Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук

На правах рукописи
УДК 517.925

Лосев Андрей Александрович

Устойчивость нулевого решения релейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя реле

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2017

Работа выполнена в отделе дифференциальных уравнений Федерального государственного бюджетного учреждения науки Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук.

Научный руководитель:

АСЕЕВ Сергей Миронович – доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, заведующий отделом дифференциальных уравнений Федерального государственного бюджетного учреждения науки Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук (специальность – 01.01.02).

Официальные оппоненты:

ИЛЬИН Александр Владимирович – доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, профессор, профессор кафедры нелинейных динамических систем и процессов управления факультета вычислительной математики и кибернетики Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова» (специальность – 01.01.02).

ФИЛИМОНОВ Дмитрий Андреевич – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (специальность – 01.01.02).

Ведущая организация:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».

Защита диссертации состоится 27 декабря 2017 года в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 002.022.02 при Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН по адресу: 119991, г. Москва, ул. Губкина, д. 8.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Математического института им. В.А. Стеклова РАН и на сайте МИАН по адресу:
http://www.mi.ras.ru/dis/ref17/losev/dis.pdf.

Автореферат разослан   2017.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 002.022.02 при
Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН,
доктор физико-математических наук,
профессор

Дрожжинов

Ю. Н. Дрожжинов

Общая характеристика работы

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Диссертация является исследованием в области теории систем дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. В ней изучается устойчивость нулевого решения (определения см. ниже) системы вещественных обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя реле вида

$$\dot{y}_i = p_i \operatorname{sgn} y_1 + q_i \operatorname{sgn} y_2 + \sum_{j=1}^{n} r_{ij} y_j, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

при различных значениях параметров $p_1, \ldots, p_n$, $q_1, \ldots, q_n$, $r_{ij}, 1 \leqslant i, j \leqslant n$, этой системы. Здесь $n \geqslant 2$; $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ – неизвестные функции времени t; $\dot{y}_i$ обозначает производную dy_i/dt, $i = 1, \ldots, n$; $(p_1, \ldots, p_n)^{\mathrm{T}}$ и $(q_1, \ldots, q_n)^{\mathrm{T}}$ – заданные постоянные n-мерные векторы (символ T обозначает транспонирование); $(r_{ij})_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n}$ – заданная постоянная $(n \times n)$-матрица.

Математические основы теории устойчивости были заложены А. М. Ляпуновым.[1,2,3,4] В настоящее время в силу своей актуальности для современной теории дифференциальных уравнений и для приложений теория устойчивости включается в программы курсов дифференциальных уравнений для математических, физических и инженерных специальностей.[5] Дифференциальные уравнения, рассматриваемые в работах А. М. Ляпунова, имеют непрерывные правые части.

Однако физические законы могут выражаться разрывными функциями, например, разрывная зависимость силы трения от скорости в случае сухого трения.[6] Кроме этого, дифференциальные уравнения с разрывной правой частью получаются из дифференциальных уравнений с непрерывной правой частью при предельных переходах по параметру.[7]

Релейные системы, то есть системы дифференциальных уравнений, правые части которых содержат выражения вида $\operatorname{sgn}(f(y_1, \ldots, y_n))$, где f – гладкая функция, изучались в связи с задачами теории автоматического управления начиная с середины 20 века.[8,9,10]

Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский[11] и Д. В. Аносов[12] изучали релейную систему,

---

[1] *Ляпунов А.М.* О постоянных движениях твёрдого тела в жидкости // Сообщ. Харьк. мат. о-ва. Сер. 2. 1888. Т. 1, № 1. С. 7–60.

[2] *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. Харьков, 1892; М.; Л.: Гостехтеориздат, 1950.

[3] *Ляпунов А.М.* Об одном свойстве дифференциальных уравнений задачи о движении тяжёлого твёрдого тела, имеющего неподвижную точку // Сообщ. Харьк. мат. о-ва. Сер. 2. 1894. Т. 4, № 3. С. 123–140.

[4] *Liapounoff A.M.* Sur une série dans la théorie des equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients périodiques // Зап. Акад. наук по физ.-мат. отд. Сер. 8. 1902. Т. 13, № 2. С. 1–70.

[5] *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974.

[6] *Painleve P.* Lecons sur le frottement. Paris: Hermann, 1895. Русск. пер.: *Пэнлеве П.* Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954.

[7] *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. §8, п. 3.

[8] *Емельянов С.В., Уткин В.И., Таран В.А. и др.* Теория систем с переменной структурой. М.: Наука, 1970.

[9] *Емельянов С.В.* Теория систем автоматического управления с переменной структурой: зарождение и начальный этап развития // Нелинейная динамика и управление. Сборник статей / Под ред. Емельянова С.В., Коровина С.К. М., 2004. Вып. 4. С. 5–16.

[10] *Уткин В.И.* Короткий комментарий к методу А. Ф. Филиппова продолжения решения на границе разрыва // Автомат. и телемех. 2015. Т. 76. № 5. С. 165–174.

[11] *Болтянский В.Г., Понтрягин Л.С.* Об устойчивости положения равновесия «релейной» системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Труды третьего всесоюзного математического съезда / Под ред. Никольского С.М. М.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 1. С. 217–218.

[12] *Аносов Д.В.* Об устойчивости положений равновесия релейных систем // Автомат. и телемех. 1959.

аналогичную (1), но с одним реле, имеющую вид

$$\dot{y}_i = p_i \operatorname{sgn} y_1 + \sum_{j=1}^{n} r_{ij} y_j, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

с точки зрения устойчивости её нулевого решения. Полное исследование вопроса было первоначально проведено Л. С. Понтрягиным и В. Г. Болтянским. Д. В. Аносову удалось найти более простое решение задачи.

Пользуясь обозначением d для оператора дифференцирования, релейную систему (2) можно записать в виде

$$dy_i - \sum_{j=1}^{n} r_{ij} y_j = p_i \operatorname{sgn} y_1, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Исключая отсюда $y_2, \ldots, y_n$, получим

$$K(d) y_1 + M L(d) \operatorname{sgn} y_1 = 0, \tag{3}$$

где M – вещественное число, $K(d)$ и $L(d)$ – многочлены:

$$K(d) = d^n + \alpha_1 d^{n-1} + \ldots,$$
$$L(d) = d^{n-r} + \beta_1 d^{n-r-1} + \ldots$$

(не исключено $L(d) \equiv 0$). Заметим, что само по себе соотношение (3) не имеет смысла, так как функция $\operatorname{sgn} y_1$ разрывна и недифференцируема при $y_1 = 0$. Поэтому, когда пишут уравнение (3), то имеют в виду, что рассматривается система (2) и что (3) есть формальная запись этой системы.

В работе Д. В. Аносова доказаны следующие необходимые, а также достаточные условия устойчивости нулевого решения системы (2).

В случае $r = 1$ для устойчивости необходимо, чтобы было $M > 0$ и чтобы многочлен $L(d)$ не имел корней справа от мнимой оси и достаточно, чтобы сверх того все корни многочлена $L(d)$ находились слева от мнимой оси.

В случае $r = 2$ к этим необходимым условиям добавляется ещё условие $\alpha_1 \geqslant \beta_1$, а к достаточным – условие $\alpha_1 > \beta_1$.

В случае $r \geqslant 3$ или $L(d) \equiv 0$ всегда имеет место неустойчивость.

В своей статье Д. В. Аносов рассматривает систему

$$\dot{y}_i = p_i g(y_1, N) + \sum_{j=1}^{n} r_{ij} y_j, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

где $g = g(y_1, N)$ – непрерывная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $g(y_1, N) = -1$ при $y_1 \leqslant \alpha(N) < 0$, $g(y_1, N) = 1$ при $y_1 \geqslant \beta(N) > 0$;

2) на отрезке $[\alpha(N), \beta(N)]$ функция g монотонно возрастает и удовлетворяет соотношению $|\Delta g| \geqslant K(N) |\Delta y_1|$, где $K(N) \to +\infty$ при $N \to +\infty$.

Т. 20, № 2. С. 135–149.

Неформально говоря, функция $g(y_1, N)$ – это непрерывное приближение к $\operatorname{sgn} y_1$, тем лучшее, чем больше N. Осуществляя предельный переход в последней системе при $N \to +\infty$, Д. В. Аносов получает систему (2) (вместе с доопределением этой системы на гиперплоскости $y_1 = 0$). Здесь речь идёт лишь о предельном переходе в некоторой окрестности гиперплоскости $y_1 = 0$. Также Д. В. Аносов показывает, что любой конечный (в смысле времени) отрезок фазовой траектории приближается при $N \to +\infty$ к некоторой кривой, которая оказывается отрезком траектории системы (2).

А. Ф. Филиппов изучал[13,14] двумерную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, правые части которых являются суммами двух кусочно непрерывных слагаемых, одно из которых разрывно на одной гладкой линии, другое – на другой, и эти линии пересекаются под ненулевым углом. Если сделать замену переменных так, чтобы эти две линии стали осями координат, то система примет вид

$$\dot{y}_i = f_i(y_1, y_2) + g_i(y_1, y_2), \qquad i = 1, 2; \tag{4}$$

функции f_i разрывны только на оси Oy_2, g_i – только на Oy_1. На линиях разрыва используется простейшее выпуклое доопределение по Филиппову.[15] Исследуется поведение решений системы (4) вблизи точки пересечения линий разрыва. Рассматриваемая нами релейная система (1) при $n = 2$ является частным случаем системы (4) (можно взять $f_i(y_1, y_2) = p_i \operatorname{sgn} y_1 + r_{i1} y_1$, $g_i(y_1, y_2) = q_i \operatorname{sgn} y_2 + r_{i2} y_2$, $i = 1, 2$). Из результатов А. Ф. Филиппова[13,14] получается полный ответ на вопрос об устойчивости нулевого решения двумерной релейной системы (1), параметры которой принадлежат открытому всюду плотному множеству в пространстве параметров этой системы, указанному в формулировке утверждения 3.1. (При $n = 2$ исходная релейная система (1) уже является приведённой, определение приведённой системы см. ниже.) Его результаты дают в частном случае при $n = 2$ утверждения случаев (i)–(v) теоремы 3.1, случаев (i)–(ii) теорем 3.2 и 3.3, а также утверждение теоремы 3.4.

Р. И. Алидема рассматривал[16,17] двумерную систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a + b \operatorname{sgn} y_1 + c \operatorname{sgn} y_2, \\ \dot{y}_2 = d + e \operatorname{sgn} y_1 + f \operatorname{sgn} y_2, \end{cases} \tag{5}$$

где $a, b, \ldots, f$ – непрерывно дифференцируемые в окрестности начала координат функции от y_1, y_2. На линиях $y_1 = 0$ и $y_2 = 0$ разрыва правых частей уравнений системы (5) используется простейшее выпуклое доопределение по Филиппову. Р. И. Алидема исследовал устойчивость нулевого решения системы (5) в случаях, когда коэффициенты рядов Тейлора функций $a, b, \ldots, f$ с центром в начале координат удовлетворяют некоторым условиям типа равенств. Рассматриваемая нами релейная система (1) при $n = 2$ является частным случаем системы (5) с $a(y_1, y_2) = r_{11} y_1 + r_{12} y_2$, $b(y_1, y_2) \equiv p_1$, $c(y_1, y_2) \equiv q_1$, $d(y_1, y_2) = r_{21} y_1 + r_{22} y_2$, $e(y_1, y_2) \equiv p_2$, $f(y_1, y_2) \equiv q_2$. Результаты Р. И. Алидемы[16] дают

[13] *Филиппов А.Ф.* Исследование системы дифференциальных уравнений с двумя пересекающимися линиями разрыва // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат., мех. 1979. № 6. С. 68–75.

[14] *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. §20, п. 3.

[15] *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью // Матем. сб. 1960. Т. 51 (93), № 1. С. 99–128.

[16] *Алидема Р.И.* Исследование устойчивости системы с двумя линиями разрыва в критических случаях первого порядка // Publ. Inst. Math. 1979. V. 26 (40). P. 19–25.

[17] *Алидема Р.И.* Исследование устойчивости системы с двумя линиями разрыва в критических случаях второго порядка. II // Вестн. ЛГУ. 1985. № 15. С. 3–10.

в частном случае при $n = 2$ утверждение случая (iii) теоремы 3.2 и часть утверждения случая (iii) теоремы 3.3.

Цель работы. Целью работы является изучение устойчивости нулевого решения системы вещественных обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя реле вида (1) при различных значениях параметров $p_1, \dots, p_n$, $q_1, \dots, q_n$, $r_{ij}, 1 \leqslant i, j \leqslant n$, $n \geqslant 2$, этой системы.

Методы исследования. В работе используются методы теории систем дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями, методы качественной теории систем дифференциальных уравнений и теории устойчивости.

Основные результаты диссертации. Если $\Delta := p_1 q_2 - p_2 q_1 \neq 0$, то, вычитая из всех уравнений системы (1), начиная с третьего, первые два с подходящими коэффициентами, её можно привести к виду

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 \operatorname{sgn} x_1 + b_1 \operatorname{sgn} x_2 + \sum\limits_{j=1}^{n} c_{1j} x_j, \\ \dot{x}_2 = a_2 \operatorname{sgn} x_1 + b_2 \operatorname{sgn} x_2 + \sum\limits_{j=1}^{n} c_{2j} x_j, \\ \dot{x}_i = \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij} x_j, \quad i = 3, \dots, n \qquad \text{(если } n = 2\text{, то этих уравнений нет).} \end{cases} \tag{6}$$

При этом $x_k \equiv y_k$, $a_k = p_k$, $b_k = q_k$, $k = 1, 2$, $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1$. Релейную систему вида (6) мы будем называть *приведённой*. Если $n = 2$, то рассматриваемая система (1) изначально имеет вид (6), т.е. является приведённой.

В настоящей диссертации получены следующие основные результаты:

1) Полностью исследована устойчивость нулевого решения приведённой системы для открытого всюду плотного множества в пространстве параметров a_1, b_1, a_2, b_2, c_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$, этой системы, заданного неравенствами $\Delta \neq 0$, $a_1 + b_1 \neq 0$, $-a_1 + b_1 \neq 0$, $a_2 + b_2 \neq 0$, $-a_2 + b_2 \neq 0$ и, если $|a_1| < |b_1|$, $|b_2| < |a_2|$, $a_2 b_1 < 0$, то дополнительно $r := a_1|a_2| + b_2|b_1| \neq 0$ (случаи (i)–(v) теоремы 3.1, случаи (i)–(ii) теорем 3.2 и 3.3, теорема 3.4, утверждение 3.1).

2) Частично решён вопрос об устойчивости нулевого решения для множества приведённых систем, параметры которых принадлежат одной из следующих граничных гиперповерхностей вышеупомянутого открытого всюду плотного множества: $\{a_1 + b_1 = 0\}$, $\{-a_1 + b_1 = 0\}$, $\{a_2 + b_2 = 0\}$, $\{-a_2 + b_2 = 0\}$ (случаи (vi)–(ix) теоремы 3.1, теорема 3.2, теорема 3.3).

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно, обоснованы строгими и подробными математическими доказательствами.

Результаты диссертации являются обобщением результатов Л. С. Понтрягина, В. Г. Болтянского[11] и Д. В. Аносова[12] на случай релейной системы с двумя реле, а также результатов А. Ф. Филиппова[13,14] и Р. И. Алидемы[16,17] на случай произвольной размерности системы обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями вида (1).

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся основные результаты диссертации:

1) Полностью исследована устойчивость нулевого решения приведённой системы для открытого всюду плотного множества в пространстве параметров a_1, b_1, a_2, b_2, c_{ij}, $1 \le i, j \le n$, этой системы, заданного неравенствами $\Delta \ne 0$, $a_1 + b_1 \ne 0$, $-a_1 + b_1 \ne 0$, $a_2 + b_2 \ne 0$, $-a_2 + b_2 \ne 0$ и, если $|a_1| < |b_1|$, $|b_2| < |a_2|$, $a_2 b_1 < 0$, то дополнительно $r := a_1|a_2| + b_2|b_1| \ne 0$ (случаи (i)–(v) теоремы 3.1, случаи (i)–(ii) теорем 3.2 и 3.3, теорема 3.4, утверждение 3.1).

2) Частично решён вопрос об устойчивости нулевого решения для множества приведённых систем, параметры которых принадлежат одной из следующих граничных гиперповерхностей вышеупомянутого открытого всюду плотного множества: $\{a_1 + b_1 = 0\}$, $\{-a_1 + b_1 = 0\}$, $\{a_2 + b_2 = 0\}$, $\{-a_2 + b_2 = 0\}$ (случаи (vi)–(ix) теоремы 3.1, теорема 3.2, теорема 3.3).

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация имеет теоретический характер. Полученные результаты относятся к теории систем дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. Все полученные в диссертации результаты сформулированы в виде строгих математических утверждений и обоснованы строгими и подробными математическими доказательствами. Результаты работы могут использоваться в исследованиях устойчивости решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями, в том числе возникающих в прикладных задачах, ведущихся в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН, Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова, Институте математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Московском физико-техническом институте. Результаты диссертации могут также найти применение при чтении специальных курсов по дифференциальным уравнениям и теории устойчивости для студентов, магистрантов и аспирантов математических, физических и инженерных специальностей.

Степень достоверности и апробация результатов работы. Результаты диссертации являются достоверными, обоснованы строгими и подробными математическими доказательствами, опубликованы в четырёх печатных работах автора [1, 2, 3, 4], из них две [1, 2] – в журналах, входящих в перечень рецензируемых научных изданий ВАК, две [3, 4] – в тезисах международных конференций. Работ, написанных в соавторстве, автор не имеет.

Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах:

- Международная конференция «Системы Аносова и современная динамика», посвящённая 80-летию со дня рождения Д. В. Аносова (г. Москва, 19–23 декабря 2016 г.);
- Международная школа-конференция «Соболевские чтения» (г. Новосибирск, 18–22 декабря 2016 г.);
- Всероссийский научно-исследовательский семинар «Нелинейная динамика и управление» (МГУ им. М. В. Ломоносова, 2016 г.);
- Семинар «Проблемы нелинейной динамики: качественный анализ и управление» под руководством акад. РАН С. В. Емельянова (кафедра нелинейных динамических систем и процессов управления факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова, 2016 г.);
- Семинар отдела математической физики Математического института им. В. А. Стеклова РАН под руководством чл.-корр. РАН И. В. Воловича (2016 г.);

- Семинар «Проблемы математической теории управления» под руководством чл.-корр. РАН С. М. Асеева, д. ф.-м. н., проф. М. С. Никольского (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, 2015 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в четырёх печатных работах автора [1, 2, 3, 4], из них две [1, 2] – в журналах, входящих в перечень рецензируемых научных изданий ВАК, две [3, 4] – в тезисах международных конференций. Работ, написанных в соавторстве, автор не имеет. Список работ, опубликованных автором по теме диссертации, приведён в конце автореферата.

Структура и объём диссертации. Работа состоит из введения, трёх глав, заключения, списка литературы и списка иллюстративного материала. В заключении имеется таблица 1, в которой сведены результаты исследования устойчивости нулевого решения приведённой системы, полученные в настоящей диссертации. Все теоремы, леммы, следствия, утверждения, а также занумерованные замечания и определения в диссертации имеют двойную нумерацию. Первое число (1, 2 или 3) обозначает номер главы, второе – номер соответствующего утверждения или определения внутри главы. Формулы в настоящей работе нумеруются следующим образом. Во введении и в заключении используется одинарная нумерация, в основном тексте – двойная. Первое число (1, 2 или 3) обозначает номер главы, второе – номер формулы внутри главы. Список литературы содержит 33 наименования. Список иллюстративного материала содержит 1 наименование (таблицу 1). Общий объём текста – 99 страниц.

Основное содержание диссертации

Работа посвящена изучению устойчивости нулевого решения системы вещественных обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя реле вида (1) при различных значениях параметров $p_1, \ldots, p_n$, $q_1, \ldots, q_n$, $r_{ij}, 1 \leqslant i, j \leqslant n$, этой системы.

Во **введении** даётся общая характеристика диссертации и излагается основное содержание работы, кратко раскрывающее содержание глав диссертации.

В **главе 1** излагаются три наиболее часто используемые способа доопределения системы обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно непрерывными правыми частями в точках разрыва правых частей уравнений такой системы – простейшее выпуклое доопределение по Филиппову[15], доопределение методом эквивалентного управления[18] и общее доопределение по Айзерману – Пятницкому.[19] В изложении этих доопределений мы следуем книге А. Ф. Филиппова.[20] Каждое из этих доопределений может быть изложено следующим образом. Система дифференциальных уравнений в векторной записи $\dot{y} = f(y)$ с кусочно непрерывной вектор-функцией $f(y)$ заменяется дифференциальным включением вида $\dot{y} \in F(y)$.

Рассмотрим систему в векторной записи

$$\dot{y} = f(y), \tag{7}$$

где вектор-функция $f(y)$ кусочно непрерывна в области $G \subseteq \mathbb{R}^n$; $y \in G$, $\dot{y} = dy/dt$; M – множество (меры нуль) точек разрыва функции f. Для каждой точки $y \in G$ указывается множество $F(y) \subseteq \mathbb{R}^n$. Если в точке y функция f непрерывна, то множество $F(y)$

[18] *Уткин В.И.* Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1981.

[19] *Айзерман М.А., Пятницкий Е.С.* Основы теории разрывных систем. I, II // Автомат. и телемех. 1974. № 7. С. 33–47; № 8. С. 39–61.

[20] *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.

состоит из одной точки, совпадающей со значением функции f в этой точке. Если y – точка разрыва функции f, то множество $F(y)$ задаётся тем или иным способом. Например, в простейшем выпуклом доопределении по Филиппову $F(y)$ – наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее все предельные значения вектор-функции $f(y^*)$, когда $y^* \notin M$, $y^* \to y$.

Определение. *Решением* дифференциального включения $\dot{y} \in F(y)$ называется абсолютно непрерывная вектор-функция $y(t)$, определённая на интервале или отрезке I, для которой почти всюду на I $\dot{y}(t) \in F(y(t))$.

Определение. *Решением* системы (7) называется решение дифференциального включения

$$\dot{y} \in F(y).$$

В главе 1 устанавливаются связи между тремя вышеуказанными способами доопределения. В ней также показывается, что для доопределения рассматриваемой системы (1) на гиперплоскостях $y_1 = 0$ и $y_2 = 0$ разрыва правых частей уравнений этой системы и на пересечении этих гиперплоскостей применимы все три вышеизложенные способа, причём для системы (1) все три доопределения совпадают. С помощью простейшего выпуклого доопределения по Филиппову доказывается, что при любых значениях параметров $p_1, \ldots, p_n$, $q_1, \ldots, q_n$, $r_{ij}, 1 \leqslant i,j \leqslant n$, релейной системы (1) набор функций $y_i(t) \equiv 0, i = 1, \ldots, n$, является решением этой системы (утверждение 1.1).

В дальнейшем мы используем более удобный вид системы (1), к которому она сводится линейной заменой координат. Именно, если $\Delta := p_1q_2 - p_2q_1 \neq 0$, то, вычитая из всех уравнений системы (1), начиная с третьего, первые два с подходящими коэффициентами, её можно привести к виду (6). При этом $x_k \equiv y_k$, $a_k = p_k$, $b_k = q_k$, $k = 1, 2$, $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1$. Релейную систему вида (6) мы называем *приведённой*. Если $n = 2$, то рассматриваемая система (1) изначально имеет вид (6), т.е. является приведённой. В конце главы 1 указаны некоторые симметрии, которые не меняют вид приведённой системы, и описано, как меняются матрицы $A := \left(\begin{smallmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{smallmatrix}\right)$ и $C := (c_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ при каждой из этих симметрий.

Глава 2 посвящена доопределению приведённой системы на гиперплоскостях $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ разрыва правых частей уравнений системы и на пересечении этих гиперплоскостей. В ней даётся определение существования (отсутствия) движения в приведённой системе всюду на некотором множестве.

Определение. В приведённой системе *всюду на множестве* $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ *существует движение*, если через каждую точку множества Y проходит решение приведённой системы, движущееся по этому множеству в течение некоторого промежутка времени.

В приведённой системе *нигде на множестве* $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ *не существует движения*, если не существует решения приведённой системы, которое в течение некоторого промежутка времени двигалось бы по множеству Z.

В леммах 2.1 и 2.2 изучается наличие или отсутствие движений в приведённой системе в достаточно малых окрестностях начала координат на гиперплоскостях соответственно $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ разрыва правых частей уравнений системы вне пересечения этих гиперплоскостей. В лемме 2.5 указаны некоторые значения параметров a_1, b_1, a_2, b_2, $c_{ij}, 1 \leqslant i,j \leqslant n$, приведённой системы, при которых в этой системе всюду в достаточно малой окрестности начала координат на пересечении гиперплоскостей $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ разрыва правых частей уравнений системы существует движение. В леммах 2.3, 2.4, 2.6 дан вывод уравнений движений в приведённой системе на множествах $\{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}$,

$\{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}$, $\{x_1 = 0, x_2 = 0\}$ соответственно, если такие движения существуют. Ради удобства мы пользуемся доопределением методом эквивалентного управления (см. доказательства лемм 2.3 и 2.6). В условиях следствия 2.3 (из леммы 2.6) в достаточно малой окрестности начала координат на множестве $\{x_1 = 0, x_2 = 0\}$ движение в приведённой системе описывается системой линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянной матрицей коэффициентов $(c_{ij})_{3 \leqslant i,j \leqslant n}$. Для формулировки результатов об устойчивости этого движения на языке матриц в главе 2 вводится определение устойчивости квадратной матрицы.

Определение. Комплексная квадратная матрица S называется

- *асимптотически устойчивой*, если вещественные части всех её собственных значений отрицательны;
- *устойчивой*, если вещественные части всех её собственных значений неположительны и для каждого чисто мнимого её собственного значения все соответствующие жордановы клетки имеют размер 1;
- *неустойчивой*, если у неё существует собственное значение с положительной вещественной частью или чисто мнимое собственное значение, для которого хотя бы одна из соответствующих жордановых клеток имеет размер $\geqslant 2$.

Вводимые термины для устойчивости матрицы S отвечают тому же типу устойчивости нулевого решения соответствующей системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами $\dot{x} = Sx$.

При выполнении условий следствия 2.3 устойчивость движения в приведённой системе в достаточно малой окрестности начала координат на множестве $\{x_1 = 0, x_2 = 0\}$ совпадает с устойчивостью подматрицы $(c_{ij})_{3 \leqslant i,j \leqslant n}$.

В **главе 3** изучается устойчивость нулевого решения приведённой системы при различных значениях параметров a_1, b_1, a_2, b_2, c_{ij}, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, этой системы. В начале главы даётся определение устойчивости решения дифференциального включения вида $\dot{x} \in F(x)$.

Определение. Решение $x = \varphi(t)$, $t_0 \leqslant t < +\infty$, дифференциального включения $\dot{x} \in F(x)$ называется

- *устойчивым*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для каждого такого $\widetilde{x}_0$, что $|\widetilde{x}_0 - \varphi(t_0)| < \delta$, каждое решение $\widetilde{x}(t)$ с начальным условием $\widetilde{x}(t_0) = \widetilde{x}_0$ при $t_0 \leqslant t < +\infty$ существует и удовлетворяет неравенству $|\widetilde{x}(t) - \varphi(t)| < \varepsilon$, $t_0 \leqslant t < +\infty$.
- *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво и, кроме того, $\widetilde{x}(t) - \varphi(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

В теореме 3.1 рассматриваются некоторые значения параметров приведённой системы, при которых в случае $n = 2$ нулевое решение приведённой системы асимптотически устойчиво, а в случае $n \geqslant 3$ устойчивость нулевого решения приведённой системы совпадает с устойчивостью подматрицы $(c_{ij})_{3 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Теорема 3.1. *Пусть $n \geqslant 2$ и выполнена хотя бы одна из следующих систем условий:*

(i) $|b_1| < -a_1, \ |a_2| < -b_2;$

(ii) $\Delta > 0, \ |b_1| > -a_1, \ |a_2| < -b_2;$

(iii) $|a_1| < b_1,\ |b_2| < -a_2,\ r := a_1|a_2| + b_2|b_1| < 0$;

(iv) $\Delta > 0,\ |b_1| < -a_1,\ |a_2| > -b_2$;

(v) $|a_1| < -b_1,\ |b_2| < a_2,\ r < 0$;

(vi) $a_1 + b_1 = 0,\ -a_1 + b_1 > 0$, *справедливо одно из двух неравенств:* $|a_2| < -b_2$ *либо* $|b_2| < -a_2$, *и, кроме того, при* $n \geqslant 3$ $c_{12} \neq 0$ *или* $(c_{12}, \dots, c_{1n}) = (0, \dots, 0)$ *(при* $n = 2$ *это условие тривиально);*

(vii) $-a_1 + b_1 = 0,\ a_1 + b_1 < 0$, *справедливо одно из двух неравенств:* $|a_2| < -b_2$ *либо* $|b_2| < a_2$, *и, кроме того, при* $n \geqslant 3$ $c_{12} \neq 0$ *или* $(c_{12}, \dots, c_{1n}) = (0, \dots, 0)$ *(при* $n = 2$ *это условие тривиально);*

(viii) $a_2 + b_2 = 0,\ -a_2 + b_2 < 0$, *справедливо одно из двух неравенств:* $|b_1| < -a_1$ *либо* $|a_1| < -b_1$, *и, кроме того, при* $n \geqslant 3$ $c_{21} \neq 0$ *или* $(c_{21}, c_{23}, c_{24}, \dots, c_{2n}) = (0, \dots, 0)$ *(при* $n = 2$ *это условие тривиально);*

(ix) $-a_2 + b_2 = 0,\ a_2 + b_2 < 0$, *справедливо одно из двух неравенств:* $|b_1| < -a_1$ *либо* $|a_1| < b_1$, *и, кроме того, при* $n \geqslant 3$ $c_{21} \neq 0$ *или* $(c_{21}, c_{23}, c_{24}, \dots, c_{2n}) = (0, \dots, 0)$ *(при* $n = 2$ *это условие тривиально).*

Тогда при $n = 2$ *нулевое решение приведённой системы асимптотически устойчиво, а при* $n \geqslant 3$ *устойчивость нулевого решения приведённой системы совпадает с устойчивостью подматрицы* $(c_{ij})_{3 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Доказательство основано на развитии идей Д. В. Аносова. Д. В. Аносов[12] использует функцию $W_\alpha(x_1, \dots, x_n) = \alpha|x_1| + \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij} x_i x_j$, $\alpha > 0$. Для наших целей нужно обобщить конструкцию, учитывая два слагаемых $\alpha|x_1|$, $\alpha > 0$, и $\beta|x_2|$, $\beta > 0$. Мы будем рассматривать функцию $W_{\alpha,\beta}(x_1, \dots, x_n) := \alpha|x_1| + \beta|x_2| + \sum_{k=3}^{n} x_k^2$ (при $n = 2$ – функцию $W_{\alpha,\beta}(x_1, x_2) := \alpha|x_1| + \beta|x_2|$). Отметим, что $W_{\alpha,\beta}(0, \dots, 0) = 0$. Если $\alpha > 0$, $\beta > 0$, то $W_{\alpha,\beta} > 0$ на множестве $\mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$. При выполнении любой из систем условий, указанных в формулировке теоремы 3.1, существует решение (α_0, β_0) системы неравенств (относительно переменных α, β) $\alpha(a_1+b_1)+\beta(a_2+b_2) < 0$, $\alpha(a_1-b_1)+\beta(-a_2+b_2) < 0$ такое, что $\alpha_0 > 0$, $\beta_0 > 0$. Поэтому в каждом из случаев (i)–(ix) найдётся такая окрестность R начала координат, что на множестве $R \cap \{x_1 \neq 0, x_2 \neq 0\}$ производная функции W_{α_0,β_0} в силу приведённой системы отрицательна и отделена от нуля константой. Далее доказывается, что в каждом из случаев теоремы 3.1 существует такая окрестность $\widetilde{W}$ начала координат и такие множества $\widetilde{J}$, $\widetilde{K}$, $\widetilde{L}$, $\widetilde{M}$, что:

1) $\widetilde{W}_1 := \widetilde{W} \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\} \subseteq \widetilde{J}_1 \cup \widetilde{K}_1$ (допускается, что одно из объединяемых множеств пусто), где $\widetilde{J}_1 := \widetilde{J} \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}$, $\widetilde{K}_1 := \widetilde{K} \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}$, в приведённой системе всюду на множестве $\widetilde{J}_1$ есть движение, в котором производная функции W_{α_0,β_0} отрицательна и отделена от нуля константой, нигде на множестве $\widetilde{K}_1$ не существует движения;

2) $\widetilde{W}_2 := \widetilde{W} \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\} \subseteq \widetilde{L}_2 \cup \widetilde{M}_2$ (допускается, что одно из объединяемых множеств пусто), где $\widetilde{L}_2 := \widetilde{L} \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}$, $\widetilde{M}_2 := \widetilde{M} \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}$, в приведённой системе всюду на множестве $\widetilde{L}_2$ есть движение, в котором производная функции W_{α_0,β_0} отрицательна и отделена от нуля константой, нигде на множестве $\widetilde{M}_2$ не существует движения.

Из вышеизложенного следует, что в каждом из случаев теоремы 3.1 любое решение приведённой системы, находящееся в начальный момент времени в достаточно малой окрестности начала координат, достигает множества $\{x_1 = 0, x_2 = 0\}$ за конечное время. Таким образом, при $n = 2$ в каждом из случаев (i)–(ix) нулевое решение приведённой системы асимптотически устойчиво. При $n \geqslant 3$ в каждом из случаев теоремы 3.1 в приведённой системе всюду в достаточно малой окрестности начала координат на множестве $\{x_1 = 0, x_2 = 0\}$ существует движение (см. лемму 2.5 и замечание 2.1). Кроме того, при $n \geqslant 3$ в каждом из случаев (i)–(ix) выполнены условия следствия 2.3, которое устанавливает, что устойчивость движения в приведённой системе в достаточно малой окрестности начала координат на множестве $\{x_1 = 0, x_2 = 0\}$ совпадает с устойчивостью подматрицы $(c_{ij})_{3\leqslant i,j\leqslant n}$. Итак, при $n \geqslant 3$ в каждом из случаев теоремы 3.1 устойчивость нулевого решения приведённой системы совпадает с устойчивостью подматрицы $(c_{ij})_{3\leqslant i,j\leqslant n}$.

В теоремах 3.2, 3.3, 3.4 указаны некоторые значения параметров приведённой системы, при которых нулевое решение системы неустойчиво.

Если $\Delta \neq 0$, то в достаточно малой окрестности начала координат основной вклад в вектор фазовой скорости приведённой системы в любой из координатных четвертей $\{x_1 > > 0, x_2 > 0\}$, $\{x_1 < 0, x_2 > 0\}$, $\{x_1 < 0, x_2 < 0\}$, $\{x_1 > 0, x_2 < 0\}$ вносят постоянные слагаемые $a_1 \operatorname{sgn} x_1 + b_1 \operatorname{sgn} x_2$ и $a_2 \operatorname{sgn} x_1 + b_2 \operatorname{sgn} x_2$ из уравнений для $\dot{x}_1$ и $\dot{x}_2$ соответственно, если эти слагаемые не равны нулю. (Допускается, что в двух противоположных или даже во всех координатных четвертях ненулевое слагаемое только одно. При этом из условия $\Delta \neq 0$ следует, что ни в одной из координатных четвертей оба вышевыписанные постоянные слагаемые не обращаются в нуль одновременно.) В теореме 3.2 приведены некоторые случаи, в которых решение приведённой системы с начальным значением на множестве $\{x_1 x_2 > 0\}$ (случаи (i), (iii), (iv)) или на множестве $\{x_1 x_2 < 0\}$ (случаи (ii), (v), (vi)), сколь угодно близким к началу координат, отходит от начала координат, двигаясь по соответствующему множеству. Поэтому в этих случаях нулевое решение приведённой системы неустойчиво.

Теорема 3.2. *Пусть $n \geqslant 2$, $\Delta \neq 0$ и выполнена хотя бы одна из систем условий:*

(i) $a_1 + b_1 > 0,\ a_2 + b_2 > 0$;

(ii) $-a_1 + b_1 < 0,\ -a_2 + b_2 > 0$;

(iii) $a_1 + b_1 = 0,\ a_2 + b_2 > 0,\ c_{12} > 0$;

(iv) $a_2 + b_2 = 0,\ a_1 + b_1 > 0,\ c_{21} > 0$;

(v) $-a_1 + b_1 = 0,\ -a_2 + b_2 > 0,\ c_{12} < 0$;

(vi) $-a_2 + b_2 = 0,\ -a_1 + b_1 < 0,\ c_{21} < 0$.

Тогда нулевое решение приведённой системы неустойчиво.

Если $\Delta \neq 0$, существует открытое множество D (соответственно, F) такое, что $\overline{D_1} \ni O$ (соответственно, $\overline{F_2} \ni O$), где $D_1 := D \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}$ (соответственно, $F_2 := F \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}$), в приведённой системе всюду на множестве D_1 (соответственно, на множестве F_2) существует движение, то из леммы 2.3 (соответственно, из леммы 2.4) следует, что в достаточно малой окрестности начала координат основной вклад в вектор фазовой скорости в этом движении вносит постоянное слагаемое $(\Delta/a_1) \operatorname{sgn} x_2$ (соответственно, $(\Delta/b_2) \operatorname{sgn} x_1$) из уравнения для $\dot{x}_2$ (соответственно, для $\dot{x}_1$). В теореме 3.3 собрано несколько случаев, в которых решение приведённой системы с начальным значением на множестве $\{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}$ (случаи (i), (iii), (iv)) или на множестве $\{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}$ (случаи (ii), (v), (vi)), сколь угодно близким к началу координат, отходит от начала координат, двигаясь по соответствующему множеству. Следовательно, в этих случаях нулевое решение приведённой системы неустойчиво.

Теорема 3.3. *Пусть $n \geqslant 2$, $\Delta < 0$ и выполнена хотя бы одна из систем условий:*

(i) $|b_1| < -a_1$;

(ii) $|a_2| < -b_2$;

(iii) $a_1 + b_1 = 0$, $-a_1 + b_1 > 0$ *и, кроме того, выполнено либо неравенство* $c_{12} < 0$, *либо каждое из условий* $(c_{12}, \ldots, c_{1n}) = (0, \ldots, 0)$ *и* $c_{11} \leqslant 0$;

(iv) $-a_1 + b_1 = 0$, $a_1 + b_1 < 0$ *и, кроме того, выполнено либо неравенство* $c_{12} > 0$, *либо каждое из условий* $(c_{12}, \ldots, c_{1n}) = (0, \ldots, 0)$ *и* $c_{11} \leqslant 0$;

(v) $a_2 + b_2 = 0$, $-a_2 + b_2 < 0$ *и, кроме того, выполнено либо неравенство* $c_{21} < 0$, *либо каждое из условий* $(c_{21}, c_{23}, c_{24}, \ldots, c_{2n}) = (0, \ldots, 0)$ *(при $n = 2$ здесь и далее в формулировке настоящей теоремы это условие имеет вид $c_{21} = 0$) и* $c_{22} \leqslant 0$;

(vi) $-a_2 + b_2 = 0$, $a_2 + b_2 < 0$ *и, кроме того, выполнено либо неравенство* $c_{21} > 0$, *либо каждое из условий* $(c_{21}, c_{23}, c_{24}, \ldots, c_{2n}) = (0, \ldots, 0)$ *и* $c_{22} \leqslant 0$.

Тогда нулевое решение приведённой системы неустойчиво.

В теореме 3.4 указаны некоторые случаи, когда в достаточно малой окрестности начала координат в приведённой системе нигде ни на множестве $\{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}$, ни на множестве $\{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}$ не существует движения, а фазовые точки, находящиеся в начальный момент времени сколь угодно близко к началу координат вне множества $\{x_1 = 0, x_2 = 0\}$, удаляются от начала координат. При этом траектория такой фазовой точки протыкает каждое из множеств $\{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}$ и $\{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}$ и совершает бесконечно много оборотов вокруг множества $\{x_1 = 0, x_2 = 0\}$, так что её ортогональная проекция на плоскость x_1, x_2 напоминает спираль. В этих случаях нулевое решение приведённой системы неустойчиво.

Теорема 3.4. *Пусть $n \geqslant 2$, $r := a_1|a_2| + b_2|b_1| > 0$ и выполнена одна из систем условий:*

(i) $|a_1| < -b_1$, $|b_2| < a_2$;

(ii) $|a_1| < b_1$, $|b_2| < -a_2$.

Тогда нулевое решение приведённой системы неустойчиво.

Идея доказательства теоремы 3.4 такова. В достаточно малой окрестности начала координат в приведённой системе нигде ни на множестве $\{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}$, ни на множестве $\{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}$ не существует движения. Доказательство основано на развитии идей Д. В. Аносова. Д. В. Аносов[12] использует функцию $W_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = \alpha|x_1| + \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij} x_i x_j$, $\alpha > 0$. Для наших целей нужно обобщить конструкцию, учитывая два слагаемых $\alpha|x_1|$, $\alpha > 0$, и $\beta|x_2|$, $\beta > 0$. При этом мы не используем квадратичные слагаемые. Рассмотрим функцию $W_{\alpha,\beta}(x_1, \ldots, x_n) := \alpha|x_1| + \beta|x_2|$. На множестве $\{x_1 = 0, x_2 = 0\}$ имеем: $W_{\alpha,\beta} = 0$. Если $\alpha > 0$, $\beta > 0$, то $W_{\alpha,\beta} > 0$ на множестве $\mathbb{R}^n \setminus \{x_1 = 0, x_2 = 0\}$. При выполнении любой из систем условий, указанных в формулировке теоремы 3.4, можно выбрать такие значения α_0, β_0 параметров α, β соответственно, что в достаточно малой окрестности начала координат на множестве $\{x_1 \neq 0, x_2 \neq 0\}$ производная функции W_{α_0,β_0} в силу приведённой системы положительна и отделена от нуля константой. Из вышесказанного следует, что в каждом из случаев теоремы 3.4 нулевое решение приведённой системы неустойчиво.

Утверждение 3.1 подытоживает доказанное в случаях (i)–(v) теоремы 3.1, в случаях (i)–(ii) теорем 3.2 и 3.3, в теореме 3.4. Это утверждение устанавливает, что из только что упомянутых пунктов теорем получается полный ответ на вопрос об устойчивости нулевого решения приведённой системы, параметры которой принадлежат открытому всюду плотному множеству в пространстве параметров a_1, b_1, a_2, b_2, c_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$, приведённой системы, заданному неравенствами $\Delta \neq 0$, $a_1+b_1 \neq 0$, $-a_1+b_1 \neq 0$, $a_2+b_2 \neq 0$, $-a_2+b_2 \neq 0$ и, если $|a_1| < |b_1|$, $|b_2| < |a_2|$, $a_2b_1 < 0$, то дополнительно $r := a_1|a_2| + b_2|b_1| \neq 0$.

Утверждение 3.1. *Условия случаев (i)–(v) теоремы 3.1, случаев (i)–(ii) теорем 3.2 и 3.3, условия теоремы 3.4 покрывают открытое всюду плотное множество в пространстве параметров a_1, b_1, a_2, b_2, c_{ij}, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, приведённой системы, заданное неравенствами $\Delta \neq 0$, $a_1 + b_1 \neq 0$, $-a_1 + b_1 \neq 0$, $a_2 + b_2 \neq 0$, $-a_2 + b_2 \neq 0$ и, если $|a_1| < |b_1|$, $|b_2| < |a_2|$, $a_2b_1 < 0$, то дополнительно $r := a_1|a_2| + b_2|b_1| \neq 0$.*

В утверждениях случаев (vi)–(ix) теоремы 3.1, в теоремах 3.2 и 3.3 частично решён вопрос об устойчивости нулевого решения для множества приведённых систем, параметры которых принадлежат одной из следующих граничных гиперповерхностей вышеупомянутого открытого всюду плотного множества: $\{a_1 + b_1 = 0\}$, $\{-a_1 + b_1 = 0\}$, $\{a_2 + b_2 = 0\}$, $\{-a_2 + b_2 = 0\}$. Заметим, что если выполнены условия хотя бы одного из случаев (i)–(v) теоремы 3.1 или условия теоремы 3.4, то $a_1 + b_1 \neq 0$, $-a_1 + b_1 \neq 0$, $a_2 + b_2 \neq 0$, $-a_2 + b_2 \neq 0$. Геометрически принадлежность параметров приведённой системы одной из четырёх вышеуказанных гиперповерхностей означает следующее. Если $\Delta \neq 0$, то условие $a_i + b_i = 0$ ($-a_i+b_i = 0$) означает, что в первой и третьей (во второй и четвёртой) четвертях фазового пространства, выделяемых условиями на знаки координат x_1 и x_2, «главная часть»

$$\begin{cases} (a_1 \operatorname{sgn} x_1 + b_1 \operatorname{sgn} x_2, a_2 \operatorname{sgn} x_1 + b_2 \operatorname{sgn} x_2, 0, \ldots, 0) & \text{при } n \geqslant 3, \\ (a_1 \operatorname{sgn} x_1 + b_1 \operatorname{sgn} x_2, a_2 \operatorname{sgn} x_1 + b_2 \operatorname{sgn} x_2) & \text{при } n = 2, \end{cases}$$

векторного поля, заданного приведённой системой, перпендикулярна координатной оси x_i, $i = 1$ или 2.

В **заключении** резюмируются полученные в диссертации основные результаты. В нём имеется таблица 1, в которой сведены результаты исследования устойчивости нулевого решения приведённой системы, полученные в настоящей работе.

Заключение

В настоящей работе изучена устойчивость нулевого решения системы вещественных обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя реле вида

$$\dot{y}_i = p_i \operatorname{sgn} y_1 + q_i \operatorname{sgn} y_2 + \sum_{j=1}^{n} r_{ij} y_j, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{8}$$

при различных значениях параметров $p_1, \ldots, p_n$, $q_1, \ldots, q_n$, $r_{ij}, 1 \leqslant i, j \leqslant n$, этой системы. Здесь $n \geqslant 2$; $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ – неизвестные функции времени t; $\dot{y}_i$ обозначает производную

dy_i/dt, $i = 1, \ldots, n$; $(p_1, \ldots, p_n)^{\mathrm{T}}$ и $(q_1, \ldots, q_n)^{\mathrm{T}}$ – заданные постоянные n-мерные векторы (символ T обозначает транспонирование); $(r_{ij})_{1\leqslant i,\, j\leqslant n}$ – заданная постоянная $(n \times n)$-матрица.

Если $\Delta := p_1q_2 - p_2q_1 \neq 0$, то, вычитая из всех уравнений системы (8), начиная с третьего, первые два с подходящими коэффициентами, мы приводим её к виду

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 \operatorname{sgn} x_1 + b_1 \operatorname{sgn} x_2 + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_{1j}x_j, \\ \dot{x}_2 = a_2 \operatorname{sgn} x_1 + b_2 \operatorname{sgn} x_2 + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_{2j}x_j, \\ \dot{x}_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j, \quad i = 3, \ldots, n \qquad \text{(если } n = 2, \text{ то этих уравнений нет).} \end{cases} \tag{9}$$

При этом $x_k \equiv y_k$, $a_k = p_k$, $b_k = q_k$, $k = 1, 2$, $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1$. Релейную систему вида (9) мы называем *приведённой*. Если $n = 2$, то рассматриваемая система (8) изначально имеет вид (9), т.е. является приведённой.

В настоящей диссертации получен полный ответ на вопрос об устойчивости нулевого решения приведённой системы для открытого всюду плотного множества в пространстве параметров a_1, b_1, a_2, b_2, c_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$, этой системы, заданного неравенствами $\Delta \neq 0$, $a_1 + b_1 \neq 0$, $-a_1 + b_1 \neq 0$, $a_2 + b_2 \neq 0$, $-a_2 + b_2 \neq 0$ и, если $|a_1| < |b_1|$, $|b_2| < |a_2|$, $a_2b_1 < 0$, то дополнительно $r := a_1|a_2| + b_2|b_1| \neq 0$. Согласно утверждению 3.1 условия случаев (i)–(v) теоремы 3.1, случаев (i)–(ii) теорем 3.2 и 3.3, условия теоремы 3.4 покрывают вышеуказанное открытое всюду плотное множество.

В настоящей работе частично решён вопрос об устойчивости нулевого решения для множества приведённых систем, параметры которых принадлежат одной из следующих граничных гиперповерхностей вышеупомянутого открытого всюду плотного множества: $\{a_1 + b_1 = 0\}$, $\{-a_1 + b_1 = 0\}$, $\{a_2 + b_2 = 0\}$, $\{-a_2 + b_2 = 0\}$. Это сделано в утверждениях случаев (vi)–(ix) теоремы 3.1, в теоремах 3.2 и 3.3. Заметим, что если выполнены условия хотя бы одного из случаев (i)–(v) теоремы 3.1 или условия теоремы 3.4, то $a_1+b_1 \neq 0$, $-a_1+b_1 \neq 0$, $a_2 + b_2 \neq 0$, $-a_2 + b_2 \neq 0$. Геометрически принадлежность параметров приведённой системы одной из четырёх вышеуказанных гиперповерхностей означает следующее. Если $\Delta \neq 0$, то условие $a_i + b_i = 0$ $(-a_i + b_i = 0)$ означает, что в первой и третьей (во второй и четвёртой) четвертях фазового пространства, выделяемых условиями на знаки координат x_1 и x_2, «главная часть»

$$\begin{cases} (a_1 \operatorname{sgn} x_1 + b_1 \operatorname{sgn} x_2, a_2 \operatorname{sgn} x_1 + b_2 \operatorname{sgn} x_2, 0, \ldots, 0) & \text{при } n \geqslant 3, \\ (a_1 \operatorname{sgn} x_1 + b_1 \operatorname{sgn} x_2, a_2 \operatorname{sgn} x_1 + b_2 \operatorname{sgn} x_2) & \text{при } n = 2, \end{cases}$$

векторного поля, заданного приведённой системой, перпендикулярна координатной оси x_i, $i = 1$ или 2.

Благодарности. В заключение я хотел бы отметить определяющую роль моего дорогого учителя и первого научного руководителя, академика РАН Дмитрия Викторовича Аносова. Я от всей души благодарен ему за постановку задачи, помощь и постоянную поддержку в моих исследованиях и за создание очень благоприятных условий для научной деятельности.

Благодарю моих родных и близких за всемерную поддержку и безграничное терпение.

Благодарю моего научного руководителя, члена-корреспондента РАН С. М. Асеева и кандидата физико-математических наук А. В. Клименко за ценные советы и внимание к работе.

Список работ, опубликованных автором по теме диссертации

[1] *Лосев А.А.* Устойчивость нулевого решения релейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя реле // Тр. МИАН. 2015. Т. 291. С. 182–201;

[2] *Лосев А.А.* Исследование устойчивости нулевого решения релейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя реле // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53;

[3] *Лосев А.А.* Достаточные условия неустойчивости положений равновесия релейных систем // Тезисы докладов Международной конференции «Системы Аносова и современная динамика», посвящённой 80-летию со дня рождения Д. В. Аносова. Москва. 2016. С. 78–79;

[4] *Лосев А.А.* Достаточные условия устойчивости положений равновесия релейных систем // Тезисы докладов Международной школы-конференции «Соболевские чтения». Новосибирск. 2016. С. 114.

Подписано в печать 01.06.2017
Тираж 100 экз.

Отпечатано в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН
119991, Москва, ул. Губкина, д. 8