

состоит из подкруток на степени мотива Лефшеца прямых слагаемых в мотивах Чжоу многообразий размерности e и $d-2r-2$ (на самом деле, теорема 2.1.24 дает более точное описание мотива Чжоу $M(X)$). Из этого легко выводится следующая теорема.

Теорема 2.1.32. *Пусть X является неприводимым гладким проективным трехмерным многообразием над алгебраически замкнутым полем k. Предположим, что существует расширение полей $k \subset \Omega$, для которого Ω является универсальной областью и ядро отображения Абеля–Якоби $CH^d(X_\Omega)_0 \to \mathrm{Alb}(X)(\Omega)$ тривиально. Тогда существует изоморфизм рациональных мотивов Чжоу*

$$M(X)_\mathbb{Q} \simeq \mathbb{1} \oplus \big(P^\vee \otimes \mathbb{L}\big) \oplus \mathbb{L}^{\oplus n} \oplus \big(Q \otimes \mathbb{L}\big) \oplus (\mathbb{L}^2)^{\oplus n} \oplus \big(P \otimes \mathbb{L}^2\big) \oplus \mathbb{L}^3\,,$$

где $n \geqslant 0$, рациональные мотивы Чжоу P и Q являются прямыми слагаемыми в $M^1(C)_\mathbb{Q}$ и $M^1(D)_\mathbb{Q}$ для некоторых неприводимых гладких проективных кривых C и D над k, соответственно.

Условие теоремы 2.1.32 выполнено для целого ряда трехмерных многообразий. В частности, оно выполнено для всех трехмерных многообразий Фано, а также для рациональных расслоений на поверхности дель Пеццо или на поверхности Энриквеса над кривой, см. замечание 2.1.33. В § 2.1.3 мы определяем степень трансцендентности для элементов группы Чжоу нуль-циклов. Данное понятие тесно связано с представимостью нуль-циклов, см. предложение 2.1.35 и комментарий после него. Мы получаем следующее приложение к коммутативной алгебре.

Теорема 2.1.38. *Для любых натуральных чисел d и r существуют конечно порожденная регулярная алгебра R над полем $\mathbb{C}$ размерности d и конечно порожденный проективный R-модуль M ранга r такие, что M не порождается $d+r-1$ элементами над R.*

Заметим, что по теореме Форстера–Суона[34] модуль M всегда можно породить над R при помощи $d+r$ элементов. Суон[35] доказал утверждение, аналогичное теореме 2.1.38, для алгебр над полем $\mathbb{R}$, существенно используя его алгебраическую незамкнутость. Насколько нам известно,

[34] O. Forster, *Über die Anzahl der Erzeugenden eines Ideals in einem Noetherschen Ring*, Mathematische Zeitschrift, **84** (1964), 80–87; R. Swan, *The number of generators of a module*, Mathematische Zeitschrift, **102** (1967), 318–322.

[35] R. Swan, *Vector bundles and projective modules*, Transactions of the American Mathematical Society, **105**:2 (1962), 264–277.

до сих пор в литературе не было предложено ни одного примера для случая, когда основное поле алгебраически замкнуто. Данный вопрос был поставлен автору В. Н. Желябиным в контексте теории простых йордановых супералгебр.

В § 2.2 мы исследуем мотивы Чжоу лефшецева типа и K-мотивы единичного типа. В § 2.2.1 приведены некоторые общие свойства мотивов Чжоу лефшецева типа, а также критерий того, что мотив Чжоу имеет лефшецев тип, см. предложение 2.2.5. Аналогичным образом в § 2.2.2 рассмотрены K-мотивы, см. соответствующий критерий в предложении 2.2.13. При помощи полученных критериев в предложении 2.2.16 в § 2.2.3 показано, что из лефшецевости мотива Чжоу многообразия следует, что его K-мотив имеет единичный тип.

Далее, § 2.3 посвящен построению геометрического фантома. С этой целью в § 2.3.1 приведено одно техническое утверждение, основанное на теореме Меркурьева–Суслина, являющееся для нас ключевым при установлении того, что мотивы Чжоу имеют лефшецев тип, см. предложение 2.3.1. Из данного утверждения в § 2.3.2 выведен следующий важный критерий.

Следствие 2.3.4. *Предположим, что поле k является универсальной областью характетистики нуль (например, $k = \mathbb{C}$). Тогда мотив Чжоу $M(S)_{1/n}$ имеет лефшецев тип тогда и только тогда, когда выполняются два условия:*

(i) отображение $\deg\colon CH^2(S)_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}$ *является изоморфизмом;*

(ii) имеется равенство $n \cdot \mathrm{Pic}(S)_{\mathrm{tors}} = 0$.

При помощи этого критерия в теореме 2.3.9 приводится общий способ построения геометрических фантомов. В частности, мы получаем следующий результат, утверждающий существование геометрического фантома.

Следствие 2.3.10. *Пусть S является классической поверхностью Годо над $\mathbb{C}$, а S' является поверхностью Бюрниа над $\mathbb{C}$ с рангом группы Пикара равным 4. Пусть $\mathcal{N} \subset D^b(S)$ и $\mathcal{N}' \subset D^b(S')$ — квазифантомы из теорем 1.3.6 и 1.3.7, соответственно. Тогда допустимая подкатегория $\mathcal{N} \boxtimes \mathcal{N}' \subset D^b(S \times S')$ является геометрическим универсальным фантомом.*

В § 2.4 мы исследуем многообразия размерности не больше 3 с K-мотивом единичного типа. Сначала в § 2.4.1 приводится несколько вспомогательных утверждений, относящихся к фильтрованым решеткам с унимодулярным спариванием и линейным функционалом. Далее в § 2.4.2 это применяется к решетке K_0 с фильтрацией по коразмерности носителя, с естественным симметрическим спариванием и с функционалом, являющимся эйлеровой характеристикой. В результате при помощи упомянутого выше ключевого технического утверждения, т.е. предложения 2.3.1, а также при помощи вырождения спектральной последовательности Атьи–Хирцебруха для трехмерных многообразий, доказывается следующая теорема.

Теорема 2.4.7. *Пусть X является гладким проективным многообразием размерности d над k. Предположим, что K-мотив $KM(X)$ имеет единичный тип, и что выполняется одно из следующих условий:*

(i) имеется неравенство $d \leqslant 2$;

(ii) имеется равенство $d = 3$ и характеристика поля k не равна 2.

Тогда мотив Чжоу $M(X)$ имеет лефшецев тип.

В частности, трехмерные многообразия с полным исключительным набором над полем характеристики, не равной 2, имеют мотив Чжоу лефшецева типа.

В третьей главе мы строим полярный комплекс для локально свободных пучков на алгебраических многообразиях и доказываем теорему, сравнивающую его когомологии с когомологиями локально свободных пучков.

В § 3.1 описан основной результат и обсуждаются некоторые общие идеи вокруг него. В § 3.1.1 приведены основные определения. А именно, для локально свободного пучка $\mathcal{F}$ на многообразии X и неприводимого подмногообразия $Z \subset X$ среди всех рациональных сечений на Z пучка $\omega_Z \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{F}|_Z$ выделен класс специальных сечений, названных полярными, см. определение 3.1.1. Группа таких полярных сечений обозначается через $\mathrm{Pol}_Z(\mathcal{F}|_Z)$. Можно сказать, что полярные элементы — это рациональные сечения, имеющие полюса не выше первого порядка в правильном смысле. Подобно комплексу Герстена из групп $\mathrm{Pol}_Z(\mathcal{F}|_Z)$ строится комплекс $\mathrm{Pol}_\bullet(X,\mathcal{F})$, называемый полярным комплексом, см. определение 3.1.3. Члены полярного комплекса имеют вид $\bigoplus_Z \mathrm{Pol}_Z(\mathcal{F}|_Z)$, где прямая сумма берется по всем неприводимым подмногообразиям $Z\subset X$ фиксированной размерности. Вычет логарифмических форм задает дифференциал в полярном комплексе. Сформулируем основную теорему данной главы.

Теорема 3.1.4. *Пусть X — гладкое неприводимое квазипроективное многообразие размерности d, а $\mathcal{F}$ — локально свободный пучок на X. Тогда имеется канонический изоморфизм*

$$H^{d-p}(X,\omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{F})\simeq H_p\big(\mathrm{Pol}_\bullet(X,\mathcal{F})\big)\,,\qquad 0\leqslant p\leqslant d\,.$$

В § 3.1.2 приводятся топологические мотивировки для построения полярного комплекса. А именно, объясняется словарь, позволяющий переводить понятия из мира вещественных многообразий в мир комплексных многообразий. С этой точки зрения основная теорема оказывается по своей формулировке переводом теоремы де Рама, сравнивающей когомологии де Рама с сингулярными когомологиями, см. предложение 3.1.7.

Теорема 3.1.4 доказывается в § 3.2. Доказательство проводится в несколько шагов. А именно, сначала в § 3.2.1 для каждого локально свободного пучка $\mathcal{F}$ определяется некоторый подпучок абелевых групп $\mathcal{F}_{\mathrm{pol}}$ в $\mathcal{F}$, названный полярным пучком, см. определение-предложение 3.2.4. Рассмотрение полярных пучков позволяет разделить основную теорему на два утверждения о полярных пучках. Приведем первое из них. Полярный комплекс $\mathrm{Pol}_\bullet(X,\mathcal{F})$ естественным образом определяет комплекс вялых пучков $\underline{\mathrm{Pol}}_\bullet(X,\mathcal{F})$, см. определение 3.2.1.

Теорема 3.2.6. *Пусть X — гладкое неприводимое квазипроективное многообразие размерности d, а $\mathcal{F}$ — локально свободный пучок на X. Тогда комплекс пучков $\underline{\mathrm{Pol}}_\bullet(X,\mathcal{F})$ на X является вялой резольвентой пучка $(\omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{F})_{\mathrm{pol}}$, т.е. следующая последовательность пучков точна:*

$$0\longrightarrow(\omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{F})_{\mathrm{pol}}\longrightarrow\underline{\mathrm{Pol}}_d(X,\mathcal{F})\xrightarrow{\partial}\underline{\mathrm{Pol}}_{d-1}(X,\mathcal{F})\xrightarrow{\partial}\ldots$$

$$\ldots\xrightarrow{\partial}\underline{\mathrm{Pol}}_0(X,\mathcal{F})\longrightarrow 0\,.$$

Второе утверждение заключается в том, что вложение $\mathcal{F}_{\mathrm{pol}} \subset \mathcal{F}$ задает изоморфизм на когомологиях данных пучков, см. теорему 3.2.7. Заметим, что теорема 3.2.6 может быть интерпретирована как теорема о локальной точности комплекса Герстена для некоторого непостоянного модуля циклов Роста над X. В § 3.2.2 мы доказываем несколько простых вспомогательных утверждение о полярных элементах, фактически при этом показывая, что полярные элементов задают модуль циклов Роста, см. определение 3.2.11 и предложение 3.2.13. В § 3.2.4 мы применяем некоторую модификацию трюка Квиллена в K-теории, чтобы доказать теорему 3.2.6 для проективных многообразий. Теорема 3.2.7 также сначала доказывается в § 3.2.5 только для проективных многообразий. Наконец, в § 3.2.6 мы сводим общий случай к проективному.

В § 3.3 обсуждаются связи между полярным комплексом и некоторыми другими понятиями. В § 3.3.1 объясняется, что полярные элементы задают модуль циклов Роста. При помощи этого, а также при помощи стандартных фактов из теории смешанных структур Ходжа дается новое доказательство основной теоремы в частном случае, когда векторное расслоение тривиально, а многообразие проективно. В § 3.3.2 показано, как полярные циклы позволяют строить отображение класса цикла из групп Чжоу в когомологии пучков дифференциальных форм. Наконец, в § 3.3.3 доказывается, что полярный комплекс совпадает с подкомплексом в комплексе Кузена векторного расслоения, состоящим из сечений, имеющих полюса не выше первого порядка. Таким образом, теорема 3.1.4 утверждает, что комплекс Кузена квазиизоморфен такому подкомплексу.

В четвертой главе мы развиваем геометрический подход к описанию итерированных рядов Лорана и демонстрируем его эффективность серией новых утверждений об итерированных рядах Лорана.

В § 4.1 мы фиксируем обозначения и соглашения, в основном касающиеся инд-схем и функторов на категории колец.

В § 4.2 для произвольного группового функтора F на категории колец и натурального числа $n \geqslant 1$ мы определяем итерированную группу петель $L^nF\colon A \mapsto F\big(\mathcal{L}^n(A)\big)$, см. определение 4.2.1, и исследуем итерированную группу петель $L^n\mathbb{G}_m$. Мы строим в предложении 4.2.8 разложение группы $L^n\mathbb{G}_m$, обобщающее результат Конту-Каррера для случая $n = 1$. Также мы вводим специальные групповые подфункторы $(L^n\mathbb{G}_m)^0$

и $(L^n\mathbb{G}_m)^\sharp$ в $L^n\mathbb{G}_m$, см. определение 4.2.13. А именно, $(L^n\mathbb{G}_m)^0$ является группой итерированных рядов Лорана с тривиальным значением итерированного аналога нормирования $\nu\colon L^n\mathbb{G}_m \to \underline{\mathbb{Z}}^n$, а $(L^n\mathbb{G}_m)^\sharp$ является подгруппой группы $(L^n\mathbb{G}_m)^0$, для которой над $\mathbb{Q}$ корректно определено отображение логарифма, см. предложение 4.2.21. Для любого кольца A группа $(L^n\mathbb{G}_m)^0(A)$ совпадает с группой обратимых элементов в кольце ограниченных по степени элементов $\mathcal{L}^n(A)^0$, и имеется равенство $(L^n\mathbb{G}_m)^\sharp(A) = 1 + \mathcal{L}^n(A)^\sharp$, см. следствие 4.2.17.

В § 4.3 развивается теория толстых инд-конусов. Сначала в § 4.3.1 мы приводим краткое описание инд-аффинных схем. Затем в § 4.3.2 мы вводим кольцо степенных рядов от бесконечного множества переменных, см. определение 4.3.1, определяем алгебраическую сходимость степенных рядов, см. определение 4.3.3, и рассматриваем некоторые инд-замкнутые подсхемы в инд-аффинных пространствах, которые состоят из точек с нильпотентными координатами, см. определение 4.3.8. Данные инд-замкнутые подсхемы используются для определения толстых инд-конусов, см. определения 4.3.13, 4.3.16. Главные свойства толстых инд-конусов содержатся в предложениях 4.3.17, 4.3.23 и леммах 4.3.19, 4.3.20. Наконец, в § 4.3.5 мы обсуждаем связность инд-схем над базовым кольцом, а в § 4.3.6 мы обсуждаем плотность инд-замкнутой подсхемы в инд-аффинной схеме.

В § 4.4 теория толстых инд-конусов применяется к итерированным группам петель. Сначала вводится некоторое некоммутативное произведение (строгих) инд-множеств, см. определение 4.4.1. Данное произведение используется для доказательства представимости итерированных групп петель, см. предложение 4.4.6. Затем доказывается, что инд-аффинные схемы, представляющие функтор $L^n\mathbb{G}_m$ и его специальные подгруппы, являются произведениями толстых инд-конусов и инд-плоских инд-аффинных схем, см. предложение 4.4.8. Это приводит ко многим хорошим свойствам данных инд-аффинных схем, см. теоремы 4.4.10 и 4.4.12.

Теорема 4.4.12. *Пусть даны вложение колец $R \subset S$, инд-плоская инд-аффинная схема Y над R, аффинная схема Z над R и натуральное число N. Тогда естественное отображение*

$$\mathrm{Hom}_R\left((L^n\mathbb{G}_m)_R^{\times N} \times Y, Z\right) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S\left((L^n\mathbb{G}_m)_S^{\times N} \times Y_S, Z_S\right)$$

инъективно.

Мы также показываем, что инд-аффинная схема $(L^n\mathbb{G}_m)^0$ связна и что инд-замкнутая подсхема $(L^n\mathbb{G}_m)^\sharp$ плотна в инд-аффинной схеме $(L^n\mathbb{G}_m)^0$, см. предложение 4.4.13. Мы изучаем в § 4.4.5 характеры группового функтора $L^n\mathbb{G}_m$ над $\mathbb{Q}$ и доказываем, что они коммутируют с их дифференциалами через экспоненциальное отображение, см. предложения 4.4.20 и 4.4.22. Наконец, мы показываем в § 4.4.6, что любое функториальное линейное отображение $\Omega^n_{A((t_1))\dots((t_n))} \to A$ пропускается через группу "непрерывных" дифференциальных форм $A((t_1))\dots((t_n))dt_1 \wedge \dots \wedge dt_n$, см. предложение 4.4.24.

В § 4.5 мы изучаем непрерывные гомоморфизмы между кольцами итерированных рядов Лорана. Мы устанавливаем в § 4.5.1, что непрерывные гомоморфизмы — это то же самое, что функториальные гомоморфизмы, см. предложение 4.5.3 и следствие 4.5.5. В § 4.5.2 мы даем явное описание всех непрерывных гомоморфизмов $\phi\colon \mathcal{L}^n(A) \to \mathcal{L}^m(A)$ между A-алгебрами итерированных рядов Лорана, см. теорему 4.5.14. В частности, для любого такого гомоморфизма $(m \times n)$-матрица $\Upsilon(\phi) := \big(\nu(\phi(t_1)), \dots, \nu(\phi(t_n))\big)$ с локально постоянными на схеме $\mathrm{Spec}(A)$ целыми элементами имеет ступенчатый вид по столбцам с положительными ведущими элементами (ср. с леммой 4.5.10(ii)). Из теоремы 4.5.14 следует, что при $n > m$ таких гомоморфизмов ϕ не существует, см. следствие 4.5.15. В качестве другого приложения мы получаем в § 4.5.3, что функтор, сопоставляющий коммутативному кольцу A множество всех непрерывных гомоморфизмов A-алгебр из $\mathcal{L}^n(A)$ в $\mathcal{L}^m(A)$, представим инд-аффинной схемой над $\mathbb{Z}$, которая является произведением инд-плоской схемы над $\mathbb{Z}$ и толстого инд-конуса, см. предложение 4.5.19 и следствие 4.5.20. В § 4.5.4 мы описываем в предложении 4.5.25 и в следствии 4.5.27 как меняется вычет старших дифференциальных форм при непрерывных гомоморфизмах. Наконец, при $m = n$ мы приводим в § 4.5.5 критерий обратимости непрерывных эндоморфизмов.

Теорема 4.5.40. *Непрерывный эндоморфизм A-алгебры $\phi\colon \mathcal{L}^n(A) \to \mathcal{L}^n(A)$ обратим тогда и только тогда, когда обратима матрица $\Upsilon(\phi)$, т.е. когда на ее диагонали стоят единицы. Более того, если эндоморфизм ϕ обратим, то выполняется равенство $\phi^{-1} = \phi^\vee$.*

Здесь $\phi^\vee$ является сопряженным отображением к индуцированному отображению $\phi\colon \widetilde{\Omega}^n_{\mathcal{L}^n(A)} \to \widetilde{\Omega}^n_{\mathcal{L}^n(A)}$ (которое мы обозначаем также через ϕ) относительно совершенного непрерывного спаривания

$$\mathcal{L}^n(A) \times \widetilde{\Omega}^n_{\mathcal{L}^n(A)} \longrightarrow A\,, \qquad (f,\omega) \longmapsto \operatorname{res}(f\omega)\,.$$

Доказательство критерия обратимости основано на инвариантности отображения вычета, а также на приведенном выше результате о представимости функтора и на теории толстых инд-конусов. Описание обратного к непрерывному автоморфизму ϕ как сопряженного отображения непосредственно дает явную формулу для ϕ^{-1}, см. комментарий после доказательства теоремы 4.5.40. Нам не известно ни одно элементарное, непосредственно вычислительное, доказательство данной формулы даже для случая, когда A является полем.

В пятой главе проводится масштабное исследование многомерного символа Конту-Каррера.

В § 5.1 дается конструкция многомерного символа Конту-Каррера. При этом сначала в § 5.1.1 рассматривается более простой случай многомерного аддитивного символа, см. предложение 5.1.1, что позволяет увидеть частично схему рассуждений, связанную с многомерным символом Конту-Каррера. В § 5.1.2 многомерный символ Конту-Каррера задается для $\mathbb{Q}$-алгебр явной формулой, см. теорему 5.1.4(i). Существенным образом, данная формула сводится к формуле

$$(f_1, f_2, \ldots, f_{n+1}) \longmapsto \exp\operatorname{res}\left(\log(f_1)\,\frac{df_2}{f_2}\wedge\ldots\wedge\frac{df_{n+1}}{f_{n+1}}\right)\,,$$

где предполагается, что $f_1 \in (L^n\mathbb{G}_m)^\sharp(A)$. Поскольку эта формула использует ряды для экспоненты и логарифма, изначально она применима лишь для $\mathbb{Q}$-алгебр. Несложно проверяется, что для данной явной формулы выполняется соотношение Стейнберга, см. теорему 5.1.4(ii), т.е. возникает многомерный символ Конту-Каррера для $\mathbb{Q}$-алгебр

$$(CC_n)_{\mathbb{Q}} \;:\; (L^nK^M_{n+1})_{\mathbb{Q}} \longrightarrow (\mathbb{G}_m)_{\mathbb{Q}}\,.$$

Также непосредственно проверяется инвариантность многомерного символа Конту-Каррера для $\mathbb{Q}$-алгебр относительно автоморфизмов алгебры итерированных рядов Лорана, см. предложение 5.1.11. В § 5.1.3 рациональный многомерный символ Конту-Каррера продолжается однозначным образом до морфизма функторов

$$CC_n \;:\; L^n K^M_{n+1} \longrightarrow \mathbb{G}_m \,,$$

который мы и называем многомерным символом Конту-Каррера. Однозначность такого продолжения непосредственно выводится из теории толстых инд-конусов, см. теорему 5.1.14(ii). Главная сложность заключается в доказательстве существования такого продолжения. Для этого при помощи инвариантности многомерного символа Конту-Каррера для $\mathbb{Q}$-алгебр все сводится к каноническому гомоморфизму $\pi\colon L^n\mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$, см. формулу (4.2.11), возникающему из многомерного аналога разложения Конту-Каррера группы обратимых рядов Лорана из предложения 4.2.8, см. подробнее в теореме 5.1.14(i) и в ее доказательстве. Также при этом существенным образом используется приведенный выше критерий обратимости эндоморфизмов алгебры итерированных рядов Лорана из теоремы 4.5.40.

В § 5.2 обсуждаются различные явные формулы для многомерного символа Конту-Каррера. Сначала в § 5.2.1 доказывается, что, на самом деле, в явной формуле для рационального многомерного символа Конту-Каррера "все знаменатели сокращаются", см. теорему 5.2.3, т.е. явная формула задается рядом с целыми коэффициентами от коэффициентов рядов Лорана, к которым применяется символ Конту-Каррера. Это следует непосредственно из теории толстых инд-конусов и из существования продолжения рационального символа Конту-Каррера на все кольца. Нам не известен ни один явный комбинаторный способ доказать, что указанные выше коэффициенты не содержат нетривиальных знаменателей. Далее, из доказательства теоремы 5.1.14(i) о существовании продолжения рационального символа Конту-Каррера сама по себе возникает явная формула для всех колец. Она описана более подробно в § 5.2.2. Наконец, применяя теорию толстых инд-конусов и исходную явную формулу для рационального многомерного символа Конту-Каррера, можно посчитать многомерный символ Конту-Каррера для некоторых специальных колец A, содержащих нильпотенты. Такие примеры вычислений рассматриваются в § 5.2.3, см. предложения 5.2.8, 5.2.10. В лемме 5.2.16 и в предложении 5.2.18 мы связываем многомерный символ Конту-Каррера с многомерным обобщением спаривания Витта, используемым в явном подходе к многомерной локальной теории полей классов.

Далее, § 5.3 посвящен описанию касательного пространства к K-группам Милнора в терминах абсолютных кэлеровых дифференциалов. Такое описание необходимо нам для доказательства универсального свойства многомерного символа Конту-Каррера. В то же время, данное описание представляет собой и независимый интерес. Блох[36] построил для произвольного кольца R, содержащего $\frac{1}{2}$, канонический гомоморфизм $B\colon TK^M_{n+1}(R) \to \Omega^n_R$, см. определение 5.3.6. Мы доказываем следующий результат.

Теорема 5.3.8. *Пусть R — слабо 5-стабильное кольцо, содержащее элемент $\frac{1}{2}$. Тогда гомоморфизм $B\colon TK^M_{n+1}(R) \to \Omega^n_R$ является изоморфизмом.*

Слабая 5-стабильность кольца R означает, что к любой четверке элементов в R можно прибавить обратимый элемент так, чтобы это стала четверка обратимых элементов. Заметим, что, используя сложные результаты ван дер Каллена[37] в алгебраической K-теории, можно получить вариант теоремы 5.3.8 в более слабой форме, а именно, для 5-стабильных колец. Тем не менее, это не подходит для наших целей вследствие замечания 5.3.3(ii). Кроме того, наше доказательство теоремы 5.3.8 совершенно явное, оно заключается в сведении всех необходимых тождеств в K-группах Милнора к соотношению Стейнберга. Заметим, что впоследствии автором и Д. Н. Тюриным[38] было установлено существенное обобщение теоремы 5.3.8, также доказанное явными методами.

В § 5.4 мы применяем теорему 5.3.8 к доказательству универсального свойства символа Конту-Каррера. А именно, рассмотрим морфизм групповых функторов

$$\Theta \ : \ \mathbb{G}_m \longrightarrow L^n K^M_{n+1}\,, \qquad a \longmapsto \{a, t_1, \ldots, t_n\}\,,$$

[36] S. Bloch, *On the tangent space to Quillen K-theory*, Algebraic K-theory, I: Higher K-theories (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972), Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, **341** (1973), 205–210.

[37] W. van der Kallen, *Le K_2 des nombres duaux*, (French) C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B, **273** (1971), 1204–1207; W. van der Kallen, *The K_2 of rings with many units*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4), **10**:4 (1977), 473–515.

[38] S. O. Gorchinskiy, D. N. Tyurin, *Relative Milnor K-groups and differential forms of split nilpotent extensions*, Izv. Math., **82**:5 (2018), 880–913.

где $a \in A^*$ для кольца A. Напомним, что для любого кольца R имеется изоморфизм групп $\mathrm{Hom}^{gr}_R\big((\mathbb{G}_m)_R, (\mathbb{G}_m)_R\big) \simeq \underline{\mathbb{Z}}(R)$, см. лемму 4.4.19(ii).

Теорема 5.4.1. *Для любого кольца R, не содержащего $\mathbb{Z}$-кручения, естественный гомоморфизм групп*

$$\Theta^*_R \;:\; \mathrm{Hom}^{gr}_R\big((L^n K^M_{n+1})_R, (\mathbb{G}_m)_R\big) \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}}(R)\,, \qquad \Phi \longmapsto \Phi \circ \Theta_R\,,$$

является изоморфизмом, причем $\Theta^*(CC_n) = 1$.

Мы рассматриваем теорему 5.4.1 как главный результат о многомерном символе Конту-Каррера. В частности, из него следует, что CC_n совпадает с композицией граничных отображений для алгебраических K-групп, см. следствие 5.4.2. В целом доказательство теоремы заключается в переходе от кольца R к кольцу $S := R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ при помощи теории толстых инд-конусов. Так как S является $\mathbb{Q}$-алгеброй, то можно свести описание характера группового функтора $(L^n K^M_{n+1})_S$ к описанию его дифференциала. Далее надо применить изоморфизм из теоремы 5.3.8.

Работы автора по теме диссертации

1. S. Gorchinskiy, V. Guletskii, *Motives and representability of algebraic cycles on threefolds over a field*, Journal of Algebraic Geometry, **21**:2 (2012), 347–373.

2. S. Gorchinskiy, V. Guletskii, *Transcendence degree of zero-cycles and the structure of Chow motives*, Cent. Eur. J. Math., **10**:2 (2012), 559–568.

3. S. Gorchinskiy, D. Orlov, *Geometric Phantom Categories*, Publications Mathématiques de l'IHÉS, **117**:1 (2013), 329–349.

4. С. О. Горчинский, *Порождаемость модулей и трансцендентность нуль-циклов*, Изв. РАН. Сер. матем., **77**:4 (2013), 55–58.

5. S. Gorchinskiy, A. Rosly, *A polar complex for locally free sheaves*, International Mathematics Research Notices, **2015**:10 (2015), 2784–2829.

6. С. О. Горчинский, Д. В. Осипов, *Явная формула для многомерного символа Конту–Каррера*, УМН, **70**:1(421) (2015), 183–184.

7. С. О. Горчинский, Д. В. Осипов, *Касательное пространство к K-группам Милнора колец*, Современные проблемы математики, механики и математической физики, Сборник статей, Тр. МИАН, **290**, МАИК, М., 2015, 34–42.

8. С. О. Горчинский, Д. В. Осипов, *Многомерный символ Конту-Каррера: локальная теория*, Матем. сб., **206**:9 (2015), 21–98.

9. С. О. Горчинский, Д. В. Осипов, *Непрерывные гомоморфизмы между алгебрами итерированных рядов Лорана над кольцом*, Современные проблемы математики, механики и математической физики. II, Сборник статей, Тр. МИАН, **294**, МАИК, М., 2016, 54–75.

10. С. О. Горчинский, Д. В. Осипов, *Многомерный символ Конту-Каррера и непрерывные автоморфизмы*, Функц. анализ и его прил., **50**:4 (2016), 26–42.

11. S. Gorchinskiy, *Integral Chow motives of threefolds with K-motive of unit type*, Bull. of Korean Math. Soc., **54**:5 (2017), 1827–1849.

Подписано в печать 27.12.2018 г.
Тираж 100 экз.

Отпечатано в Математическом Институте им. В.А. Стеклова РАН
Москва, 119991, ул. Губкина, д.8