Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

На правах рукописи
УДК 512.76

Пржиялковский Виктор Владимирович

Торические модели Ландау–Гинзбурга

01.01.06 – математическая логика,
алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2017

Работа выполнена в отделе алгебраической геометрии Федерального государственного бюджетного учреждения науки Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

Официальные оппоненты:
ЖЕГЛОВ Александр Борисович, доктор физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальной геометрии и приложений механико-математического факультета Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования "Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова" (специальность 01.01.06);
МИРОНОВ Андрей Евгеньевич, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, ведущий научный сотрудник лаборатории динамических систем Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук (специальность 01.01.04);
ШАБАТ Георгий Борисович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики, логики и интеллектуальных систем в гуманитарной сфере Института лингвистики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования "Российский государственный гуманитарный университет" (РГГУ) (специальность 01.01.06).

Ведущая организация:
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича Российской академии наук (ИППИ РАН).

Защита диссертации состоится 5 октября 2017 г. в 14 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 002.022.03 при Федеральном государственном бюджетном учреждением науки Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук по адресу: 119991, г. Москва, ул. Губкина, д. 8, 9-ый этаж, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Математического института им. В. А. Стеклова РАН и на сайте
`http://www.mi.ras.ru/dis/ref17/przhiyalkovsky/dis.pdf`

Автореферат разослан "____" ____________ 2017 г.
Ученый секретарь диссертационного совета
Д 002.022.03 при МИАН,
д. ф.-м. н. Королев   М. А. Королев

Актуальность темы

Одной из наиболее ярких идей в математике за последние тридцать лет является идея зеркальной симметрии. Как это часто бывает, в математику она пришла из математической физики. А именно, важную роль в описании поведения элементарных частиц в теории струн играли трехмерные многообразия Калаби–Яу, то есть многообразия комплексной размерности три, имеющее нигде не обращающуюся в ноль везде определенную голоморфную 3-форму. Снабдив такие многообразия симплектической формой и комплексной структурой, их можно рассматривать как, с одной стороны, симплектические, а, с другой стороны, алгебраические многообразия. Физики заметили, что трехмерные многообразия можно разбить на (неоднозначно определенные) пары, такие что симплектические свойства многообразия Калаби–Яу X (так называемые браны типа A) соответствуют алгебраическим свойствам парного многообразия Y (так называемым бранам типа B) и наоборот, симплектические свойства для Y соответствуют алгебраическим свойствам для X. Одним из численных проявлений такого соответствия является "зеркальная симметрия ромбов Ходжа", то есть равенства $h^{i,j}(X) = h^{i,3-j}(Y)$. Неформально можно сказать, что приставив зеркало к ромбу Ходжа для X, в нем можно увидеть ромб Ходжа для Y, откуда и произошло само название "зеркальная симметрия".

Вскоре после того, как было сделано это наблюдение, оно получило прямое обобщение на случай многомерных многообразий Калаби–Яу, а также были сформулированы некоторые численные следствия обнаруженного соответствия, которые позволили математически строго сформулировать идею зеркальной симметрии. Первым примером такого обобщения стала знаменитая статья,[1] в которой была рассмотрена общая гиперповерхность степени 5 в $\mathbb{P}^4$. Для такой гиперповерхности был рассмотрен некоторый специальный ряд, который строился по (ожидаемым) числам рациональных кривых заданной степени, лежащих на рассматриваемой квинтике (согласно гипотезе Клеменса, такие числа конечны). Было предъявлено некоторое конкретное одномерное семейство, такое что период для этого семейства, то есть функция, задаваемая интегралами послойных циклов по послойным формам, после некоторого преобразования совпадает с этим специальным рядом для квинтики. Этот принцип, сопоставляющий ряд, построенный по числам рациональных кривых, лежащих на многообразии, периодам двойственного однопараметрического семейства, лег в основу гипотезы зеркальной симметрии

[1] P. Candelas, X. de la Ossa, P. Green, L. Parkes, *A pair of Calabi–Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory*, Nucl.Phys. B 359 (1991), 21–74.

вариаций структур Ходжа.

Дальнейшим обобщением гипотезы зеркальной симметрии стала ее формулировка для многообразий Фано, то есть многообразий с обильным антиканоническим классом. Такие многообразия играют огромную роль в алгебраической геометрии: например, они являются главными "строительными кирпичами" в программе минимальных моделей. Кроме того, они имеют очень богатую геометрию; так, на них лежит много рациональных кривых. В отличии от случая многообразий Калаби–Яу, многообразиям Фано зеркальная симметрия сопоставляет не многообразие такого же типа, а некоторое специальное одномерное семейство, которое называется моделью Ландау–Гинзбурга. Слоями этого семейства, в частности, являются многообразия Калаби–Яу, которые зеркально двойствены антиканоническим сечениям многообразия Фано. Гивенталь,[2] а позже, независимо и с физической точки зрения, Хори и Вафа[3] построили, и для случая многообразий Калаби–Яу и для случая многообразий Фано, такие семейства для полных пересечений в горенштейновых торических многообразиях (их конструкция более детально описана чуть ниже).

Дальнейшим шагом стала предложенная Концевичем гипотеза гомологической зеркальной симметрии, формулирующая зеркальное соответствие в терминах производных категорий. А именно, многообразию Фано X как алгебраическому многообразию можно сопоставить производную категорию когерентных пучков $D^b(coh\ X)$, а как симплектическому (для выбранной на нем симплектической формы) — категорию Фукаи $Fuk(X)$, объектами которой являются лагранжевы подмногообразия для этой формы, а морфизмы определяются гомологиями Флоера. С другой стороны, подобные категории можно определить и для модели Ландау–Гинзбурга $w\colon Y \to \mathbb{C}$, то есть для многообразия Y, снабженного непостоянной комплекснозначной функцией w, называемой суперпотенциалом. Роль производной категории когерентных пучков для модели Ландау–Гинзбурга (Y, w) будет играть производная категория особенностей $D^b_{sing}(Y, w)$, то есть произведение по всем особым слоям фактора производной категории когерентных пучков по подкатегории совершенных комплексов, а роль категории Фукаи будет играть категория Фукаи–Зайделя $FS(Y, w)$, объектами которой являются исчезающие к особенностям лагранжевы циклы (для выбранной на модели Ландау–Гинзбурга симплектической формы). Гипотеза гомологической зеркальной симметрии, впервые

[2] A. Givental, *A mirror theorem for toric complete intersections*, Topological field theory, primitive forms and related topics (Kyoto, 1996), 141–175, Progr. Math., 160, Birkhäuzer Boston, Boston, MA, 1998.

[3] K. Hori, C. Vafa, *Mirror symmetry*, arXiv:hep-th/0002222.

сформулированная Концевичем,[4] утверждает эквивалентности категорий

$$Fuk(X) \simeq D^b_{sing}(Y, w),$$

$$D^b(coh\ X) \simeq FS(Y, w).$$

Гипотеза гомологической зеркальной симметрии очень сильна (достаточно сказать, что, согласно теореме Бондала–Орлова[5], по производной категории когерентных пучков на многообразии Фано можно восстановить само это многообразие), но, во многом из-за этого, ее сложно доказать даже для простейших случаев. В качестве примера упомянем доказательство части гипотезы (то есть одной из эквивалентностей в ней) для поверхностей дель Пеццо,[6] торических многообразий[7] и некоторых гиперповерхностей.[8] Поэтому естественным представляется изучение несколько ослабленной версии гипотезы гомологической зеркальной симметрии, взяв за определение одно из важных ее свойств. Это позволит эффективно строить и изучать зеркальное соответствие, а также его следствия, как для гомологической зеркальной симметрии, так и для геометрии многообразий Фано.

Таким обобщением является гипотеза зеркальной симметрии вариаций структур Ходжа, которая исторически возникла раньше гипотезы гомологической зеркальной симметрии, и которую мы упоминали в контексте примера трехмерной квинтики. Она является проявлением того, что из эквивалентности категорий следует эквивалентность их когомологий Хохшильда, которые, в нашем случае, соответствуют квантовым когомологиям и вариации структур Ходжа. А именно, по многообразию X можно построить так называемое кольцо квантовых когомологий — деформацию обычного кольца когомологий, структурными константами которой являются трехточечные примарные инварианты Громова–Виттена рода ноль, то есть ожидаемые числа рациональных кривых определенной степени, лежащие на многообразии (тут важно, что X является многообразием Фано или "близким" к нему, иначе на нем не найдется достаточного количества рациональных кривых). С помощью квантовых когомологий можно определить вторую связность

[4] M. L. Kontsevich, *Homological algebra of mirror symmetry*, Proc. International Congress of Mathematicians (Zürich 1994), Birkhäuzer, Basel, 1995, pp. 120–139.

[5] A. Bondal, D. Orlov, *Reconstruction of a variety from the derived category and groups of autoequivalences*, Compositio Mathematica 125 (03), 327–344.

[6] D. Auroux, L. Katzarkov, D. Orlov, *Mirror symmetry for Del Pezzo surfaces: Vanishing cycles and coherent sheaves*, Inv. Math. 166, No. 3 (2006), 537–582.

[7] M. Abouzaid, *Morse homology, tropical geometry, and homological mirror symmetry for toric varieties*, Selecta Math. 15 no. 2 (2009), 189–270.

[8] N. Sheridan, *Homological mirror symmetry for Calabi-Yau hypersurfaces in projective space*, Invent. Math. 199 (2015), no. 1, 1–186.

Дубровина, которая задается квантовым умножением на дивизоры в тривиальном расслоении со слоем $H^*(X)$ и базой — тором, соответствующим решетке Пикара $\mathrm{Pic}\,(X)$. Решением для соответствующего (регуляризованного) $\mathcal{D}$-модуля является так называемый I-ряд (или, что то же самое, J-ряд Гивенталя), то есть производящий ряд одноточечных инвариантов Громова–Виттена с потомками. С другой стороны, однопараметрическому семейству $w\colon Y \to \mathbb{C}$ можно сопоставить периоды, то есть функции, определяемые послойными интегралами выбранных симплектических форм по выбранным циклам. Гипотеза зеркальной симметрии вариаций структур Ходжа утверждает, что периоды совпадают (или преобразуются при помощи простых преобразований) с I-рядом. Иными словами, это значит, что вторая связность Дубровина для многообразия Фано совпадает со связностью Гаусса–Манина для двойственной модели Ландау–Гинзбурга, или что регуляризованное квантовое дифференциальное уравнение для многообразия совпадает с уравнением Пикара–Фукса для двойственной модели.

Первый и основной пример выполнения гипотезы зеркальной симметрии вариаций структур Ходжа привел Гивенталь, построив модели Ландау–Гинзбурга для полных пересечений в гладких торических многообразиях (в дальнейшем конструкция Гивенталя была обобщена). Этот пример играет важную роль для настоящей работы, поэтому приведем его.

Пусть T — гладкое торическое многообразие Фано размерности N с числом Пикара ρ. Пусть $D_1, \ldots, D_{N+\rho}$ — компоненты его граничного дивизора. Пусть $X_1, \ldots, X_k$ — классы обильных дивизоров на T, высекающих гладкое полное пересечение Фано X. Предположим для простоты, что $\dim X = N - k > 2$. Положим $X_0 = -K_T - X_1 - \ldots - X_k$. Выберем базис $\{H_1, \ldots, H_\rho\} \subset H^2(T)$, состоящий из классов численно эффективных дивизоров. Введем формальные переменные $q_1, \ldots, q_\rho$, соответствующие выбранному базису, и обозначим $q^\beta = q_1^{\beta\cdot H_1} \cdot \ldots \cdot q^{\beta \cdot H_\rho}$. В работе[9], было показано, что свободный член, то есть коэффициент при $\mathbf{1} \in H^*(X)$, регуляризованного I-ряда для X равен

$$\widetilde{I}_0^X(q_1, \ldots, q_\rho) = \exp\big(\mu(q)\big) \cdot \sum_{\beta \in K} q^\beta \frac{\prod_{i=0}^k |\beta \cdot X_i|!}{\prod_{j=1}^{N+\rho} |\beta \cdot D_j|!^{\frac{\beta \cdot D_j}{|\beta \cdot D_j|}}},$$

где $\mu(q)$ — некоторый простой коррекционный член, а

$$K = NE_1(X) \cap H_2(X, \mathbb{Z}).$$

[9] A. Givental, *A mirror theorem for toric complete intersections*, Topological field theory, primitive forms and related topics (Kyoto, 1996), 141–175, Progr. Math., 160, Birkhäuzer Boston, Boston, MA, 1998.

Опишем теперь конструкцию Гивенталя двойственной модели Ландау–Гинзбурга для X и вычислим ее периоды. Введем $N+\rho$ формальных переменных $u_1, \ldots, u_{N+\rho}$, которые соответствуют дивизорам $D_1, \ldots, D_{N+\rho}$. Решетку Пикара с помощью выбранного базиса можно отождествить с решеткой соотношений на порождающие вектора лучей веера для T. Запишем соотношения, соответствующие дивизорам H_i, как мономы Лорана R_i от переменных u_j. Для конструкции модели Ландау–Гинзбурга типа Гивенталя необходимо выбрать так называемое неф-разбиение, то есть разбиение множества $\{1, \ldots, N+\rho\}$ на непересекающиеся подмножества $E_0, \ldots, E_k$, такие что для всех $1 \leqslant i \leqslant k$ дивизор $\sum_{j\in E_i} D_j$ линейно эквивалентен гиперповерхности X_i. Моделью Ландау–Гинзбурга типа Гивенталя для X называется подмногообразие $LG_0(X)$ в торе $\operatorname{Spec}\mathbb{C}_q[u_1^{\pm1}, \ldots, u_{N+\rho}^{\pm1}]$, заданное уравнениями

$$R_i = q_i,\ i \in [1,\rho],$$

и

$$\sum_{s\in E_j} u_s = 1,\ j \in [1,k],$$

с функцией $w = \sum_{s\in E_0} u_s$, называемой суперпотенциалом (здесь обозначено $\mathbb{C}_q = \mathbb{C}[q_1^{\pm1}, \ldots, q_\rho^{\pm1}]$). Согласно Гивенталю[10], периоды такой модели равны интегралу

$$I_X^0 = \frac{1}{(2\pi i)^{N+\rho}} \int_\delta \frac{\frac{du_1}{u_1} \wedge \ldots \wedge \frac{du_{N+\rho}}{u_{N+\rho}}}{\prod_{i=1}^{\rho}(1-\frac{q_i}{R_i}) \cdot \prod_{j=0}^{k}\left(1-\left(\sum_{s\in E_j} u_s\right)\right)} \in \mathbb{C}[[q_1, \ldots, q_\rho]].$$

Теорема Гивенталя утверждает, что

$$\widetilde{I}_0^X = I_X^0.$$

Таким образом, $LG_0(X)$ является зеркально двойственной моделью Ландау–Гинзбурга для X с точки зрения гипотезы зеркальной симметрии вариаций структур Ходжа. (Выбрав дивизор $D \in \operatorname{Pic}(X)\otimes\mathbb{C}$, можно с помощью координат его разложения в базисе $\{H_i\}$ специализировать переменные q_i и получить из $LG_0(X)$ обычное многообразие с суперпотенциалом.)

Конструкцию Гивенталя можно обобщить, применив ее к полным пересечениям в особых торических многообразиях и, более общо, в многообразиях, допускающих "хорошие" торические вырождения, таких, как грассманианы

[10] A. Givental, *A mirror theorem for toric complete intersections*, Topological field theory, primitive forms and related topics (Kyoto, 1996), 141–175, Progr. Math., 160, Birkhäuzer Boston, Boston, MA, 1998.

или многообразия частичных флагов [11] [12]. Кроме того, модели Гивенталя часто можно упростить, мономиально выразив одни переменные через другие для первой группы уравнений и бирационально для второй. Суперпотенциал w после первой замены станет многочленом Лорана от N переменных, многогранник Ньютона которого совпадает с веерным многогранником для T, то есть выпуклой оболочкой образующих лучей веера для T. Во многих случаях вторую, бирациональную замену переменных можно сделать так, что суперпотенциал также будет оставаться многочленом Лорана. Кроме того, такие замены соответствующим образом преобразуют интеграл Гивенталя. А именно, после ограничения модели Ландау–Гинзбурга на подтор, соответствующий дивизору D, интеграл примет вид

$$\frac{1}{(2\pi i)^{N-k}}\int\limits_{\delta}\frac{\frac{dx_1}{x_1}\wedge\ldots\wedge\frac{dx_{N-k}}{x_{N-k}}}{1-tf_{X,D}},$$

где $f_{X,D}$ — некоторый многочлен Лорана (соответствующий торическому вырождению многообразия X). Этот интеграл будет по прежнему периодом для модели Ландау–Гинзбурга, если бирациональные преобразования бирегулярны в окрестности циклов, по которым берутся интегралы. Его легко найти, разложив знаменатель в ряд по t: он равен $1+[f_{X,D}]_0t+[f_{X,D}^2]_0t^2+\ldots$, где через $[f]_0$ обозначен свободный член многочлена Лорана f.

Рассмотрим горенштейново торическое многообразие. Оно рефлексивно, то есть многогранник, двойственный его веерному многограннику, целочисленен. Антиканоническую линейную систему на этом торическом многообразии можно описать как линейную систему многочленов Лорана с носителем в двойственном многограннике. Таким образом, модель Ландау–Гинзбурга типа Гивенталя для антиканонического сечения торического многообразия можно описать как антиканоническое сечение в двойственном торическом многообразии. Оказывается, для такой двойственности выполняется зеркальная симметрия и на уровне чисел Ходжа. А именно, рассмотрим горенштейново торическое многообразие T и двойственное ему торическое многообразие $T^\vee$ (иными словами, многообразия T и $T^\vee$ определяются двойственными целочисленными многогранниками). Пусть X — полное пересечение Калаби–Яу в T размерности n, определяемое некоторым неф-разбиением. Батырев и Борисов[13] определили двойственное неф-разбиение, которое опре-

[11] V. V. Batyrev, I. Ciocan-Fontanine, B. Kim, D. van Straten, *Conifold transitions and mirror symmetry for Calabi–Yau complete intersections in Grassmannians*, Nucl. Phys., B 514, No.3, 640–666 (1998).

[12] V. V. Batyrev, I. Ciocan-Fontanine, B. Kim, D. van Straten, *Mirror Symmetry and Toric Degenerations of Partial Flag Manifolds*, Acta Math. 184, No. 1 (2000), 1–39.

[13] V. Batyrev, L. Borisov, *Mirror duality and string-theoretic Hodge numbers*, Invent. Math. 126 (1996), no.

деляет двойственное многообразие Калаби–Яу Y. В той же работе они показали, что

$$h_{st}^{p,q}(X) = h_{st}^{p,n-q}(Y),$$

где $h_{st}^{p,q}(X)$ — струнные числа Ходжа (в частности, в нашем случае они совпадают с числами Ходжа крепантного разрешения многообразия X, которые, по теореме Батырева[14], не зависят от конкретного разрешения). Для случая многообразия Фано такое равенство напрямую написать нельзя, так как двойственным объектом для него будет не многообразие, а семейство. многообразий. В работе[15] были (тремя способами) определены так называемые адаптированные числа Ходжа для "вручную компактифицированных моделей Ландау–Гинзбурга" и выдвинута гипотеза о зеркальном соответствии чисел Ходжа для них. В настоящей работе, в частности, изучены эти гипотезы: они подкорректированы и доказаны для случая поверхностей дель Пеццо.

Ожидается, что разные версии гипотез зеркальной симметрии согласованы друг с другом. Это значит, что для предложенных Гивенталем моделей Ландау–Гинзбурга должна выполняться и гипотеза гомологической зеркальной симметрии. Более точно, должен быть выполнен следующий компактификационный принцип: должна существовать послойная компактификация моделей Ландау–Гинзбурга типа Гивенталя, которая, после необходимого оснащения симплектической формой, удовлетворяет гипотезе гомологической зеркальной симметрии. В частности, слоями для такой компактификации должны быть многообразия Калаби–Яу, зеркально двойственные антиканоническим сечениям многообразия Фано. Эти три свойства (соответствие инвариантов Громова–Виттена периодам, существование компактификации до семейства многообразий Калаби–Яу и связь с торическими вырождениями) и легли в основу следующего понятия, которое является центральным для данной работы.

Определение. Рассмотрим пару, состоящую из гладкого многообразия Фано X размерности n и дивизора D на нем. Этому дивизору соответствует орбита антиканонического направления на торе $\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}_q$, который можно рассматривать как тор, параметризованный базисом решетки $\mathrm{Pic}\,(X)$. Пусть $\widetilde{I}_0^{X,D}$ — свободный член, то есть коэффициент при $\mathbf{1} \in H^*(X)$, ограничения регуляризованного I-ряда для X на эту орбиту. *Торической моделью*

1, 183–203.

[14]V. Batyrev, *Birational Calabi–Yau n-folds have equal Betti numbers*, New trends in algebraic geometry (Warwick, 1996), 1–11, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 264, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.

[15]L. Katzarkov, M. Kontsevich, T. Pantev, *Bogomolov–Tian–Todorov theorems for Landau–Ginzburg models*, J. Diff. Geom., 105, No. 1 (2017), 55–117.

Ландау–Гинзбурга для пары (X, D) называется многочлен Лорана f от n переменных, удовлетворяющий следующим условиям.

Условие периодов Выполнено равенство $\widetilde{I}_0^{X,D} = \sum [f^i]_0 t^i$.

Условие Калаби–Яу Существует относительная компактификация семейства слоев морфизма

$$f\colon (\mathbb{C}^*)^n \to \mathbb{C},$$

тотальным пространством которого является (некомпактное) гладкое многообразие Калаби–Яу Y.

Торическое условие Существует вырождение $X \rightsquigarrow T_X$ к торическому многообразию T_X, веерный многогранник которого совпадает с многогранником Ньютона для многочлена f.

Многочлен Лорана, удовлетворяющий условию периодов, называется *слабой моделью Ландау–Гинзбурга*. Кроме того, мы часто дополнительно будем требовать существование компактификации *лог-Калаби–Яу*, то есть компактификации до семейства над $\mathbb{P}^1$, тотальное пространство которого является гладким, а антиканонический класс является слоем.

Усиленная гипотеза зеркальной симметрии вариаций структур Ходжа утверждает, что для каждого гладкого многообразия Фано такая торическая модель Ландау–Гинзбурга существует.

В данной диссертации строятся торические модели Ландау–Гинзбурга для большого класса многообразий Фано, таких как поверхности дель Пеццо и трехмерные многообразия Фано, полные пересечения во (взвешенных) проективных пространствах и грассманианах, а также строятся их компактификации и изучаются их свойства, инварианты и связанные с ними гипотезы.

Цель работы

Создание теории торических моделей Ландау–Гинзбурга — эффективного подхода к зеркальной симметрии. Доказательство существования торических моделей Ландау–Гинзбурга для большого класса многообразий, таких как поверхности дель Пеццо, гладкие трехмерные многообразия Фано, полные пересечения. Доказательство существования слабых моделей Ландау–Гинзбурга для полных пересечений в грассманианах и большого числа взвешенных полных пересечений. Уточнение и доказательство гипотез Кацаркова–Концевича–Пантева для поверхностей дель Пеццо. Доказательство модулярности моделей Ландау–Гинзбурга трехмерных многообразий Фано основной серии. Формулировка гипотезы о связи числа Ходжа многообразия Фано и числа компонент приводимых слоев их моделей Ландау–Гинзбурга и доказательство этой гипотезы для трехмерных многообразий Фано основной серии и полных пересечений Фано. Построение теории базовых линков в размерностях два и три и построение примеров применения этой теории к поверхностям дель Пеццо и трехмерным многообразиям Фано основной серии. Доказательство существования неф-разбиения и слабых моделей Ландау–Гинзбурга для большого числа гладких взвешенных полных пересечений Фано, а именно, для полных пересечений дивизоров Картье и полных пересечений коразмерности два.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми. Основные из них состоят в следующем.

- Для поверхностей дель Пеццо и выбранных дивизоров на них предъявлена явная конструкция торических моделей Ландау–Гинзбурга. Подкорректированы и доказаны гипотезы Кацаркова–Концевича–Пантева о зеркальной симметрии чисел Ходжа для поверхностей дель Пеццо. А именно, показано, что из трех наборов определенных этими авторами чисел Ходжа для моделей Ландау–Гинзбурга один не может удовлетворять зеркальной симметрии, а другой необходимо подкорректировать (изменив градуировку) и наложить для него некоторое условие на модель Ландау–Гинзбурга (она должна иметь тип Фано). После этих изменений показано, что гипотезы Кацаркова–Концевича–Пантева для поверхностей дель Пеццо выполнены.

- Построены и детально изучены торические модели Ландау–Гинзбурга трехмерных многообразий Фано. А именно, построены компактификации Калаби–Яу для торических моделей Ландау–Гинзбурга типа Минковского и для многообразий Фано, не имеющих моделей типа Минковского, и описан их слой над бесконечностью. Явно построены торические вырождения, соответствующие торическим моделям Ландау–Гинзбурга, для случая трехмерных многообразий Фано основной серии. Явно вычислены поляризации слоев моделей Ландау–Гинзбурга для трехмерных многообразий Фано основной серии. Тем самым показано, что эти слои являются поверхностями Шиоды–Инозе, периоды соответствуют модулярным формам соответствующего уровня, а компактифицированные модели Ландау–Гинзбурга, слои которых двойствены антиканоническим сечениям многообразия Фано, единственны в коразмерности один.

- Построены торические модели Ландау–Гинзбурга для полных пересечений в проективных пространствах, а также слабые модели Ландау–Гинзбурга для полных пересечений в грассманианах. Показано, что для гладких взвешенных полных пересечений дивизоров Картье и для гладких взвешенных полных пересечений коразмерности не больше двух существует хорошее неф-разбиение. Тем самым показано, что такие полные пересечения имеют слабые модели Ландау–Гинзбурга.
- Сформулирована гипотеза, связывающая число Ходжа $h^{1,n-1}(X)$ многообразия Фано X размерности n и числа компонент приводимых слоев его модели Ландау–Гинзбурга. Эта гипотеза доказана для компактификаций Калаби–Яу торических моделей Ландау–Гинзбурга для трехмерных многообразий Фано основной серии и полных пересечений.
- Найдена новая структура на множестве семейств гладких многообразий Фано. А именно, определены базовые линки, связывающие элементарными проекциями торические вырождения трехмерных многообразий Фано. Приведен пример того, как такие линки связывают многообразия Фано основной серии.

Методы исследования

В работе используются методы алгебраической геометрии, в частности торической и бирациональной геометрии, теории чисел, симплектической геометрии, комбинаторики.

Теоретическая и практическая ценность

Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в алгебраической геометрии, теории категорий, теории чисел, зеркальной симметрии и математической физике.

Апробация работы

Результаты работы неоднократно докладывались автором на семинаре отделов алгебры и алгебраической геометрии (семинар И. Р. Шафаревича, МИАН), семинаре им. В. А. Исковских (МГУ–МИАН), семинаре по многомерному комплексному анализу (семинар Витушкина, МГУ), семинаре Лаборатории алгебраической геометрии НИУ ВШЭ, семинаре по автоморфным формам и их приложениям НИУ ВШЭ, семинаре по алгебраической геометрии Института Куранта Университета Нью-Йорка, семинаре по алгебраической геометрии Венского университета, семинаре по алгебре Университета Индианы, семинаре MAGIC Имперского колледжа Лондона, семинаре по теории чисел и геометрии Ноттингемского Университета, семинаре EDGE Эдинбургского университета, международном семинаре "Locally free geometry seminar", а также на международных конференциях, в том числе:

— международная конференция "Exceptional collections and degenerations of varieties", Токио, Япония, 01.09–05.09.2008.

— международная конференция "Homological Mirror Symmetry and applications", Вена, Австрия, 14.10–19.10.2008.

— международная конференция "Workshop for Birationalists: Groups of Birational Automorphisms", Поханг, Южная Корея, 31.03–07.04.2009.

— летняя школа-конференция по проблемам алгебраической геометрии и комплексного анализа, Ярославль, 11.05–16.05.2009.

— международная конференция "Extremal Laurent polynomials — new approaches to mirror symmetry and classification of Fanos", Варвик, Великобритания, 19.10–21.10.2009.

— международная конференция "Mirror Symmetry and Gromov–Witten Invariants", Токио, Япония, 07.12–11.12.2009.

— международная конференция "Geometry at Large", Вена, Австрия, 24.04–07.05.2010.

— международная конференция "Summer School on Mirror Symmetry", Сеул, Южная Корея, 21.06–26.06.2010.

— международный конгресс "V Iberoamerican Congress on Geometry", Темуко, Чили, 10.12–13.12.2010.

— международная конференция "Workshop on Mirror Symmetry and Related Topics", Майами, США, 24.01–04.02.2011.

— международная конференция "Strings and categories", Вена, Австрия, 28.06–01.07.2011.

— международная конференция "Homological mirror symmetry and category theory", Сплит, Хорватия, 11.07–15.07.2011.

— международная конференция "Categories and spectra", Вена, Австрия, 15.08–21.08.2011.

— международная конференция "Geometric structures in mathematical physics”, Варна, Болгария, 19.09–26.09.2011.

— международная конференция “Workshop on Fano Varieties and Extremal Laurent Polynomials”, Берлин, Германия, 13.12–17.12.2011.

— международная конференция “Tropical Geometry in Europe”, Аролла, Швейцария, 18.12–21.12.2011.

— международная конференция “International School on TQFT, Langlands and Mirror Symmetry”, Хуатулько, Мексика, 31.01–04.02.2012.

— международная конференция “Motivic structures on quantum cohomology: progress reports”, Бонн, Германия, 23.03–28.03.2012.

— международная конференция “International Conference on Essential Dimension and Cremona Groups”, Тянчжинь, Китай, 11.06–15.06.2012.

— международная конференция “Birational Geometry and Derived Categories”, Вена, Австрия, 01.08–06.08.2012.

— международный конгресс “Third Latin Congress on Symmetries in Geometry and Physics”, Сан-Луис, Бразилия, 04.02–10.02.2013.

— международная конференция “Quantum and motive cohomology, Fano varieties, and Mirror Symmetry”, Санкт-Петербург, 26.09–28.09.2013.

— международная конференция “Landau–Ginzburg Theory and Fano Varieties”, Генчжу, Южная Корея, 26.05–30.05.2014.

— традиционная зимняя сессия МИАН–ПОМИ “Алгебраическая геометрия, K-теория и мотивы”, Санкт-Петербург, 18.12–20.12.2014.

— международная конференция “Algebraic Geometry and Applications to Physics and Dynamics”, Санкт-Петербург, 25.05–29.05.2015.

— международная конференция “Categorical and analytic invariants in Algebraic geometry 2”, Токио, Япония, 16.11–20.11.2015

— международная конференция “Algebraic geometry in Mexico”, Лос Кабос, Мексика, 31.10–04.11.2016.

— международная конференция “Categorical and analytic invariants in Algebraic geometry 4”, Токио, Япония, 14.11–18.11.2016.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 12 работах автора, список которых приведен к конце автореферата. Все относящиеся к диссертации результаты в совместных работах принадлежат автору.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, 9-х глав, разбитых на параграфы, и списка литературы.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность темы исследования, кратко рассмотрена история задач и их современное состояние, сформулированы основные результаты и описано содержание работы.

В первой части даются определения и приводятся конструкции, которые требуются для дальнейшего. А именно, в первом параграфе дается определение инварианта Громова–Виттена рода ноль для классов когомологий $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in H^*(X)$ на гладком многообразии X как числа

$$\langle \tau_{a_1}\gamma_1, \ldots, \tau_{a_n}\gamma_n \rangle_\beta = \psi_1^{a_1} ev_1^*(\gamma_1) \cdot \ldots \cdot \psi_n^{a_n} ev_n^*(\gamma_n) \cdot [\bar{M}_n(X, \beta)]^{\mathrm{virt}},$$

если $\sum \operatorname{codim} \gamma_i + \sum a_i = \operatorname{vdim} \bar{M}_n(X, \beta)$. Здесь ψ_i — кокасательные линейные классы на стеке Деліня–Мамфорда $\bar{M}_n(X, \beta)$ стабильных отображений рациональных кривых с отмеченными точками, ev_i — забывающие отображения, а $[\bar{M}_n(X, \beta)]^{\mathrm{virt}}$ — виртуальный фундаментальный класс виртуальной размерности $\operatorname{vdim} \bar{M}_n(X, \beta) = \dim X - K_X \cdot \beta + n - 3$. В случае, когда все числа a_i равны нулю, эти инварианты называются примарными и являются ожидаемыми числами рациональных кривых из класса β, лежащих на X и пересекающих общие представители классов гомологий, соответствующих γ_j. В частности, примарные трехточечные инварианты Громова–Виттена задают кольцо квантовых когомологий, которое является деформацией обычного кольца когомологий.

В этом же параграфе определены I-ряды. А именно, одноточечные инварианты Громова–Виттена можно “упаковать” в I-ряд

$$I^X(q_1, \ldots, q_\rho) = 1 + \sum_{\beta \in K} \sum_{i,j \geqslant 0} \langle \tau_i \mu_j \rangle_\beta \check{\mu}_j q^\beta,$$

где сумма берется по всем кривым из множества эффективных кривых K и базису $\mu_1, \ldots, \mu_N$ в $H^*(X)$, так что $\check{\mu}_1, \ldots, \check{\mu}_N$ — двойственный базис. Этот ряд лежит в пополнении пространства $H^*(X) \otimes \mathbb{C}_q$, где $\mathbb{C}_q$ — кольцо Новикова, определенное следующим образом. Рассмотрим базис $\{H_1, \ldots, H_\rho\}$ в пространстве $H^2(X)$, состоящий из численно эффективных дивизоров. Введем формальные переменные q и σ_i, $1 \leqslant i \leqslant \rho$, и положим $q_i = q^{\sigma_i}$. Для любой кривой $\beta \in H_2(X)$ обозначим

$$q^\beta = q^{\sum \sigma_i (H_i \cdot \beta)}.$$

Кольцо Новикова определяется как кольцо многочленов над $\mathbb{C}$ от формальных переменных q^β с соотношениями

$$q^{\beta_1} q^{\beta_2} = q^{\beta_1 + \beta_2}.$$

Заметим, что для любой кривой $\beta \in K = NE_1(X) \cap H_2(X, \mathbb{Z})$ моном q^β имеет неотрицательную степень по всем переменным q_i. Нас будет интересовать регуляризация свободного члена, то есть коэффициента при $\mathbf{1} \in H^*(X)$, этого I-ряда

$$\widetilde{I}_0^X(q_1, \ldots, q_\rho) = 1 + \sum_{\beta \in K} (-K_X \cdot \beta)! \langle \tau_{-K_X \cdot \beta - 2} \mathbf{1} \rangle_\beta \cdot q^\beta.$$

Он является решением регуляризованного квантового дифференциального уравнения для X. Кроме того, чаще всего мы будем рассматривать ограничение этого ряда на орбиту антиканонического направления на торе $\operatorname{Spec} \mathbb{C}_q$, которая соответствует выбранному на X дивизору D; такой ряд получается из последнего ряда заменой q^β на $e^{-D \cdot \beta} t^{-K_X \cdot \beta}$.

Второй параграф первой части посвящен базовым определениям и свойствам торических многообразий. В частности, там отмечено, что если такое многообразие факториально, то решетку, двойственную к решетке Пикара, можно отождествить с решеткой соотношений на целочисленные порождающие лучей веера торического многообразия. Таким образом, базису в решетке Пикара соответствует базис в решетке соотношений на эти порождающие.

Во второй части дано приведенное выше определение торической модели Ландау–Гинзбурга и обсуждаются ее свойства. Это определение и обсуждение выделено в отдельную часть ввиду того, что понятие торической модели Ландау–Гинзбурга является центральным в диссертации. В частности, в этой части изучены периоды для семейства слоев торической модели Ландау–Гинзбурга и приведена следующая гипотеза.

Гипотеза 2.10. Любая пара (X, D), состоящая из гладкого многообразия Фано и дивизора на нем, имеет торическую модель Ландау–Гинзбурга (в смысле определения на странице 7).

Она позволяет надеяться, что имеет место следующая картина.

Торические вырождения многообразий Фано взаимно однозначно соответствуют торическим моделям Ландау–Гинзбурга. Для них выполнен компактификационный принцип.

Третья часть посвящена зеркальной симметрии для поверхностей дель Пеццо. Напомним, что Паскуале дель Пеццо[16] определил их как невырожденные поверхности степени n в $\mathbb{P}^n$. Таким образом, их можно получить друг из друга проекцией из лежащих на них точек. В частности, если эти

[16] P. del Pezzo, *Sulle superficie dell'n^{mo} ordine immerse nello spazio din dimensioni*, Rend. del circolo matematico di Palermo 1 (1): 241–271, 1887.

точки достаточно общие, эта конструкция дает классическое описание всех (за исключением квадрики, которую следует рассмотреть отдельно, и поверхностей дель Пеццо степеней 1 и 2, антиканонический класс которых не очень обилен) гладких поверхностей дель Пеццо как раздутий точек на $\mathbb{P}^2$. Образом проекций из необщих точек будут поверхности дель Пеццо с каноническими особенностями, так как через такую точку могут проходить прямые, которые стянутся при проекции. Выбрав в качестве центров проекций торинвариантные точки, мы получим горенштейновы торические вырождения поверхностей дель Пеццо. **В первом параграфе третьей части** показано, что этим вырождениям соответствуют торические модели Ландау–Гинзбурга (**предложение 3.11**) и, тем самым, подтверждена гипотеза 2.10 в этом случае. С другой стороны, можно рассмотреть базис в группе Пикара гладкой поверхности дель Пеццо, состоящий из собственного прообраза прямой на $\mathbb{P}^2$ и исключительных дивизоров. В том же параграфе выписаны торические модели Ландау–Гинзбурга для поверхностей дель Пеццо и дивизоров на них в терминах координат таких дивизоров в выбранном базисе. Это позволяет явно построить и изучить компактифицированные модели Ландау–Гинзбурга, соответствующие этим дивизорам. Кроме того, в этом же параграфе построены естественные компактификации лог-Калаби–Яу для торических моделей Ландау–Гинзбурга (**конструкция компактификации 3.6**). Слоем над бесконечностью для такой компактификации является колесо гладких рациональных кривых (количество которых зависит от степени поверхности дель Пеццо). Это описание согласуется с описанием моделей Ландау–Гинзбурга поверхностей дель Пеццо и общих дивизоров на них, которое дано в.[17]

Второй параграф третьей части посвящен гипотезам Кацаркова–Концевича–Пантева для гладких поверхностей дель Пеццо. А именно, пусть (Y, w) — модель Ландау–Гинзбурга для такой поверхности, а Z — ее ручная компактификация с дивизором на бесконечности D_Z. Тогда числа Ходжа модели Ландау–Гинзбурга $f^{p,q}(Y, w)$ определяются через

$$f^{p,q}(Y, w) = \dim H^p(Z, \Omega_Z^q(log\, D_Z, f))$$

(**определение 3.20**). Числа Ходжа модели Ландау–Гинзбурга $h^{p,q}(Y, w)$ определяются следующим образом:

$$h^{p,n-q}(Y, w) = \dim gr_{2(n-p)}^{W(N,n-a)} H^{n+p-q}(Y, Y_b) \quad \text{если } a = p - q \geqslant 0,$$

$$h^{p,n-q}(Y, w) = \dim gr_{2(n-q)}^{W(N,n+a)} H^{n+p-q}(Y, Y_b) \quad \text{если } a = p - q < 0$$

[17] D. Auroux, L. Katzarkov, D. Orlov, *Mirror symmetry for Del Pezzo surfaces: Vanishing cycles and coherent sheaves*, Inv. Math. 166, No. 3 (2006), 537–582.

(**определение 3.23**). Здесь $W(N, n+a)$ — весовая фильтрация, центрированная в $n+a$ для логарифма N оператора монодромии в окрестности бесконечности, действующем в относительных когомологиях $H^{n+p-q}(Y, Y_b)$ гладкого слоя Y_b. Для того, чтобы определение (а точнее, связанная с ним гипотеза) было корректно, на оператор N требуется наложить некоторое условие — он должен иметь тип Фано (**определение 3.22**). Другое отличие этого определения от данного в[18] является поправка в градуировке. Мотивация этого определения состоит в том, что по гипотезе гомологической зеркальной симметрии оператор N соответствует умножению на антиканонический класс в когомологиях многообразия Фано, которому соответствует модель Ландау–Гинзбурга. Третьи числа $i^{p,q}(Y, w)$ определяются через смешанные структуры Ходжа для пучка исчезающих циклов к особым слоям. Гипотезы Кацаркова–Концевича–Пантева (**гипотеза 3.28** и **гипотеза 3.29**) утверждают, что, во-первых, эти наборы чисел совпадают, а, во-вторых, что

$$f^{p,q}(Y, w) = h^{p,n-q}(X),$$

если (Y, w) — модель Ландау–Гинзбурга для многообразия X, такая что $\dim(X) = \dim(Y) = n$.

В третьем параграфе третьей части для поверхностей дель Пеццо показано, что эти гипотезы не могут быть выполнены, по тривиальным причинам, для чисел $i^{p,q}(Y, w)$, а для остальных чисел эти гипотезы доказаны (**теорема 3.33**). Для того, чтобы найти нужные числа, **во втором параграфе** изучена топология эллиптических пучков.

Четвертая часть посвящена изучению моделей Ландау–Гинзбурга для трехмерных многообразий Фано; она является центральной в данной работе. **В первом параграфе** данной части обсуждаются слабые модели Ландау–Гинзбурга для таких многообразий, то есть многочлены Лорана, удовлетворяющие условию периодов. Если многообразие Фано имеет очень обильный антиканонический класс, то такие многочлены можно построить, изучив его горенштейновы торические вырождения и сопоставив им, согласно принципу Минковского, многочлены Лорана. Случай не очень обильного канонического класса рассмотрен отдельно.

Во втором параграфе четвертой части построены компактификации лог-Калаби–Яу для слабых моделей Ландау–Гинзбурга типа Минковского (**теорема 4.9**). Естественной компактификацией является компактификация в торическом многообразии, двойственном тому, которое определяется

[18] L. Katzarkov, M. Kontsevich, T. Pantev, *Bogomolov–Tian–Todorov theorems for Landau–Ginzburg models*, J. Diff. Geom., 105, No. 1 (2017), 55–117.

многочленом Лорана. Слои модели Ландау–Гинзбурга компактифицируются в нем до элементов антиканонического пучка и, таким образом, имеют тривиальный антиканонический класс. Оказывается, что если для коэффициентов многочлена Лорана выполнено условие Минковского, то базисным множеством такого пучка является объединение гладких кривых (возможно, с кратностями). Раздутие этого базисного множества и дает требуемое семейство поверхностей типа К3, антиканоническим классом которого является слой. Эта конструкция дает описание слоя над бесконечностью модели Ландау–Гинзбурга как граничного дивизора двойственного торического многообразия. Наконец, случаи, когда многообразие Фано не имеет очень обильного антиканонического класса и модели Ландау–Гинзбурга типа Минковского, рассмотрен отдельно.

Известно, что изучаемые в четвертой части слабые модели Ландау–Гинзбурга соответствуют торическим вырождениям и, таким образом, являются торическими. **В третьем параграфе** явно построены торические вырождения для многообразий Фано основной серии (**теорема 4.25**). Для этого используется общая теорема для (взвешенных) полных пересечений из четвертого параграфа пятой части (**теорема 5.25**) и теория схем Стенли–Райзнера.

Наконец, **четвертый параграф четвертой части** посвящен вычислению решеток Пикара для компактифицированных моделей Ландау–Гинзбурга. Напомним, что общее антиканоническое сечение многообразия Фано индекса i и степени ik^3 с одномерной решеткой Пикара является поверхностью типа К3, поляризованной одномерной решеткой $\langle 2n\rangle$, где $2n = ik$. По двойственности Долгачева–Никулина (зеркальной двойственности для поверхностей типа К3), слои двойственной модели Ландау–Гинзбурга должны иметь поляризацию

$$M_k = H \oplus E_8(-1) \oplus E_8(-1) + \langle -2n\rangle,$$

где H — гиперболическая решетка (**определение 4.26**). Такие поверхности являются поверхностями Шиоды–Инозе, то есть куммеровыми поверхностями, соответствующими произведениям эллиптической кривой на n-изогенную, а их (грубыми) пространствами модулей являются универсальные семейства над модулярной кривой. В четвертом параграфе явно вычислены решетки Пикара слоев моделей Ландау–Гинзбурга и проверено, что для них выполнена двойственность Долгачева–Никулина (**теорема 4.27**). Для этого используются два метода. Первый заключается в том, что интересующие нас слои описаны как разрешения особых квартик, что позволяет найти на них достаточно большое число кривых (многие из них, в частности, являются исключительными кривыми разрешения). Найдя матрицу пересечения этих кривых, можно убедиться, что они образуют подрешетку конечного индекса в решетке Пикара. Далее используются некоторые утверждения о решетках большого ранга, чтобы убедиться, что найденная решетка совпадает с решеткой Пикара. Другим методом является нахождение на слоях структур эллиптического пучка с сечением. В этом случае можно воспользоваться теоремами, описывающими решетки Пикара таких пучков через их особые слои и группу Морделла–Вейля. Следствием проведенных вычислений является то, что если трехмерная модель Ландау–Гинзбурга для трехмерного многообразия Фано основной серии удовлетворяет условию Долгачева–Никулина, то такая модель единственна (с точностью до флопов) и совпадает с построенной в данной главе (**следствие 4.28**).

Пятая часть посвящена торическим моделям Ландау–Гинзбурга для полных пересечений в проективных пространствах. **В первом параграфе** в деталях приведена конструкция Гивенталя для моделей Ландау–Гинзбурга полных пересечений в гладких торических многообразиях. **Во втором параграфе** рассмотрен случай полных пересечений в проективных пространствах. Мы представляем модели Гивенталя многочленами Лорана и находим их периоды (в частности, мы показываем, что эти периоды совпадают с интегралом Гивенталя), тем самым проверяя условия периодов (**предложение 5.17**). В третьем параграфе построены компактификации лог-Калаби–Яу найденных многочленов Лорана (**теорема 5.19**). Метод, который для этого используется, аналогичен методу из параграфа 4.2. Наконец, **в четвертом параграфе** построены торические многообразия, соответствующие полученным слабым моделям Ландау–Гинзбурга для полных пересечений во (взвешенных) проективных пространствах (**теорема 5.25**). Оказывается, они задаются как (образы при отображении Веронезе) полных пересечений гиперповерхностей тех же степеней, что и исходное полное пересечение, а, значит, являются их вырождениями. Как итог рассуждений этой части получено, что полные пересечения имеют торические модели Ландау–Гинзбурга (**следствие 5.27**).

Шестая часть посвящена моделям Ландау–Гинзбурга для полных пересечений в грассманианах. Батырев, Ким, ван Стратен и Чиокан-Фонтанин в работах[19] [20] рассмотрели горенштейново терминальное торическое вырож-

[19]V. V. Batyrev, I. Ciocan-Fontanine, B. Kim, D. van Straten, *Conifold transitions and mirror symmetry for Calabi–Yau complete intersections in Grassmannians*, Nucl. Phys., B 514, No.3, 640–666 (1998).

[20]V. V. Batyrev, I. Ciocan-Fontanine, B. Kim, D. van Straten, *Mirror Symmetry and Toric Degenerations of Partial Flag Manifolds*, Acta Math. 184, No. 1 (2000), 1–39.

дение грассманиана и предъявили наборы граничных дивизоров такого вырождения, линейно эквивалентные гиперплоскому сечению. Это позволяет найти большое число неф-разбиений для полного пересечения в грассманиане и построить модель Ландау–Гинзбурга, повторяя аналог конструкции Гивенталя. **В первом параграфе** показано, что некоторые такие модели бирациональны алгебраическому тору и, таким образом, задаются многочленом Лорана (**теорема 6.1**). Для этого выбирается некоторое специальное неф-разбиение. Во втором параграфе показано, что интеграл Гивенталя задает периоды соответствующего этому многочлену семейства и проверено, тем самым, условие периодов.

Гипотезы Кацаркова–Концевича–Пантева позволяют восстановить числа Ходжа многообразия Фано X размерности n, исходя из его моделей Ландау–Гинзбурга. Однако как мы видели в параграфе 3.2, сделать это не так просто. **В седьмой части** формулируется гипотеза, которая позволяет восстановить одно из чисел Ходжа гораздо проще (**гипотеза 7.1**). А именно, пусть LG_X — послойно компактная модель Ландау–Гинзбурга для многообразия X и тривиального (то есть равного нулю) дивизора на нем. Определим число k_{LG_X} как разность числа неприводимых компонент приводимых слоев для LG_X и числа самих приводимых слоев. Гипотеза заключается в том, что $h^{1,n-1}(X) = k_{LG_X}$. (Заметим, что в трехмерном случае это число Ходжа является единственным нетривиальным.) В этой части эта гипотеза доказана для случая трехмерных многообразий Фано основной серии (**теорема 7.2**) с помощью построения вручную их компактификации Калаби–Яу (к сожалению, компактификации, построенные в параграфе 4.2, почти не дают информации об особых слоях моделей Ландау–Гинзбурга). Также итеративно построены компактификации Калаби–Яу для полных пересечений, что позволяет доказать для них гипотезу о числе Ходжа.

Как упоминалось в третьей части, гладкие поверхности дель Пеццо получаются друг из друга проекциями из достаточно общих точек. Рассматривая проекции из торических точек, можно построить торические вырождения поверхностей дель Пеццо и восстановить гладкие поверхности, деформируя торические, так как поверхности дель Пеццо, за исключением случая степени 8, образуют неприводимые семейства для каждой фиксированной степени. Такая связь между поверхностями дель Пеццо через элементарные перестройки (проекции) их торических вырождений хорошо вписывается в теорию их торических моделей Ландау–Гинзбурга. Эта картина описана **в первом параграфе восьмой части** (**теорема 8.12**).

Гладкие трехмерные многообразия Фано классифицированы, [21] [22] однако, к сожалению, описание семейств, которые они образуют, разнородно. Основной мотивацией восьмой части является попытка увидеть некоторую структуру на множестве семейств трехмерных многообразий Фано. **Во втором параграфе восьмой части** дана конструкция такой структуры и приведен пример для случая многообразий Фано основной серии (**теорема 8.12**). К сожалению, многообразия Фано нельзя, по аналогии с двухмерным случаем, связать друг с другом проекциями, хотя бы потому, что многие многообразия не бирационально эквивалентны. Поэтому мы связываем элементарными преобразованиями не сами многообразия, а их торические вырождения, восстанавливая потом многообразия Фано как сглаживания торических. Эти преобразования определяют элементарные перестройки (например, добавление одного монома) соответствующих торических моделей Ландау–Гинзбурга. Более того, эти модели "помнят" многообразие Фано, к которому должно быть сглажено торическое многообразие, что важно, так как одно и то же торическое многообразие может быть вырождением многообразий Фано из разных семейств. Более точно, мы определяем так называемые базовые линки, которые геометрически описываются либо как проекция (в полуантиканоническом вложении) из гладкой точки многообразия, либо как проекция из двойной точки, либо как проекция из прямой (не лежащей целиком в особом множестве многообразия), либо как проекция из коники (не лежащей целиком в особом множестве многообразия). Существуют некоторые (достаточно слабые) условия, гарантирующие, что такие проекции являются бирациональными эквивалентностями; эти условия выполнены для торических многообразий. Как результат получена картина, в которой многообразия Фано основной серии "выстраиваются в две цепочки", см. **рисунок 5**. Первая цепочка соответствует многообразиям индекса 1, а вторая — многообразиям индекса 2. Кроме того, эти цепочки соединены, а также с ними соединены пространство $\mathbb{P}^3$ (которое можно рассматривать как многообразие полуиндекса 2) и квадрика.

Наконец, **девятая часть** посвящена вопросу существования неф-разбиений для гладких взвешенных полных пересечений Фано. Напомним, что в случае полных пересечений в грассманианах (часть 6) такие неф-разбиения легко находились, а основной проблемой было нахождение бирационального изоморфизма модели Ландау–Гинзбурга типа Гивенталя с тором. Для взве-

[21] В. А. Исковских, *Трехмерные многообразия Фано. I, II*, Изв. АН СССР. Сер. матем., 41:3 (1977), 516–562; 42:3 (1978), 506–549.

[22] S. Mori, S. Mukai, *Classification of Fano 3-folds with $B_2 \geqslant 2$*, Manuscripta Math., 36(2):147–162, 1981/82; erratum in Manuscripta Math. 110 (2003), no. 3, 407.

шенных полных пересечений картина противоположна: неизвестно, всегда ли существует ("хорошее") неф-разбиение, но как только оно найдено, модель Ландау–Гинзбурга, аналогичную модели Гивенталя, несложно представить многочленом Лорана. **В первом параграфе девятой части** рассмотрен случай полных пересечений дивизоров Картье. В этом случае существуют сильные численные ограничения (например, делимость любой степени на любой вес), которые и позволяют доказать существование хорошего неф-разбиения (**теорема 9.10**). В частности, оно существует для гладких гиперповерхностей.

Во втором параграфе девятой части доказано существование неф-разбиения для случая полных пересечений коразмерности 2 (**теорема 9.15**). Для доказательства вводятся некоторые новые структуры — графы специального вида, вершины которых помечены числами, и специальные функции на этих графах. Графы кодируют взвешенные проективные пространства, учитывая условие существования в них гладких полных пересечений Фано. Изучив структуру таких графов, можно построить необходимое хорошее неф-разбиение.

Гипотеза 9.1 утверждает, что неф-разбиение существует для любого гладкого взвешенного полного пересечения Фано. Первые два параграфа девятой части подтверждают эту гипотезу в некоторых частных случаях. **Третий параграф** посвящен подтверждению гипотезы еще в одном случае. А именно, в нем перечислены все гладкие полные пересечения размерностей 4 и 5 (найденные в[23]) и все неф-разбиения для них (**таблица 5**).

Работы автора по теме диссертации

1. V. Przyjalkowski, *On Landau–Ginzburg models for Fano varieties*, Comm. Num. Th. Phys., Vol. 1, No. 4, 713–728, 2008.

2. L. Katzarkov, V. Przyjalkowski, *Generalized Homological Mirror Symmetry and cubics*, Многомерная алгебраическая геометрия, Сборник статей. Посвящается памяти члена-корреспондента РАН Василия Алексеевича Исковских, Тр. МИАН, 264, МАИК, М., 2009, 94–102.

3. V. Przyjalkowski, *Hori–Vafa mirror models for complete intersections in weighted projective spaces and weak Landau–Ginzburg models*, Cent. Eur. J. Math. 9, No. 5, 972–977 (2011).

[23] V. Przyjalkowski, C. Shramov, *Bounds for smooth Fano weighted complete intersections*, arXiv:1611.09556.

4. L. Katzarkov, V. Przyjalkowski, *Landau–Ginzburg models — old and new*, Akbulut, Selman (ed.) et al., Proceedings of the 18th Gokova geometry–topology conference. Somerville, MA: International Press; Gokova: Gokova Geometry-Topology Conferences, 97–124 (2012).

5. I. Cheltsov, L. Katzarkov, V. Przyjalkowski, *Birational geometry via moduli spaces*, Birational geometry, rational curves, and arithmetic, Simons symposium 2012, Springer, 2013, 93–132.

6. N. Ilten, J. Lewis, V. Przyjalkowski, *Toric Degenerations of Fano Threefolds Giving Weak Landau–Ginzburg Models*, Journal of Algebra 374 (2013), 104–121.

7. В. В. Пржиялковский, *Слабые модели Ландау–Гинзбурга гладких трехмерных многообразий Фано*, Известия РАН. Серия математическая, 77: 4 (2013), 135–160.

8. A. Iliev, L. Katzarkov, V. Przyjalkowski, *Double solids, categories and non-rationality*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society 57 (2014), 145–173.

9. В. В. Пржиялковский, К. А. Шрамов, *О слабых моделях Ландау–Гинзбурга для полных пересечений в грассманианах*, УМН т. 69, 6(420) (2014), 181–182.

10. V. Przyjalkowski, C. Shramov, *On Hodge numbers of complete intersections and Landau–Ginzburg models*, Int. Math. Res. Not. IMRN, 2015:21 (2015), 11302–11332.

11. В. В. Пржиялковский, К. А. Шрамов, *Феномен Лорана для моделей Ландау–Гинзбурга полных пересечений в грассманианах*, Современные проблемы математики, механики и математической физики, Сборник статей, Тр. МИАН, 290,М., МАИК (2015), 102–113.

12. В. В. Пржиялковский, *Компактификации Калаби–Яу торических моделей Ландау–Гинзбурга гладких трехмерных многообразий Фано*, Матем. Сборник, 208:7 (2017), DOI:10.4213/SM8838.

Подписано в печать 08.06.2017
Тираж 100 экз.

Отпечатано в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН
119991, Москва, ул. Губкина, д. 8