

ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации **В. В. Пржиялковского**
“Торические модели Ландау–Гинзбурга”,
представленной на соискание ученой степени
доктора физико - математических наук
(специальность 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел)

Диссертация Пржиялковского Виктора Владимировича “Торические модели Ландау–Гинзбурга”, посвящена исследованию зеркальной симметрии для многообразий Фано.

Зеркальная симметрия изучает двойственность между двумя различными геометрическими теориями — алгебраической геометрией и симплектической геометрией. Более точно, зеркальная симметрия описывает двойственность между алгебро-геометрическими свойствами одного многообразия или пучка многообразий и симплектическими свойствами другого (“двойственного многообразия”), и наоборот, алгебро-геометрическими свойствами двойственного многообразия с симплектическими свойствами исходного. Основными задачами зеркальной симметрии являются отыскание двойственных объектов для данного многообразия, доказательство той или иной гипотезы для найденных объектов, а также, как результат двух предыдущих задач, изучение исходного многообразия через его двойственную модель.

В теории зеркальной симметрии имеется ряд гипотез. Наиболее известными гипотезами являются предложенная Кошцевичем гипотеза гомологической зеркальной симметрии, которая описывает двойственность в терминах производных категорий, и гипотеза зеркальной симметрии вариаций структур Ходжа, которая описывает двойственность в терминах численных инвариантов многообразия (инвариантов Громова–Виттена) и периодов двойственного пучка. Гипотезу гомологической симметрии в общем случае сложно доказать; известны лишь частичные результаты. С другой стороны, гипотеза вариаций структур Ходжа позволяет свести зеркальную двойственность на численный уровень, что даст возможность во многих случаях эффективно с ней работать.

Одним из самых важных и интересных типов многообразий в алгебраической геометрии являются многообразия Фано. Двойственными объектами к многообразиям Фано в рамках гипотезы зеркальной симметрии являются так называемые модели Ландау–Гинзбурга — многообразия, снабженные непостоянной комплекснозначной функцией и удовлетворяющие некоторым дополнительным свойствам. Одной из первых достаточно общих конструкций моделей Ландау–Гинзбурга была конструкция Гивенталья для полных пересечений в гладких торических многообразиях. Гивенталь показал, что производящий ряд одноточечных инвариантов Громова–Виттена рода полъ задает периоды построенной им двойственной модели. В случае многообразий Калаби–Яу В. В. Батырев доказал двойственность чисел Ходжа: ромб Ходжа для струнных чисел Ходжа двойственного многообразия получается в результате поворота на 90 градусов ромба исходного многообразия. Конструкция Гивенталья может быть обобщена на полные пересечения в достаточно хороших торических многообразиях; так, В. В. Батырев, Б. Ким, Д. ван Стратен и И. Чюкан-Фонтани, используя малые торические вырождения грассманианов, построили модели Ландау–Гинзбурга для полных пересечений в грассманианах.

Ожидается, что разные версии зеркальной симметрии согласованы. Это означает, что после послойной компактификации и необходимого оснащения (например, послойной симплектической формой) построенные модели Ландау–Гинзбурга будут удовлетворять гипотезе гомологической зеркальной симметрии. В частности, согласно этой гипотезе, слои модели Ландау–Гинзбурга являются многообразиями Калаби–Яу, зеркально двойственными антиканоническим сечениям многообразий Фано.

Эти три свойства (совпадение периодов модели Ландау–Гинзбурга с производящим рядом швариантов Громова–Виттена, условие периодов, и обобщенная связь с торическим вырождением многообразия Фано) и легли в основу определения предложенного диссертантом центрального объекта изучения в диссертации — торической модели Ландау–Гинзбурга. В отличие от конструкции Гивенталья и ее обобщений, эта модель — функция на алгебраическом торе, что позволяет непосредственно связать ее с торическим (и, возможно, имеющим плохие особенности) вырождением самого многообразия Фано, а не объемлющего многообразия полного пересечения (в частности, торические модели Ландау–Гинзбурга можно построить для многообразий Фано, для которых неизвестна их конструкция как полных пересечений в чем-то хорошо изученном). Торические модели Ландау–Гинзбурга оказались эффективным инструментом: их удалось построить и изучить для большого числа типов многообразий Фано. С помощью компактификации Калаби–Яу их можно связать с моделями Ландау–Гинзбурга с точки зрения гомологической зеркальной симметрии, что позволяет доказать ряд гипотез в рамках этой теории, а также предложить свои гипотезы.

Основная цель диссертации В. В. Пржиялковского состоит в построении теории торических моделей Ландау–Гинзбурга и применению этой теории к задачам алгебраической геометрии и зеркальной симметрии. Основные результаты диссертации заключаются в следующем.

Уточнены и доказаны гипотезы Кацаркова–Концевича–Паптева о зеркальном соответствии чисел Ходжа для поверхностей дель Пеццо.

Построены и изучены торические модели Ландау–Гинзбурга трехмерных многообразий Фано. В частности, предложен способ построения для них компактификации лог-Калаби–Яу, который применим и в более общем случае. Показано, что решетки Пикара общих слоев таких компактификаций для многообразий основной серии двойственны по Долгачеву–Никулину общим антиканоническим сечениям многообразий Фано, что доказывает модулярную природу построенных компактификаций.

Построены торические модели Ландау–Гинзбурга для полных пересечений в проективных пространствах, а также слабые модели Ландау–Гинзбурга для полных пересечений в грассманианах.

Сформулирована и доказана в трехмерном случае и случае полных пересечений гипотеза, связывающая число Ходжа $h^{1,n-1}(X)$ многообразия Фано X размерности n и числа компонент приводимых слоев его модели Ландау–Гинзбурга.

Определены торические базовые линки, связывающие проекциями торические вырождения многообразий Фано, а также построен пример такой связи для трехмерных многообразий основной серии.

Доказано существование неф-разбиений (и слабых моделей Ландау–Гинзбурга) в случае гладких взвешенных полных пересечений дивизоров Картье и взвешенных полных пересечений коразмерности два.

Диссертация изложена на 249 страницах, состоит из введения, 9 частей и списка литературы.

Во введении изложен краткий обзор истории задач и их современного состояния, обоснована актуальность темы, перечислены основные результаты и описана структура

диссертации.

Часть 1 и часть 2 являются вводными: в первой части даны необходимые определения и предварительные сведения, а во второй дано определение торических моделей Ландау–Гинзбурга и кратко изучены их свойства.

В части 3 изучены торические модели Ландау–Гинзбурга для поверхностей дель Пеццо, и уточнены и доказаны для поверхностей дель Пеццо гипотезы Кацаркова–Концевича–Паптева.

В части 4 построены и изучены торические модели Ландау–Гинзбурга гладких трехмерных многообразий Фано, а также их компактификации лог-Калаби–Яу. Кроме того, для многообразий Фано основной серии доказана модулярность их торических моделей Ландау–Гинзбурга.

В части 5 построены торические модели Ландау–Гинзбурга и их компактификации лог-Калаби–Яу для полных пересечений в проективных пространствах.

В части 6 построены слабые модели Ландау–Гинзбурга для полных пересечений в грассманианах.

В части 7 сформулирована и доказана в трехмерном случае и случае полных пересечений гипотеза о числе Ходжа многообразия Фано и числа компонент приводимых слоев его модели Ландау–Гинзбурга.

В части 8 построена и применена для трехмерных многообразий Фано основной серии теория торических базовых линков.

В части 9 в ряде случаев доказано существование неф-разбиений и слабых моделей Ландау–Гинзбурга для взвешенных полных пересечений.

Диссертация написана на высоком научном уровне. В ней имеются опечатки (например, на стр. 6, 8 строка сверху), которые не мешают ее восприятию.

Результаты диссертационного исследования В. В. Пржиялковского “Торические модели Ландау–Гинзбурга” являются новыми и снабжены строгими доказательствами. Основные результаты диссертации опубликованы в 12 статьях. Результаты диссертации неоднократно докладывались на российских и международных конференциях и семинарах. Они могут быть использованы исследователями, работающими в области алгебраической (в частности торической и бирациональной) геометрии и зеркальной симметрии, а также в математической физике.

Содержание диссертационного исследования соответствует специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел. Автореферат полно и правильно отражает содержание диссертации.

В целом данная диссертация представляет собой крупный вклад в теорию зеркальной симметрии и алгебраическую геометрию. Считаю, что диссертация отвечает всем требованиям, предъявляемым ВАК РФ к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, а ее и автор Пржиялковский Виктор Владимирович, несомненно заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06.

Официальный оппонент,
доктор физико-математических наук
(01.01.04 — геометрия и топология),
член-корреспондент РАН,
ведущий научный сотрудник лаборатории динамических систем

Федерального государственного бюджетного учреждения науки
Институт математики им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук
15 сентября 2017 г.


А. Е. Миронов

mironov@math.nsc.ru; +7(383)3297672.
лаборатория динамических систем
Федерального государственного бюджетного учреждения науки
Институт математики им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук,
630090, пр. акад. Коптюга, 4, Новосибирск, Россия

Подпись А. Е. Миронова удостоверяю.
Учёный секретарь ИМ СО РАН



 И. Е. Светов