Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Математический Институт им. В. А. Стеклова
Российской Академии Наук

На правах рукописи

Быков

Быков Дмитрий Владимирович

ДВУМЕРНЫЕ СИГМА-МОДЕЛИ И ПРОСТРАНСТВА ФЛАГОВ

Специальность: 01.04.02 – теоретическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва 2018

УДК 530.145

Работа выполнена в ФГБУН «Математический Институт им. В. А. Стеклова РАН», г. Москва

Научный консультант

Славнов Андрей Алексеевич – доктор физико-математических наук, академик РАН, профессор, главный научный сотрудник отдела теоретической физики ФГБУН Математический институт им. В.А. Стеклова РАН (специальность 01.04.02)

Официальные оппоненты:

Иванов Евгений Алексеевич – доктор физико-математических наук, профессор, начальник сектора Лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова Международной межправительственной организации Объединенный институт ядерных исследований (специальность – 01.04.02)

Кетов Сергей Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор Исследовательской школы физики высокоэнергетических процессов ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Томский политехнический университет» (специальность 01.04.02)

Мальцев Андрей Яковлевич, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник сектора современных проблем математики ФГБУН Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН (специальность 01.01.03)

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Санкт-Петербургское Отделение Математического Института им. В.А. Стеклова РАН

Защита диссертации состоится 15 ноября 2018 г. в 14 час. на заседании диссертационного совета Д 002.022.02 в конференц-зале МИАН по адресу: г. Москва ул. Губкина, д. 8.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МИАН и на сайте
http://www.mi-ras.ru/dis/ref18/bykov/dis.pdf
Автореферат разослан «______»___________ 2018 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физ.-мат. наук, профессор Ю. Н. Дрожжинов

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности

Диссертация посвящена исследованию сигма-моделей пространств флагов. Такие модели возникают, например, при описании длинноволновых возбуждений спиновых цепочек вблизи анти-ферромагнитного состояния (предел Халдейна). В диссертации исследованы непрерывные пределы спиновых цепочек, а также предложены сигма-модели пространств флагов, допускающие представление нулевой кривизны. Приводятся аргументы в пользу классической интегрируемости этих моделей.

Предмет исследования по существу находится на стыке между двумя важнейшими разделами теоретической физики – физикой твердого тела (спиновые цепочки) и физикой элементарных частиц (сигма-модели). Теория предела Халдейна устанавливает связь между этими двумя областями и расширяет возможности исследования как спиновых цепочек, так и сигма-моделей. В физике твердого тела обычно рассматриваются цепочки, в которых спины могут принимать значения в произвольном представлении соответствующей алгебры Ли, однако на практике лишь цепочки с наименьшими значениями спинов оказываются интегрируемыми методами анзаца Бете. Описание при помощи сигма-модели, наоборот, справедливо, строго говоря, в пределе бесконечного спина. В исходном построении Халдейна, который рассматривал гейзенберговскую цепочку с $SU(2)$-симметрией, в непрерывном пределе возникала сигма-модель пространства S^2, которая, как известно, интегрируема при нулевом значении θ-угла. Таким образом, Халдейн смог воспользоваться фактами, уже известными относительно данной сигма-модели (например, существованием массовой щели в спектре частиц) для получения информации о неинтегрируемых спиновых цепочках с целыми спинами (целые спины соответствуют нулевому θ-углу). В случае полуцелых спинов в σ-модели возникает θ-угол $\theta = \pi$: о таких моделях известно значительно меньше, зато при спине $\frac{1}{2}$ спиновая цепочка является интегрируемой, и из точного решения известно, что щель в спектре собственных значений гамильтониана отсутствует. Впоследствии были доказаны даже более сильные утверждения об отсутствии щели для спиновых цепочек с полуцелым спином и невырожденным основным состоянием, а также предложены аргументы в пользу конформности и самой сигма-модели с топологическим углом $\theta = \pi$. Численные вычисления на решетке также подтверждают данную гипотезу.

Теория интегрируемых моделей уже долгие годы находится на передовом рубеже исследований как физике, так и в математике. В последние пятнадцать лет развитие данной области получило дополнительный импульс благодаря открытию интегрируемых структур в AdS/CFT-соответствии. Удалось по существу решить так называемую спектральную задачу для $\mathcal{N} = 4$ теории супер-Янга-Миллса в пределе большого числа ‘цветов’, т.е. определить аномальные размерности калибровочно-инвариантных операторов теории для произвольных значений константы связи ’т Хоофта. Таких результатов удалось добиться в первую очередь благодаря исследованию сигма-модели Грина-Шварца пространства $AdS_5 \times S^5$, которая является интегрируемой в силу того, что данное таргет-пространство симметрическое†. Между тем, с точки зрения двойственной теории поля переход от максимально суперсимметричной теории к теориям с меньшим количеством симметрий означает, что пространство $AdS_5 \times S^5$ необходимо заменить на другое. В связи с этим естественно исследовать класс однородных пространств, не являющихся симметрическими. В общем случае даже столь незначительное ослабление требований приводит к тому, что интегрируемая структура теряется. Большая часть диссертационной работы посвящена исследованию сигма-моделей, таргет-пространства которых не являются симметрическими, но уравнения движения все же допускают так называемое представление нулевой кривизны, являющееся краеугольным камнем большинства классических интегрируемых моделей. Важнейшим требованием к таргет-пространствам рассматриваемых моделей является наличие комплексной структуры. Основные рассматриваемые нами примеры – сигма-модели пространств флагов $\frac{U(N)}{U(n_1)\times\cdots\times U(n_m)}$ $(\sum n_i = N)$. Большое внимание уделено простейшему нетривиальному частному случаю – пространству $\frac{U(3)}{U(1)^3}$. Данное многообразие имеет вещественную размерность шесть и является допустимым для суперсимметричных компактификаций некоторых моделей

†Если учесть фермионы, то полное суперпространство не симметрическое, а ‘полусимметрическое’. Существует классификация таких пространств, являющихся решением уравнений супергравитации.

теории гетеротических струн, так как допускает киллингов спинор (конус над данным пространством представляет собой сингулярное пространство с голономией G_2).

Цели и задачи

Основная цель диссертации – исследование свойств сигма-моделей пространств флагов в $\mathbb{C}^N$. Как показано в диссертации, данные сигма-модели естественным образом возникают при описании длинноволновых возбуждений спиновых цепочек с группой симметрии $SU(N)$ вблизи анти-ферромагнитного состояния (обобщенный предел Халдейна). Также установлено, что сигма-модели пространств флагов при специальном выборе B-поля допускают представление нулевой кривизны. По всей видимости, это один из простейших примеров сигма-моделей с несимметрическими таргет-пространствами, которые допускают представление нулевой кривизны. В специальном случае явно получены все решения уравнений движения сигма-модели.

Основные задачи диссертации таковы:

- Построение обобщений пределов Халдейна для $SU(N)$ спиновых цепочек. Определение взаимосвязи между (обобщенным) неелевским состоянием спиновой цепочки и таргет-пространством сигма-модели.

- Вычисление метрики и θ-члена на таргет-пространстве сигма-модели, возникающей в результате предела Халдейна.

- Построение сигма-моделей пространств флагов с ненулевым B-полем, уравнения движения которых допускают представление нулевой кривизны.

- Исследование полученных моделей. Установление связи с хорошо известным случаем, когда таргет-пространство симметрическое (грассманиан).

- Изучение вопроса об интегрируемости полученных моделей на простейшем примере. Явное решение уравнений движения в случае, когда мировая поверхность – сфера S^2.

- Установление связи между полученными новыми сигма-моделями и известными ранее интегрируемыми моделями, в частности сигма-моделями с $\mathbb{Z}_m$-градуированными таргет-пространствами и R-матричными деформациями модели главного кирального поля (η-деформация).

Научная новизна

Полученные результаты являются новыми. Перечислим основные из них:

- Показано, что пространство классических анти-ферромагнитных состояний спиновой цепочки (обобщение неелевского упорядочения) является лагранжевым подмногообразием фазового пространства элементарной ячейки.

- Рассматриваемое лагранжево подмногообразие является также пространством, на котором достигает минимума гамильтониан. Оно служит таргет-пространством сигма-модели, описывающей согласно Халдейну низкоэнергетические возбуждения в спиновой цепочке. Получены явные универсальные выражения для метрики и θ-члена данной сигма-модели.

- Если спины в узлах цепочки преобразуются по симметрическим представлениям ранга S, то из полученной формулы для θ-члена следует, что периодичность (по S) массовой щели имеет период m, где $m \leq N$ – длина элементарной ячейки (в оригинальном случае $SU(2)$-цепочки имеем $N = m = 2$).

- Предложен новый тип сигма-моделей, уравнения движения которых допускают представление нулевой кривизны. Таргет-пространства таких моделей – комплексные однородные многообразия (например, пространства флагов в $\mathbb{C}^N$), а B-поле модели пропорционально кэлеровой форме метрики Киллинга.

- Для случая таргет-пространства $\frac{U(3)}{U(1)^3}$ и мировой поверхности $\mathbf{C}\mathrm{P}^1$ построены все решения уравнений движения. Они выражаются через гармонические отображения в $\mathbf{C}\mathrm{P}^2$.

- Установлены взаимосвязи между предложенными σ-моделями, моделями с $\mathbb{Z}_m$-симметрическими пространствами и так называемыми η-деформированными моделями. С точки зрения теории янг-бакстеровской η-деформации основное наблюдение заключается в том, что комплексные структуры на таргет-пространстве представляют собой естественный класс решений классического модифицированного уравнения Янга-Бакстера, а само это уравнение является условием обращения в нуль тензора Нийенхейса комплексной структуры.

Теоретическая и практическая значимость работы

Построенная в диссертации теория дает полное математическое описание пределов Халдейна. Данную теорию можно использовать для построения спиновых цепочек, непрерывные пределы которых описываются сигма-моделями с различными таргет-пространствами, метриками и B-полями. Халдейновская щель в спектре таких цепочек наблюдается в том числе в экспериментах по рассеянию нейтронов на анизотропных (эффективно одномерных) кристаллах. В будущем халдейновская фаза будет также реализована при помощи цепочек атомов, находящихся в узлах так называемых оптических решеток.

Описание пространства флагов как лагранжева подмногообразия в произведении грассманианов представляет интерес и как независимый математический факт: в частности, его удобно использовать для описания когомологий пространств флагов (данный факт нашел отражение в Главе 1). Кроме того, формула, дающая выражение для метрики на таргет-пространстве обобщенной халдейновской сигма-модели, является по существу универсальной формулой для метрики на лагранжевом подмногообразии, на котором достигает минимума некоторая функция, заданная на фазовом пространстве.

Предложенные в диссертации новые интегрируемые сигма-модели или их потенциальные обобщения могут найти применение в рамках AdS/CFT соответствия, а также, возможно, в описании моделей теории суперструн с компактифицированными дополнительными измерениями (как уже говорилось, например, пространство флагов $\frac{U(3)}{U(1)^3}$ является допустимым многообразием для суперсимметричных компактификаций). Данные модели, несомненно, представляют интерес для специалистов, занимающихся теоретическими и математическими вопросами теории интегрируемых моделей. Ввиду связи предложенных моделей с топологическими теориями было бы интересно также исследовать возможность существования дополнительных интегрируемых структур в этих топологических теориях (например, известна связь между теорией инвариантов Громова-Виттена пространств флагов и квантово-механическими цепочками Тоды).

Методология и методы исследования

При исследовании пределов Халдейна спиновых цепочек используются методы теории геометрического квантования (когерентные состояния, теорема Бореля-Ботта-Вейля), методы симплектической, дифференциальной и алгебраической геометрии. В Главе 1 приведен весьма полный обзор используемых методов, при этом акцент сделан на естественном возникновении пространств флагов в теории представлений унитарной группы как пространств когерентных состояний. Построение теории представлений во многом сводится к описанию 'квантованных' симплектических форм на данных многообразиях, а само 'квантование' является естественным в рамках подхода, основанного на континуальном интеграле.

Ключевое наблюдение, обеспечившее возможность обобщения предела Халдейна на $SU(N)$-случай, связано с математическим описанием классического анти-ферромагнитного (неелевского) упорядочения в спиновой цепочке: показано, что классическая конфигурация соответствует лагранжеву подмногообразию в фазовом пространстве одной элементарной ячейки (в простейшем случае конфигурация из двух противоположно-направленных спинов в соседних узлах соответствует лагранжеву вложению $S^2 \hookrightarrow S^2 \times S^2$).

При изучении сигма-моделей пространств флагов с B-полем, пропорциональным кэлеровой форме, использовались методы теории интегрируемых моделей (представления нулевой кривизны, преобразования Бэклунда, классическая R-матрица), элементы дифференциальной геометрии (симметрические и $\mathbb{Z}_m$-градуированные пространства, эйнштейновы метрики, твисторные пространства, голоморфные кривые). При построении квазилинейной формулировки сигма-моделей использовались некоторые элементы теории ‘колчанных многообразий’.

Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся следующие основные результаты:

1. Построение непрерывного предела Халдейна для спиновых цепочек с группой симметрии $SU(N)$. Получены универсальные выражения для метрики и θ-члена результирующей двумерной сигма-модели, таргет-пространством которой является пространство флагов $\frac{U(N)}{U(n_1)\times\cdots\times U(n_m)}$ $(\sum\limits_i n_i = N)$. Показано, что $\mathrm{mod}\, 2$-периодичность (по спину S) массовой щели, имевшая место в рассмотренном Халдейном простейшем случае, обобщается до $\mathrm{mod}\, m$-периодичности.

2. Предложены двумерные сигма-модели пространств флагов, уравнения движения которых допускают представление нулевой кривизны. В случае, когда рассматриваемое пространство флагов – грассманиан, т.е. симметрическое пространство, построенное семейство плоских связностей калибровочно-эквивалентно стандартному, однако в общем случае является новым. Ключевым элементом предложенных моделей является ненулевое B-поле, пропорциональное кэлеровой форме на таргет-пространстве, которая в общем случае незамкнута.

3. Для сигма-модели с таргет-пространством $\mathcal{F}_3 = \frac{U(3)}{U(1)^3}$ и мировой поверхностью $\mathbf{C}\mathrm{P}^1$ при помощи преобразований Бэклунда получены *все* решения уравнений движения. Их проще всего описать, используя тот факт, что $\mathcal{F}_3$ – твисторное пространство для проективной плоскости $\mathbf{C}\mathrm{P}^2$, т.е. существует расслоение $\mathcal{F}_3 \to \mathbf{C}\mathrm{P}^2$ со слоем $\mathbf{C}\mathrm{P}^1$. Решения уравнений движения рассматриваемой сигма-модели можно выразить через гармонические отображения в базу $\mathbf{C}\mathrm{P}^2$ и голоморфные отображения в слой $\mathbf{C}\mathrm{P}^1$.

4. Построена квазилинейная формулировка (gauged linear σ-model) для предложенных σ-моделей пространств флагов. Данная конструкция опирается на тот факт, что пространство флагов – пример так называемого ‘колчанного многообразия’, допускающего представление в виде кэлерова фактора плоского пространства.

5. Обнаружены взаимосвязи между предложенными сигма-моделями с комплексными однородными таргет-пространствами и η-деформированными моде-

лями, а также моделями с $\mathbb{Z}_m$-градуированными таргет-пространствами. Показано, что так называемое модифицированное классическое уравнение Янга-Бакстера в некоторых случаях можно интерпретировать как обращение в нуль тензора Нийенхейса, т.е. как условие интегрируемости комплексной структуры на таргет-пространстве σ-модели.

Степень достоверности и апробация результатов

Результаты представлялись соискателем на отечественных и международных конференциях и семинарах, в частности на семинаре отдела квантовой теории поля ИТФ им. Л.Д.Ландау (г. Черноголовка), семинаре лаборатории математических проблем физики ПОМИ РАН (г. Санкт-Петербург), семинаре по теоретической физике Тринити Колледжа (г.Дублин, Ирландия), семинаре по физике конденсированного состояния Университета Радбуд (г.Неймеген, Голландия), семинаре Института Нордита (г.Стокгольм, Швеция), семинаре Университета Людвига-Максимилиана (г.Мюнхен, Германия), совместном семинаре по теоретической физике университетов Боазичи и Мимар-Синан (г.Стамбул, Турция), семинаре Высшей Нормальной Школы (г. Лион, Франция), семинаре по математической физике Института Теоретической Физики (г. Сакле, Франция), семинаре по теоретической физике Университета Уппсалы (г. Уппсала, Швеция), семинаре Института Теоретической Физики Университета Сан Паулу (г. Сан Паулу, Бразилия), а также неоднократно докладывались на семинарах МИАН.

Публикации

По материалам диссертации опубликовано 13 работ. Из них 11 работ – в реферируемых журналах и 2 – в реферируемых периодических научных изданиях.

Объем и структура диссертации

Диссертация состоит из введения, 7 глав, заключения и двух приложений. Суммарный объем цитируемой литературы 120 источников. Общий объем составляет 197 страниц.

Содержание диссертации

Диссертационная работа посвящена исследованию спиновых цепочек и двумерных сигма-моделей специального вида, а также взаимосвязей между ними. Спиновые цепочки и сигма-модели – два колосса двумерной физики. Оба предмета имеют долгую и богатую историю. По определению спиновые цепочки – конечномерные объекты, и, следовательно, связанные с ними вопросы зачастую формулируются проще, и во многих случаях ответы на них могут быть получены с помощью численного моделирования. Сигма-модели – примеры взаимодействующих теорий поля и обладают всеми недостатками последних. В общем случае их можно определить лишь в рамках теории возмущений. Более того, в каждом порядке возникают бесконечности, которые должны быть устранены при помощи перенормировки, и в общем случае неизвестно, можно ли придать физический смысл расходящемуся ряду теории возмущений. Некоторые из этих трудностей удается преодолеть в случае интегрируемых моделей двумерной квантовой теории поля.

Естественными регуляторами, сохраняющими симметрии теории поля, могут служить спиновые цепочки, непрерывные пределы которых приводят к двумерным сигма-моделям. Для любой данной спиновой цепочки могут существовать неэквивалентные непрерывные пределы, и получающиеся в результате модели будут существенно отличаться. Например, в наиболее стандартном случае $SU(2)$ спиновой цепочки с взаимодействиями вида $\vec{S}_i\vec{S}_{i+1}$ длинноволновые флуктуации над ферромагнитным вакуумом описываются моделью так называемого ферромагнетика Гейзенберга, распространение магнонов в которой подчиняется квадратичному (нерелятивистскому) закону дисперсии. Важный результат Халдейна состоит в том, что непрерывный предел около *антиферромагнитной* конфигурации дает *релятивистскую* сигма-модель. При этом таргет-пространством является сфера S^2 (с "тета-углом" $\theta = \pi S$, где S – положительное целое число, характеризующее представление, по которому преобразуется спин в каждом узле спиновой цепочки). Принципиальное свойство сигма-моделей подобного вида с нулевым θ-углом (в данном случае это соответствует случаю четного S), что для них неприменимо 'приближение среднего поля', так как возникающие в данном приближении голдстоуновские бозоны приводят в двумерном пространстве к появлению инфракрасных расходимостей. Физическая причина появления данных расходимостей состоит в том, что на самом деле спектр элементарных возбуждений является массивным – массовая ‘щель’ возникает в результате размерной трансмутации. Более того, из ставших классическими работ братьев Замолодчиковых и других известно, что S^2-модель является типичным примером интегрируемой теории, в которой точно известна матрица рассеяния этих массивных частиц.

Интерес к спиновым цепочкам и сигма-моделям (а в особенности к взаимосвязи между ними) сильно возрос после появления AdS/CFT соответствия. Один из примеров AdS/CFT соответствия – двойственность (взаимно-однозначное соответствие) между суперсимметричной конформной теорией поля в трехмерном пространстве-времени и струнной сигма-моделью с таргет-пространством $AdS_4 \times \mathbf{C}\mathrm{P}^3$. В рамках описания аномальных размерностей ‘длинных’ операторов с большим лоренцевым спином в трехмерной теории естественным образом возникает сигма-модель пространства $\mathbf{C}\mathrm{P}^3$ (его тоже можно считать простейшим пространством флагов) с дополнительными фермионными степенями свободы. При изучении $\mathcal{N} = 1$ суперконформных теорий в четырехмерном пространстве при помощи методов AdS/CFT соответствия также естественным образом возникают сигма-модели однородных пространств и пространств, близких к однородным [4].

Непрерывный предел Халдейна

В первой части диссертации исследуется непрерывный предел вблизи антиферромагнитного основного состояния для спиновых цепочек с группой симметрии $SU(N)$. Это обобщение на случай групп старшего ранга конструкции, исследованной ранее Халдейном для группы $SU(2)$. Данное описание, строго говоря, справедливо в квазиклассическом пределе, когда спины в каждом узле спиновой цепочки преобразуются по представлению вида

$$V_S := \mathrm{Sym}(V^{\otimes S})\,, \qquad S \to \infty\,, \tag{1}$$

где V – фундаментальное представление кососимметрических тензоров произвольного ранга. Как и в теоретико-полевых моделях, для анализа квазиклассического предела удобно использовать представление в виде континуального интеграла. Однако задача построения континуального интеграла для спиновой цепочки не является тривиальной и с математической точки зрения приводит к теории геометрического квантования (этому во многом посвящена первая глава диссертации). Действительно, рассмотрим орбиту вектора старшего веса $|v\rangle$ в проективизации (пока произвольного) представления W:

$$g|v\rangle \in \mathrm{P}(W), \qquad g \in SU(N) \tag{2}$$

Точки этой орбиты – когерентные состояния данного представления, а вся орбита, согласно теореме Костанта-Стернберга, является кэлеровым (однородным) многообразием. В случае группы $SU(N)$ это многообразие – пространство комплексных флагов в $\mathbb{C}^N$, т.е. многообразие вложенных друг в друга линейных подпространств

$$\mathcal{F}_{d_1,\ldots,d_m} = \{0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_{m-1} \subset V_m = \mathbb{C}^N\}, \tag{3}$$

где $\dim V_i = d_i$. Обозначим $\dim V_i/V_{i-1} = n_i$. Тогда можно представить пространство флагов в форме фактор-пространства унитарной группы:

$$\mathcal{F}_{d_1,\ldots,d_m} = \frac{U(N)}{U(n_1) \times \ldots \times U(n_m)}, \quad \sum_{i=1}^{m} n_i = N\,. \tag{4}$$

Данная параметризация естественным образом связана с выбором евклидовой метрики в $\mathbb{C}^N$.

Пространство флагов – пространство когерентных состояний – является классическим фазовым пространством спина, преобразующегося по представлению W. Одно из основных утверждений теории геометрического квантования (теорема Бореля-Ботта-Вейля) состоит в том, что само представление W можно реализовать в пространстве голоморфных сечений $H^0(\mathcal{L})$ некоторого линейного расслоения $\mathcal{L}$ над $\mathcal{F}_{d_1,\ldots,d_m}$. И пространство флагов, и линейное расслоение над ним можно определить, например, из диаграммы Юнга данного представления.

Пусть $f : [0,1] \to \mathcal{F}_{d_1,\ldots,d_m}$ – траектория спина в фазовом пространстве. Классическое действие спина, находящегося в одном из узлов спиновой цепочки и преобразующегося по представлению W, можно записать в виде

$$\mathcal{S} = \int f^*\theta - \int dt\, \mathcal{H}, \tag{5}$$

где $\mathcal{H}$ – гамильтониан, а θ определяется из условия

$$d\theta = c_1(\mathcal{L})\,. \tag{6}$$

Данное построение легко обобщить на случай системы нескольких спинов, например, на спиновую цепочку. Рассмотрим простейшую ситуацию, когда в каждом узле находится спин в представлении, являющемся S-й симметрической степенью N-мерного векторного представления $SU(N)$. В качестве гамильтониана возьмем гейзенберговский гамильтониан $\mathcal{H} = \sum\limits_i \vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i+1}$. В результате континуальный интеграл, описывающий статистический оператор спиновой цепочки, имеет вид

$$\mathrm{tr}\,(e^{-\beta\mathcal{H}}) = \int \prod_{i,\, t\in[0,1]} d\mu(z_i(t), \bar{z}_i(t))\ \exp\,(-\mathcal{S}),\ \text{где} \tag{7}$$

$$z_i \in \mathbf{C}\mathrm{P}^{N-1} \quad \text{и} \quad \mathcal{S} = \frac{S}{2}\int\limits_0^1 dt \sum_i \left(i\frac{\dot{z}_i \circ \bar{z}_i}{z_i \circ \bar{z}_i} + \beta\frac{z_i \circ \bar{z}_{i+1}}{z_i \circ \bar{z}_i}\frac{z_{i+1} \circ \bar{z}_i}{z_{i+1} \circ \bar{z}_{i+1}} \right) \tag{8}$$

Для построения непрерывного предела необходимо сначала определить классическое основное состояние. В нашей работе мы рассматриваем спиновые цепочки, обладающие ферромагнитным либо антиферромагнитным основным состоянием. Ферромагнитное состояние соответствует условию $z_{i+1} = z_i$. Непрерывный предел вблизи такой конфигурации дает действие магнетика Гейзенберга

$$\mathcal{S} = \frac{S}{2}\int\limits_0^1 dt \int\limits_{\mathbb{R}} dx\ \left[\mathrm{i}\ \frac{\dot{z}(t,x) \circ \bar{z}(t,x)}{1 + z(t,x) \circ \bar{z}(t,x)} - \left(\frac{\partial_x z \circ \partial_x \bar{z}}{1 + z \circ \bar{z}} - \frac{(z \circ \partial_x \bar{z})(\partial_x z \circ \bar{z})}{(1 + z \circ \bar{z})^2} \right) \right] \tag{9}$$

В простейшем случае группы $SU(2)$ таргет-пространство $\mathbf{C}\mathrm{P}^1 \simeq S^2$ можно параметризовать при помощи единичного вектор $\vec{n}$. Тогда уравнения движения, следующие из данного действия, принимают вид

$$\frac{\partial\vec{n}}{\partial t} = \vec{n} \times \frac{\partial^2\vec{n}}{\partial x^2}. \tag{10}$$

Чтобы получить анти-ферромагнитное основное состояние, можно рассмотреть спиновую цепочку с чередующимися фундаментальным/антифундаментальным представлениями в соседних узлах. Тогда антиферромагнитная конфигурация соответствует условию $z_{i+1} = \bar{z}_i$ (Данное условие $SU(N)$-инвариантно). Построение непрерывного предела вблизи данной конфигурации заметно отличается от ферромагнитного случая из-за того, что формально в конфигурации $z_{i+1} = \bar{z}_i$ кинетический член в действии (8) оказывается полной производной (т.е. сводится к граничному члену). Математически причина этого заключается в следующем. Так как элементарная ячейка в данном случае состоит из двух узлов, фазовое пространство элементарной ячейки – это $\mathbf{C}\mathrm{P}^N \times \mathbf{C}\mathrm{P}^N$. Условие антиферромагнитного состояния задает вложение

$$\mathbf{C}\mathrm{P}^N \hookrightarrow \mathbf{C}\mathrm{P}^N \times \mathbf{C}\mathrm{P}^N\,, \tag{11}$$

которое является лагранжевым относительно естественной симплектической формы на $\mathbf{C}\mathrm{P}^N \times \mathbf{C}\mathrm{P}^N$ (сумме двух форм Фубини-Штуди). Данное наблюдение является ключевым для дальнейших построений.

Для упомянутой гейзенберговской цепочки с чередующимися представлениями ‘анти-ферромагнитный’ непрерывный предел был построен Аффлеком: в результате возникает *релятивистская* сигма-модель пространства $\mathbf{C}\mathrm{P}^N$ с топологическим членом $\theta = \pi\, S$:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = S \int\limits_0^1 dt \int\limits_{\mathbb{R}} dx\, \Big[& \frac{1}{2}\partial_\mu z(x,t) \circ \Pi(z,\bar{z}) \circ \partial_\mu \bar{z}(x,t) - \\ & - \frac{\mathrm{i}}{2}\epsilon_{\mu\nu}\, \partial_\mu z(x,t) \circ \Pi(z,\bar{z}) \circ \partial_\nu \bar{z}(x,t) \Big]\,, \end{aligned} \tag{12}$$

где $\Pi = \mathbb{1} - \bar{z} \otimes z$ – проектор на плоскость, ортогональную вектору z (здесь мы полагаем $|z|^2 = 1$). В случае группы симметрии $SU(2)$ (т.е. когда $N = 2$) данная сигма-модель была впервые получена из гейзенберговской цепочки Халдейном (в этом специальном случае, так как фундаментальное и сопряженное ему представления эквивалентны, цепочка с чередующимися представлениями эквивалентна цепочке с одинаковыми представлениями на всех узлах).

В наших работах [2]- [3] мы обобщили описанное построение и показали, что существуют спиновые цепочки, непрерывные пределы которых дают сигма-модели произвольных пространств флагов (4). Взаимодействия в таких цепочках имеют радиус $m - 1$, где m – число множителей в знаменателе фактор-пространства (4). Гамильтониан имеет вид

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{L} \sum_{k=1}^{m-1} d_k \, \vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i+k}, \qquad d_k = \sqrt{\frac{m-k}{k}} \tag{13}$$

В данной формуле $\vec{S}_i$ – генераторы представления алгебры $\mathfrak{su}_N$, соответствующего i-му узлу цепочки. Представления спинов, находящихся в m следующих друг за другом узлах, соответствуют диаграммам Юнга, состоящим из столбцов высоты $n_1, \cdots, n_m$, а перестановка этих узлов дает σ-модель с тем же таргет-пространством, но с другой метрикой и θ-членом.

Классическое фазовое пространство элементарной ячейки данной спиновой цепочки представляет собой произведение грассманианов

$$G_{n_1} \times \cdots \times G_{n_m} \,. \tag{14}$$

Так как симплектическая форма на данном многообразии инвариантна относительно действия $SU(N)$, можно построить соответствующее отображение моментов $\mu \in \mathfrak{su}_N$. Особенность рассматриваемой цепочки, которая принципиальна для нашего построения, состоит в том, что подмногообразие минимумов L гамильтониана является геометрическим местом точек, в которых обращается в нуль матрица отображений момента. Более того, эти точки лежат на одной орбите группы $SU(N)$, а именно

$$L \simeq \mu^{-1}(0) \simeq \frac{SU(N)}{S(U(n_1) \times \ldots \times U(n_m))} \,. \tag{15}$$

Можно показать, что в этом случае многообразие L лагранжево (обобщение вложения (11)). Более того, это многообразие является в точности таргет-пространством результирующей сигма-модели. Лагранжиан сигма-модели можно охарактеризовать в достаточно общих терминах. Оказывается, что метрика на L может быть описана следующей универсальной формулой:

$$g_{ij} = \omega_{im} \cdot \left[\left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x^2} \right)^{-1} \right]^{mn} \cdot \omega_{nj} = \omega_{im} \, h^{mn} \, \omega_{nj} \,. \tag{16}$$

Здесь ω – симплектическая форма объемлющего пространства (14), а $\mathcal{H}$ – функция, играющая роль классического гамильтониана спиновой цепочки. Заметим, что гамильтониан инвариантен относительно $SU(N)$, в связи с чем гессиан $\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x^2}$ вырожден в направлениях вдоль L. Чтобы показать, что метрика корректно определена, обозначим $u_i = \omega_{ij}\,\tilde{u}^j,\ v_i = \omega_{ij}\,\tilde{v}^j$, где векторы $\tilde{u}, \tilde{v}$ касательны к L. Тогда ввиду того, что v ортогонален ядру $\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x^2}$ (т.к. L лагранжево), можно определить вектор $\left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x^2}\right)^{-1} |v\rangle$. Этот вектор определен с точностью до слагаемых, лежащих в $\ker \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x^2}$. Однако эти слагаемые не дают вклад в матричный элемент $\langle u| \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x^2}\right)^{-1} |v\rangle$ опять же в силу того, что L – лагранжево, что доказывает утверждение.

Топологический член сигма-модели дается следующей формулой:

$$\Omega = \frac{S}{m} \left(\sum_{k=1}^{m} k \cdot r_k \right) , \tag{17}$$

где $r_k = i^*\big(c_1(E_{n_k})\big)$ – ограничение первого класса Черна тавтологического расслоения ранга n_k над грассманианом (i – вложение $L \hookrightarrow G_{n_1} \times \cdots \times G_{n_m}$.). Заметим, что формы r_k удовлетворяют единственному условию

$$\sum_{k=1}^{m} r_k = 0 \,, \tag{18}$$

вследствие чего топологический член инвариантен относительно сдвига $k \to k+1$. Это является отражением того факта, что то, как именно спиновая цепочка разделена на элементарные ячейки, несущественно.

В оригинальной работе Халдейна была выдвинута гипотеза (впоследствии проверенная экспериментально и численно) о зависимости массовой щели спиновой цепочки от топологического члена сигма-модели. Так как топологический член (17) входит под знак континуального интеграла в комбинации $e^{2\pi i \int \Omega}$, которая, согласно (17), периодична по S с периодом m, естественным образом следует гипотеза о периодичности массовой щели спиновой цепочки с периодом $m \leq N$. Другое интересное следствие (17) заключается в том, что простая перестановка узлов спиновой цепочки приводит к новому θ-члену. Это дает способ реализовать при помощи спиновых цепочек различные элементы группы когомологий $\mathrm{H}^2(L, \mathbf{Z}_m)$.

Сигма-модели, допускающие представление нулевой кривизны

Во второй части диссертации мы переходим к исследованию σ-моделей пространств флагов (а также некоторых более общих моделей), уравнения движения которых допускает представление нулевой кривизны. Данные сигма-модели являются обобщениями моделей, которые были рассмотрены в первой части диссертации. Напомним, что с математической точки зрения σ-модель – это теория поля, связанная с отображениями $X : \Sigma \to \mathcal{M}$ мирового листа Σ в таргет-пространство $\mathcal{M}$. На таргет-пространство $\mathcal{M}$ мы наложим следующие требования[‡]:

- $\mathcal{M}$ – однородное пространство G/H, G полупроста и компактна
- $\mathcal{M}$ обладает интегрируемой G-инвариантной комплексной структурой $\mathbb{I}$
- Киллингова метрика $\mathbb{G}$ на $\mathcal{M}$ эрмитова относительно $\mathbb{I}$

Для таргет-пространств с такими свойствами в диссертации построены σ-модели, уравнения движения которых представимы в виде условия нулевой кривизны однопараметрического семейства связностей $A_u, u \in \mathbb{C}^*$. В случае обычных σ-моделей симметрических таргет-пространств существование представления нулевой кривизны хорошо известно, поэтому наш результат заключается в установлении данного свойства для сигма-моделей более широкого класса пространств. Существование представления нулевой кривизны является, как правило, важным признаком того, что модель интегрируемая: например, его можно использовать для нахождения преобразований Бэклунда, и оно является отправной точкой для построения решений классических уравнений движения модели при помощи так называемой спектральной кривой.

Комплексные односвязные однородные многообразия G/H полупростой группы G классифицированы. Эта классификация сводится к следующей теореме Ванга: любое такое многообразие G/H соответствует подгруппе H, полупростая часть которой совпадает с полупростой частью централизатора торической подгруппы G. В случае $G = SU(N)$, например, инвариантные комплексные структуры существуют на тех многообразиях

$$\mathcal{M}_{n_1,\ldots,n_m|N} = \frac{SU(N)}{S(U(n_1)\times\ldots\times U(n_m))}, \qquad m \geq 0,\ \ n_i > 0,\ \ \sum_{i=1}^{m} n_i \leq N\,, \quad (19)$$

[‡]Обобщения на случай групп G, не являющихся полупростыми, также возможны.

размерность которых четна. Если $\sum_{i=1}^{m} n_i = N$, то многообразие (19) – пространство флагов. В остальных случаях это торическое расслоение над пространством флагов. Слой $U(1)^{2s}$ ($2s = N - \sum_{i=1}^{m} n_i$) имеет четную размерность, так как само пространство флагов также всегда имеет четную размерность.

Если отказаться от требования односвязности пространства G/H и полупростоты группы G, то будут также другие примеры, скажем $S^1 \times S^3 = U(2)$. Последнее многообразие является даже гиперкомплексным, т.е. на нем имеется непрерывное семейство инвариантных комплексных структур. В этом случае вместо киллинговой метрики можно взять метрику $\widehat{\mathbb{G}}_{ij} := \mathrm{tr}\,(T_i T_j)$, где T_i – генераторы алгебры $\mathfrak{g}$ в представлении, подобранном таким образом, чтобы метрика $\widehat{\mathbb{G}}$ была невырожденной и эрмитовой относительно комплексной структуры $\mathbb{I}$.

Модели, которые исследуются в диссертационной работе, определены следующим действием:

$$\mathcal{S}[\mathbb{G}, \mathbb{I}] := \int_{\Sigma} d^2 z \, \|\partial X\|^2_{\mathbb{G}} + \int_{\Sigma} X^* \omega, \tag{20}$$

где ω – кэлерова форма, отвечающая паре $(\mathbb{G}, \mathbb{I})$, и определенная стандартной формулой

$$\omega = \mathbb{G} \circ \mathbb{I}\,. \tag{21}$$

В общем случае киллингова метрика $\mathbb{G}$ не кэлерова, и кэлерова форма не замкнута: $d\omega \neq 0$. Это вполне может иметь место, даже если многообразие $\mathcal{M}$ допускает кэлерову метрику – эта метрика, вообще говоря, отлична от $\mathbb{G}$. Пример такого явления доставляет пространство флагов $\frac{SU(3)}{S(U(1)^3)}$. Соответствующая σ-модель с действием (20) подробно исследована в наших работах [6, 8].

Главная особенность моделей (20) заключается в том, что нетеровский ток K, следующий из $SU(N)$-инвариантности лагранжиана, оказывается плоским:

$$d * K = 0, \qquad dK - K \wedge K = 0\,. \tag{22}$$

Однопараметрическое семейство связностей может быть построено по формуле Полмейера:

$$A_u = \frac{1-u}{2}\, K_z \, dz + \frac{1-u^{-1}}{2}\, K_{\bar{z}} \, d\bar{z}\ . \tag{23}$$

Из (22) следует, что эти связности плоские:

$$dA_u - A_u \wedge A_u = 0 \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{C}^* \,. \tag{24}$$

Интересно рассмотреть частный случай модели с действием (20), когда таргет-пространство симметрическое – грассманиан $\frac{U(N)}{U(n)\times U(N-n)}$. Грассманианы – кэлеровы многообразия, причем инвариантная метрика на них по существу единственна (с точностью до растяжения). Отсюда следует, что форма ω замкнута: $d\omega = 0$. В результате второй член в действии (20) оказывается топологическим и не дает вклад в уравнения движения. Он, однако, дает вклад в нетеровский ток K. В силу того что пространство симметрическое, ток $\tilde{K}$, построенный по действию без топологического члена, также плоский:

$$\tilde{K} = -\widehat{g}^{-1} d\widehat{g}, \quad \text{где} \quad \widehat{g} = \sigma(g) g^{-1} \,. \tag{25}$$

Здесь σ – картановская инволюция на группе Ли G. По определению σ – групповой гомоморфизм, т.е. $\sigma(g_1 g_2) = \sigma(g_1)\sigma(g_2)$, причем $\sigma(h) = h$ при $h \in H$. Формулу $\widehat{g} = \sigma(g) g^{-1}$ можно рассматривать как отображение $g \in G/H \to \widehat{g} \in G$ – она задает картановское вложение

$$G/H \hookrightarrow G \,. \tag{26}$$

Следовательно, в данной модели имеются два семейства плоских связностей: A_u и $\tilde{A}_\lambda = \frac{1-\lambda}{2} \tilde{K}_z \, dz + \frac{1-\lambda^{-1}}{2} \tilde{K}_{\bar{z}} \, d\bar{z}$. В диссертации показано, что они калибровочно-эквивалентны, если спектральные параметры связаны формулой

$$\lambda = u^{1/2} \,. \tag{27}$$

Калибровочное преобразование Ω, связывающее A_u и $\tilde{A}_\lambda$,

$$\tilde{A}_\lambda = \Omega A_u \Omega^{-1} - \Omega d \Omega^{-1}, \tag{28}$$

можно выписать явно. Будем считать, что комплексная структура на грассманиане выбрана так, что разбиение касательного пространства $\mathfrak{m}$ (предполагается стандартное разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ алгебры Ли группы изометрий однородного пространства $\frac{G}{H}$) на голоморфное/анти-голоморфное пространства имеет вид $\mathfrak{m} = \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{m}_+ \\ \mathfrak{m}_- & 0 \end{pmatrix}$, тогда

$$\Omega = g \Lambda g^{-1}, \quad \text{где} \quad \Lambda \sim \mathrm{diag}(\underbrace{\lambda^{-1/2}, \ldots, \lambda^{-1/2}}_{n}, \underbrace{\lambda^{1/2}, \ldots, \lambda^{1/2}}_{N-n}) \tag{29}$$

(Множитель пропорциональности несуществен.) В терминах 'динамических' проекторов Π_{n_1}, Π_{n_2} на подпространства пространства $\mathbb{C}^{n_1+n_2}$ соответствующей размерности Ω можно записать как

$$\Omega \sim \lambda^{-1/2}\,\Pi_{n_1} + \lambda^{1/2}\,\Pi_{n_2}\,. \tag{30}$$

Решения уравнений движения при $\mathcal{M} = \frac{U(3)}{U(1)^3}$ и $\Sigma = \mathbf{C}\mathrm{P}^1$

Одна из глав диссертации посвящена явному решению уравнений движения в простейшем нетривиальном случае, когда таргет-пространство сигма-модели – пространство флагов $\frac{U(3)}{U(1)^3}$ (несимметрическое пространство), а мировая поверхность – сфера $\mathbf{C}\mathrm{P}^1$. Пространство флагов может быть параметризовано при помощи трех ортонормированных векторов u_i ($u_i \circ \bar{u}_j = \delta_{ij}$), определенных по модулю фазовых преобразований $u_k \to e^{i\alpha_k}\, u_k$. Введем токи

$$J_{mn} := u_m \circ d\bar{u}_n\;, \qquad m, n = 1, 2, 3. \tag{31}$$

Внедиагональные токи $\{J_{mn},\;\, m \neq n\}$ образуют тетраду (они определены с точностью до фазовых множителей).

Действие модели можно записать в виде

$$\mathcal{S}_{\mathcal{Q}} = \int\limits_{\Sigma} \frac{i}{2}\, dz \wedge d\bar{z}\, \left(\left|(J_{12})_{\bar{z}}\right|^2 + \left|(J_{23})_{\bar{z}}\right|^2 + \left|(J_{13})_{\bar{z}}\right|^2 \right) \tag{32}$$

Из него следуют уравнения движения

$$\mathscr{D}_z (J_{12})_{\bar{z}} = 0, \qquad \mathscr{D}_z (J_{31})_{\bar{z}} = 0, \qquad \mathscr{D}_z (J_{23})_{\bar{z}} = 0 \tag{33}$$

а также комплексно сопряженные им. Здесь $\mathscr{D}$ – $U(1)^3$-ковариантная производная, действующая по следующему правилу: $\mathscr{D} J_{mn} := dJ_{mn} + (J_{mm} - J_{nn}) \wedge J_{mn}$. Из уравнений (33) легко вывести закон сохранения

$$\partial_z \left((J_{12})_{\bar{z}} (J_{23})_{\bar{z}} (J_{31})_{\bar{z}} \right) = 0 \tag{34}$$

Заметим, что выражение в скобках представляет собой сечение куба канонического расслоения K над $\mathbf{C}\mathrm{P}^1$, и из закона сохранения следует, что эта величина анти-голоморфна. Однако в силу того что $H^0(K^3, \mathbf{C}\mathrm{P}^1) = 0$, такие сечения с необходимостью равны нулю. Предположим, что

$$(J_{31})_{\bar z} = 0, \tag{35}$$

Тогда из оставшихся уравнений следует, что $u_2(z,\bar z)$ – гармоническое отображение в $\mathbf{C}\mathrm{P}^2$. Хорошо известно, как устроены гармонические отображения $\mathbf{C}\mathrm{P}^1 \to \mathbf{C}\mathrm{P}^2$. Замечательный факт состоит в том, что если задано одно такое отображение $u_2(z,\bar z)$, его ковариантные производные (ассоциированные отображения) $D_{\bar z}u_2(z,\bar z)$ и $D_z u_2(z,\bar z)$ тоже являются гармоническими. Кроме того, если $u_2(z,\bar z)$ не является ни голоморфным, ни (анти)-голоморфным, то ассоциированные отображения являются соответственно голоморфным и анти-голоморфным. Более того, из уравнений движения $\mathbf{C}\mathrm{P}^2$-модели следует, что оператор $D_{\bar z}$ является по существу обратным к D_z. В результате можно утверждать, что все гармонические отображения $\mathbf{C}\mathrm{P}^1 \to \mathbf{C}\mathrm{P}^2$ строятся из голоморфных одно- или двукратным применением оператора ковариантной производной (это ставший классическим результат Дина и Закржевского).

Чтобы превратить гармоническое отображение

$$v = u_2 : \mathbf{C}\mathrm{P}^1 \to \mathbf{C}\mathrm{P}^2 \tag{36}$$

в решение уравнений движения нашей модели, мы должны показать, что его можно поднять до отображения в пространство флагов, удовлетворяющее оставшемуся уравнению (35): $(J_{31})_{\bar z} = u_3 \circ \partial_{\bar z}\bar u_1 = 0$, где u_1 и u_3 ортогональны друг другу и u_2. В предположении, что u_2 – отображение общего положения, можно доказать, что $D_z u_2$ и $D_{\bar z}u_2$ ортогональны друг другу, и искать u_1 и u_3 в виде

$$u_1 = a\,D_z u_2 + b\,D_{\bar z}u_2, \tag{37}$$

$$u_3 = c\,D_z u_2 + d\,D_{\bar z}u_2 \tag{38}$$

Из оставшегося уравнения движения следует, что в общем случае

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \lambda(z,\bar z) \begin{pmatrix} f(z)\cdot \|D_{\bar z}u_2\|^2 \\ g(z) \end{pmatrix}, \tag{39}$$

где $(f(z) : g(z)) \in \mathbf{C}\mathrm{P}^1$ – две голоморфные функции. Оставшиеся неизвестные, такие как λ, a, b, можно теперь найти из условий нормировки $\bar u_1 \circ u_1 = \bar u_3 \circ$

$u_3 = 1$. Поэтому поднятие в пространство флагов определяется голоморфным отображением

$$(\mathbf{C}\mathrm{P}^1)_z \to (\mathbf{C}\mathrm{P}^1)_{(f:g)} \,. \tag{40}$$

Это отображение является, по сути, рациональной функцией $\frac{f(z)}{g(z)}$.

Квазилинейная формулировка σ-моделей пространств флагов

К предложенным новым сигма-моделям пространств флагов должен быть применим хорошо известный метод $\frac{1}{N}$-разложения. В данном контексте имеется в виду, что, например, в случае пространства

$$\frac{U(N)}{U(n_1)\times\cdots\times U(n_{m-1})\times U(N-M)}\,, \qquad M=\sum_{j=1}^{m-1} n_j\,, \tag{41}$$

следует брать предел $N \to \infty$ при фиксированных $n_1 \dots n_{m-1}$. Такой предел удобнее всего исследовать в так называемом GLSM-формализме (gauged linear sigma-model), в рамках которого сигма-модель описывается набором 'полей материи', удовлетворяющих квадратичным условиям и взаимодействующих со вспомогательными калибровочными полями. В сигма-моделях с кэлеровыми таргет-пространствами это означает, что таргет-пространство представлено в виде кэлерова фактора плоского пространства $\mathbb{C}^{\mathbb{M}}$ для некоторого $\mathbb{M}$. Конструкция кэлерова фактора для пространств флагов хорошо известна – соответствующие поля материи можно описать при помощи так называемого 'колчана'. Напрямую к нашим моделям она, однако, неприменима, так как используемая в наших моделях киллингова метрика не является кэлеровой. Тем не менее, представление в виде кэлерова фактора можно подходящим образом видоизменить и построить GLSM-представление для рассматриваемых моделей.

Для сигма-модели пространства (41) квазилинейная формулировка строится таким образом. Введем матрицу $V : \mathbb{C}^M \to \mathbb{C}^N$

$$V = \left.\underbrace{\begin{pmatrix} \star & \cdots & \star \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \star & \cdots & \star \end{pmatrix}}_{M\ \text{столбцов}}\right\}\ N\ \text{строк} \tag{42}$$

Столбцы матрицы параметризуют M векторов флага. Они ортонормированы:

$$V^\dagger V = \mathbb{1}_M\,. \tag{43}$$

Введем аналоги калибровочных полей

$$\mathscr{A}_z := \begin{pmatrix} (A_{11})_z & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ (A_{21})_z & (A_{22})_z & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ (A_{m-1\,1})_z & (A_{m-1\,2})_z & \cdots & \cdots & (A_{m-1\,m-1})_z \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{A}_{\bar{z}} = (\mathscr{A}_z)^\dagger \tag{44}$$

и ковариантную производную

$$\mathscr{D}_z V := \partial_z V - i\, V\, \mathscr{A}_z\,. \tag{45}$$

Лагранжиан модели имеет вид:

$$\mathscr{L} = \mathrm{Tr}((\mathscr{D}_z V)^\dagger\, \mathscr{D}_z V)\,. \tag{46}$$

Ясно, что имеется калибровочная инвариантность относительно группы $U(n_1) \times \cdots \times U(n_{m-1})$. В диссертации показано, что исключение вспомогательных калибровочных полей приводит к действию (20). Также ясно, что в пределе большого N данная модель является по существу векторной, т.к. матрица V растет в вертикальном направлении, но не в горизонтальном.

Связь с η-деформированными и $\mathbb{Z}_m$-градуированными моделями

Еще один результат диссертации – установление связи между предложенными σ-моделями с комплексными однородными таргет-пространствами и так называемыми η-деформированными моделями, которые в последнее время привлекли значительный интерес в научном сообществе ввиду потенциальной возможности их применения к деформациям суперструнных моделей типа $AdS_5 \times S^5$. Простейшая η-деформированная модель Климчика в терминах конусных компонент $J_\pm$ обычного тока Маурера-Картана $J := -g^{-1}dg$ описывается действием

$$\mathscr{S}_\eta = \frac{1}{2} \int\, d^2x\, \langle J_+, \frac{1+\eta^2}{1-\eta\, R} \circ J_- \rangle, \tag{47}$$

где R – линейный оператор на алгебре Ли, $R:\ \mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$, удовлетворяющий так называемому классическому модифицированному уравнению Янга-Бакстера

$$N(a,b):=[R\circ a,R\circ b]-R\circ([R\circ a,b]+[a,R\circ b])-[a,b]=0 \qquad \forall\, a,b\in\mathfrak{g} \tag{48}$$

и обладающий свойством антисимметрии

$$\langle R\circ a,b\rangle=-\langle a,R\circ b\rangle. \tag{49}$$

Эти два условия позволяют сформулировать уравнения движения деформированной модели в виде условия нулевой кривизны.

Одно из основных наблюдений заключается в том, что R-матрицы, удовлетворяющие условиям (48)-(49), тесно связаны с комплексными структурами на таргет-пространстве. Имеются следующие возможности: во-первых, можно выбрать в качестве R комплексную структуру на таргет-пространстве (т.е. на группе G), конечно, в том случае, если группа G является четномерной. В этом случае условие (48) означает зануление тензора Нийенхейса комплексной структуры, т.е. ее интегрируемость, а (49) – согласованность комплексной структуры с метрикой. При этом деформированная модель представляет собой деформацию теории главного кирального поля при помощи слагаемого в действии, пропорционального (незамкнутой) кэлеровой форме на таргет-пространстве с произвольным коэффициентом η.

Можно также пойти другим путем и рассмотреть 'стандартную' R-матрицу, используемую в большинстве работ:

$$R\big|_{\mathfrak{g}_\alpha}=i\,\mathbb{1},\quad \alpha>0 \tag{50}$$

$$R\big|_{\mathfrak{g}_\alpha}=-i\,\mathbb{1},\quad \alpha<0 \tag{51}$$

$$R\big|_{\mathfrak{t}}=0\,. \tag{52}$$

Здесь $\mathfrak{g}_\alpha$ – одномерное подпространство алгебры Ли, соответствующее корню α, а $\mathfrak{t}$ – картановская подалгебра. Будем теперь рассматривать действие (47) с евклидовой сигнатурой на мировом листе. Легко видеть, что существуют предельные значения $\lim\limits_{\eta\to\pm i}\mathscr{S}_\eta$. Для ясности рассмотрим предел $\eta\to i$. В этом случае

$$\mathscr{S}_{\mathrm{lim}}=\lim_{\eta\to i}\mathscr{S}_\eta=\int\, d^2x\,\langle (J_z)_{\mathfrak{m}_+},(J_{\bar z})_{\mathfrak{m}_-}\rangle \tag{53}$$

Существует также предел нетеровского тока, а потому и лаксовой пары. Любопытный факт состоит в том, что таргет-пространство модели, которая получается в пределе, отличается от исходного. Причина этого в том, что действие $\mathscr{S}_{\lim}$ инвариантно относительно группы H калибровочных преобразований, где H – картановская подгруппа. В результате таргет-пространством оказывается G/H, а не G, как это было для исходной модели (47). Самый прозрачный пример – это случай $G = SU(N)$, $H = U(1)^{N-1}$ (картановский тор группы G). В этом случае таргет-пространство модели, которая получается в пределе, – это $G/H = SU(N)/U(1)^{N-1}$ – многообразие полных флагов в $\mathbb{C}^N$. Действие (53) в этом случае совпадает с нашим действием (20).

Помимо η-деформированных моделей существуют сигма-модели с m-симметрическими таргет-пространствами, которые также оказываются интегрируемыми и в некоторых случаях связанными с предложенными нами моделями (20). Однородное пространство $\frac{G}{H}$ называется m-симметрическим, если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G допускает разложение

$$\mathfrak{g} = \oplus_{i=0}^{m-1} \mathfrak{g}_i, \qquad [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j \bmod m} \tag{54}$$

и $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$. В этих терминах обычные симметрические пространства – это 2-симметрические пространства. Действие сигма-моделей с m-симметрическими таргет-пространствами, предложенное в работе Ч. Юнга, таково:

$$\widetilde{\mathcal{S}} := \int_\Sigma d^2x \, \|\partial X\|_G^2 + \int_\Sigma X^* \widetilde{\omega}, \tag{55}$$

где $\widetilde{\omega}$ – 2-форма, построенная при помощи $\mathbb{Z}_m$-разложения алгебры Ли (54). Заметим, что если бы $\widetilde{\omega}$ была кэлеровой формой, то мы бы получили в точности действие (20). Перейдем теперь к точному определению формы $\widetilde{\omega}$. Разложим ток $J = -g^{-1}dg$ в соответствии с (54):

$$J = -g^{-1}dg = \sum_{i=0}^{m-1} J^{(i)}, \qquad \text{где} \quad J^{(i)} \in \mathfrak{g}_i \, . \tag{56}$$

Форма $\widetilde{\omega}$ определяется следующим образом:

$$\widetilde{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(m-k)-k}{m} \operatorname{tr}\left(J^{(k)} \wedge J^{(m-k)}\right) \tag{57}$$

В связи с этой формулой возникает следующий важный вопрос. Из (57) видно, что форма $\widetilde{\omega}$ зависит от выбора $\mathbb{Z}_m$-градуировки. Как правило, заданная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ допускает много разных градуировок. Различны ли модели, определенные формулами (55)-(57), при выборе различных градуировок на $\mathfrak{g}$?

В диссертации дан следующий ответ:

- По крайней мере в случае однородных пространств унитарной группы модели, определенные формулами (55)-(57) при выборе различных градуировок[§] типа $A_N^{(1)}$ на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ классически эквивалентны моделям, заданным действием (20) при определенном выборе комплексной структуры на таргет-пространстве.

Более того, можно явно указать, как связано B-поле $\widetilde{\omega}$ действия (55) и кэлерова форма на $\frac{G}{H}$, являющаяся B-полем нашего действия (20). Для этого заметим в первую очередь, что градуировка полностью определяется градуировкой простых положительных корней и 'мнимого корня':

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{m_1} & & & & \\ & 0 & \mathbf{m_2} & & & \\ & & 0 & \ddots & & \\ & & & 0 & \mathbf{m_N} & \\ & & & & & 0 \\ \mathbf{m_{N+1}} & & & & & \end{pmatrix} \tag{58}$$

Здесь m_i – целые числа; порядок циклической группы есть их сумма $m = \sum_j m_j$. Последнее условие можно явно разрешить, вводя числа n_i: $m_k = n_k - n_{k+1}$, $n_{N+2} \equiv n_1 - m$. Ясно, что n_i определены с точностью до добавления общей постоянной. Формы $\tilde{\omega}$ и ω связаны простой формулой

$$\tilde{\omega} = \omega - 2\sum_{i=1}^{N} \frac{n_i}{m}\, dJ_{ii} \tag{59}$$

Таким образом, B-поля двух моделей в данном конкретном случае отличаются лишь топологическим членом, который в модели Юнга однозначным образом определяется выбранной $\mathbb{Z}_m$-градуировкой.

[§]В общем случае циклические градуировки на алгебрах Ли были классифицированы В. Кацем.

Содержание по главам

Диссертационная работа состоит из введения, основной части, содержащей 7 глав, заключения и двух приложений.

Во введении обоснована актуальность изучаемых задач, дан краткий обзор диссертационной работы и сформулированы основные результаты, выносимые на защиту.

В главе 1 описана комплексная и симплектическая геометрия пространств флагов в $\mathbb{C}^N$. Показано, как пространства флагов естественным образом возникают при описании взаимодействия механической частицы с неабелевым калибровочным полем. При помощи подхода, основанного на использовании континуального интеграла, описаны основные идеи теории геометрического квантования (теорема Бореля-Ботта-Вейля).

В главе 2 подробно описан разработанный автором подход к описанию предела Халдейна – непрерывного предела спиновой цепочки вблизи анти-ферромагнитного основного состояния. Основное наблюдение состоит в том, что классическое анти-ферромагнитное основное состояние можно описать как лагранжево подмногообразие в фазовом пространстве элементарной ячейки спиновой цепочки. В данной главе мы рассматриваем конкретную спиновую цепочку с $SU(3)$-симметрией и показываем, что в непрерывном пределе возникает сигма-модель с таргет-пространством $\frac{U(3)}{U(1)^3}$.

В главе 3 обобщаются результаты главы 2 на случай более общих спиновых цепочек с $SU(N)$-симметрией. Показано, что при помощи непрерывного предела Халдейна из таких цепочек можно получить сигма-модели любых пространств флагов $\frac{U(N)}{U(n_1)\times\cdots\times U(n_m)}$. Получены универсальные выражения для метрики и топологического члена сигма-модели.

В главе 4 описаны сигма-модели с комплексными однородными таргет-прос-транствами, для уравнений движения которых справедливо представление нулевой кривизны. Широкий класс допустимых таргет-пространств – пространства флагов в $\mathbb{C}^N$. В данной главе мы подробно исследуем геометрию пространства $\frac{U(3)}{U(1)^3}$ и соответствующую сигма-модель.

В главе 5 строятся все решения уравнений движения введенной в предыдущей главе сигма-модели пространства $\frac{U(3)}{U(1)^3}$ для случая, когда мировая поверхность – сфера $\mathbf{C}\mathrm{P}^1$. Заметим, что существует расслоение $\pi : \frac{U(3)}{U(1)^3} \to \mathbf{C}\mathrm{P}^2$ со слоем $\mathbf{C}\mathrm{P}^1$. Мы показываем, что построение решений уравнений движения в рассматриваемой модели расщепляется на две простые подзадачи: построение гармонических отображений в $\mathbf{C}\mathrm{P}^2$ (базу расслоения), а также голоморфных отображений в $\mathbf{C}\mathrm{P}^1$ (слой расслоения).

В главе 6 построено квазилинейное представление (gauged linear σ-model) для рассматриваемых сигма-моделей пространств флагов. Данное представление связано с геометрической теорией кэлеровых факторов и сводится к введению 'поля материи', удовлетворяющего квадратичному условию и взаимодействующего со вспомогательным 'калибровочным' полем. Это представление весьма полезно при построении $\frac{1}{N}$-разложения, которое является для рассматриваемых моделей аналогом теории возмущений по константе связи.

В главе 7 мы описываем взаимосвязи между введенными ранее сигма-моделями с комплексными однородными таргет-пространствами и некоторыми другими известными интегрируемыми моделями – так называемыми η-деформированными моделями, а также моделями с $\mathbb{Z}_m$-градуированными таргет-пространствами (обобщениями симметрических пространств). Важное наблюдение состоит в том, что в качестве используемой в теории η-деформированных моделей R-матрицы может выступать оператор комплексной структуры. При этом классическое модифицированное уравнение Янга-Бакстера сводится к условию обращения в нуль тензора Нийенхейса, т.е. к интегрируемости комплексной структуры.

В заключении обсуждаются полученные результаты и их возможное развитие.

В приложениях приводятся необходимые сведения о кэлеровых структурах на пространствах флагов, а также приводятся детали исключения вспомогательных полей из лагранжианов моделей, исследуемых в главах 6 и 7.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

[1] Bykov D. The worldsheet low-energy limit of the $AdS_4 \times \mathbf{C}\mathrm{P}^3$ superstring // Nucl. Phys. B. — 2010. — Vol. 838. — P.47–74.

[2] Bykov D. Haldane limits via Lagrangian embeddings // Nucl. Phys. B. — 2012. — Vol. 855. — P.100–127.

[3] Bykov D. The geometry of antiferromagnetic spin chains // Commun. Math. Phys. — 2013. — Vol. 322. — P.807–834.

[4] Быков Д.В. Геометрические аспекты голографической двойственности // Теор. Мат. Физ. — 2014. — Т. 181, вып. 3. — С.436–448.

[5] Bykov D. Instantons and holomorphic spheres // Phys. Part. Nucl. Lett. — 2014. — Vol. 11, № 7. — P.1016–1018.

[6] Bykov D. Integrable properties of sigma-models with non-symmetric target spaces // Nucl. Phys. B. — 2015. — Vol. 894. — P.254–267.

[7] Быков Д.В. О дифференциальной геометрии раздутий // Теор. Мат. Физ. — 2015. — Т.185, вып.2. — С.313–328.

[8] Bykov D. Classical solutions of a flag manifold σ-model // Nucl. Phys. B. — 2016. — Vol. 902. — P.292–301.

[9] Bykov D. Complex structures and zero-curvature equations for σ-models // Phys. Lett. B. — 2016. — Vol. 760. — P.341–344.

[10] Быков Д.В. Циклические градуировки алгебр Ли и пары Лакса для сигма-моделей // Теор. Мат. Физ. — 2016. — Т.189, вып.3. — С.380–388.

[11] Bykov D. Sigma-models with complex homogeneous target spaces // EPJ Web of Conf. — 2016. — Vol. 125. — P.5002.

[12] Bykov D. Complex structure-induced deformations of σ-models // JHEP. — 2017. — Vol. 1703. — P.130.

[13] Быков Д.В. Квазилинейная формулировка σ-модели пространства флагов // Теор. Мат. Физ. — 2017. — Т.193, вып.3. — С.381–400.

Подписано в печать 14.06.2018 г.
Тираж 100 экз.

Отпечатано в Математическом Институте им. В.А.Стеклова РАН
Москва 119991, ул. Губкина, д. 8