Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук

На правах рукописи

УДК 517.925

Лосев Андрей Александрович

Устойчивость нулевого решения релейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя реле

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н.,
член-корр. РАН С. М. Асеев

Москва – 2017

Оглавление

Введение

Общая характеристика работы

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Диссертация является исследованием в области теории систем дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. В ней изучается устойчивость нулевого решения (определения см. ниже) системы вещественных обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя реле вида

$$\dot{y}_i = p_i \operatorname{sgn} y_1 + q_i \operatorname{sgn} y_2 + \sum_{j=1}^{n} r_{ij} y_j, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

при различных значениях параметров $p_1, \ldots, p_n,\ q_1, \ldots, q_n,\ r_{ij}, 1 \leqslant i, j \leqslant n$, этой системы. Здесь $n \geqslant 2$; $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ – неизвестные функции времени t; $\dot{y}_i$ обозначает производную dy_i/dt, $i = 1, \ldots, n$; $(p_1, \ldots, p_n)^{\mathrm{T}}$ и $(q_1, \ldots, q_n)^{\mathrm{T}}$ – заданные постоянные n-мерные векторы (символ T обозначает транспонирование); $(r_{ij})_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n}$ – заданная постоянная $(n \times n)$-матрица.

Математические основы теории устойчивости были заложены А. М. Ляпуновым в цикле работ [18, 19, 20, 32]. В настоящее время в силу своей актуальности для современной теории дифференциальных уравнений и для приложений теория устойчивости включается в программы курсов дифференциальных уравнений для математических, физических и инженерных специальностей [22]. Дифференциальные уравнения, рассматриваемые в работах А. М. Ляпунова, имеют непрерывные правые части. Устойчивость решений систем дифференциальных уравнений с непрерывными правыми частями рассматривалась, в частности, в [5, 6].

Однако физические законы могут выражаться разрывными функциями, например, разрывная зависимость силы трения от скорости в случае сухого трения [33]. Кроме этого, дифференциальные уравнения с разрывной правой частью получаются из дифференциальных уравнений с непрерывной правой частью при предельных переходах по параметру [27, §8, п. 3]. Библиография по вопросу устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями также весьма обширна. Для примера упомянем [13, 25, 29, 30].

Релейные системы, то есть системы дифференциальных уравнений, правые части которых содержат выражения вида $\operatorname{sgn}(f(y_1, \ldots, y_n))$, где f – гладкая функция, изучались в связи с задачами теории автоматического управления начиная с середины 20 века (см., например, [8, 9, 10, 11, 12, 21, 23, 31]).

Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский [7] и Д. В. Аносов [4] изучали релейную систему, аналогичную (1), но с одним реле, имеющую вид

$$\dot{y}_i = p_i \operatorname{sgn} y_1 + \sum_{j=1}^{n} r_{ij} y_j, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

с точки зрения устойчивости её нулевого решения. Полное исследование вопроса было первоначально проведено Л. С. Понтрягиным и В. Г. Болтянским. Д. В. Аносову удалось найти более простое решение задачи.

Пользуясь обозначением d для оператора дифференцирования, релейную систему (2) можно записать в виде

$$dy_i - \sum_{j=1}^{n} r_{ij} y_j = p_i \operatorname{sgn} y_1, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Исключая отсюда $y_2, \ldots, y_n$, получим

$$K(d) y_1 + M L(d) \operatorname{sgn} y_1 = 0, \tag{3}$$

где M – вещественное число, $K(d)$ и $L(d)$ – многочлены:

$$K(d) = d^n + \alpha_1 d^{n-1} + \ldots, \qquad L(d) = d^{n-r} + \beta_1 d^{n-r-1} + \ldots$$

(не исключено $L(d) \equiv 0$). Заметим, что само по себе соотношение (3) не имеет смысла, так как функция $\operatorname{sgn} y_1$ разрывна и недифференцируема при $y_1 = 0$. Поэтому, когда пишут уравнение (3), то имеют в виду, что рассматривается система (2) и что (3) есть формальная запись этой системы.

В работе Д. В. Аносова доказаны следующие необходимые, а также достаточные условия устойчивости нулевого решения системы (2).

В случае $r = 1$ для устойчивости необходимо, чтобы было $M > 0$ и чтобы многочлен $L(d)$ не имел корней справа от мнимой оси и достаточно, чтобы сверх того все корни многочлена $L(d)$ находились слева от мнимой оси.

В случае $r = 2$ к этим необходимым условиям добавляется ещё условие $\alpha_1 \geqslant \beta_1$, а к достаточным – условие $\alpha_1 > \beta_1$.

В случае $r \geqslant 3$ или $L(d) \equiv 0$ всегда имеет место неустойчивость.

В своей статье Д. В. Аносов рассматривает систему

$$\dot{y}_i = p_i g(y_1, N) + \sum_{j=1}^{n} r_{ij} y_j, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

где $g = g(y_1, N)$ – непрерывная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $g(y_1, N) = -1$ при $y_1 \leqslant \alpha(N) < 0$, $g(y_1, N) = 1$ при $y_1 \geqslant \beta(N) > 0$;

2) на отрезке $[\alpha(N), \beta(N)]$ функция g монотонно возрастает и удовлетворяет соотношению $|\Delta g| \geqslant K(N)|\Delta y_1|$, где $K(N) \to +\infty$ при $N \to +\infty$.

Неформально говоря, функция $g(y_1, N)$ – это непрерывное приближение к $\operatorname{sgn} y_1$, тем лучшее, чем больше N. Осуществляя предельный переход в последней системе при $N \to +\infty$, Д. В. Аносов получает систему (2) (вместе с доопределением этой системы на гиперплоскости $y_1 = 0$). Здесь речь идёт лишь о предельном переходе в некоторой окрестности гиперплоскости $y_1 = 0$. Также Д. В. Аносов показывает, что любой конечный (в смысле времени) отрезок фазовой траектории приближается при $N \to +\infty$ к некоторой кривой, которая оказывается отрезком траектории системы (2).

А. Ф. Филиппов изучал [28, 27, §20, п. 3] двумерную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, правые части которых являются суммами двух кусочно непрерывных слагаемых, одно из которых разрывно на одной гладкой линии, другое – на другой, и эти линии пересекаются под ненулевым углом. Если сделать замену переменных так, чтобы эти две линии стали осями координат, то система примет вид

$$\dot{y}_i = f_i(y_1, y_2) + g_i(y_1, y_2), \qquad i = 1, 2; \tag{4}$$

функции f_i разрывны только на оси Oy_2, g_i – только на Oy_1. На линиях разрыва используется простейшее выпуклое доопределение по Филиппову (см. [26] и определение 1.1 ниже). Исследуется поведение решений системы (4) вблизи точки пересечения линий разрыва. Рассматриваемая нами релейная система (1) при $n = 2$ является частным случаем системы (4) (можно взять $f_i(y_1, y_2) = p_i \operatorname{sgn} y_1 + r_{i1} y_1$, $g_i(y_1, y_2) = q_i \operatorname{sgn} y_2 + r_{i2} y_2$, $i = 1, 2$). Из результатов [27, §20, п. 3] и [28] получается полный ответ на вопрос об устойчивости нулевого решения двумерной релейной системы (1), параметры которой принадлежат открытому всюду плотному множеству в пространстве параметров этой системы, указанному в формулировке утверждения 3.1. (При $n = 2$ исходная релейная система (1) уже является приведённой, определение приведённой системы см. ниже.) Вышеуказанные результаты А. Ф. Филиппова дают в частном случае при $n = 2$ утверждения случаев (i)–(v) теоремы 3.1, случаев (i)–(ii) теорем 3.2 и 3.3, а также утверждение теоремы 3.4.

В работах Р. И. Алидемы [2, 3] рассматривалась двумерная система обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a + b \operatorname{sgn} y_1 + c \operatorname{sgn} y_2, \\ \dot{y}_2 = d + e \operatorname{sgn} y_1 + f \operatorname{sgn} y_2, \end{cases} \tag{5}$$

где $a, b, \ldots, f$ – непрерывно дифференцируемые в окрестности начала координат функции от y_1, y_2. На линиях $y_1 = 0$ и $y_2 = 0$ разрыва правых частей уравнений системы (5) используется простейшее выпуклое доопределение по Филиппову. Р. И. Алидема исследовал устойчивость нулевого решения системы (5) в случаях, когда коэффициенты рядов Тейлора функций $a, b, \ldots, f$ с центром в начале координат удовлетворяют некоторым условиям типа равенств. Рассматриваемая нами релейная система (1) при $n = 2$ является частным случаем системы (5) с $a(y_1, y_2) = r_{11}y_1 + r_{12}y_2$, $b(y_1, y_2) \equiv p_1$, $c(y_1, y_2) \equiv q_1$, $d(y_1, y_2) = r_{21}y_1 + r_{22}y_2$, $e(y_1, y_2) \equiv p_2$, $f(y_1, y_2) \equiv q_2$. Результаты Р. И. Алидемы [3] дают в частном случае при $n = 2$ утверждение случая (iii) теоремы 3.2 и часть утверждения случая (iii) теоремы 3.3.

Цель работы. Целью работы является изучение устойчивости нулевого решения системы вещественных обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя реле вида (1) при различных значениях параметров $p_1, \ldots, p_n$, $q_1, \ldots, q_n$, $r_{ij}, 1 \leqslant i, j \leqslant n$, $n \geqslant 2$, этой системы.

Методы исследования. В работе используются методы теории систем дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями, методы качественной теории систем дифференциальных уравнений и теории устойчивости.

Основные результаты диссертации. Если $\Delta := p_1q_2 - p_2q_1 \neq 0$, то, вычитая из всех уравнений системы (1), начиная с третьего, первые два с подходящими коэффициентами, её можно привести к виду

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 \operatorname{sgn} x_1 + b_1 \operatorname{sgn} x_2 + \sum\limits_{j=1}^{n} c_{1j}x_j, \\ \dot{x}_2 = a_2 \operatorname{sgn} x_1 + b_2 \operatorname{sgn} x_2 + \sum\limits_{j=1}^{n} c_{2j}x_j, \\ \dot{x}_i = \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}x_j, \quad i = 3, \ldots, n \qquad \text{(если } n = 2\text{, то этих уравнений нет).} \end{cases} \tag{6}$$

При этом $x_k \equiv y_k$, $a_k = p_k$, $b_k = q_k$, $k = 1, 2$, $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1$. Релейную систему вида (6) мы будем называть *приведённой*. Если $n = 2$, то рассматриваемая система (1) изначально имеет вид (6), т.е. является приведённой.

В настоящей диссертации получены следующие основные результаты:

1) Полностью исследована устойчивость нулевого решения приведённой системы для открытого всюду плотного множества в пространстве параметров a_1, b_1, a_2, b_2, c_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$, этой системы, заданного неравенствами $\Delta \neq 0$, $a_1 + b_1 \neq 0$, $-a_1 + b_1 \neq 0$, $a_2 + b_2 \neq 0$, $-a_2 + b_2 \neq 0$ и, если $|a_1| < |b_1|$, $|b_2| < |a_2|$, $a_2 b_1 < 0$, то дополнительно $r := a_1|a_2| + b_2|b_1| \neq 0$ (случаи (i)–(v) теоремы 3.1, случаи (i)–(ii) теорем 3.2 и 3.3, теорема 3.4, утверждение 3.1).

2) Частично решён вопрос об устойчивости нулевого решения для множества приведённых систем, параметры которых принадлежат одной из следующих граничных гиперповерхностей вышеупомянутого открытого всюду плотного множества: $\{a_1 + b_1 = 0\}$, $\{-a_1 + b_1 = 0\}$, $\{a_2 + b_2 = 0\}$, $\{-a_2 + b_2 = 0\}$ (случаи (vi)–(ix) теоремы 3.1, теорема 3.2, теорема 3.3).

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми, получены автором самостоятельно, обоснованы строгими и подробными математическими доказательствами.

Результаты диссертации являются обобщением результатов Л. С. Понтрягина, В. Г. Болтянского [7] и Д. В. Аносова [4] на случай релейной системы с двумя реле, а также результатов А. Ф. Филиппова [28, 27, §20, п. 3] и Р. И. Алидемы [2, 3] на случай произвольной размерности системы обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями вида (1).

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся основные результаты диссертации:

1) Полностью исследована устойчивость нулевого решения приведённой системы для открытого всюду плотного множества в пространстве параметров a_1, b_1, a_2, b_2, c_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$, этой системы, заданного неравенствами $\Delta \neq 0$, $a_1 + b_1 \neq 0$, $-a_1 + b_1 \neq 0$, $a_2 + b_2 \neq 0$, $-a_2 + b_2 \neq 0$ и, если $|a_1| < |b_1|$, $|b_2| < |a_2|$, $a_2 b_1 < 0$, то дополнительно $r := a_1|a_2| + b_2|b_1| \neq 0$ (случаи (i)–(v) теоремы 3.1, случаи (i)–(ii) теорем 3.2 и 3.3, теорема 3.4, утверждение 3.1).

2) Частично решён вопрос об устойчивости нулевого решения для множества приведённых систем, параметры которых принадлежат одной из следующих граничных гиперповерхностей вышеупомянутого открытого всюду плотного множества: $\{a_1 + b_1 = 0\}$,

$\{-a_1 + b_1 = 0\}$, $\{a_2 + b_2 = 0\}$, $\{-a_2 + b_2 = 0\}$ (случаи (vi)–(ix) теоремы 3.1, теорема 3.2, теорема 3.3).

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация имеет теоретический характер. Полученные результаты относятся к теории систем дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. Все полученные в диссертации результаты сформулированы в виде строгих математических утверждений и обоснованы строгими и подробными математическими доказательствами. Результаты работы могут использоваться в исследованиях устойчивости решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями, в том числе возникающих в прикладных задачах. Результаты диссертации могут также найти применение при чтении специальных курсов по дифференциальным уравнениям и теории устойчивости для студентов, магистрантов и аспирантов математических, физических и инженерных специальностей.

Степень достоверности и апробация результатов работы. Результаты диссертации являются достоверными, обоснованы строгими и подробными математическими доказательствами, опубликованы в четырёх печатных работах автора [14, 15, 16, 17], из них две [16, 17] – в журналах, входящих в перечень рецензируемых научных изданий ВАК, две [14, 15] – в тезисах международных конференций. Работ, написанных в соавторстве, автор не имеет.

Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах:

- Международная конференция «Системы Аносова и современная динамика», посвящённая 80-летию со дня рождения Д. В. Аносова (г. Москва, 19–23 декабря 2016 г.);

- Международная школа-конференция «Соболевские чтения» (г. Новосибирск, 18–22 декабря 2016 г.);

- Всероссийский научно-исследовательский семинар «Нелинейная динамика и управление» (МГУ им. М. В. Ломоносова, 2016 г.);

- Семинар «Проблемы нелинейной динамики: качественный анализ и управление» под руководством акад. РАН С. В. Емельянова (кафедра нелинейных динамических систем и процессов управления факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова, 2016 г.);

- Семинар отдела математической физики Математического института им. В. А. Стеклова РАН под руководством чл.-корр. РАН И. В. Воловича (2016 г.);

- Семинар «Проблемы математической теории управления» под руководством чл.-корр. РАН С. М. Асеева, д. ф.-м. н., проф. М. С. Никольского (Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, 2015 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в четырёх печатных работах автора [14, 15, 16, 17], из них две [16, 17] – в журналах, входящих в перечень рецензируемых научных изданий ВАК, две [14, 15] – в тезисах международных конференций. Работ, написанных в соавторстве, автор не имеет.

Структура и объём диссертации. Работа состоит из введения, трёх глав, заключения, списка литературы и списка иллюстративного материала. В заключении имеется таблица 1, в которой сведены результаты исследования устойчивости нулевого решения приведённой системы, полученные в настоящей диссертации. Все теоремы, леммы, следствия, утверждения, а также занумерованные замечания и определения в диссертации имеют двойную нумерацию. Первое число (1, 2 или 3) обозначает номер главы, второе – номер соответствующего утверждения или определения внутри главы. Формулы в настоящей работе нумеруются следующим образом. Во введении и в заключении используется одинарная нумерация, в основном тексте – двойная. Первое число (1, 2 или 3) обозначает номер главы, второе – номер формулы внутри главы. Список литературы содержит 33 наименования. Список иллюстративного материала содержит 1 наименование (таблицу 1). Общий объём текста – 99 страниц.

Основное содержание диссертации

Работа посвящена изучению устойчивости нулевого решения системы вещественных обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя реле вида (1) при различных значениях параметров $p_1, \ldots, p_n$, $q_1, \ldots, q_n$, $r_{ij}, 1 \leqslant i, j \leqslant n$, этой системы.

Во **введении** даётся общая характеристика диссертации и излагается основное содержание работы, кратко раскрывающее содержание глав диссертации.

В **главе 1** излагаются три наиболее часто используемые способа доопределения системы обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно непрерывными правыми частями в точках разрыва правых частей уравнений такой системы – простейшее выпуклое доопределение по Филиппову (см. [26] и определение 1.1 ниже), доопределение методом эквивалентного управления (см. [24] и определение 1.2 ниже) и общее доопределение по Айзерману – Пятницкому (см. [1] и определение 1.3 ниже). В изложении этих доопределений мы следуем книге А. Ф. Филиппова [27]. Каждое из этих доопределений может быть изложено следующим образом. Система дифференциальных уравнений в векторной записи $\dot{y} = f(y)$ с кусочно непрерывной вектор-функцией $f(y)$ заменяется дифференциальным включением вида $\dot{y} \in F(y)$.

Рассмотрим систему в векторной записи

$$\dot{y} = f(y), \tag{7}$$

где вектор-функция $f(y)$ кусочно непрерывна в области $G \subseteq \mathbb{R}^n$; $y \in G$, $\dot{y} = dy/dt$; M – множество (меры нуль) точек разрыва функции f. Для каждой точки $y \in G$ указывается множество $F(y) \subseteq \mathbb{R}^n$. Если в точке y функция f непрерывна, то множество $F(y)$ состоит из одной точки, совпадающей со значением функции f в этой точке. Если y – точка разрыва функции f, то множество $F(y)$ задаётся тем или иным способом. Например, в простейшем выпуклом доопределении по Филиппову (см. [26]) $F(y)$ – наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее все предельные значения вектор-функции $f(y^*)$, когда $y^* \notin M$, $y^* \to y$.

Определение. *Решением* дифференциального включения $\dot{y} \in F(y)$ называется абсолютно непрерывная вектор-функция $y(t)$, определённая на интервале или отрезке I, для которой почти всюду на I $\dot{y}(t) \in F(y(t))$.

Определение. *Решением* системы (7) называется решение дифференциального включения

$$\dot{y} \in F(y).$$

В главе 1 устанавливаются связи между тремя вышеуказанными способами доопределения. В ней также показывается, что для доопределения рассматриваемой системы (1) на гиперплоскостях $y_1 = 0$ и $y_2 = 0$ разрыва правых частей уравнений этой системы и на пересечении этих гиперплоскостей применимы все три вышеизложенные способа, причём для системы (1) все три доопределения совпадают. С помощью простейшего выпуклого доопределения по Филиппову доказывается, что при любых значениях параметров $p_1, \ldots, p_n$, $q_1, \ldots, q_n$, $r_{ij}, 1 \leqslant i, j \leqslant n$, релейной системы (1) набор функций $y_i(t) \equiv 0, i = 1, \ldots, n$, является решением этой системы.

В дальнейшем мы используем более удобный вид системы (1), к которому она сводится линейной заменой координат. Именно, если $\Delta := p_1q_2 - p_2q_1 \neq 0$, то, вычитая из всех уравнений системы (1), начиная с третьего, первые два с подходящими коэффициентами, её можно привести к виду (6). При этом $x_k \equiv y_k$, $a_k = p_k$, $b_k = q_k$, $k = 1, 2$, $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1$. Релейную систему вида (6) мы называем *приведённой*. Если $n = 2$, то рассматриваемая система (1) изначально имеет вид (6), т.е. является приведённой. В конце главы 1 указаны некоторые симметрии, которые не меняют вид приведённой системы, и описано, как меняются матрицы $A := \left(\begin{smallmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{smallmatrix}\right)$ и $C := (c_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ при каждой из этих симметрий.

Глава 2 посвящена доопределению приведённой системы на гиперплоскостях $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ разрыва правых частей уравнений системы и на пересечении этих гиперплоскостей. В ней даётся определение существования (отсутствия) движения в приведённой системе всюду на некотором множестве.

Определение. В приведённой системе *всюду на множестве* $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ *существует движение*, если через каждую точку множества Y проходит решение приведённой системы, движущееся по этому множеству в течение некоторого промежутка времени.

В приведённой системе *нигде на множестве* $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ *не существует движения*, если не существует решения приведённой системы, которое в течение некоторого промежутка времени двигалось бы по множеству Z.

В леммах 2.1 и 2.2 изучается наличие или отсутствие движений в приведённой системе в достаточно малых окрестностях начала координат на гиперплоскостях соответственно $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ разрыва правых частей уравнений системы вне пересечения этих гиперплоскостей. В лемме 2.5 указаны некоторые значения параметров a_1, b_1, a_2, b_2, $c_{ij}, 1 \leqslant i, j \leqslant n$, приведённой системы, при которых в этой системе всюду в достаточно малой окрестности начала координат на пересечении гиперплоскостей $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ разрыва правых частей уравнений системы существует движение. В леммах 2.3, 2.4, 2.6 дан вывод уравнений движений в приведённой системе на множествах $\{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}$, $\{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}$, $\{x_1 = 0, x_2 = 0\}$ соответственно, если такие движения существуют. Ради удобства мы пользуемся доопределением методом эквивалентного управления (см. доказательства лемм 2.3 и 2.6). В условиях следствия 2.3 (из леммы 2.6) в достаточно малой окрестности начала координат на множестве $\{x_1 = 0, x_2 = 0\}$ движение в приведённой системе описывается системой линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянной матрицей коэффициентов $(c_{ij})_{3 \leqslant i,j \leqslant n}$. Для формулировки результатов об устойчивости этого движения на языке матриц в главе 2 вводится определение устойчивости квадратной матрицы.

Определение. Комплексная квадратная матрица S называется

- *асимптотически устойчивой*, если вещественные части всех её собственных значений отрицательны;
- *устойчивой*, если вещественные части всех её собственных значений неположительны и для каждого чисто мнимого её собственного значения все соответствующие жордановы клетки имеют размер 1;
- *неустойчивой*, если у неё существует собственное значение с положительной вещественной частью или чисто мнимое собственное значение, для которого хотя бы одна из соответствующих жордановых клеток имеет размер $\geqslant 2$.

Вводимые термины для устойчивости матрицы S отвечают тому же типу устойчивости нулевого решения соответствующей системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами $\dot{x} = Sx$.

При выполнении условий следствия 2.3 устойчивость движения в приведённой системе в достаточно малой окрестности начала координат на множестве $\{x_1 = 0, x_2 = 0\}$ совпадает с устойчивостью подматрицы $(c_{ij})_{3\leqslant i,j\leqslant n}$.

В **главе 3** изучается устойчивость нулевого решения приведённой системы при различных значениях параметров a_1, b_1, a_2, b_2, c_{ij}, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, этой системы. В начале главы даётся определение устойчивости решения дифференциального включения вида $\dot{x} \in F(x)$.

Определение. Решение $x = \varphi(t)$, $t_0 \leqslant t < +\infty$, дифференциального включения $\dot{x} \in F(x)$ называется

- *устойчивым*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для каждого такого $\widetilde{x}_0$, что $|\widetilde{x}_0 - \varphi(t_0)| < \delta$, каждое решение $\widetilde{x}(t)$ с начальным условием $\widetilde{x}(t_0) = \widetilde{x}_0$ при $t_0 \leqslant t < +\infty$ существует и удовлетворяет неравенству $|\widetilde{x}(t) - \varphi(t)| < \varepsilon$, $t_0 \leqslant t < +\infty$.
- *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво и, кроме того, $\widetilde{x}(t) - \varphi(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

В теореме 3.1 рассматриваются некоторые значения параметров приведённой системы, при которых в случае $n = 2$ нулевое решение приведённой системы асимптотически устойчиво, а в случае $n \geqslant 3$ устойчивость нулевого решения приведённой системы совпадает с устойчивостью подматрицы $(c_{ij})_{3\leqslant i,j\leqslant n}$.

Теорема 3.1. *Пусть $n \geqslant 2$ и выполнена хотя бы одна из следующих систем условий:*

(i) $|b_1| < -a_1,\ |a_2| < -b_2$;

(ii) $\Delta > 0,\ |b_1| > -a_1,\ |a_2| < -b_2$;

(iii) $|a_1| < b_1,\ |b_2| < -a_2,\ r := a_1|a_2| + b_2|b_1| < 0$;

(iv) $\Delta > 0,\ |b_1| < -a_1,\ |a_2| > -b_2$;

(v) $|a_1| < -b_1,\ |b_2| < a_2,\ r < 0$;

(vi) $a_1 + b_1 = 0$, $-a_1 + b_1 > 0$, *справедливо одно из двух неравенств:* $|a_2| < -b_2$ *либо* $|b_2| < -a_2$, *и, кроме того, при* $n \geqslant 3$ $c_{12} \neq 0$ *или* $(c_{12}, \ldots, c_{1n}) = (0, \ldots, 0)$ *(при* $n = 2$ *это условие тривиально)*;

(vii) $-a_1 + b_1 = 0$, $a_1 + b_1 < 0$, *справедливо одно из двух неравенств:* $|a_2| < -b_2$ *либо* $|b_2| < a_2$, *и, кроме того, при* $n \geqslant 3$ $c_{12} \neq 0$ *или* $(c_{12}, \ldots, c_{1n}) = (0, \ldots, 0)$ *(при* $n = 2$ *это условие тривиально)*;

(viii) $a_2 + b_2 = 0$, $-a_2 + b_2 < 0$, *справедливо одно из двух неравенств:* $|b_1| < -a_1$ *либо* $|a_1| < -b_1$, *и, кроме того, при* $n \geqslant 3$ $c_{21} \neq 0$ *или* $(c_{21}, c_{23}, c_{24}, \ldots, c_{2n}) = (0, \ldots, 0)$ *(при* $n = 2$ *это условие тривиально)*;

(ix) $-a_2 + b_2 = 0$, $a_2 + b_2 < 0$, *справедливо одно из двух неравенств:* $|b_1| < -a_1$ *либо* $|a_1| < b_1$, *и, кроме того, при* $n \geqslant 3$ $c_{21} \neq 0$ *или* $(c_{21}, c_{23}, c_{24}, \ldots, c_{2n}) = (0, \ldots, 0)$ *(при* $n = 2$ *это условие тривиально)*.

Тогда при $n = 2$ *нулевое решение приведённой системы асимптотически устойчиво, а при* $n \geqslant 3$ *устойчивость нулевого решения приведённой системы совпадает с устойчивостью подматрицы* $(c_{ij})_{3 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Доказательство основано на развитии идей Д. В. Аносова. В работе Д. В. Аносова [4] используется функция $W_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = \alpha|x_1| + \sum_{i,j=1}^n f_{ij}x_i x_j$, $\alpha > 0$. Для наших целей нужно обобщить конструкцию, учитывая два слагаемых $\alpha|x_1|$, $\alpha > 0$, и $\beta|x_2|$, $\beta > 0$. Мы будем рассматривать функцию $W_{\alpha,\beta}(x_1, \ldots, x_n) := \alpha|x_1| + \beta|x_2| + \sum_{k=3}^n x_k^2$ (при $n = 2$ – функцию $W_{\alpha,\beta}(x_1, x_2) := \alpha|x_1| + \beta|x_2|$). Отметим, что $W_{\alpha,\beta}(0, \ldots, 0) = 0$. Если $\alpha > 0$, $\beta > 0$, то $W_{\alpha,\beta} > 0$ на множестве $\mathbb{R}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$. При выполнении любой из систем условий, указанных в формулировке теоремы 3.1, существует решение (α_0, β_0) системы неравенств (относительно переменных α, β) $\alpha(a_1 + b_1) + \beta(a_2 + b_2) < 0$, $\alpha(a_1 - b_1) + \beta(-a_2 + b_2) < 0$ такое, что $\alpha_0 > 0$, $\beta_0 > 0$. Поэтому во всех случаях (i)–(ix) найдётся такая окрестность R начала координат, что на множестве $R \cap \{x_1 \neq 0, x_2 \neq 0\}$ производная функции W_{α_0,β_0} в силу приведённой системы отрицательна и отделена от нуля константой. Далее доказывается, что существует такая окрестность $\widetilde{W}$ начала координат и такие множества $\widetilde{J}$, $\widetilde{K}$, $\widetilde{L}$, $\widetilde{M}$, что:

1) $\widetilde{W}_1 := \widetilde{W} \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\} \subseteq \widetilde{J}_1 \cup \widetilde{K}_1$ (допускается, что одно из объединяемых множеств пусто), где $\widetilde{J}_1 := \widetilde{J} \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}$, $\widetilde{K}_1 := \widetilde{K} \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}$, в приведённой системе всюду на множестве $\widetilde{J}_1$ есть движение, в котором производная функции W_{α_0,β_0} отрицательна и отделена от нуля константой, нигде на множестве $\widetilde{K}_1$ не существует движения;

2) $\widetilde{W}_2 := \widetilde{W} \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\} \subseteq \widetilde{L}_2 \cup \widetilde{M}_2$ (допускается, что одно из объединяемых множеств пусто), где $\widetilde{L}_2 := \widetilde{L} \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}$, $\widetilde{M}_2 := \widetilde{M} \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}$, в приведённой системе всюду на множестве $\widetilde{L}_2$ есть движение, в котором производная функции W_{α_0,β_0} отрицательна и отделена от нуля константой, нигде на множестве $\widetilde{M}_2$ не существует движения.

Из вышеизложенного следует, что в каждом из случаев (i)–(ix) любое решение приведённой системы, находящееся в начальный момент времени в достаточно малой окрестности начала координат, достигает множества $\{x_1 = 0, x_2 = 0\}$ за конечное время. Таким образом, при $n = 2$ в каждом из случаев (i)–(ix) теоремы 3.1 нулевое решение приведённой системы асимптотически устойчиво. При $n \geqslant 3$ в каждом из случаев (i)–(ix) теоремы 3.1 в приведённой системе всюду в достаточно малой окрестности начала координат на множестве $\{x_1 = 0, x_2 = 0\}$ существует движение (см. лемму 2.5 и замечание 2.1). Кроме того, при $n \geqslant 3$ в каждом из случаев (i)–(ix) теоремы 3.1 выполнены условия следствия 2.3, которое устанавливает, что устойчивость движения в приведённой системе в достаточно малой окрестности начала координат на множестве $\{x_1 = 0, x_2 = 0\}$ совпадает с устойчивостью подматрицы $(c_{ij})_{3 \leqslant i,j \leqslant n}$. Итак, при $n \geqslant 3$ в каждом из случаев теоремы 3.1 устойчивость нулевого решения приведённой системы совпадает с устойчивостью подматрицы $(c_{ij})_{3 \leqslant i,j \leqslant n}$.

В теоремах 3.2, 3.3, 3.4 указаны некоторые значения параметров приведённой системы, при которых нулевое решение системы неустойчиво.

Если $\Delta \neq 0$, то в достаточно малой окрестности начала координат основной вклад в вектор фазовой скорости приведённой системы в любой из координатных четвертей $\{x_1 > 0, x_2 > 0\}$, $\{x_1 < 0, x_2 > 0\}$, $\{x_1 < 0, x_2 < 0\}$, $\{x_1 > 0, x_2 < 0\}$ вносят ненулевые постоянные слагаемые $a_1 \operatorname{sgn} x_1 + b_1 \operatorname{sgn} x_2$ и $a_2 \operatorname{sgn} x_1 + b_2 \operatorname{sgn} x_2$ из уравнений для $\dot{x}_1$ и $\dot{x}_2$ соответственно. В теореме 3.2 приведены некоторые случаи, в которых решение приведённой системы с начальным значением на множестве $\{x_1 x_2 > 0\}$ (случаи (i), (iii), (iv)) или на множестве $\{x_1 x_2 < 0\}$ (случаи (ii), (v), (vi)), сколь угодно близким к началу координат, отходит от начала координат, двигаясь по соответствующему множеству. Поэтому в этих случаях нулевое решение приведённой системы неустойчиво.

Теорема 3.2. *Пусть $n \geqslant 2$, $\Delta \neq 0$ и выполнена хотя бы одна из систем условий:*

(i) $a_1 + b_1 > 0,\ a_2 + b_2 > 0$;

(ii) $-a_1 + b_1 < 0,\ -a_2 + b_2 > 0$;

(iii) $a_1 + b_1 = 0,\ a_2 + b_2 > 0,\ c_{12} > 0$;

(iv) $a_2 + b_2 = 0,\ a_1 + b_1 > 0,\ c_{21} > 0$;

(v) $-a_1 + b_1 = 0,\ -a_2 + b_2 > 0,\ c_{12} < 0$;

(vi) $-a_2 + b_2 = 0,\ -a_1 + b_1 < 0,\ c_{21} < 0$.

Тогда нулевое решение приведённой системы неустойчиво.

Если $\Delta \neq 0$, существует открытое множество D (соответственно, F) такое, что $\overline{D_1} \ni O$ (соответственно, $\overline{F_2} \ni O$), где $D_1 := D \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}$ (соответственно, $F_2 := F \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}$), в приведённой системе всюду на множестве D_1 (соответственно, на множестве F_2) существует движение, то из леммы 2.3 (соответственно, из леммы 2.4) следует, что в достаточно малой окрестности начала координат основной вклад в вектор фазовой скорости в этом движении вносит постоянное слагаемое $(\Delta/a_1) \operatorname{sgn} x_2$ (соответственно, $(\Delta/b_2) \operatorname{sgn} x_1$) из уравнения для $\dot{x}_2$ (соответственно, для $\dot{x}_1$). В теореме 3.3 собрано несколько случаев, в которых решение приведённой системы с начальным значением на множестве $\{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}$ (случаи (i), (iii), (iv)) или на множестве $\{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}$ (случаи (ii), (v), (vi)), сколь угодно близким к началу координат, отходит от начала координат, двигаясь по соответствующему множеству. Следовательно, в этих случаях нулевое решение приведённой системы неустойчиво.

Теорема 3.3. *Пусть $n \geqslant 2$, $\Delta < 0$ и выполнена хотя бы одна из систем условий:*

(i) $|b_1| < -a_1$;

(ii) $|a_2| < -b_2$;

(iii) $a_1 + b_1 = 0$, $-a_1 + b_1 > 0$ *и, кроме того, выполнено либо неравенство* $c_{12} < 0$, *либо каждое из условий* $(c_{12}, \dots, c_{1n}) = (0, \dots, 0)$ *и* $c_{11} \leqslant 0$;

(iv) $-a_1 + b_1 = 0$, $a_1 + b_1 < 0$ *и, кроме того, выполнено либо неравенство* $c_{12} > 0$, *либо каждое из условий* $(c_{12}, \dots, c_{1n}) = (0, \dots, 0)$ *и* $c_{11} \leqslant 0$;

(v) $a_2 + b_2 = 0$, $-a_2 + b_2 < 0$ *и, кроме того, выполнено либо неравенство* $c_{21} < 0$, *либо каждое из условий* $(c_{21}, c_{23}, c_{24}, \dots, c_{2n}) = (0, \dots, 0)$ *(при* $n = 2$ *здесь и далее в формулировке настоящей теоремы это условие имеет вид* $c_{21} = 0$*) и* $c_{22} \leqslant 0$;

(vi) $-a_2 + b_2 = 0$, $a_2 + b_2 < 0$ *и, кроме того, выполнено либо неравенство* $c_{21} > 0$, *либо каждое из условий* $(c_{21}, c_{23}, c_{24}, \dots, c_{2n}) = (0, \dots, 0)$ *и* $c_{22} \leqslant 0$.

Тогда нулевое решение приведённой системы неустойчиво.

В теореме 3.4 указаны некоторые случаи, когда в достаточно малой окрестности начала координат в приведённой системе нигде ни на множестве $\{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}$, ни на множестве $\{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}$ не существует движения, а фазовые точки, находящиеся в начальный момент времени сколь угодно близко к началу координат вне множества $\{x_1 = 0, x_2 = 0\}$, удаляются от начала координат. При этом траектория такой фазовой точки протыкает каждое из множеств $\{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}$ и $\{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}$ и совершает бесконечно много оборотов вокруг множества $\{x_1 = 0, x_2 = 0\}$, так что её ортогональная проекция на плоскость x_1, x_2 напоминает спираль. В этих случаях нулевое решение приведённой системы неустойчиво.

Теорема 3.4. *Пусть $n \geqslant 2$, $r := a_1|a_2| + b_2|b_1| > 0$ и выполнена одна из систем условий:*

(i) $|a_1| < -b_1$, $|b_2| < a_2$;

(ii) $|a_1| < b_1$, $|b_2| < -a_2$.

Тогда нулевое решение приведённой системы неустойчиво.

Идея доказательства теоремы 3.4 такова. В достаточно малой окрестности начала координат в приведённой системе нигде ни на множестве $\{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}$, ни на множестве $\{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}$ не существует движения. Доказательство основано на развитии идей Д. В. Аносова. В работе Д. В. Аносова [4] используется функция $W_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = \alpha|x_1| + \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}x_ix_j$, $\alpha > 0$. Для наших целей нужно обобщить конструкцию, учитывая два слагаемых $\alpha|x_1|$, $\alpha > 0$, и $\beta|x_2|$, $\beta > 0$. При этом мы не используем квадратичные слагаемые. Рассмотрим функцию $W_{\alpha,\beta}(x_1, \ldots, x_n) := \alpha|x_1| + \beta|x_2|$. На множестве $\{x_1 = 0, x_2 = 0\}$ имеем: $W_{\alpha,\beta} = 0$. Если $\alpha > 0$, $\beta > 0$, то $W_{\alpha,\beta} > 0$ на множестве $\mathbb{R}^n \setminus \{x_1 = 0, x_2 = 0\}$. При выполнении любой из систем условий, указанных в формулировке теоремы 3.4, можно выбрать такие значения α_0, β_0 параметров α, β соответственно, что в достаточно малой окрестности начала координат на множестве $\{x_1 \neq 0, x_2 \neq 0\}$ производная функции W_{α_0,β_0} в силу приведённой системы положительна и отделена от нуля константой. Из вышесказанного следует, что нулевое решение приведённой системы неустойчиво.

Утверждение 3.1 подытоживает доказанное в случаях (i)–(v) теоремы 3.1, в случаях (i)–(ii) теорем 3.2 и 3.3, в теореме 3.4. Это утверждение устанавливает, что из только что упомянутых пунктов теорем получается полный ответ на вопрос об устойчивости нулевого решения приведённой системы, параметры которой принадлежат открытому всюду плотному множеству в пространстве параметров a_1, b_1, a_2, b_2, c_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$, приведённой системы, заданному неравенствами $\Delta \neq 0$, $a_1 + b_1 \neq 0$, $-a_1 + b_1 \neq 0$, $a_2 + b_2 \neq 0$, $-a_2 + b_2 \neq 0$ и, если $|a_1| < |b_1|$, $|b_2| < |a_2|$, $a_2b_1 < 0$, то дополнительно $r := a_1|a_2| + b_2|b_1| \neq 0$.

Утверждение 3.1. *Условия случаев (i)–(v) теоремы 3.1, случаев (i)–(ii) теорем 3.2 и 3.3, условия теоремы 3.4 покрывают открытое всюду плотное множество в пространстве параметров* a_1, b_1, a_2, b_2, c_{ij}, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, *приведённой системы, заданное неравенствами* $\Delta \neq 0$, $a_1 + b_1 \neq 0$, $-a_1 + b_1 \neq 0$, $a_2 + b_2 \neq 0$, $-a_2 + b_2 \neq 0$ *и, если* $|a_1| < |b_1|$, $|b_2| < |a_2|$, $a_2b_1 < 0$, *то дополнительно* $r := a_1|a_2| + b_2|b_1| \neq 0$.

В утверждениях случаев (vi)–(ix) теоремы 3.1, в теоремах 3.2 и 3.3 частично решён вопрос об устойчивости нулевого решения для множества приведённых систем, параметры которых принадлежат одной из следующих граничных гиперповерхностей вышеупомянутого открытого всюду плотного множества: $\{a_1 + b_1 = 0\}$, $\{-a_1 + b_1 = 0\}$, $\{a_2 + b_2 = 0\}$, $\{-a_2 + b_2 = 0\}$. Заметим, что если выполнены условия хотя бы одного из случаев (i)–(v) теоремы 3.1 или условия теоремы 3.4, то $a_1 + b_1 \neq 0$, $-a_1 + b_1 \neq 0$, $a_2 + b_2 \neq 0$, $-a_2 + b_2 \neq 0$. Геометрически принадлежность параметров приведённой системы одной из четырёх вышеуказанных гиперповерхностей означает следующее. Если $\Delta \neq 0$, то условие $a_i + b_i = 0$ (соответственно, $-a_i + b_i = 0$) означает, что в первой и третьей (соответственно, во второй и четвёртой) четвертях фазового пространства, выделяемых условиями на знаки координат x_1 и x_2, «главная часть»

$$\begin{cases} (a_1 \operatorname{sgn} x_1 + b_1 \operatorname{sgn} x_2, a_2 \operatorname{sgn} x_1 + b_2 \operatorname{sgn} x_2, 0, \dots, 0) & \text{при } n \geqslant 3, \\ (a_1 \operatorname{sgn} x_1 + b_1 \operatorname{sgn} x_2, a_2 \operatorname{sgn} x_1 + b_2 \operatorname{sgn} x_2) & \text{при } n = 2, \end{cases}$$

векторного поля, заданного приведённой системой, перпендикулярна координатной оси x_i, $i = 1$ или 2.

В **заключении** резюмируются полученные в диссертации основные результаты. В нём имеется таблица 1, в которой сведены результаты исследования устойчивости нулевого решения приведённой системы, полученные в настоящей работе.

Благодарности. В заключение я хотел бы отметить определяющую роль моего дорогого учителя и первого научного руководителя, академика РАН Дмитрия Викторовича Аносова. Я от всей души благодарен ему за постановку задачи, помощь и постоянную поддержку в моих исследованиях и за создание очень благоприятных условий для научной деятельности.

Благодарю моих родных и близких за всемерную поддержку и безграничное терпение.

Благодарю моего научного руководителя, члена-корреспондента РАН С. М. Асеева и кандидата физико-математических наук А. В. Клименко за ценные советы и внимание к работе.

Глава 1

Вводные определения и замечания

Мы будем рассматривать систему вещественных обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя реле вида

$$\dot{y}_i = p_i \operatorname{sgn} y_1 + q_i \operatorname{sgn} y_2 + \sum_{j=1}^{n} r_{ij} y_j, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{1.1}$$

Здесь $n \geqslant 2$; $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ – неизвестные функции времени t; $\dot{y}_i$ обозначает производную dy_i/dt, $i = 1, \ldots, n$; $(p_1, \ldots, p_n)^{\mathrm{T}}$ и $(q_1, \ldots, q_n)^{\mathrm{T}}$ – заданные постоянные n-мерные векторы (символ Т обозначает транспонирование); $(r_{ij})_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n}$ – заданная постоянная $(n \times n)$-матрица. Введём векторно-матричные обозначения: $y(t) := (y_1(t), \ldots, y_n(t))^{\mathrm{T}}$, $\dot{y} := (\dot{y}_1, \ldots, \dot{y}_n)^{\mathrm{T}}$ ($\dot{y}$ обозначает производную dy/dt), $p := (p_1, \ldots, p_n)^{\mathrm{T}}$, $q := (q_1, \ldots, q_n)^{\mathrm{T}}$, $R := (r_{ij})_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n}$. Тогда система (1.1) примет вид

$$\dot{y} = p \operatorname{sgn} y_1 + q \operatorname{sgn} y_2 + Ry. \tag{1.2}$$

Правые части уравнений этой системы разрывны на гиперплоскостях $y_1 = 0$ и $y_2 = 0$.

Перейдём к изложению наиболее часто используемых определений решения системы дифференциальных уравнений с кусочно непрерывными правыми частями. В изложении этих определений мы будем следовать книге А. Ф. Филиппова [27]. Всюду в настоящей работе пространство $\mathbb{R}^n$ рассматривается со стандартной топологией. Обозначим через y точку пространства $\mathbb{R}^n$ с координатами $y_1, \ldots, y_n$.

Вектор-функция $f(y)$ называется *кусочно непрерывной* в конечной области $G \subseteq \mathbb{R}^n$, если область G состоит из конечного числа областей G_i ($i = 1, \ldots, l$), в каждой из которых функция f непрерывна вплоть до границы, и множества M меры нуль, состоящего из точек границ этих областей. Функция *непрерывна* в области *вплоть до границы*, если она непрерывна в этой области и, кроме того, при приближении к каждой точке границы стремится к конечному пределу, возможно, к разным пределам для разных граничных точек. Если область G бесконечна, то в определении кусочно непрерывной функции разрешается разбивать область G на бесконечное число областей G_i, однако каждая ограниченная часть области G должна пересекаться лишь с конечным их числом.

k-мерной *гиперповерхностью* в m-мерном пространстве будем называть такое множество S, что в окрестности каждой его точки a все координаты точек множества S являются непрерывными функциями каких-либо k из этих координат, изменяющихся в некоторой k-мерной области $G^k(a)$. Например, $y_i = \varphi_i(y_1, \ldots, y_k) \in C$, $i = k+1, \ldots, m$; $(y_1, \ldots, y_k) \in G^k(a)$. Если все φ_i принадлежат C^p, то есть имеют непрерывные производные до порядка p включительно, то гиперповерхность S принадлежит классу C^p. Гиперповерхности класса C^1 называются *гладкими*. Если все функции φ_i линейны, а область $G^k(a)$ есть k-мерное пространство, то гиперповерхность называется *гиперплоскостью*. Одномерная гиперповерхность есть линия.

Числа и точки пространства $\mathbb{R}^n$ везде далее будем обозначать малыми буквами (за исключением начала координат пространства $\mathbb{R}^n$ с координатами $y_1, \ldots, y_n$ или $x_1, \ldots, x_n$, которое будем обозначать большой буквой O), а множества и матрицы – большими.

Множество $A \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *выпуклым*, если для любых двух его точек a и b все точки отрезка, соединяющего a и b, принадлежат этому множеству, т.е. если для любых $a, b \in A$, $\alpha \in [0, 1]$ имеем: $\alpha a + (1 - \alpha)b \in A$.

Наиболее часто используемые определения решения системы дифференциальных уравнений с кусочно непрерывными правыми частями могут быть изложены следующим образом. Система дифференциальных уравнений в векторной записи $\dot{y} = f(y)$ с кусочно непрерывной вектор-функцией $f(y)$ заменяется дифференциальным включением вида $\dot{y} \in F(y)$.

Определение. *Решением* дифференциального включения $\dot{y} \in F(y)$ называется абсолютно непрерывная вектор-функция $y(t)$, определённая на интервале или отрезке I, для которой почти всюду на I $\dot{y}(t) \in F(y(t))$.

Рассмотрим систему в векторной записи

$$\dot{y} = f(y), \tag{1.3}$$

где вектор-функция $f(y)$ кусочно непрерывна в области $G \subseteq \mathbb{R}^n$; $y \in G$, $\dot{y} = dy/dt$; M – множество (меры нуль) точек разрыва функции f. Для каждой точки $y \in G$ указывается множество $F(y) \subseteq \mathbb{R}^n$. Если в точке y функция f непрерывна, то множество $F(y)$ состоит из одной точки, совпадающей со значением функции f в этой точке. Если y – точка разрыва функции f, то множество $F(y)$ задаётся тем или иным способом. *Решением* системы (1.3) называется решение дифференциального включения $\dot{y} \in F(y)$.

Определение 1.1 (простейшее выпуклое доопределение по Филиппову, см. [26]). Для каждой точки $y \in G$ пусть $F_1(y)$ – наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее все предельные значения вектор-функции $f(y^*)$, когда $y^* \notin M$, $y^* \to y$. *Решением* системы (1.3) называется решение включения $\dot{y} \in F_1(y)$.

В точках непрерывности функции f множество $F_1(y)$ состоит из одной точки $f(y)$ и решение удовлетворяет системе (1.3) в обычном смысле. Если точка $y \in M$ лежит на границах двух или нескольких областей $G_1, \ldots, G_k$, то множество $F_1(y)$ есть отрезок, выпуклый многоугольник или многогранник с вершинами $f_i(y)$, $i \leqslant k$, где $f_i(y) = \lim_{y^* \in G_i,\, y^* \to y} f(y^*)$. Все точки $f_i(y)$, $i = 1, \ldots, k$, содержатся в $F_1(y)$, но не обязательно, чтобы все они являлись вершинами.

Доопределение методом эквивалентного управления применяется к системам, имеющим в векторной записи вид

$$\dot{y} = f(y, u_1(y), \ldots, u_r(y)), \tag{1.4}$$

где $y \in \mathbb{R}^n$, вектор-функция $f(y, u_1, \ldots, u_r)$ непрерывна по совокупности аргументов, а скалярная функция $u_i(y)$ разрывна только на гладкой поверхности S_i ($\varphi_i(y) = 0$), $i = 1, \ldots, r$. Допускаются пересечения и даже совпадения этих поверхностей.

В точках, принадлежащих одной или одновременно нескольким поверхностям, например, поверхностям $S_1, \ldots, S_m$, $1 \leqslant m \leqslant r$, полагают (если решение не может мгновенно сойти с такой поверхности или с пересечения этих поверхностей)

$$\dot{y} = f(y, u_1^{eq}(y), \ldots, u_m^{eq}(y), u_{m+1}(y), \ldots, u_r(y)), \tag{1.5}$$

где *эквивалентные управления* $u_1^{eq}(y), \ldots, u_m^{eq}(y)$ определяются так, чтобы вектор f в (1.5) касался поверхностей $S_1, \ldots, S_m$ и чтобы значение $u_i^{eq}(y)$ содержалось в отрезке с концами $u_i^-(y)$, $u_i^+(y)$, где u_i^-, u_i^+ – предельные значения функции u_i с обеих сторон поверхности S_i, $i = 1, \ldots, m$. Таким образом, функции $u_i^{eq}(y)$, $i = 1, \ldots, m$, определяются из системы уравнений

$$\nabla\varphi_i(y) \cdot f(y, u_1^{eq}(y), \ldots, u_m^{eq}(y), u_{m+1}(y), \ldots, u_r(y)) = 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Здесь $\nabla\varphi_i(y) = (\partial\varphi_i(y)/\partial y_1, \ldots, \partial\varphi_i(y)/\partial y_n)$, $i = 1, \ldots, m$; $\cdot$ обозначает скалярное произведение векторов.

Определение 1.2 (доопределение методом эквивалентного управления, см. [24]). *Решением* системы (1.4) называется абсолютно непрерывная вектор-функция $y(t)$, определённая на интервале или отрезке I, которая вне поверхностей S_i удовлетворяет системе (1.4), а на этих поверхностях и их пересечениях – уравнениям вида (1.5) (при почти всех t).

Сведём систему (1.4), доопределённую указанным образом, к дифференциальному включению. Для каждой точки $y \in \mathbb{R}^n$ введём множества $U_i(y)$, $i = 1, \ldots, r$. Если функция u_i непрерывна в точке y, то $U_i(y)$ состоит из одной точки $u_i(y)$. Если функция u_i разрывна в точке y, то $U_i(y)$ – отрезок с концами $u_i^-(y)$ и $u_i^+(y)$. Пусть $F_2(y) = f(y, U_1(y), \ldots, U_r(y))$ – множество значений функции $f(y, u_1, \ldots, u_r)$, когда y постоянно, а $u_1, \ldots, u_r$ независимо друг от друга пробегают соответственно множества $U_1(y), \ldots, U_r(y)$. Тогда система (1.4), доопределённая методом эквивалентного управления, сводится к дифференциальному включению $\dot{y} \in F_2(y)$. Правая часть (1.5) есть вектор с концом в точке пересечения множества $F_2(y)$ с касательной к пересечению поверхностей $S_1, \ldots, S_m$.

Общее доопределение по Айзерману – Пятницкому, как и доопределение методом эквивалентного управления, применяется к системам вида (1.4), где $y \in \mathbb{R}^n$, вектор-функция $f(y, u_1, \ldots, u_r)$ непрерывна по совокупности аргументов, а скалярная функция $u_i(y)$ разрывна только на гладкой поверхности S_i ($\varphi_i(y) = 0$), $i = 1, \ldots, r$. Допускаются пересечения и даже совпадения этих поверхностей.

Определение 1.3 (общее доопределение по Айзерману – Пятницкому, см. [1])**.** Пусть $U_i(y)$, $i = 1, \ldots, r$, и $F_2(y)$ те же, что и в определении 1.2, а $F_3(y)$ – наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее множество $F_2(y)$. *Решением* системы (1.4) называется решение дифференциального включения $\dot{y} \in F_3(y)$.

Сравним определения 1.1, 1.2, 1.3. Систему (1.4) можно записать в виде (1.3) и применить к ней простейшее выпуклое доопределение по Филиппову (определение 1.1). Так как при этом $F_3(y) \supseteq F_1(y)$, $F_3(y) \supseteq F_2(y)$ (эти факты следуют из определений множеств $F_1(y)$, $F_2(y)$, $F_3(y)$ и непрерывности вектор-функции f по совокупности аргументов), то каждое решение в смысле простейшего выпуклого доопределения по Филиппову (определение 1.1) и каждое решение в смысле доопределения методом эквивалентного управления (определение 1.2) является также решением в смысле общего доопределения по Айзерману – Пятницкому (определение 1.3). Обратное, вообще говоря, неверно, как показывает следующий

Пример. Рассмотрим $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $r = 1$, $f(y, u) = y + (u, u^2, 0, 0, \ldots, 0)$, $u(y) = \left\{ \begin{smallmatrix} 2, & \text{если } y_1 > 0; \\ -1, & \text{если } y_1 < 0. \end{smallmatrix} \right.$ При $y_1 = 0$ $u^-(y) = -1$, $u^+(y) = 2$, $U(y) = [-1, 2]$, $F_1(y)$ – отрезок с концами $y + (-1, 1, 0, 0, \ldots, 0) = (-1, y_2 + 1, y_3, y_4, \ldots, y_n)$ и $y + (2, 4, 0, 0, \ldots, 0) = (2, y_2 + 4, y_3, y_4, \ldots, y_n)$,

$F_2(y) = f(y, [-1, 2]) = \{(u, y_2 + u^2, y_3, y_4, \ldots, y_n) : u \in [-1, 2]\}$ – дуга параболы с теми же концами, $F_3(y)$ – замкнутый сегмент между только что указанными дугой параболы и отрезком, являющимся её хордой.

Но если функция $f(y, u_1, \ldots, u_r)$ линейна по $u_1, \ldots, u_r$, то $F_2 = F_3$ и доопределение методом эквивалентного управления (определение 1.2) совпадает с общим доопределением (определение 1.3). Если, кроме того, все поверхности S_i различны и в точках их пересечения векторы нормалей линейно независимы, то $F_1 = F_2 = F_3$ и все три доопределения (простейшее выпуклое доопределение по Филиппову, доопределение методом эквивалентного управления, общее доопределение по Айзерману – Пятницкому) совпадают (см. [27, §4, с. 45]).

Изучим применимость определений 1.1–1.3 решения системы дифференциальных уравнений с кусочно непрерывными правыми частями к рассматриваемой нами системе (1.2). Правая часть $p \operatorname{sgn} y_1 + q \operatorname{sgn} y_2 + Ry$ системы (1.2) рассматриваемая как векторнозначная функция векторного аргумента $y \in \mathbb{R}^n$ кусочно непрерывна в $\mathbb{R}^n$. (Множество M её точек разрыва есть объединение гиперплоскостей $y_1 = 0$ и $y_2 = 0$.) Поэтому к системе (1.2) можно применить простейшее выпуклое доопределение по Филиппову (определение 1.1). В то же время, введя в рассмотрение вектор-функцию $f(y, u_1, u_2) := pu_1 + qu_2 + Ry$, где $y \in \mathbb{R}^n$, $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$, правую часть системы (1.2) можно записать в виде $f(y, u_1(y), u_2(y)) = pu_1(y) + qu_2(y) + Ry$, где $u_i(y) = \operatorname{sgn} y_i$, $i = 1, 2$. При этом вектор-функция $f(y, u_1, u_2)$ непрерывна по совокупности аргументов, скалярная функция $u_i(y)$ разрывна только на гиперплоскости $y_i = 0$, $i = 1, 2$. Значит, к системе (1.2) можно применить доопределение методом эквивалентного управления (определение 1.2) и общее доопределение по Айзерману – Пятницкому (определение 1.3).

При этом для системы (1.2) простейшее выпуклое доопределение по Филиппову, доопределение методом эквивалентного управления, общее доопределение по Айзерману – Пятницкому совпадают. (В самом деле, вектор-функция $f(y, u_1, u_2)$, стоящая в правой части системы (1.2), линейна по u_1, u_2, гиперплоскости $y_i = 0$ разрыва функций соответственно $u_i(y) = \operatorname{sgn} y_i$, $i = 1, 2$, различны, в точках их пересечения векторы нормалей $(1, 0, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, 0, 0, \ldots, 0)$ линейно независимы.)

В дальнейшем для доказательства того, что вектор-функция $y(t) \equiv 0$ является решением системы (1.2), мы применим простейшее выпуклое доопределение по Филиппову (см. следующее утверждение), а в остальных случаях ради удобства будем пользоваться доопределением методом эквивалентного управления.

Утверждение 1.1. *При любых векторах $p, q \in \mathbb{R}^n$ и любой $(n \times n)$-матрице R вектор-функция $y(t) \equiv 0$ является решением системы* (1.2).

Доказательство. Вектор-функция $g(y) := p \operatorname{sgn} y_1 + q \operatorname{sgn} y_2 + Ry$ кусочно непрерывна в $\mathbb{R}^n$, множество M её точек разрыва есть объединение гиперплоскостей $y_1 = 0$ и $y_2 = 0$. Воспользуемся простейшим выпуклым доопределением по Филиппову. Имеем: $\lim_{y\to 0, y_1>0, y_2>0} g(y) = p + q$, $\lim_{y\to 0, y_1<0, y_2>0} g(y) = -p + q$, $\lim_{y\to 0, y_1<0, y_2<0} g(y) = -p - q$, $\lim_{y\to 0, y_1>0, y_2<0} g(y) = p - q$. Согласно простейшему выпуклому доопределению по Филиппову $F_1(0)$ – наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее четыре только что указанных предельных значения функции $g(y)$. Так как $p + q, -p - q \in F_1(0)$, множество $F_1(0)$ выпукло, то $0 = 1/2(p + q) + 1/2(-p - q) \in F_1(0)$. Таким образом, вектор-функция $y(t) \equiv 0$ является решением дифференциального включения $\dot{y} \in F_1(y)$, а значит, согласно простейшему выпуклому доопределению по Филиппову и решением системы (1.2). $\square$

В дальнейшем мы будем использовать более удобный вид системы (1.1), к которому она сводится линейной заменой координат. Именно, если $\Delta := p_1 q_2 - p_2 q_1 \neq 0$, то, вычитая из всех уравнений системы (1.1), начиная с третьего, первые два с подходящими коэффициентами, её можно привести к виду

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 \operatorname{sgn} x_1 + b_1 \operatorname{sgn} x_2 + \sum\limits_{j=1}^{n} c_{1j} x_j, \\ \dot{x}_2 = a_2 \operatorname{sgn} x_1 + b_2 \operatorname{sgn} x_2 + \sum\limits_{j=1}^{n} c_{2j} x_j, \\ \dot{x}_i = \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij} x_j, \quad i = 3, \ldots, n \qquad \text{(если } n = 2\text{, то этих уравнений нет).} \end{cases} \tag{1.6}$$

При этом $x_k \equiv y_k$, $a_k = p_k$, $b_k = q_k$, $k = 1, 2$, $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1$. Релейную систему вида (1.6) мы будем называть *приведённой.* Если $n = 2$, то рассматриваемая система (1.1) изначально имеет вид (1.6), т.е. является приведённой.

Укажем некоторые симметрии, которые не меняют вид приведённой системы. Симметрия $(x_1, x_2, \widehat{x}) \mapsto (-x_1, -x_2, -\widehat{x})$, где $\widehat{x} := (x_3, \ldots, x_n)$ (при $n = 2$ здесь и далее $\widehat{x}$ исключается из рассуждений и формул), сохраняет матрицы $A := \left(\begin{smallmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{smallmatrix}\right)$ и $C := (c_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. При симметрии $(x_1, x_2, \widehat{x}) \mapsto (-x_1, x_2, \widehat{x})$ матрицы A и C преобразуются следующим образом:

$$A \mapsto \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ -a_2 & b_2 \end{pmatrix}, \qquad C \mapsto \begin{pmatrix} c_{11} & -c_{12} & -c_{13} & \dots & -c_{1n} \\ -c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ -c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Симметрия $(x_1, x_2, \widehat{x}) \mapsto (x_2, x_1, \widehat{x})$ меняет матрицы A и C так:

$$A \mapsto \begin{pmatrix} b_2 & a_2 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}, \qquad C \mapsto \begin{pmatrix} c_{22} & c_{21} & c_{23} & c_{24} & \dots & c_{2n} \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & c_{14} & \dots & c_{1n} \\ c_{32} & c_{31} & c_{33} & c_{34} & \dots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n2} & c_{n1} & c_{n3} & c_{n4} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Для множества $S \subseteq \mathbb{R}^n$ обозначим через $\operatorname{int} S$ его внутренность, через ∂S – его границу, а через $\overline{S}$ – его замыкание. Для $x := (x_1, \dots, x_n)$ введём обозначения:

$$C_k(x) := \sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_j, \qquad C_{k\widehat{l}}(x) := \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^{n} c_{kj} x_j, \qquad C_{k\widehat{l}\widehat{m}}(x) := \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l,m}}^{n} c_{kj} x_j,$$

$$D_l(x) := \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{lj} c_{jk} x_k, \qquad D_{l\widehat{m}}(x) := \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^{n} c_{lj} c_{jk} x_k, \qquad k, l, m = 1, \dots, n.$$

Глава 2

Доопределение приведённой системы на гиперплоскостях разрыва и на их пересечении

Перейдём к доопределению приведённой системы на гиперплоскостях $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ разрыва правых частей уравнений этой системы и на их пересечении. Нам потребуется следующее

Определение. В приведённой системе *всюду на множестве* $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ *существует движение*, если через каждую точку множества Y проходит решение приведённой системы, движущееся по этому множеству в течение некоторого промежутка времени.

В приведённой системе *нигде на множестве* $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ *не существует движения*, если не существует решения приведённой системы, которое в течение некоторого промежутка времени двигалось бы по множеству Z.

2.1 Существование движений на гиперплоскостях разрыва вне их пересечения

Следующие две леммы посвящены изучению наличия или отсутствия движений в приведённой системе в достаточно малых окрестностях начала координат на гиперплоскостях $x_1 = 0$ (лемма 2.1) и $x_2 = 0$ (лемма 2.2) разрыва правых частей уравнений приведённой системы вне пересечения этих гиперплоскостей.

Лемма 2.1. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Пусть* $n \geqslant 2$, $\Delta \neq 0$. *Определим множество* U.

а. Если $|b_1| < -a_1$, *то*

$$U := \bigl\{x_2 > 0,\ a_1 - b_1 < C_1(x) < -a_1 - b_1\bigr\} \cup \bigl\{x_2 < 0,\ a_1 + b_1 < C_1(x) < -a_1 + b_1\bigr\} \cup$$
$$\cup \bigl\{x_2 = 0,\ |C_1(x)| < \min\{-a_1 - b_1, -a_1 + b_1\}\bigr\}.$$

б. Если $a_1 + b_1 = 0$, $-a_1 + b_1 > 0$ *и выполнено хотя бы одно из условий:* $(c_{13}, \dots, c_{1n}) \neq \neq (0, \dots, 0)$ *(при* $n = 2$ *это условие исключается из формулировки и доказательства настоящей леммы) или* $c_{12} < 0$, *то*

$$U := \{x_2 > 0, 2a_1 < C_1(x) < 0\} \cup \{x_2 < 0, 0 < C_1(x) < -2a_1\}.$$

в. Если $a_1 + b_1 = 0$, $-a_1 + b_1 > 0$, $(c_{12}, \dots, c_{1n}) = (0, \dots, 0)$, $c_{11} \leqslant 0$, *то* $U := \mathbb{R}^n$.

Тогда в случае (а) U *является окрестностью начала координат. В случаях (а)–(в)* U *таково, что:* $\overline{U} \ni O$, $U \cap \{x_1 = 0, x_2 > 0\} \neq \varnothing$, $U \cap \{x_1 = 0, x_2 < 0\} \neq \varnothing$ *и в приведённой системе всюду на* $U_1 := U \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}$ *существует движение.*

2. *Пусть* $n \geqslant 2$, $\Delta \neq 0$. *Определим множество* V.

а. Если $|b_1| > -a_1$, *то*

$$V := \{x_2 > 0,\ C_1(x) > -a_1 - b_1\} \cup \{x_2 < 0,\ C_1(x) < a_1 + b_1\} \cup \{x_2 = 0,\ |C_1(x)| < a_1 + b_1\} \cup$$
$$\cup \{x_2 > 0,\ C_1(x) < a_1 - b_1\} \cup \{x_2 < 0,\ C_1(x) > -a_1 + b_1\} \cup \{x_2 = 0,\ |C_1(x)| < a_1 - b_1\}.$$

б. Если $a_1 + b_1 = 0$, $-a_1 + b_1 > 0$, $(c_{12}, \dots, c_{1n}) \neq (0, \dots, 0)$, *то*

$$V := \{x_2 > 0, C_1(x) > 0\} \cup \{x_2 < 0, C_1(x) < 0\} \cup$$
$$\cup \{x_2 > 0, C_1(x) < 2a_1\} \cup \{x_2 < 0, C_1(x) > -2a_1\}.$$

в. Если $a_1 + b_1 = 0$, $-a_1 + b_1 > 0$, $(c_{12}, \dots, c_{1n}) = (0, \dots, 0)$, $c_{11} > 0$, *то* $V := \mathbb{R}^n$.

Тогда в случае (а) V *является окрестностью начала координат. В случаях (а)–(в)* V *таково, что:* $V \cap \{x_1 = 0, x_2 > 0\} \neq \varnothing$, $V \cap \{x_1 = 0, x_2 < 0\} \neq \varnothing$ *и в приведённой системе нигде на* $V_1 := V \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}$ *не существует движения. В случае (б)* $\overline{V} \ni O$ *тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из условий:* $(c_{11}, c_{13}, c_{14}, \dots, c_{1n}) \neq (0, \dots, 0)$ *(при* $n = 2$ *это условие имеет вид* $c_{11} \neq 0$*) или* $c_{12} > 0$.

3. Пусть $n \geqslant 3$, $a_1 + b_1 = 0$, $(c_{13}, \dots, c_{1n}) \neq (0, \dots, 0)$. *Определим открытое множество* V.

а. Если $-a_1 + b_1 > 0$, $c_{12}(a_2 + b_2) < 0$, *то*

$$V := \left\{x_2 > 0, D_{1\hat{1}}(x) - c_{12}\frac{a_2}{a_1}C_{1\hat{1}}(x) < -c_{12}\frac{\Delta}{a_1}\right\} \cup \left\{x_2 < 0, D_{1\hat{1}}(x) - c_{12}\frac{a_2}{a_1}C_{1\hat{1}}(x) > c_{12}\frac{\Delta}{a_1}\right\} \cup$$
$$\cup \left\{x_2 = 0, |D_{1\hat{1}}(x) - c_{12}\frac{a_2}{a_1}C_{1\hat{1}}(x)| < -c_{12}\frac{\Delta}{a_1}\right\}.$$

б. Если $\Delta \neq 0$, $c_{12}(a_2+b_2) > 0$, то

$$V := \{x_2 > 0, D_1(x) > -c_{12}(a_2+b_2)\} \cup \{x_2 < 0, D_1(x) < c_{12}(a_2+b_2)\} \cup$$
$$\cup \{x_2 = 0, |D_1(x)| < c_{12}(a_2+b_2)\}.$$

Тогда V является окрестностью начала координат, $V \cap \{x_1 = 0, x_2 > 0, C_1(x) = 0\} \neq$ $\neq \varnothing$, $V \cap \{x_1 = 0, x_2 < 0, C_1(x) = 0\} \neq \varnothing$, и в приведённой системе нигде на $V_{10} := V \cap$ $\cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0, C_1(x) = 0\}$ не существует движения.

Замечание. Утверждения, сводящиеся к утверждениям 1б, 1в, 2б, 2в, 3а, 3б с помощью замен $(x_1, x_2, \widehat{x}) \mapsto (-x_1, x_2, \widehat{x})$, $(x_1, x_2, \widehat{x}) \mapsto (x_2, x_1, \widehat{x})$, $(x_1, x_2, \widehat{x}) \mapsto (x_2, -x_1, \widehat{x})$, не приводятся ради экономии места.

Замечание. Условие $\Delta \neq 0$ следует из условий утверждения 3а.

Доказательство (леммы 2.1). При $x_1 > 0$, $x_2 \neq 0$ имеем $\dot{x}_1 = a_1 + b_1 \operatorname{sgn} x_2 + C_1(x)$. При $x_1 < 0$, $x_2 \neq 0$ имеем $\dot{x}_1 = -a_1 + b_1 \operatorname{sgn} x_2 + C_1(x)$.

1а–б. Если существует открытое множество W такое, что $W_1 := W \cap \{x_1 = 0,\, x_2 \neq 0\} \neq \varnothing$, $\dot{x}_1 < 0$ на множестве $W_+ := W \cap \{x_1 > 0,\, x_2 \neq 0\}$, $\dot{x}_1 > 0$ на множестве $W_- := W \cap \{x_1 < 0, x_2 \neq 0\}$ (непустота последних двух пересечений следует из открытости W и того, что $W_1 \neq \varnothing$), то решение приведённой системы, находящееся в начальный момент на множестве W_1, не может мгновенно покинуть это множество. В самом деле, W открыто и функции $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ непрерывны. Поэтому рассматриваемое решение не может мгновенно покинуть множество W. Мгновенно выйти из W_1 в множество $W \cap \{x_2 = 0\}$ решение не может в силу непрерывности функции $x_2(t)$. Выйти из W_1 в множество $W \cap \{x_1 \neq 0,\, x_2 \neq 0\}$ решение не может, так как $\dot{x}_1 < 0$ на W_+ и $\dot{x}_1 > 0$ на W_-. Итак, решение приведённой системы, находящееся в начальный момент на множестве W_1, не может мгновенно выйти из этого множества, а следовательно, в течение некоторого промежутка времени движется по множеству W_1, и в приведённой системе всюду на этом множестве существует движение.

Перейдём к построению множества W с вышеуказанными свойствами в каждом из случаев (а)–(б) утверждения 1 настоящей леммы.

а. Так как $\max\{-f, -g\} = -\min\{f, g\}$ при $f, g \in \mathbb{R}$, то $U \supseteq \{|C_1(x)| < \min\{-a_1 - b_1, -a_1 + b_1\}\}$. Из условия $|b_1| < -a_1$ следует, что последний минимум положителен. Итак, у точек множества U с координатой $x_2 = 0$ существует окрестность, которая вложена в U. В силу того, что окрестность с таким свойством существует и у всех остальных точек множества U, получаем, что U открыто. Из неравенства $\min\{-a_1 - b_1, -a_1 + b_1\} > 0$ следует, что $O \in U$. Таким образом, U – окрестность начала координат. Отсюда следует, что $U_1 \neq \varnothing$. Из определения множества U следует, что оно удовлетворяет и двум оставшимся требованиям, предъявляемым к множеству W в начале данного доказательства. Итак, можно взять $W = U$, и в приведённой системе всюду на множестве $W_1 = U_1$ существует движение.

б. Из определения множества U и того, что $C_1(-x) = -C_1(x)$ при $x \in \mathbb{R}^n$, следует, что $(x \in U \cap \{x_1 = 0, x_2 > 0\}) \Leftrightarrow (-x \in U \cap \{x_1 = 0, x_2 < 0\})$. Отсюда получаем, что непустота множества $U \cap \{x_1 = 0, x_2 > 0\}$ эквивалентна непустоте множества $U \cap \{x_1 = 0, x_2 < 0\}$. Так как $U_1 = (U \cap \{x_1 = 0, x_2 > 0\}) \cup (U \cap \{x_1 = 0, x_2 < 0\})$, то

$$U \cap \{x_1 = 0, x_2 > 0\} \neq \varnothing \Leftrightarrow U \cap \{x_1 = 0, x_2 < 0\} \neq \varnothing \Leftrightarrow U_1 \neq \varnothing.$$

Из определения множества U вытекает, что

$$U \cap \{x_1 = 0, x_2 > 0\} = \{x_1 = 0, x_2 > 0, 2a_1 < C_{1\widehat{1}}(x) < 0\}.$$

Непустота последнего множества эквивалентна непустоте множества $\{x_2 > 0, 2a_1 < C_{1\widehat{1}}(x) < < 0\}$, которая (в силу того, что $a_1 < 0$) равносильна выполнению хотя бы одного из условий: $(c_{13}, \ldots, c_{1n}) \neq (0, \ldots, 0)$ или $c_{12} < 0$. Итак, непустота множества U_1 эквивалентна выполнению хотя бы одного из условий: $(c_{13}, \ldots, c_{1n}) \neq (0, \ldots, 0)$ или $c_{12} < 0$. Поэтому при условиях настоящего утверждения $U \cap \{x_1 = 0, x_2 > 0\} \neq \varnothing$, $U \cap \{x_1 = 0, x_2 < 0\} \neq \varnothing$, $U_1 \neq \varnothing$, $\overline{U} \ni O$. Так как $b_1 = -a_1 > 0$, то из определения множества U следует, что оно помимо требования $U_1 \neq \varnothing$ удовлетворяет и двум оставшимся требованиям, предъявляемым к множеству W в начале данного доказательства. Значит, можно взять $W = U$, и в приведённой системе всюду на множестве $W_1 = U_1$ существует движение.

в. При условиях настоящего утверждения на множестве $\{x_1 > 0, x_2 \neq 0\}$ имеем: $\dot{x}_1 = = a_1 - a_1 \operatorname{sgn} x_2 + c_{11}x_1 \leqslant 0$, а на множестве $\{x_1 < 0, x_2 \neq 0\}$ имеем: $\dot{x}_1 = -a_1 - a_1 \operatorname{sgn} x_2 + + c_{11}x_1 \geqslant 0$. Поэтому решение приведённой системы, находящееся в начальный момент на множестве $U_1 = \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}$, не может мгновенно покинуть это множество. В самом деле, мгновенно выйти из U_1 на гиперплоскость $x_2 = 0$ решение не может в силу непрерывности функции $x_2(t)$. Мгновенно выйти из U_1 во множество $\{x_1 \neq 0, x_2 \neq 0\}$ решение не может, так как $\dot{x}_1 \leqslant 0$ на $\{x_1 > 0, x_2 \neq 0\}$ и $\dot{x}_1 \geqslant 0$ на $\{x_1 < 0, x_2 \neq 0\}$. Итак, решение приведённой системы, находящееся в начальный момент на множестве U_1, не может мгновенно выйти из этого множества, а, следовательно, в течение некоторого промежутка времени движется по множеству U_1, и в приведённой системе всюду на этом множестве существует движение.

2. Пусть существует открытое множество W (обозначение никак не связано с обозначением из доказательства утверждения 1) такое, что

а) $W_1 := W \cap \{x_1 = 0,\, x_2 \neq 0\} \neq \varnothing$;

б) существуют такие открытые множества P, N, что $W_1 = P_1 \cup N_1$ (допускается, что одно из объединяемых множеств пусто), где $P_1 := P \cap \{x_1 = 0,\, x_2 \neq 0\}$, $N_1 := N \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}$, $\dot{x}_1 > 0$ на $W \cap P \cap \{x_1 > 0,\, x_2 \neq 0\}$, $\dot{x}_1 < 0$ на $W \cap N \cap \{x_1 < 0,\, x_2 \neq 0\}$.

Так как $W_1 = P_1 \cup N_1$, то из условия а) следует, что хотя бы одно из множеств P_1 или N_1 непусто. Пусть $P_1 \neq \varnothing$. Тогда $W_1 \cap P_1 = P_1 \neq \varnothing$. В силу открытости W и P отсюда следует, что $W \cap P \cap \{x_1 > 0,\, x_2 \neq 0\} \neq \varnothing$. Рассмотрим решение приведённой системы, находящееся в начальный момент t_0 на множестве $P_1 \subseteq W_1$. Так как $W \cap P$ открыто и функции $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ непрерывны, то рассматриваемое решение не может мгновенно покинуть множество $W \cap P$. Мгновенно выйти из $W_1 \cap P_1 = P_1$ в множество $W \cap P \cap \{x_2 = 0\}$ решение не может в силу непрерывности функции $x_2(t)$. Так как $W \cap P$ открыто и $\dot{x}_1 > 0$ на $\varnothing \neq W \cap P \cap \{x_1 > 0,\, x_2 \neq 0\}$, то рассматриваемое решение может или мгновенно покинуть множество $W_1 \cap P_1 = P_1$ (в этом случае оно должно обязательно сойти в множество $W \cap P \cap \{x_1 > 0,\, x_2 \neq 0\}$), или оставаться на нем. (В последнем случае момент $t > t_0$ схода решения с $W_1 \cap P_1$ определен неоднозначно.) Будем считать, что рассматриваемое решение мгновенно покидает множество $W_1 \cap P_1 = P_1$ (и, следовательно, мгновенно оказывается в множестве $W \cap P \cap \{x_1 > 0,\, x_2 \neq 0\}$). Таким образом, если $P_1 \neq \varnothing$, то в приведённой системе нигде на множестве P_1 не существует движения. Аналогично если $N_1 \neq \varnothing$, то в приведённой системе нигде на множестве N_1 не существует движения. Итак, в приведённой системе нигде на множестве $\varnothing \neq W_1 = P_1 \cup N_1$ не существует движения.

Перейдём к построению множества W со свойствами а)–б) в каждом из случаев утверждения 2 настоящей леммы.

а. Так как $V \supseteq \{|C_1(x)| < a_1 + b_1\} \cup \{|C_1(x)| < a_1 - b_1\}$, а при условии $|b_1| > -a_1$ имеем $a_1 + b_1 > 0$ или $a_1 - b_1 > 0$, то $O \in V$ и у точек множества V с координатой $x_2 = 0$ существует окрестность, которая вложена в V. В силу того, что окрестность с таким свойством существует и у всех остальных точек множества V, получаем, что V открыто. Таким образом, V – окрестность начала координат. Отсюда следует, что $V_1 := V \cap \{x_1 = 0,\, x_2 \neq 0\} \neq \varnothing$. Из определения множества V следует, что оно удовлетворяет и требованию б), предъявляемому к множеству W в начале данного пункта доказательства (можно взять

$$P = \{x_2 > 0,\, C_1(x) > -a_1 - b_1\} \cup \{x_2 < 0,\, C_1(x) > -a_1 + b_1\},$$

$$N = \{x_2 > 0,\, C_1(x) < a_1 - b_1\} \cup \{x_2 < 0,\, C_1(x) < a_1 + b_1\}).$$

Итак, можно взять $W = V$, и в приведённой системе нигде на множестве $W_1 = V_1$ не существует движения.

б. Рассуждая так же, как в начале доказательства утверждения 1б, заключаем, что

$$V \cap \{x_1 = 0, x_2 > 0\} \neq \varnothing \Leftrightarrow V \cap \{x_1 = 0, x_2 < 0\} \neq \varnothing \Leftrightarrow V_1 \neq \varnothing.$$

Из определения множества V следует, что

$$V \cap \{x_1 = 0, x_2 > 0\} = \{x_1 = 0, x_2 > 0, C_{1\widehat{1}}(x) > 0\} \cup \{x_1 = 0, x_2 > 0, C_{1\widehat{1}}(x) < 2a_1\}.$$

Непустота множества, стоящего в правой части последнего равенства, эквивалентна непустоте множества $\{x_2 > 0, C_{1\widehat{1}}(x) > 0\} \cup \{x_2 > 0, C_{1\widehat{1}}(x) < 2a_1\}$, которая (в силу того, что $a_1 < 0$) равносильна выполнению условия $(c_{12}, \ldots, c_{1n}) \neq (0, \ldots, 0)$. Итак, непустота множества V_1 эквивалентна выполнению условия $(c_{12}, \ldots, c_{1n}) \neq (0, \ldots, 0)$. Поэтому при условиях настоящего утверждения $V \cap \{x_1 = 0, x_2 > 0\} \neq \varnothing$, $V \cap \{x_1 = 0, x_2 < 0\} \neq \varnothing$, $V_1 \neq \varnothing$. Таким образом, множество V удовлетворяет требованию а), предъявляемому к множеству W в начале доказательства утверждения 2 настоящей леммы. Так как $b_1 = -a_1 > 0$, то из определения множества V вытекает, что оно удовлетворяет и требованию б), предъявляемому к множеству W в начале доказательства утверждения 2 настоящей леммы (можно взять

$$P = \{x_2 > 0, C_1(x) > 0\} \cup \{x_2 < 0, C_1(x) > -2a_1\},$$

$$N = \{x_2 > 0, C_1(x) < 2a_1\} \cup \{x_2 < 0, C_1(x) < 0\}).$$

Следовательно, можно взять $W = V$, и в приведённой системе нигде на множестве $W_1 = V_1$ не существует движения.

Так как $a_1 < 0$, то включение $\overline{V} \ni O$ равносильно непустоте объединения множеств $\{x_2 > 0, C_1(x) > 0\}$ и $\{x_2 < 0, C_1(x) < 0\}$. В силу того, что при $x \in \mathbb{R}^n$ $(x \in \{x_2 > 0, C_1(x) > 0\}) \Leftrightarrow (-x \in \{x_2 < 0, C_1(x) < 0\})$, непустота объединения двух только что указанных множеств эквивалентна непустоте любого из этих двух множеств. Тот факт, что множество $\{x_2 > 0, C_1(x) > 0\}$ непусто, равносилен выполнению хотя бы одного из условий: $(c_{11}, c_{13}, c_{14}, \ldots, c_{1n}) \neq (0, \ldots, 0)$ или $c_{12} > 0$. Итак, при условиях настоящего утверждения включение $\overline{V} \ni O$ равносильно выполнению хотя бы одного из условий: $(c_{11}, c_{13}, c_{14}, \ldots, c_{1n}) \neq$ $\neq (0, \ldots, 0)$ или $c_{12} > 0$.

в. При условиях настоящего утверждения на множестве $\{x_1 > 0, x_2 > 0\}$ имеем: $\dot{x}_1 = c_{11}x_1 > 0$, а на множестве $\{x_1 < 0, x_2 < 0\}$ имеем: $\dot{x}_1 = c_{11}x_1 < 0$. Поэтому множество $V := \mathbb{R}^n$ удовлетворяет требованиям, предъявляемым к множеству W в начале доказательства утверждения 2 настоящей леммы (можно взять $P = \{x_2 > 0\}$, $N = \{x_2 < 0\}$). Значит, можно взять $W = V$, и в приведённой системе нигде на множестве $W_1 = V_1$ не существует движения.

3. а. Так как $c_{12}\Delta/a_1 = c_{12}(a_2 + b_2) < 0$, то $O \in V$. В силу того, что $V \supseteq \{|D_{1\hat{1}}(x) - c_{12}(a_2/a_1)C_{1\hat{1}}(x)| < -c_{12}\Delta/a_1\}$, $c_{12}\Delta/a_1 < 0$, имеем, что у точек множества V с координатой $x_2 = 0$ существует окрестность, которая вложена в V. Так как линейная функция $D_{1\hat{1}}(x) - c_{12}(a_2/a_1)C_{1\hat{1}}(x)$ есть $o(1)$ при $x \to 0$, $c_{12}\Delta/a_1 < 0$, то неравенство, определяющее пересечение $V \cap \{x_2 > 0\}$, выполнено всюду в достаточно малой окрестности начала координат, и $V \cap$ $\cap \{x_2 > 0\} \neq \varnothing$. Аналогично, $V \cap \{x_2 < 0\} \neq \varnothing$. Поэтому окрестность, вложенная в V, существует и у точек множества V с координатой $x_2 \neq 0$. Отсюда получаем, что V открыто. Таким образом, V – окрестность начала координат. Так как $n \geqslant 3$, $\Delta = a_1(a_2 + b_2) \neq 0$, $a_1 + b_1 = 0$, $-a_1 + b_1 > 0$, $(c_{13}, \ldots, c_{1n}) \neq (0, \ldots, 0)$, то выполнены условия утверждения 1б настоящей леммы. Обозначим через U множество из формулировки этого утверждения. Согласно этому утверждению $U_{1+} := U \cap \{x_1 = 0, x_2 > 0\} \neq \varnothing$, $U_{1-} := U \cap \{x_1 = 0, x_2 <$ $< 0\} \neq \varnothing$ и в приведённой системе всюду на $U_1 := U \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\} = U_{1+} \cup U_{1-}$ существует движение. Следствие 2.1 устанавливает, что это движение описывается системой уравнений (2.1). Из того, что при $x \in U_{1+} \neq \varnothing$ имеем: $\{\gamma x : 0 < \gamma \leqslant 1\} \subseteq U_{1+}$ и того, что V – окрестность начала координат, вытекает, что $U_{1+} \cap V \neq \varnothing$. Аналогично, $U_{1-} \cap V \neq \varnothing$. Так как $n \geqslant 3$, $(c_{13}, \ldots, c_{1n}) \neq (0, \ldots, 0)$, то $\{x_1 = 0, x_2 > 0, C_1(x) = 0\} = \{x_1 = 0, x_2 > 0, C_{1\hat{1}}(x) = 0\} \neq$ $\neq \varnothing$. Отсюда, учитывая, что замыкание последнего множества содержит начало координат, V – окрестность начала координат, получаем, что $V_{10+} := V \cap \{x_1 = 0, x_2 > 0, C_1(x) = 0\} \neq \varnothing$. Аналогично, $V_{10-} := V \cap \{x_1 = 0, x_2 < 0, C_1(x) = 0\} \neq \varnothing$. В приведённой системе всюду на множестве $U_{1+} \cap V$ существует движение, в котором $x_1 = 0$, $\dot{x}_1 = 0$, $C_1(x) = C_{1\hat{1}}(x) < 0$,

$$\dot{C}_1(x) = \dot{C}_{1\hat{1}}(x) = c_{12}\frac{\Delta}{a_1}\operatorname{sgn} x_2 + D_{1\hat{1}}(x) - c_{12}\frac{a_2}{a_1}C_{1\hat{1}}(x) = c_{12}\frac{\Delta}{a_1} + D_{1\hat{1}}(x) - c_{12}\frac{a_2}{a_1}C_{1\hat{1}}(x) < 0.$$

Рассмотрим решение приведённой системы, находящееся в начальный момент t_0 на множестве V_{10+}. Так как $V \cap \{x_2 > 0\}$ открыто и функции $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ непрерывны, то рассматриваемое решение не может мгновенно покинуть множество $V \cap \{x_2 > 0\}$. Так как V открыто и $\dot{C}_1(x) < 0$ на $\varnothing \neq U_{1+} \cap V = \{x_1 = 0, x_2 > 0, 2a_1 < C_1(x) < 0\} \cap V$, то рассматриваемое решение может или мгновенно покинуть множество V_{10+} (например, сойдя во множество $U_{1+} \cap V$), или оставаться на нем. (В последнем случае момент $t > t_0$ схода решения с V_{10+} определен неоднозначно.) Будем считать, что рассматриваемое решение мгновенно покидает множество V_{10+}. Таким образом, в приведённой системе нигде на последнем множестве не существует движения. Аналогично, в приведённой системе нигде на множестве V_{10-} не существует движения. В итоге, в приведённой системе нигде на $V_{10} = V_{10+} \cup V_{10-}$ не существует движения.

б. Так как $c_{12}(a_2+b_2) > 0$, то $O \in V$. Поскольку $V \supseteq \{|D_1(x)| < c_{12}(a_2+b_2)\}$, $c_{12}(a_2+b_2) > > 0$, то у точек множества V с координатой $x_2 = 0$ существует окрестность, которая вложена в V. В силу того, что окрестность с таким свойством существует и у всех остальных точек множества V, получаем, что V открыто. Таким образом, V – окрестность начала координат. Так же, как в утверждении 3а, доказывается, что $V_{10+} := V \cap \{x_1 = 0, x_2 > 0, C_1(x) = 0\} \neq \varnothing$, $V_{10-} := V \cap \{x_1 = 0, x_2 < 0, C_1(x) = 0\} \neq \varnothing$. Так как $n \geqslant 3$, $(c_{13}, \ldots, c_{1n}) \neq (0, \ldots, 0)$, то $\{x_1 > 0, x_2 > 0, C_1(x) > 0\} \neq \varnothing$. Отсюда, учитывая, что замыкание последнего множества содержит начало координат, V – окрестность начала координат, получаем, что $V_{+++} := V \cap \cap \{x_1 > 0, x_2 > 0, C_1(x) > 0\} \neq \varnothing$. Аналогично, $V_{---} := V \cap \{x_1 < 0, x_2 < 0, C_1(x) < 0\} \neq \varnothing$. На множестве V_{+++} имеем: $x_1 > 0$, $\dot{x}_1 = C_1(x) > 0$, $C_1(x) > 0$, $\dot{C}_1(x) = c_{12}(a_2 + b_2) + + D_1(x) > 0$. Рассмотрим решение приведённой системы, находящееся в начальный момент t_0 на множестве V_{10+}. Так же, как в утверждении 3а, доказывается, что рассматриваемое решение не может мгновенно покинуть множество $V \cap \{x_2 > 0\}$. Так как V открыто и $x_1 > > 0$, $\dot{x}_1 > 0$, $C_1(x) > 0$, $\dot{C}_1(x) > 0$ на $V_{+++} \neq \varnothing$, то рассматриваемое решение может или мгновенно покинуть множество V_{10+} (например, сойдя во множество V_{+++}), или оставаться на нем. Далее доказательство завершается точно так же, как в утверждении 3а. $\square$

Лемма 2.2. *Пусть $n \geqslant 2$, $\Delta \neq 0$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если $|a_2| < -b_2$, то множество*

$$U := \big\{x_1 > 0,\ -a_2 + b_2 < C_2(x) < -a_2 - b_2\big\} \cup \big\{x_1 < 0,\ a_2 + b_2 < C_2(x) < a_2 - b_2\big\} \cup \\ \cup \big\{x_1 = 0,\ |C_2(x)| < \min\{-a_2 - b_2, a_2 - b_2\}\big\}$$

является окрестностью начала координат и в приведённой системе всюду на $U_2 := U \cap \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}$ существует движение.

2. *Если* $|a_2| > -b_2$, *то множество*

$$V := \{x_1 > 0,\, C_2(x) > -a_2 - b_2\} \cup \{x_1 < 0,\, C_2(x) < a_2 + b_2\} \cup \{x_1 = 0,\, |C_2(x)| < a_2 + b_2\} \cup \\ \cup \{x_1 > 0,\, C_2(x) < -a_2 + b_2\} \cup \{x_1 < 0,\, C_2(x) > a_2 - b_2\} \cup \{x_1 = 0,\, |C_2(x)| < -a_2 + b_2\}$$

является окрестностью начала координат и в приведённой системе нигде на $V_2 := V \cap \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}$ *не существует движения.*

Замечание. Утверждения, сводящиеся к утверждениям 1б, 1в, 2б, 2в, 3а, 3б леммы 2.1 с помощью замен $(x_1, x_2, \widehat{x}) \mapsto (-x_1, x_2, \widehat{x})$, $(x_1, x_2, \widehat{x}) \mapsto (x_2, x_1, \widehat{x})$, $(x_1, x_2, \widehat{x}) \mapsto (x_2, -x_1, \widehat{x})$, не приводятся ради экономии места.

Доказательство (леммы 2.2). Замена $(x_1, x_2, \widehat{x}) \mapsto (x_2, x_1, \widehat{x})$ сводит утверждения 1 и 2 настоящей леммы к утверждениям 1а и 2а леммы 2.1 соответственно. $\square$

2.2 Уравнения движений на гиперплоскостях разрыва вне их пересечения

В леммах 2.3 и 2.4 дан вывод уравнений движений в приведённой системе на множествах $\{x_1 = 0,\, x_2 \neq 0\}$ и $\{x_1 \neq 0,\, x_2 = 0\}$ соответственно, если такие движения существуют.

Лемма 2.3. *Если* $n \geqslant 2$, $\Delta \neq 0$, $a_1 \neq 0$ *и существует открытое множество* D *такое, что* $D_1 := D \cap \{x_1 = 0,\, x_2 \neq 0\} \neq \varnothing$, *в приведённой системе всюду на множестве* D_1 *существует движение,* $D_1 \cap \{-|a_1| - b_1 \operatorname{sgn} x_2 \leqslant C_{1\widehat{1}}(x) \leqslant |a_1| - b_1 \operatorname{sgn} x_2\} \neq \varnothing$, *то на последнем пересечении множеств это движение описывается системой уравнений*

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ \dot{x}_2 = \dfrac{\Delta}{a_1} \operatorname{sgn} x_2 + \displaystyle\sum_{j=2}^{n} \left(c_{2j} - \frac{a_2}{a_1} c_{1j} \right) x_j, \\ \dot{x}_i = \displaystyle\sum_{j=2}^{n} c_{ij} x_j, \quad i = 3, \ldots, n \qquad \textit{(при } n = 2 \textit{ этих уравнений нет).} \end{cases} \tag{2.1}$$

Доказательство. Так как в приведённой системе всюду на множестве D_1 существует движение, то при движении по этому множеству вектор скорости решения касается гиперплоскости $x_1 = 0$, т.е. $\dot{x}_1|_{D_1} = 0$ (где $\dot{x}_1|_{D_1}$ обозначает производную функции $x_1(t)$ по времени t при движении решения $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ приведённой системы по множеству D_1). Для получения уравнений движения воспользуемся методом эквивалентного управления. Сначала найдем эквивалентное управление $u_1^{\mathrm{eq}}(0, x_2, \ldots, x_n)$ (индекс 1 означает, что это эквивалентное управление относится к движению решения приведённой системы по множеству $\{x_1 = 0,\ x_2 \neq 0\}$) из уравнения $\dot{x}_1|_{D_1} = 0$, где $\dot{x}_1|_{D_1} = a_1 u_1^{\mathrm{eq}}(0, x_2, \ldots, x_n) + b_1 \operatorname{sgn} x_2 + C_{1\widehat{1}}(x)$. (В последнем равенстве учтено, что $x_1 = 0$ на D_1.) Получим $u_1^{\mathrm{eq}}(0, x_2, \ldots, x_n) = -(b_1 \operatorname{sgn} x_2 + C_{1\widehat{1}}(x))/a_1$. Затем подставим найденное эквивалентное управление $u_1^{\mathrm{eq}}(0, x_2, \ldots, x_n)$ во все уравнения приведённой системы, кроме первого, из которого оно и было найдено. Так как правые части третьего и последующих уравнений непрерывны на гиперплоскости $x_1 = 0$ (при $n = 2$ третьего и последующих уравнений нет), то надо подставить $u_1^{\mathrm{eq}}(0, x_2, \ldots, x_n)$ только в правую часть второго уравнения приведённой системы. Подстановка дает

$$\dot{x}_2|_{D_1} = a_2 u_1^{\mathrm{eq}}(0, x_2, \ldots, x_n) + b_2 \operatorname{sgn} x_2 + C_{2\widehat{1}}(x) = \frac{\Delta}{a_1} \operatorname{sgn} x_2 + C_{2\widehat{1}}(x) - \frac{a_2}{a_1} C_{1\widehat{1}}(x).$$

Здесь используется тот факт, что $x_1 = 0$ на множестве D_1. С учетом этого факта и непрерывности правых частей третьего и последующих уравнений приведённой системы на гиперплоскости $x_1 = 0$ уравнение для $\dot{x}_i$, $i = 3, \ldots, n$, при движении на множестве D_1 принимает вид $\dot{x}_i|_{D_1} = C_{i\widehat{1}}(x)$, $i = 3, \ldots, n$ (при $n = 2$ этих уравнений нет). Наконец, в методе эквивалентного управления требуется, чтобы $u_1^{\mathrm{eq}}(0, x_2, \ldots, x_n) \in [\lim_{x_1 \to 0-} \operatorname{sgn} x_1, \lim_{x_1 \to 0+} \operatorname{sgn} x_1] = [-1, 1]$, т.е. чтобы $|u_1^{\mathrm{eq}}(0, x_2, \ldots, x_n)| \leqslant 1$. Получим:

$$|b_1 \operatorname{sgn} x_2 + C_{1\widehat{1}}(x)| \leqslant |a_1|, \qquad -|a_1| - b_1 \operatorname{sgn} x_2 \leqslant C_{1\widehat{1}}(x) \leqslant |a_1| - b_1 \operatorname{sgn} x_2. \quad \square$$

Следствие 2.1 (из утверждений 1а–1в леммы 2.1 и леммы 2.3)**.** *Пусть $n \geqslant 2$, $\Delta \neq 0$ и выполнены условия одного из утверждений 1а–1в леммы 2.1, U – множество из формулировки этого утверждения. Тогда в приведённой системе всюду на $U_1 := U \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}$ существует движение, и оно описывается системой уравнений* (2.1).

Лемма 2.4. *Если $n \geqslant 2$, $\Delta \neq 0$, $b_2 \neq 0$ и существует открытое множество F такое, что $F_2 := F \cap \{x_1 \neq 0,\ x_2 = 0\} \neq \varnothing$, в приведённой системе всюду на множестве F_2 существует движение, $F_2 \cap \{-a_2 \operatorname{sgn} x_1 - |b_2| \leqslant C_{2\widehat{2}}(x) \leqslant -a_2 \operatorname{sgn} x_1 + |b_2|\} \neq \varnothing$, то на последнем пересечении множеств это движение описывается системой уравнений*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{\Delta}{b_2} \operatorname{sgn} x_1 + \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^{n} \left(c_{1j} - \frac{b_1}{b_2} c_{2j} \right) x_j, \\ x_2 = 0, \\ \dot{x}_i = \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^{n} c_{ij} x_j, \quad i = 3, \ldots, n \qquad (\textit{при } n = 2 \textit{ этих уравнений нет}). \end{cases} \tag{2.2}$$

Доказательство. Сводится к лемме 2.3 с помощью замены $(x_1, x_2, \widehat{x}) \mapsto (x_2, x_1, \widehat{x})$. $\square$

Следствие 2.2 (из утверждения 1 леммы 2.2 и леммы 2.4)**.** *Пусть* $n \geqslant 2$, $\Delta \neq 0$, $|a_2| < -b_2$, U *– окрестность начала координат из формулировки утверждения 1 леммы 2.2. Тогда в приведённой системе всюду на* $U_2 := U \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}$ *существует движение, и оно описывается системой уравнений* (2.2)*.*

2.3 Существование движения на пересечении гиперплоскостей разрыва

В нижеследующей лемме 2.5 изучаются некоторые случаи, в которых существует такая окрестность U начала координат, что всюду в этой окрестности на пересечении $\{x_1 = 0,\ x_2 = 0\}$ гиперплоскостей разрыва правых частей уравнений приведённой системы существует движение. В утверждениях 1, 4, 6, 7 при движении во множестве $U \cap \{x_1 x_2 > 0\}$ $|x_2|$ убывает. Окрестность U начала координат, указанная в утверждении 5, отличается тем, что в $U \cap \{x_1 x_2 > 0\}$ убывает хотя бы одна из величин $|x_1|$ или $|x_2|$. В утверждениях 2, 3 во множестве $U \cap \{x_1 x_2 > 0\}$ $|x_1|$ убывает. В условиях утверждений 5, 6 при движении во множестве $U \cap \{x_1 x_2 < 0\}$ убывает хотя бы одна из величин $|x_1|$ или $|x_2|$. Построенная в каждом из утверждений 2, 4 окрестность U начала координат такова, что в $U \cap \{x_1 x_2 < 0\}$ $|x_2|$ убывает. В утверждениях 1, 3, 7 во множестве $U \cap \{x_1 x_2 < 0\}$ $|x_1|$ убывает. Построенная в каждом из утверждений следующей леммы окрестность U начала координат такова, что существуют множества J, K, L, M со следующими свойствами:

1) $U_1 := U \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\} \subseteq J_1 \cup K_1$ (допускается, что одно из объединяемых множеств пусто), где $J_1 := J \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}$, $K_1 := K \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}$, при движении на множестве J_1 $|x_2|^{\cdot} < 0$, нигде на множестве K_1 не существует движения;

2) $U_2 := U \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\} \subseteq L_2 \cup M_2$ (допускается, что одно из объединяемых множеств пусто), где $L_2 := L \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}$, $M_2 := M \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}$, при движении на множестве L_2 $|x_1|^{\cdot} < 0$, нигде на множестве M_2 не существует движения.

Таким образом, в каждом из случаев, разобранных в следующей лемме, окрестность U начала координат такова, что решение приведённой системы с начальным значением на $U_{12} :=$ $:= U \cap \{x_1 = 0, x_2 = 0\}$ не может мгновенно покинуть это множество, а следовательно, в течение некоторого промежутка времени движется по нему, и в приведённой системе всюду на U_{12} существует движение.

Лемма 2.5. *Пусть $n \geqslant 3$. Определим множество U.*

1. *Если $|a_1| < b_1$, $|b_2| < -a_2$, то*

$$U := (\operatorname{int} \overline{A \cup B}) \cap V_{(1)} \cap V_{(2)}, \tag{2.3}$$

где

$$A := \{x_1 > 0,\, x_2 > 0,\, C_2(x) < -a_2 - b_2\} \cup \{x_1 < 0,\, x_2 < 0,\, C_2(x) > a_2 + b_2\},$$

$$B := \{x_1 < 0,\, x_2 > 0,\, C_1(x) > a_1 - b_1\} \cup \{x_1 > 0,\, x_2 < 0,\, C_1(x) < -a_1 + b_1\},$$

$V_{(1)}$, $V_{(2)}$ – окрестности начала координат из формулировок утверждения 2а леммы 2.1 и утверждения 2 леммы 2.2 соответственно.

2. *Если $|a_1| < -b_1$, $|b_2| < a_2$, то*

$$U := (\operatorname{int} \overline{A \cup B}) \cap V_{(1)} \cap V_{(2)},$$

где

$$A := \{x_1 > 0,\, x_2 > 0,\, C_1(x) < -a_1 - b_1\} \cup \{x_1 < 0,\, x_2 < 0,\, C_1(x) > a_1 + b_1\},$$

$$B := \{x_1 < 0,\, x_2 > 0,\, C_2(x) < a_2 - b_2\} \cup \{x_1 > 0,\, x_2 < 0,\, C_2(x) > -a_2 + b_2\},$$

$V_{(1)}$, $V_{(2)}$ – окрестности начала координат из формулировок утверждения 2а леммы 2.1 и утверждения 2 леммы 2.2 соответственно.

3. *Если $\Delta > 0$, $|b_1| < -a_1$, $|a_2| > -b_2$, то*

$$U := (\operatorname{int} \overline{A \cup B}) \cap U_{(1)} \cap C \cap V_{(2)}, \tag{2.4}$$

где множество A то же, что и в утверждении 2, B то же, что и в утверждении 1, $U_{(1)}$, $V_{(2)}$ – окрестности начала координат из формулировок утверждения 1а леммы 2.1 и утверждения 2 леммы 2.2 соответственно,

$$\begin{aligned} C :=& \left\{x_2 > 0,\ C_{2\hat{1}}(x) - \frac{a_2}{a_1} C_{1\hat{1}}(x) < -\frac{\Delta}{a_1}\right\} \cup \left\{x_2 < 0,\ C_{2\hat{1}}(x) - \frac{a_2}{a_1} C_{1\hat{1}}(x) > \frac{\Delta}{a_1}\right\} \cup \\ &\cup \left\{x_2 = 0,\ \left|C_{2\hat{1}}(x) - \frac{a_2}{a_1} C_{1\hat{1}}(x)\right| < -\frac{\Delta}{a_1}\right\}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

4. *Если $\Delta > 0$, $|b_1| > -a_1$, $|a_2| < -b_2$, то*

$$U := (\operatorname{int} \overline{A \cup B}) \cap V_{(1)} \cap U_{(2)} \cap D,$$

где множество A *то же, что и в утверждении* 1, B *то же, что и в утверждении* 2, $V_{(1)}$ *и* $U_{(2)}$ *– окрестности начала координат из формулировок утверждения* 2*а леммы 2.1 и утверждения* 1 *леммы 2.2 соответственно,*

$$\begin{aligned} D :=&\left\{x_1 > 0,\ C_{1\widehat{2}}(x) - \frac{b_1}{b_2}C_{2\widehat{2}}(x) < -\frac{\Delta}{b_2}\right\} \cup \left\{x_1 < 0,\ C_{1\widehat{2}}(x) - \frac{b_1}{b_2}C_{2\widehat{2}}(x) > \frac{\Delta}{b_2}\right\}\cup \\ &\cup \left\{x_1 = 0,\ \left|C_{1\widehat{2}}(x) - \frac{b_1}{b_2}C_{2\widehat{2}}(x)\right| < -\frac{\Delta}{b_2}\right\}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

5. *Если* $|b_1| < -a_1$, $|a_2| < -b_2$, *то*

$$U := (\operatorname{int}\overline{A \cup B}) \cap U_{(1)} \cap C \cap U_{(2)} \cap D, \tag{2.7}$$

где множество A *есть объединение множеств* A *из утверждений* 1 *и* 2, *множество* B *есть объединение множеств* B *из утверждений* 1 *и* 2, $U_{(1)}$, $U_{(2)}$ *– окрестности начала координат из формулировок утверждения* 1*а леммы 2.1 и утверждения* 1 *леммы 2.2 соответственно, множество* C *то же, что и в утверждении* 3, D *то же, что и в утверждении* 4.

6. Рассмотрим $a_1 + b_1 = 0$, $-a_1 + b_1 > 0$, $|a_2| < -b_2$.

а. Если $(c_{13}, \dots, c_{1n}) \neq (0, \dots, 0)$, $c_{12} \neq 0$, *то*

$$U := (\operatorname{int}\overline{A \cup B}) \cap T_{(1)} \cap U_{(2)} \cap D,$$

где множество A *то же, что и в утверждении 1, множество* B *есть объединение множеств* B *из утверждений 1 и 2,* $T_{(1)} := \operatorname{int}((U_{(1)} \cap C) \cup V_{(1)} \cup V_{(10)0} \cup \{x_2 = 0\})$, $U_{(1)}$, $V_{(1)}$ *– множества из формулировок утверждений 1б и 2б леммы 2.1 соответственно,* C *– множество из формулировки утверждения 3,* $V_{(10)}$ *– окрестность начала координат из формулировки утверждения 3а (при* $c_{12} > 0$*) и утверждения 3б (при* $c_{12} < 0$*) леммы 2.1,* $V_{(10)0} := V_{(10)} \cap \{C_1(x) = 0\}$, $U_{(2)}$ *– окрестность начала координат из формулировки утверждения 1 леммы 2.2,* D *– множество из формулировки утверждения 4.*

б. Если $(c_{13}, \dots, c_{1n}) = (0, \dots, 0)$, $c_{12} < 0$, *то*

$$U := (\operatorname{int}\overline{A \cup B}) \cap T_{(1)} \cap U_{(2)} \cap D,$$

где множество A *то же, что и в утверждении 1, множество* B *есть объединение множеств* B *из утверждений 1 и 2,* $U_{(2)}$ *– окрестность начала координат из формулировки утверждения 1 леммы 2.2,* C, D *– множества из формулировок утверждений 3, 4 соответственно,* $T_{(1)} := \operatorname{int}((U_{(1)} \cap C) \cup V_{(1)} \cup \{C_1(x) = 0\} \cup \{x_2 = 0\})$, $U_{(1)}$, $V_{(1)}$ *– множества из формулировок утверждений 1б и 2б леммы 2.1 соответственно.*

в. Если $(c_{13}, \ldots, c_{1n}) = (0, \ldots, 0)$, $c_{12} > 0$ *или* $(c_{12}, \ldots, c_{1n}) = (0, \ldots, 0)$, $c_{11} > 0$, *то*

$$U := (\operatorname{int} \overline{A \cup B}) \cap U_{(2)} \cap D,$$

где множество A *то же, что и в утверждении 1, множество* B *есть объединение множеств* B *из утверждений 1 и 2,* $U_{(2)}$ *– окрестность начала координат из формулировки утверждения 1 леммы 2.2,* D *– множество из формулировки утверждения 4.*

г. Если $(c_{12}, \ldots, c_{1n}) = (0, \ldots, 0)$, $c_{11} \leqslant 0$, *то*

$$U := (\operatorname{int} \overline{A \cup B}) \cap C \cap U_{(2)} \cap D,$$

где множество A *то же, что и в утверждении 1, множество* B *есть объединение множеств* B *из утверждений 1 и 2,* $U_{(2)}$ *– окрестность начала координат из формулировки утверждения 1 леммы 2.2,* C, D *– множества из формулировок утверждений 3, 4 соответственно.*

7. Рассмотрим $a_1 + b_1 = 0$, $-a_1 + b_1 > 0$, $|b_2| < -a_2$.

а. Если $(c_{13}, \ldots, c_{1n}) \neq (0, \ldots, 0)$, $c_{12} \neq 0$, *то*

$$U := (\operatorname{int} \overline{A \cup B}) \cap T_{(1)} \cap V_{(2)},$$

где множества A *и* B *те же, что и в утверждении 1, множество* $T_{(1)}$ *то же, что и в утверждении 6а,* $V_{(2)}$ *– окрестность начала координат из формулировки утверждения 2 леммы 2.2.*

б. Если $(c_{13}, \ldots, c_{1n}) = (0, \ldots, 0)$, $c_{12} < 0$, *то*

$$U := (\operatorname{int} \overline{A \cup B}) \cap T_{(1)} \cap V_{(2)},$$

где множества A *и* B *те же, что и в утверждении 1, множество* $T_{(1)}$ *то же, что и в утверждении 6б,* $V_{(2)}$ *– окрестность начала координат из формулировки утверждения 2 леммы 2.2.*

в. Если $(c_{13}, \ldots, c_{1n}) = (0, \ldots, 0)$, $c_{12} > 0$ *или* $(c_{12}, \ldots, c_{1n}) = (0, \ldots, 0)$, $c_{11} > 0$, *то*

$$U := (\operatorname{int} \overline{A \cup B}) \cap V_{(2)},$$

где множества A *и* B *те же, что и в утверждении 1,* $V_{(2)}$ *– окрестность начала координат из формулировки утверждения 2 леммы 2.2.*

г. Если $(c_{12}, \ldots, c_{1n}) = (0, \ldots, 0)$, $c_{11} \leqslant 0$, *то*

$$U := (\operatorname{int} \overline{A \cup B}) \cap C \cap V_{(2)},$$

где множества A и B те же, что и в утверждении 1, C – множество из формулировки утверждения 3, $V_{(2)}$ – окрестность начала координат из формулировки утверждения 2 леммы 2.2.

Тогда U является окрестностью начала координат и в приведённой системе всюду на $U_{12} := U \cap \{x_1 = 0,\, x_2 = 0\}$ существует движение.

Замечание 2.1. *Утверждения, сводящиеся к утверждениям 6а–6г, 7а–7г с помощью замен $(x_1, x_2, \widehat{x}) \mapsto (-x_1, x_2, \widehat{x})$, $(x_1, x_2, \widehat{x}) \mapsto (x_2, x_1, \widehat{x})$, $(x_1, x_2, \widehat{x}) \mapsto (x_2, -x_1, \widehat{x})$, не приводятся ради экономии места.*

Замечание. Условие $\Delta \neq 0$ следует из условий каждого из утверждений 1–7.

Доказательство (**леммы 2.5**). Пусть существует открытое множество W такое, что

а) $W_{12} := W \cap \{x_1 = 0,\, x_2 = 0\} \neq \varnothing$;

б) $|x_1|^\cdot < 0$ или $|x_2|^\cdot < 0$ на каждом из множеств $W \cap \{x_1 > 0,\, x_2 > 0\}$, $W \cap \{x_1 < 0,\, x_2 > 0\}$, $W \cap \{x_1 < 0,\, x_2 < 0\}$, $W \cap \{x_1 > 0,\, x_2 < 0\}$;

в) существуют такие множества J, K, что $W_1 := W \cap \{x_1 = 0,\, x_2 \neq 0\} \subseteq J_1 \cup K_1$ (допускается, что одно из объединяемых множеств пусто), где $J_1 := J \cap \{x_1 = 0,\, x_2 \neq 0\}$, $K_1 := K \cap \{x_1 = 0,\, x_2 \neq 0\}$, $|x_2|^\cdot < 0$ при движении на множестве J_1 и нигде на множестве K_1 не существует движения;

г) существуют такие множества L, M, что $W_2 := W \cap \{x_1 \neq 0,\, x_2 = 0\} \subseteq L_2 \cup M_2$ (допускается, что одно из объединяемых множеств пусто), где $L_2 := L \cap \{x_1 \neq 0,\, x_2 = 0\}$, $M_2 := M \cap \{x_1 \neq 0,\, x_2 = 0\}$, $|x_1|^\cdot < 0$ при движении на множестве L_2 и нигде на множестве M_2 не существует движения.

(Непустота $W \cap \{x_1 > 0,\, x_2 > 0\}$, $W \cap \{x_1 < 0,\, x_2 > 0\}$, $W \cap \{x_1 < 0,\, x_2 < 0\}$, $W \cap \{x_1 > 0,\, x_2 < 0\}$, W_1, W_2 следует из открытости W и условия а).)

Тогда решение приведённой системы с начальным значением на множестве W_{12} не может мгновенно покинуть это множество. В самом деле, W открыто и функции $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ непрерывны. Поэтому рассматриваемое решение не может мгновенно покинуть множество W. Выйти из W_{12} в множество $W \cap \{x_1 \neq 0,\, x_2 \neq 0\}$ решение не может в силу условия б). Условия в), г) не позволяют решению выйти из W_{12} в множества W_1 и W_2 соответственно. Итак, решение приведённой системы с начальным значением на множестве W_{12} в течение некоторого промежутка времени двигается по этому множеству и в приведённой системе всюду на множестве W_{12} существует движение.

Перейдём к построению множества W со свойствами а)–г) в каждом из случаев, указанных в настоящей лемме.

При $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ имеем: $\dot{x}_i = a_i \operatorname{sgn} x_1 + b_i \operatorname{sgn} x_2 + C_i(x)$, $|x_i|^{\cdot} = \dot{x}_i \operatorname{sgn} x_i$, $i = 1, 2$, и $|x_1|^{\cdot} = a_1 + b_1 \operatorname{sgn}(x_1 x_2) + (\operatorname{sgn} x_1) C_1(x)$, $|x_2|^{\cdot} = a_2 \operatorname{sgn}(x_1 x_2) + b_2 + (\operatorname{sgn} x_2) C_2(x)$.

1. На множестве A из формулировки утверждения 1 имеем $|x_2|^{\cdot} < 0$, на множестве B имеем $|x_1|^{\cdot} < 0$. Так как $A \cup B \supseteq \{x_1 \neq 0,\, x_2 \neq 0,\, |C_2(x)| < -a_2 - b_2,\, |C_1(x)| < -a_1 + b_1\}$, то $\operatorname{int} \overline{A \cup B} \supseteq \{|C_2(x)| < -a_2 - b_2,\, |C_1(x)| < -a_1 + b_1\}$. Учитывая, что $a_2 + b_2 < 0$, $a_1 - b_1 < 0$, заключаем отсюда, что $O \in \operatorname{int} \overline{A \cup B}$. Значит, $\operatorname{int} \overline{A \cup B}$ – окрестность начала координат. При этом

$$(\operatorname{int} \overline{A \cup B}) \cap \{x_1 > 0,\, x_2 > 0\} = (A \cup B) \cap \{x_1 > 0,\, x_2 > 0\} = A \cap \{x_1 > 0,\, x_2 > 0\},$$

$$(\operatorname{int} \overline{A \cup B}) \cap \{x_1 < 0,\, x_2 < 0\} = A \cap \{x_1 < 0,\, x_2 < 0\},$$

$$(\operatorname{int} \overline{A \cup B}) \cap \{x_1 < 0,\, x_2 > 0\} = B \cap \{x_1 < 0,\, x_2 > 0\},$$

$$(\operatorname{int} \overline{A \cup B}) \cap \{x_1 > 0,\, x_2 < 0\} = B \cap \{x_1 > 0,\, x_2 < 0\}.$$

Отсюда следует, что пересечения множеств, стоящие в правых частях этих четырех равенств, непусты и $(\operatorname{int} \overline{A \cup B}) \cap \{x_1 \neq 0,\, x_2 \neq 0\} = A \cup B$. Итак, на пересечении окрестности $\operatorname{int} \overline{A \cup B}$ начала координат с каждой из координатных четвертей $\{x_1 > 0,\, x_2 > 0\}$, $\{x_1 < 0,\, x_2 > 0\}$, $\{x_1 < 0,\, x_2 < 0\}$, $\{x_1 > 0,\, x_2 < 0\}$ имеем $|x_1|^{\cdot} < 0$ или $|x_2|^{\cdot} < 0$. Так как $\Delta \neq 0$, $|b_1| > |a_1| \geqslant -a_1$ и $|a_2| > |b_2| \geqslant -b_2$, то выполнены условия утверждения 2а леммы 2.1 и условия утверждения 2 леммы 2.2. Пусть $V_{(1)}$, $V_{(2)}$ – окрестности начала координат из формулировок этих утверждений соответственно, U – множество (2.3). Поскольку $\operatorname{int} \overline{A \cup B}$, $V_{(1)}$, $V_{(2)}$ – окрестности начала координат, U – тоже окрестность начала координат, а значит, $U \cap \{x_1 \neq 0,\, x_2 \neq 0\} \neq \varnothing$, $U \cap \{x_1 = 0,\, x_2 \neq 0\} \neq \varnothing$, $U \cap \{x_1 \neq 0,\, x_2 = 0\} \neq \varnothing$, $U \cap \{x_1 = 0,\, x_2 = 0\} \neq \varnothing$. Так как

$$U \cap \{x_1 \neq 0,\, x_2 \neq 0\} \subseteq (\operatorname{int} \overline{A \cup B}) \cap \{x_1 \neq 0,\, x_2 \neq 0\} = A \cup B,$$

то на пересечении множества U с каждой из координатных четвертей имеем $|x_1|^{\cdot} < 0$ или $|x_2|^{\cdot} < 0$. В силу того, что $U \cap \{x_1 = 0,\, x_2 \neq 0\} \subseteq V_{(1)} \cap \{x_1 = 0,\, x_2 \neq 0\}$, из случая (а) утверждения 2 леммы 2.1 получаем, что в приведённой системе нигде на множестве $U \cap \{x_1 = 0,\, x_2 \neq 0\}$ не существует движения. Поскольку $U \cap \{x_1 \neq 0,\, x_2 = 0\} \subseteq V_{(2)} \cap \{x_1 \neq 0,\, x_2 = 0\}$, из утверждения 2 леммы 2.2 следует, что в приведённой системе нигде на множестве $U \cap \{x_1 \neq 0,\ x_2 = 0\}$ не существует движения. Итак, окрестность U начала координат удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к множеству W в начале доказательства настоящей леммы (можно взять $J = \varnothing$, $K = V_{(1)}$, $L = \varnothing$, $M = V_{(2)}$), и можно положить $W = U$. Рассуждение в начале доказательства настоящей леммы показывает, что окрестность U начала координат такова, что в приведённой системе всюду на множестве $U_{12} := U \cap \{x_1 = 0,\ x_2 = 0\}$ существует движение.

2. Утверждение 2 сводится к утверждению 1 преобразованием $(x_1, x_2, \widehat{x}) \mapsto (-x_1, x_2, \widehat{x})$. Можно взять те же множества J, K, L, M, что и в утверждении 1.

3. Пусть множество A то же, что в утверждении 2, а множество B то же, что в утверждении 1. Тогда на каждом из множеств A и B имеем $|x_1|^{\cdot} < 0$. Так как $A \cup B \supseteq \{x_1 \neq 0,\ x_2 \neq 0, |C_1(x)| < -a_1 - |b_1|\}$, то $\operatorname{int} \overline{A \cup B} \supseteq \{|C_1(x)| < -a_1 - |b_1|\}$. Учитывая, что $|b_1| < -a_1$, заключаем отсюда, что $O \in \operatorname{int} \overline{A \cup B}$. Значит, $\operatorname{int} \overline{A \cup B}$ – окрестность начала координат. Отсюда так же, как в утверждении 1, получаем, что $A \cap \{x_1 > 0,\ x_2 > 0\} \neq \varnothing$, $A \cap \{x_1 < 0,\ x_2 < 0\} \neq \varnothing$, $B \cap \{x_1 < 0,\ x_2 > 0\} \neq \varnothing$, $B \cap \{x_1 > 0,\ x_2 < 0\} \neq \varnothing$. Итак, на $(\operatorname{int} \overline{A \cup B}) \cap \{x_1 \neq 0,\ x_2 \neq 0\} = A \cup B$ имеем $|x_1|^{\cdot} < 0$. Так как $\Delta \neq 0$ и $|b_1| < -a_1$, то выполнены условия утверждения 1а леммы 2.1. Поскольку $\Delta \neq 0$ и $|a_2| > -b_2$, то выполнены условия утверждения 2 леммы 2.2. Пусть $U_{(1)}$, $V_{(2)}$ – окрестности начала координат из формулировок этих утверждений соответственно. Рассмотрим множество C, определенное в (2.5). Так как $\Delta / a_1 < 0$, то $O \in C$. Поскольку $C \supseteq \{|C_{2\widehat{1}}(x) - (a_2/a_1) C_{1\widehat{1}}(x)| < -\Delta/a_1\}$ и $\Delta/a_1 < 0$, у точек множества C с координатой $x_2 = 0$ существует окрестность, которая вложена в C. Так как $\Delta/a_1 < 0$, то неравенство, определяющее пересечение $C \cap \{x_2 > 0\}$, выполнено всюду в достаточно малой окрестности начала координат и $C \cap \{x_2 > 0\} \neq \varnothing$. Аналогично $C \cap \{x_2 < 0\} \neq \varnothing$. Поэтому окрестность, вложенная в C, существует и у точек множества C с координатой $x_2 \neq 0$. Отсюда получаем, что C открыто. Таким образом, C – окрестность начала координат. Рассмотрим множество U, определенное в (2.4). Так как $\operatorname{int} \overline{A \cup B}$, $U_{(1)}$, C, $V_{(2)}$ – окрестности начала координат, то U также является окрестностью начала координат. Отсюда $U \cap \{x_1 = 0,\ x_2 = 0\} \neq \varnothing$, $U \cap \{x_1 = 0,\ x_2 \neq 0\} \neq \varnothing$, $U \cap \{x_1 \neq 0,\ x_2 = 0\} \neq \varnothing$, $U \cap \{x_1 \neq 0,\ x_2 \neq 0\} \neq \varnothing$. Так как

$$U \cap \{x_1 \neq 0,\ x_2 \neq 0\} \subseteq (\operatorname{int} \overline{A \cup B}) \cap \{x_1 \neq 0,\ x_2 \neq 0\} = A \cup B,$$

то на множестве $U \cap \{x_1 \neq 0,\ x_2 \neq 0\}$ имеем $|x_1|^{\cdot} < 0$. Поскольку $U \cap \{x_1 = 0,\ x_2 \neq 0\} \subseteq U_{(1)} \cap$

$\{x_1 = 0,\, x_2 \neq 0\}$, пользуясь утверждением 1 леммы 2.1 и следствием 2.1, получаем, что в приведённой системе всюду на $U \cap \{x_1 = 0,\, x_2 \neq 0\}$ существует движение и оно описывается системой уравнений (2.1). Поэтому в рассматриваемом движении

$$|x_2|^{\cdot} = \dot{x}_2 \operatorname{sgn} x_2 = \frac{\Delta}{a_1} + (\operatorname{sgn} x_2)\left(C_{2\widehat{1}}(x) - \frac{a_2}{a_1} C_{1\widehat{1}}(x)\right).$$

В силу того, что $U \cap \{x_1 = 0,\, x_2 \neq 0\} \subseteq U_{(1)} \cap C \cap \{x_1 = 0,\, x_2 \neq 0\}$, при движении на $U \cap \{x_1 = 0,\, x_2 \neq 0\}$ имеем $|x_2|^{\cdot} < 0$. Так как $U \cap \{x_1 \neq 0,\, x_2 = 0\} \subseteq V_{(2)} \cap \{x_1 \neq 0,\, x_2 = 0\}$, то из утверждения 2 леммы 2.2 следует, что в приведённой системе нигде на множестве $U \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}$ не существует движения. Итак, окрестность U начала координат удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к множеству W в начале доказательства настоящей леммы (можно взять $J = U_{(1)} \cap C$, $K = \varnothing$, $L = \varnothing$, $M = V_{(2)}$), и можно положить $W = U$. Далее доказательство завершается точно так же, как для утверждения 1.

4. Утверждение 4 сводится к утверждению 3 при помощи замены $(x_1, x_2, \widehat{x}) \mapsto (x_2, x_1, \widehat{x})$. Можно взять $J = \varnothing$, $K = V_{(1)}$, $L = U_{(2)} \cap D$, $M = \varnothing$.

5. Возьмем множество A равным объединению множеств A из утверждений 1 и 2. Тогда на так определенном множестве A имеем $|x_1|^{\cdot} < 0$ или $|x_2|^{\cdot} < 0$. Возьмём множество B равным объединению множеств B из утверждений 1 и 2. Тогда на так определённом множестве B имеем $|x_1|^{\cdot} < 0$ или $|x_2|^{\cdot} < 0$. Так как

$$A \cup B \supseteq \bigl\{x_1 \neq 0,\, x_2 \neq 0,\, |C_1(x)| < -a_1 - |b_1|\bigr\} \cup \bigl\{x_1 \neq 0,\, x_2 \neq 0,\, |C_2(x)| < -|a_2| - b_2\bigr\},$$

то $\operatorname{int} \overline{A \cup B} \supseteq \{|C_1(x)| < -a_1 - |b_1|\} \cup \{|C_2(x)| < -|a_2| - b_2\}$. Учитывая, что даже оба числа $-a_1 - |b_1|$ и $-|a_2| - b_2$ положительны, заключаем отсюда, что $O \in \operatorname{int} \overline{A \cup B}$. Значит, $\operatorname{int} \overline{A \cup B}$ – окрестность начала координат. Отсюда так же, как в доказательстве утверждения 1, получаем, что $A \cap \{x_1 > 0,\, x_2 > 0\} \neq \varnothing$, $A \cap \{x_1 < 0,\, x_2 < 0\} \neq \varnothing$, $B \cap \{x_1 < 0,\, x_2 > 0\} \neq \varnothing$, $B \cap \{x_1 > 0,\, x_2 < 0\} \neq \varnothing$, $(\operatorname{int} \overline{A \cup B}) \cap \{x_1 \neq 0,\, x_2 \neq 0\} = A \cup B$. Итак, на пересечении окрестности $\operatorname{int} \overline{A \cup B}$ начала координат с каждой из координатных четвертей имеем $|x_1|^{\cdot} < 0$ или $|x_2|^{\cdot} < 0$. Так как $\Delta \neq 0$ и $|b_1| < -a_1$, то выполнены условия утверждения 1a леммы 2.1. Поскольку $\Delta \neq 0$ и $|a_2| < -b_2$, то выполнены условия утверждения 1 леммы 2.2. Пусть $U_{(1)}$, $U_{(2)}$ – окрестности начала координат из формулировок этих утверждений соответственно. Рассмотрим окрестности C, D начала координат, определенные в (2.5), (2.6) соответственно, и окрестность U начала координат, определенную в (2.7). Так же, как в утверждении 3, доказывается, что в приведённой системе всюду на $U \cap \{x_1 = 0,\, x_2 \neq 0\}$ существует движение, причём в этом движении $|x_2|^{\cdot} < 0$. Рассуждая так же, как в доказательстве утверждения 4, получаем, что в приведённой системе всюду на $U \cap \{x_1 \neq 0,\ x_2 = 0\}$ существует движение, причём в этом движении $|x_1|^{\cdot} < 0$. Итак, окрестность U начала координат удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к множеству W в начале доказательства настоящей леммы (можно взять $J = U_{(1)} \cap C$, $K = \varnothing$, $L = U_{(2)} \cap D$, $M = \varnothing$), и можно положить $W = U$. Далее доказательство завершается точно так же, как для утверждения 1.

6. На множестве A имеем: $|x_2|^{\cdot} < 0$, на множестве B имеем: $|x_1|^{\cdot} < 0$ или $|x_2|^{\cdot} < 0$. Так как $A \cup B \supseteq \{x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, |C_2(x)| < -|a_2| - b_2\}$, то $\operatorname{int} \overline{A \cup B} \supseteq \{|C_2(x)| < -|a_2| - b_2\}$. Учитывая, что $|a_2| + b_2 < 0$, получаем отсюда, что $O \in \operatorname{int} \overline{A \cup B}$. Значит, $\operatorname{int} \overline{A \cup B}$ – окрестность начала координат. При этом

$$(\operatorname{int} \overline{A \cup B}) \cap \{x_1 > 0, x_2 > 0\} = (A \cup B) \cap \{x_1 > 0, x_2 > 0\} = A \cap \{x_1 > 0, x_2 > 0\},$$
$$(\operatorname{int} \overline{A \cup B}) \cap \{x_1 < 0, x_2 < 0\} = A \cap \{x_1 < 0, x_2 < 0\},$$
$$(\operatorname{int} \overline{A \cup B}) \cap \{x_1 < 0, x_2 > 0\} = B \cap \{x_1 < 0, x_2 > 0\},$$
$$(\operatorname{int} \overline{A \cup B}) \cap \{x_1 > 0, x_2 < 0\} = B \cap \{x_1 > 0, x_2 < 0\}.$$

Отсюда следует, что пересечения множеств, стоящие в правых частях четырех только что написанных равенств, непусты и $(\operatorname{int} \overline{A \cup B}) \cap \{x_1 \neq 0, x_2 \neq 0\} = A \cup B$. Итак, на пересечении окрестности $\operatorname{int} \overline{A \cup B}$ начала координат с каждой из координатных четвертей $\{x_1 > 0, x_2 > > 0\}$, $\{x_1 < 0, x_2 > 0\}$, $\{x_1 < 0, x_2 < 0\}$, $\{x_1 > 0, x_2 < 0\}$ имеем: $|x_1|^{\cdot} < 0$ или $|x_2|^{\cdot} < 0$. Так как множество U, определенное в формулировке любого из утверждений 6а–6г является окрестностью начала координат (этот факт будет доказан ниже), то $U \cap \{x_1 \neq 0, x_2 \neq 0\} \neq \varnothing$, $U \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\} \neq \varnothing$, $U \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\} \neq \varnothing$, $U \cap \{x_1 = 0, x_2 = 0\} \neq \varnothing$. Так как

$$U \cap \{x_1 \neq 0, x_2 \neq 0\} \subseteq (\operatorname{int} \overline{A \cup B}) \cap \{x_1 \neq 0, x_2 \neq 0\} = A \cup B,$$

то на пересечении множества U с каждой из координатных четвертей имеем: $|x_1|^{\cdot} < 0$ или $|x_2|^{\cdot} < 0$. Так как $n \geqslant 2$, $\Delta \neq 0$, $|a_2| < -b_2$, то выполнены условия утверждения 1 леммы 2.2. Пусть $U_{(2)}$ – окрестность начала координат из формулировки этого утверждения, D – множество из формулировки утверждения 4 настоящей леммы. Рассуждая так же, как в доказательстве последнего утверждения, получаем, что D – окрестность начала координат, в приведённой системе всюду на $U \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\} \neq \varnothing$ существует движение, причём в этом движении $|x_1|^{\cdot} < 0$.

а. Так как $n \geqslant 3$, $\Delta \neq 0$, $a_1 + b_1 = 0$, $-a_1 + b_1 > 0$, $a_2 + b_2 < 0$, $(c_{13}, \ldots, c_{1n}) \neq (0, \ldots, 0)$, $c_{12} \neq \neq 0$, то выполнены условия утверждений 1б и 2б леммы 2.1, а также условия утверждения 3а (при $c_{12} > 0$) и утверждения 3б (при $c_{12} < 0$) леммы 2.1. Пусть $U_{(1)}$, $V_{(1)}$ – множества из формулировок утверждений 1б и 2б леммы 2.1 соответственно, $V_{(10)}$ – окрестность начала координат из формулировки утверждения 3а (при $c_{12} > 0$) и утверждения 3б (при $c_{12} < 0$) леммы 2.1, $V_{(10)0} := V_{(10)} \cap \{C_1(x) = 0\} \neq \varnothing$. Так же, как в доказательстве утверждения 3 настоящей леммы, обосновываем, что множество C из формулировки этого утверждения является окрестностью начала координат. Согласно утверждению 1б леммы 2.1 $\overline{U_{(1)}} \ni O$. Из последних двух фактов получаем, что $U_{(1)} \cap C \neq \varnothing$. Из утверждения 2б леммы 2.1 следует, что $V_{(1)} \neq \varnothing$. При $c_{12} > 0$

$$(U_{(1)} \cap C) \cup V_{(1)} \cup V_{(10)0} \cup \{x_2 = 0\} \supseteq \Bigg\{ |C_1(x)| < -2a_1, \left|C_{2\hat{1}}(x) - \frac{a_2}{a_1} C_{1\hat{1}}(x)\right| < -\frac{\Delta}{a_1}, \left|D_{1\hat{1}}(x) - c_{12}\frac{a_2}{a_1} C_{1\hat{1}}(x)\right| < -c_{12}\frac{\Delta}{a_1} \Bigg\}.$$

Так как $a_1 < 0$, $\Delta > 0$, $c_{12} > 0$, то начало координат принадлежит последнему множеству. Учитывая открытость последнего множества и только что выписанное включение, получаем, что при $c_{12} > 0$ $O \in \operatorname{int}((U_{(1)} \cap C) \cup V_{(1)} \cup V_{(10)0} \cup \{x_2 = 0\}) =: T_{(1)}$. Таким образом, при $c_{12} > 0$ $T_{(1)}$ – окрестность начала координат. При $c_{12} < 0$

$$(U_{(1)} \cap C) \cup V_{(1)} \cup V_{(10)0} \cup \{x_2 = 0\} \supseteq \Bigg\{ |C_1(x)| < -2a_1, \left|C_{2\hat{1}}(x) - \frac{a_2}{a_1} C_{1\hat{1}}(x)\right| < -\frac{\Delta}{a_1}, |D_1(x)| < c_{12}(a_2 + b_2) \Bigg\}.$$

Так как $a_1 < 0$, $\Delta > 0$, $c_{12} < 0$, $a_2 + b_2 < 0$, то начало координат принадлежит последнему множеству. Рассуждая так же, как в случае $c_{12} > 0$, получаем, что при $c_{12} < 0$ $T_{(1)}$ – окрестность начала координат. Итак, при $c_{12} \neq 0$ $T_{(1)}$ – окрестность начала координат. Рассмотрим множество U из формулировки настоящего утверждения. Так как $\operatorname{int} \overline{A \cup B}$, $T_{(1)}$, $U_{(2)}$, D – окрестности начала координат, то U также является окрестностью начала координат. Согласно утверждению 1б леммы 2.1 и следствию 2.1 в приведённой системе всюду на $U_{(1)} \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\} \neq \varnothing$ существует движение и оно описывается системой уравнений (2.1). Поэтому в рассматриваемом движении

$$|x_2|^{\cdot} = \dot{x}_2 \operatorname{sgn} x_2 = \frac{\Delta}{a_1} + (\operatorname{sgn} x_2) \left(C_{2\hat{1}}(x) - \frac{a_2}{a_1} C_{1\hat{1}}(x) \right).$$

Согласно утверждению 1б леммы 2.1 $U_{(1)} \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\} \neq \varnothing$. Кроме этого, при $x \in U_{(1)} \cap \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}$ верно, что $\{\gamma x : 0 < \gamma \leqslant 1\} \subseteq U_{(1)} \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}$. Учитывая, что C – окрестность начала координат, получаем отсюда, что $U_{(1)} \cap C \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\} \neq \varnothing$. Итак, при движении на $U_{(1)} \cap C \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\} \neq \varnothing$ имеем: $|x_2|^{\cdot} < 0$. Утверждение 2б леммы 2.1, а также утверждение 3а (при $c_{12} > 0$) и утверждение 3б (при $c_{12} < 0$) леммы 2.1 устанавливают, что в приведённой системе нигде ни на множестве $V_{(1)} \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\} \neq \varnothing$, ни на множестве $V_{(10)0} \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\} \neq \varnothing$ соответственно не существует движения. Из определения окрестности U начала координат следует, что

$$U \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\} \subseteq \big((U_{(1)} \cap C) \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}\big) \cup \big((V_{(1)} \cup V_{(10)0}) \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}\big).$$

Итак, окрестность U начала координат удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к множеству W в начале доказательства настоящей леммы (можно взять $J = U_{(1)} \cap C$, $K = V_{(1)} \cup V_{(10)0}$, $L = U_{(2)} \cap D$, $M = \varnothing$), и можно положить $W = U$. Далее доказательство завершается точно так же, как для утверждения 1.

б. Так как $n \geqslant 3$, $\Delta \neq 0$, $a_1 + b_1 = 0$, $-a_1 + b_1 > 0$, $c_{12} < 0$, то выполнены условия утверждений 1б и 2б леммы 2.1. Пусть $U_{(1)}$, $V_{(1)}$ – множества из формулировок этих утверждений соответственно. Рассуждая так же, как в доказательстве утверждения 6а, приходим к выводу, что $U_{(1)} \cap C \neq \varnothing$. Из утверждения 2б леммы 2.1 следует, что $V_{(1)} \neq \varnothing$. Имеем:

$$(U_{(1)} \cap C) \cup V_{(1)} \cup \{C_1(x) = 0\} \cup \{x_2 = 0\} \supseteq \left\{|C_1(x)| < -2a_1, \left|C_{2\widehat{1}}(x) - \frac{a_2}{a_1} C_{1\widehat{1}}(x)\right| < -\frac{\Delta}{a_1}\right\}.$$

Так как $a_1 < 0$, $\Delta > 0$, то начало координат принадлежит последнему множеству. Учитывая открытость последнего множества и только что выписанное включение, получаем, что $O \in$ $\in \operatorname{int}((U_{(1)} \cap C) \cup V_{(1)} \cup \{C_1(x) = 0\} \cup \{x_2 = 0\}) =: T_{(1)}$. Значит, $T_{(1)}$ является окрестностью начала координат. Рассмотрим множество U из формулировки настоящего утверждения. Так как $\operatorname{int} \overline{A \cup B}$, $T_{(1)}$, $U_{(2)}$, D – окрестности начала координат, то U также является окрестностью начала координат. Так же, как в доказательстве утверждения 6а, устанавливаем, что при движении на $U_{(1)} \cap C \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\} \neq \varnothing$ имеем: $|x_2|^{\cdot} < 0$. Согласно утверждению 2б леммы 2.1 в приведённой системе нигде на $V_{(1)} \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\} \neq \varnothing$ не существует движения. Поскольку $c_{12} \neq 0$, $(c_{13}, \ldots, c_{1n}) = (0, \ldots, 0)$, то $\{C_1(x) = 0\} \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\} = \varnothing$. Поэтому из определения окрестности U начала координат вытекает, что

$$U \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\} \subseteq \big((U_{(1)} \cap C) \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}\big) \cup \big(V_{(1)} \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}\big).$$

Итак, окрестность U начала координат удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к множеству W в начале доказательства настоящей леммы (можно взять $J = U_{(1)} \cap C$, $K = V_{(1)}$, $L = U_{(2)} \cap D$, $M = \varnothing$), и можно положить $W = U$. Далее доказательство завершается точно так же, как для утверждения 1.

в. В силу того, что $\operatorname{int}\overline{A\cup B}$, $U_{(2)}$, D – окрестности начала координат, получаем, что множество U из формулировки настоящего утверждения тоже является окрестностью начала координат.

Рассмотрим сначала случай $(c_{13},\dots,c_{1n})=(0,\dots,0)$, $c_{12}>0$. Так как $n\geqslant 3$, $\Delta\neq 0$, $a_1+b_1=0$, $-a_1+b_1>0$, $c_{12}\neq 0$, то выполнены условия утверждения 2б леммы 2.1. Пусть $V_{(1)}$ – множество из формулировки этого утверждения. Рассмотрим множество

$$E:=\{x_2>0,C_1(x)>0\}\cup\{x_2<0,C_1(x)<0\}\subseteq V_{(1)}.$$

Так как $(c_{13},\dots,c_{1n})=(0,\dots,0)$, $c_{12}>0$, то $E\cap\{x_1=0,x_2\neq 0\}=\{x_1=0,x_2\neq 0\}$. Согласно утверждению 2б леммы 2.1 в приведённой системе нигде на $V_{(1)}\cap\{x_1=0,x_2\neq 0\}$ не существует движения. Поэтому в приведённой системе нигде на $E\cap\{x_1=0,x_2\neq 0\}=\{x_1=0,x_2\neq 0\}$ не существует движения. Так что в рассматриваемом случае в приведённой системе нигде на $U\cap\{x_1=0,x_2\neq 0\}\subseteq\{x_1=0,x_2\neq 0\}$ тоже не существует движения. Итак, окрестность U начала координат удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к множеству W в начале доказательства настоящей леммы (можно взять $J=\varnothing$, $K=\mathbb{R}^n$, $L=U_{(2)}\cap D$, $M=\varnothing$), и можно положить $W=U$. Далее доказательство завершается точно так же, как для утверждения 1.

Теперь перейдем к случаю $(c_{12},\dots,c_{1n})=(0,\dots,0)$, $c_{11}>0$. Так как $n\geqslant 3$, $\Delta\neq 0$, $a_1+{}+b_1=0$, $-a_1+b_1>0$, $(c_{12},\dots,c_{1n})=(0,\dots,0)$, $c_{11}>0$, то выполнены условия утверждения 2в леммы 2.1. Это утверждение устанавливает, что в приведённой системе нигде на $\{x_1=0,x_2\neq{}\neq 0\}$ не существует движения. Далее доказательство завершается точно так же, как в случае $(c_{13},\dots,c_{1n})=(0,\dots,0)$, $c_{12}>0$.

г. Так как $\operatorname{int}\overline{A\cup B}$, C, $U_{(2)}$, D – окрестности начала координат, то множество U из формулировки настоящего утверждения тоже является окрестностью начала координат. Так как $n\geqslant 3$, $\Delta\neq 0$, $a_1+b_1=0$, $-a_1+b_1>0$, $(c_{12},\dots,c_{1n})=(0,\dots,0)$, $c_{11}\leqslant 0$, то выполнены условия утверждения 1в леммы 2.1. Согласно этому утверждению в приведённой системе всюду на $\{x_1=0,x_2\neq 0\}$ существует движение. Следствие 2.1 устанавливает, что это движение описывается системой уравнений (2.1). Так как $U\cap\{x_1=0,x_2\neq 0\}\subseteq C\cap\{x_1=0,x_2\neq 0\}$, то при движении на $U\cap\{x_1=0,x_2\neq 0\}$ имеем: $|x_2|^{\cdot}<0$. Итак, окрестность U начала координат удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к множеству W в начале доказательства настоящей леммы (можно взять $J=C$, $K=\varnothing$, $L=U_{(2)}\cap D$, $M=\varnothing$), и можно положить $W=U$. Далее доказательство завершается точно так же, как для утверждения 1.

7. На множестве A имеем: $|x_2|^{\cdot} < 0$, на множестве B имеем: $|x_1|^{\cdot} < 0$. Так как

$$A \cup B \supseteq \{x_1 \neq 0, x_2 \neq 0, |C_2(x)| < -a_2 - b_2, |C_1(x)| < -a_1 + b_1\},$$

то $\operatorname{int} \overline{A \cup B} \supseteq \{|C_2(x)| < -a_2 - b_2, |C_1(x)| < -a_1 + b_1\}$. Учитывая, что $a_2 + b_2 < 0$, $-a_1 + b_1 > 0$, получаем отсюда, что $O \in \operatorname{int} \overline{A \cup B}$. Значит, $\operatorname{int} \overline{A \cup B}$ – окрестность начала координат. Так же, как в доказательстве утверждения 6, устанавливаем, что $(\operatorname{int} \overline{A \cup B}) \cap \{x_1 \neq 0, x_2 \neq 0\} = A \cup B$ и на пересечении окрестности $\operatorname{int} \overline{A \cup B}$ начала координат с каждой из координатных четвертей $\{x_1 > 0, x_2 > 0\}$, $\{x_1 < 0, x_2 > 0\}$, $\{x_1 < 0, x_2 < 0\}$, $\{x_1 > 0, x_2 < 0\}$ имеем: $|x_1|^{\cdot} < 0$ или $|x_2|^{\cdot} < 0$. Так как множество U, определенное в формулировке любого из утверждений 7а–7г, является окрестностью начала координат (этот факт будет доказан ниже), то $U \cap \{x_1 \neq \neq 0, x_2 \neq 0\} \neq \varnothing$, $U \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\} \neq \varnothing$, $U \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\} \neq \varnothing$, $U \cap \{x_1 = 0, x_2 = 0\} \neq \varnothing$. Так же, как в доказательстве утверждения 6, обосновываем, что на пересечении окрестности U начала координат с каждой из координатных четвертей имеем: $|x_1|^{\cdot} < 0$ или $|x_2|^{\cdot} < 0$. Так как $n \geqslant 2$, $\Delta \neq 0$, $|a_2| = -a_2 > |b_2| \geqslant -b_2$, то выполнены условия утверждения 2 леммы 2.2. Пусть $V_{(2)}$ – окрестность начала координат из формулировки этого утверждения. Поскольку $U \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\} \subseteq V_{(2)} \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}$, то из утверждения 2 леммы 2.2 следует, что в приведённой системе нигде на множестве $U \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}$ не существует движения.

а. Так же, как в доказательстве утверждения 6а, обосновываем, что $T_{(1)}$ – окрестность начала координат. Так как $\operatorname{int} \overline{A \cup B}$, $T_{(1)}$, $V_{(2)}$ – окрестности начала координат, то множество U, определенное в формулировке настоящего утверждения, тоже является окрестностью начала координат. Далее доказательство завершается точно так же, как для утверждения 6а, но со следующим отличием: $L = \varnothing$, $M = V_{(2)}$.

б. Так же, как в доказательстве утверждения 6б, приходим к выводу, что $T_{(1)}$ – окрестность начала координат. Поскольку $\operatorname{int} \overline{A \cup B}$, $T_{(1)}$, $V_{(2)}$ – окрестности начала координат, то множество U из формулировки настоящего утверждения тоже является окрестностью начала координат. Далее доказательство завершается точно так же, как для утверждения 6б, но со следующим отличием: $L = \varnothing$, $M = V_{(2)}$.

в. Так как $\operatorname{int} \overline{A \cup B}$, $V_{(2)}$ – окрестности начала координат, то множество U, определенное в формулировке настоящего утверждения, тоже является окрестностью начала координат. Далее доказательство завершается точно так же, как для утверждения 6в, но со следующим отличием: $L = \varnothing$, $M = V_{(2)}$.

г. Так же, как в доказательстве утверждения 3, устанавливаем, что C – окрестность начала координат. Поскольку $\operatorname{int} \overline{A \cup B}$, C, $V_{(2)}$ – окрестности начала координат, то множество U из формулировки настоящего утверждения также является окрестностью начала координат. Далее доказательство завершается точно так же, как для утверждения 6г, но со следующим отличием: $L = \varnothing$, $M = V_{(2)}$. $\square$

2.4 Уравнения движения на пересечении гиперплоскостей разрыва

Выведем уравнения движения в приведённой системе на пересечении гиперплоскостей $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ разрыва правых частей уравнений системы, если движение на этом множестве существует.

Лемма 2.6. *Если $n \geqslant 3$, $\Delta \neq 0$, существует открытое множество H такое, что $H_{12} := H \cap \{x_1 = 0,\, x_2 = 0\} \neq \varnothing$, в приведённой системе всюду на множестве H_{12} существует движение, $H_{12} \cap \{|b_1 C_{2\hat{1}\hat{2}}(x) - b_2 C_{1\hat{1}\hat{2}}(x)| \leqslant |\Delta|\} \cap \{|a_2 C_{1\hat{1}\hat{2}}(x) - a_1 C_{2\hat{1}\hat{2}}(x)| \leqslant |\Delta|\} \neq \varnothing$, то на последнем пересечении множеств это движение описывается системой уравнений*

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \\ \dot{x}_i = \sum\limits_{j=3}^{n} c_{ij} x_j, \quad i = 3, \ldots, n. \end{cases} \tag{2.8}$$

Доказательство. Так как в приведённой системе всюду на множестве H_{12} существует движение, то при движении по этому множеству вектор скорости решения касается гиперплоскостей $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$, т.е. $\dot{x}_1|_{H_{12}} = 0$, $\dot{x}_2|_{H_{12}} = 0$ (где $\dot{x}_i|_{H_{12}}$ обозначает производную функции $x_i(t)$, $i = 1, 2$, по времени t при движении решения $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ приведённой системы по множеству H_{12}). Для получения уравнений движения воспользуемся методом эквивалентного управления. Сначала найдем эквивалентные управления $u_{12}^{\mathrm{eq}}(0, 0, x_3, \ldots, x_n)$, $v_{12}^{\mathrm{eq}}(0, 0, x_3, \ldots, x_n)$ (индексы 12 означают, что эти эквивалентные управления относятся к движению решения приведённой системы по множеству $\{x_1 = 0,\, x_2 = 0\}$) из системы уравнений $\dot{x}_1|_{H_{12}} = 0$, $\dot{x}_2|_{H_{12}} = 0$, где

$$\begin{aligned} \dot{x}_1|_{H_{12}} &= a_1 u_{12}^{\mathrm{eq}}(0, 0, x_3, \ldots, x_n) + b_1 v_{12}^{\mathrm{eq}}(0, 0, x_3, \ldots, x_n) + C_{1\hat{1}\hat{2}}(x), \\ \dot{x}_2|_{H_{12}} &= a_2 u_{12}^{\mathrm{eq}}(0, 0, x_3, \ldots, x_n) + b_2 v_{12}^{\mathrm{eq}}(0, 0, x_3, \ldots, x_n) + C_{2\hat{1}\hat{2}}(x). \end{aligned}$$

(В последних двух равенствах учтено, что $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ на множестве H_{12}.) Получим:

$$u_{12}^{\mathrm{eq}}(0,0,x_3,\ldots,x_n) = \frac{1}{\Delta}(b_1 C_{2\hat{1}\hat{2}}(x) - b_2 C_{1\hat{1}\hat{2}}(x)),$$
$$v_{12}^{\mathrm{eq}}(0,0,x_3,\ldots,x_n) = \frac{1}{\Delta}(a_2 C_{1\hat{1}\hat{2}}(x) - a_1 C_{2\hat{1}\hat{2}}(x)).$$

Затем согласно методу эквивалентного управления надо подставить найденные эквивалентные управления $u_{12}^{\mathrm{eq}}(0,0,x_3,\ldots,x_n)$, $v_{12}^{\mathrm{eq}}(0,0,x_3,\ldots,x_n)$ во все уравнения приведённой системы, кроме первого и второго, из которых они и были найдены. Так как правые части третьего и последующих уравнений непрерывны на пересечении гиперплоскостей $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$, то эта подстановка не требуется. В силу того, что на множестве H_{12} имеем $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, а правые части третьего и последующих уравнений приведённой системы непрерывны на пересечении гиперплоскостей $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$, уравнение для $\dot{x}_i$, $i = 3,\ldots,n$, при движении на множестве H_{12} принимает вид $\dot{x}_i|_{H_{12}} = C_i(x)$, $i = 3,\ldots,n$. Наконец, в методе эквивалентного управления требуется, чтобы $u_{12}^{\mathrm{eq}}(0,0,x_3,\ldots,x_n) \in [\lim_{x_1\to 0-} \operatorname{sgn} x_1, \lim_{x_1\to 0+} \operatorname{sgn} x_1] = [-1,1]$, $v_{12}^{\mathrm{eq}}(0,0,x_3,\ldots,x_n) \in [\lim_{x_2\to 0-} \operatorname{sgn} x_2, \lim_{x_2\to 0+} \operatorname{sgn} x_2] = [-1,1]$, т.е. чтобы выполнялись неравенства $|u_{12}^{\mathrm{eq}}(0,0,x_3,\ldots,x_n)| \leqslant 1$, $|v_{12}^{\mathrm{eq}}(0,0,x_3,\ldots,x_n)| \leqslant 1$. Получим:

$$\left|b_1 C_{2\hat{1}\hat{2}}(x) - b_2 C_{1\hat{1}\hat{2}}(x)\right| \leqslant |\Delta|, \qquad \left|a_2 C_{1\hat{1}\hat{2}}(x) - a_1 C_{2\hat{1}\hat{2}}(x)\right| \leqslant |\Delta|. \quad \square$$

Для формулировки результатов на языке матриц нам потребуется следующее

Определение. Комплексная квадратная матрица S называется

- *асимптотически устойчивой*, если вещественные части всех её собственных значений отрицательны;
- *устойчивой*, если вещественные части всех её собственных значений неположительны и для каждого чисто мнимого её собственного значения все соответствующие жордановы клетки имеют размер 1;
- *неустойчивой*, если у неё существует собственное значение с положительной вещественной частью или чисто мнимое собственное значение, для которого хотя бы одна из соответствующих жордановых клеток имеет размер $\geqslant 2$.

Вводимые термины для устойчивости матрицы S отвечают тому же типу устойчивости нулевого решения соответствующей системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами $\dot{x} = Sx$.

Следствие 2.3 (из леммы 2.6). *Пусть* $n \geqslant 3$, $\Delta \neq 0$, *окрестность* H *начала координат такова, что в приведённой системе всюду на множестве* $H_{12} := H \cap \{x_1 = 0, x_2 = 0\}$ *существует движение. Тогда устойчивость движения на последнем пересечении множеств из формулировки леммы 2.6 совпадает с устойчивостью подматрицы* $(c_{ij})_{3 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Доказательство. При выполнении условий настоящего следствия выполнены условия леммы 2.6. В условиях леммы 2.6 на последнем пересечении множеств, упомянутом в формулировке этой леммы, движение описывается системой линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянной матрицей коэффициентов $(c_{ij})_{3 \leqslant i,j \leqslant n}$. Так как H – окрестность начала координат, то утверждение следствия вытекает из теоремы об устойчивости нулевого решения системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянной матрицей коэффициентов и из определения перед следствием. $\square$

Глава 3

Устойчивость нулевого решения приведённой системы

Перейдём к исследованию устойчивости нулевого решения приведённой системы.

Определение. Решение $x = \varphi(t)$, $t_0 \leqslant t < +\infty$, дифференциального включения $\dot{x} \in F(x)$ называется

- *устойчивым*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для каждого такого $\widetilde{x}_0$, что $|\widetilde{x}_0 - \varphi(t_0)| < \delta$, каждое решение $\widetilde{x}(t)$ с начальным условием $\widetilde{x}(t_0) = \widetilde{x}_0$ при $t_0 \leqslant t < +\infty$ существует и удовлетворяет неравенству $|\widetilde{x}(t) - \varphi(t)| < \varepsilon$, $t_0 \leqslant t < +\infty$.
- *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво и, кроме того, $\widetilde{x}(t) - \varphi(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Как обычно, начало координат пространства $\mathbb{R}^n$ с координатами $x_1, \ldots, x_n$ будем обозначать через O, открытый шар в пространстве $\mathbb{R}^n$ с центром в начале координат радиуса $r > 0$ – через $B_r(O)$, сферу в пространстве $\mathbb{R}^n$ с центром в начале координат радиуса $r > 0$ – через $S_r(O)$. Для $x := (x_1, \ldots, x_n)$ введём обозначения:

$$Q(x) := \sum_{k=3}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{kj} x_k x_j, \qquad Q_{\widehat{l}}(x) := \sum_{k=3}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^{n} c_{kj} x_k x_j, \qquad l = 1, 2.$$

3.1 Достаточные условия устойчивости

Рассмотрим несколько случаев, в которых в некоторой окрестности начала координат всюду на множестве $\{x_1 = 0,\, x_2 = 0\}$ существует движение (при $n = 2$ этого условия нет), а любое решение приведённой системы, находящееся в начальный момент времени в этой окрестности, достигает множества $\{x_1 = 0,\, x_2 = 0\}$ за конечное время. В этих случаях устойчивость нулевого решения приведённой системы совпадает с устойчивостью подматрицы $(c_{ij})_{3 \leqslant i,j \leqslant n}$ (при $n = 2$ нулевое решение приведённой системы асимптотически устойчиво).

Теорема 3.1. *Пусть $n \geqslant 2$ и выполнена хотя бы одна из следующих систем условий:*

(i) $|b_1| < -a_1,\ |a_2| < -b_2$;

(ii) $\Delta > 0,\ |b_1| > -a_1,\ |a_2| < -b_2$;

(iii) $|a_1| < b_1,\ |b_2| < -a_2,\ r := a_1|a_2| + b_2|b_1| < 0$;

(iv) $\Delta > 0,\ |b_1| < -a_1,\ |a_2| > -b_2$;

(v) $|a_1| < -b_1,\ |b_2| < a_2,\ r < 0$;

(vi) $a_1 + b_1 = 0$, $-a_1 + b_1 > 0$, *справедливо одно из двух неравенств:* $|a_2| < -b_2$ *либо* $|b_2| < -a_2$, *и, кроме того, при* $n \geqslant 3$ $c_{12} \neq 0$ *или* $(c_{12}, \ldots, c_{1n}) = (0, \ldots, 0)$ *(при* $n = 2$ *это условие тривиально);*

(vii) $-a_1 + b_1 = 0$, $a_1 + b_1 < 0$, *справедливо одно из двух неравенств:* $|a_2| < -b_2$ *либо* $|b_2| < a_2$, *и, кроме того, при* $n \geqslant 3$ $c_{12} \neq 0$ *или* $(c_{12}, \ldots, c_{1n}) = (0, \ldots, 0)$ *(при* $n = 2$ *это условие тривиально);*

(viii) $a_2 + b_2 = 0$, $-a_2 + b_2 < 0$, *справедливо одно из двух неравенств:* $|b_1| < -a_1$ *либо* $|a_1| < -b_1$, *и, кроме того, при* $n \geqslant 3$ $c_{21} \neq 0$ *или* $(c_{21}, c_{23}, c_{24}, \ldots, c_{2n}) = (0, \ldots, 0)$ *(при* $n = 2$ *это условие тривиально);*

(ix) $-a_2 + b_2 = 0$, $a_2 + b_2 < 0$, *справедливо одно из двух неравенств:* $|b_1| < -a_1$ *либо* $|a_1| < b_1$, *и, кроме того, при* $n \geqslant 3$ $c_{21} \neq 0$ *или* $(c_{21}, c_{23}, c_{24}, \ldots, c_{2n}) = (0, \ldots, 0)$ *(при* $n = 2$ *это условие тривиально).*

Тогда при $n = 2$ *нулевое решение приведённой системы асимптотически устойчиво, а при* $n \geqslant 3$ *устойчивость нулевого решения приведённой системы совпадает с устойчивостью подматрицы* $(c_{ij})_{3 \leqslant i,j \leqslant n}$.

Замечание. Условие $\Delta \neq 0$ следует из условий каждого из случаев (i)–(ix).

Доказательство (теоремы 3.1). Развивая идеи Д.В. Аносова [4] (см. замечание 3.1), рассмотрим функцию $W_{\alpha,\beta}(x_1, \ldots, x_n) := \alpha|x_1| + \beta|x_2| + \sum_{k=3}^{n} x_k^2$ (при $n = 2$ – функцию $W_{\alpha,\beta}(x_1, x_2) := \alpha|x_1| + \beta|x_2|$). Отметим, что $W_{\alpha,\beta}(0, \ldots, 0) = 0$. Если $\alpha > 0$, $\beta > 0$, то $W_{\alpha,\beta} > 0$ на множестве $\mathbb{R}^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$.

Докажем сначала, что во всех случаях (i)–(ix) найдется такая окрестность начала координат (например, можно взять $\operatorname{int}\overline{V_{\alpha_0,\beta_0}}$, см. ниже), что в её пересечении с множеством $\{x_1 \neq 0,\, x_2 \neq 0\}$ производная функции $W_{\alpha,\beta}$ в силу приведённой системы при некоторых значениях параметров α, β, которые мы выберем ниже, отрицательна и отделена от нуля константой. Найдем производную функции $W_{\alpha,\beta}$ в силу приведённой системы при $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$:

$$\dot{W}_{\alpha,\beta} = \alpha(\operatorname{sgn} x_1)\dot{x}_1 + \beta(\operatorname{sgn} x_2)\dot{x}_2 + 2\sum_{k=3}^{n} x_k \dot{x}_k =$$

$$= \alpha(a_1 + b_1 \operatorname{sgn}(x_1 x_2)) + \beta(a_2 \operatorname{sgn}(x_1 x_2) + b_2) + \alpha(\operatorname{sgn} x_1) C_1(x) + \beta(\operatorname{sgn} x_2) C_2(x) + 2Q(x).$$

(При $n = 2$ здесь и далее во всем доказательстве настоящей теоремы удвоенные суммы отсутствуют.) При выполнении любой из систем условий, указанных в формулировке настоящей теоремы, существует решение (α_0, β_0) системы неравенств (относительно переменных α, β) $\alpha(a_1 + b_1) + \beta(a_2 + b_2) < 0$, $\alpha(a_1 - b_1) + \beta(-a_2 + b_2) < 0$ такое, что $\alpha_0 > 0$, $\beta_0 > 0$. Тогда функция W_{α_0,β_0} такова, что $\dot{W}_{\alpha_0,\beta_0} < M/4 < 0$, где

$$M := \max\bigl\{\alpha_0(a_1 + b_1) + \beta_0(a_2 + b_2),\, \alpha_0(a_1 - b_1) + \beta_0(-a_2 + b_2)\bigr\},$$

на множестве

$$V_{\alpha_0,\beta_0} := \Bigl\{x_1 \neq 0,\; x_2 \neq 0,\; \alpha_0(a_1 + b_1 \operatorname{sgn}(x_1 x_2)) + \beta_0(a_2 \operatorname{sgn}(x_1 x_2) + b_2) + \\ + \alpha_0(\operatorname{sgn} x_1) C_1(x) + \beta_0(\operatorname{sgn} x_2) C_2(x) + 2Q(x) < \frac{1}{4} M\Bigr\}.$$

Так как

$$V_{\alpha_0,\beta_0} \supseteq \Bigl\{x_1 \neq 0,\; x_2 \neq 0,\, |\alpha_0 C_1(x) + \beta_0 C_2(x)| + 2Q(x) < \frac{1}{4} M - \alpha_0(a_1 + b_1) - \beta_0(a_2 + b_2), \\ |\alpha_0 C_1(x) - \beta_0 C_2(x)| + 2Q(x) < \frac{1}{4} M - \alpha_0(a_1 - b_1) - \beta_0(-a_2 + b_2)\Bigr\},$$

то

$$\operatorname{int}\overline{V_{\alpha_0,\beta_0}} \supseteq \Bigl\{|\alpha_0 C_1(x) + \beta_0 C_2(x)| + 2Q(x) < \frac{1}{4} M - \alpha_0(a_1 + b_1) - \beta_0(a_2 + b_2), \\ |\alpha_0 C_1(x) - \beta_0 C_2(x)| + 2Q(x) < \frac{1}{4} M - \alpha_0(a_1 - b_1) - \beta_0(-a_2 + b_2)\Bigr\}.$$

Отсюда, поскольку $M/4 - \alpha_0(a_1 + b_1) - \beta_0(a_2 + b_2) > 0$, $M/4 - \alpha_0(a_1 - b_1) - \beta_0(-a_2 + b_2) > 0$, получаем, что $O \in \operatorname{int}\overline{V_{\alpha_0,\beta_0}}$. Значит, $\operatorname{int}\overline{V_{\alpha_0,\beta_0}}$ – окрестность начала координат. При этом $(\operatorname{int}\overline{V_{\alpha_0,\beta_0}}) \cap \{x_1 > 0,\, x_2 > 0\} = V_{\alpha_0,\beta_0} \cap \{x_1 > 0,\, x_2 > 0\}$ и аналогичные равенства верны для каждого из множеств $V_{\alpha_0,\beta_0}\cap\{x_1<0,\ x_2>0\}$, $V_{\alpha_0,\beta_0}\cap\{x_1<0,\ x_2<0\}$, $V_{\alpha_0,\beta_0}\cap\{x_1>0,\ x_2<0\}$. Отсюда следует, что пересечение множества V_{α_0,β_0} с каждым из множеств $\{x_1>0,\ x_2>0\}$, $\{x_1<0,\ x_2>0\}$, $\{x_1<0,\ x_2<0\}$, $\{x_1>0,\ x_2<0\}$ непусто. Итак, $\dot W_{\alpha_0,\beta_0}<M/4<0$ на $(\operatorname{int}\overline{V_{\alpha_0,\beta_0}})\cap\{x_1\neq 0,\ x_2\neq 0\}=V_{\alpha_0,\beta_0}$.

(i) Покажем, что в этом случае существует такая окрестность начала координат (например, $U_{(1)}\cap(\operatorname{int}\overline{V_{\beta_0}})$, см. ниже), что в приведённой системе всюду на её пересечении с множеством $\{x_1=0,\ x_2\neq 0\}$ есть движение, в котором производная функции W_{α_0,β_0} отрицательна и отделена от нуля константой. Так как $\Delta\neq 0$ и $|b_1|<-a_1$, то выполнены условия утверждения 1 леммы 2.1. Пусть $U_{(1)}$ – окрестность начала координат из формулировки этого утверждения. Согласно этому утверждению в приведённой системе всюду на $U_{(1)}\cap\{x_1=0,\ x_2\neq 0\}$ существует движение. Следствие 2.1 устанавливает, что это движение описывается системой уравнений (2.1). На множестве $U_{(1)}\cap\{x_1=0,\ x_2\neq 0\}$ имеем $W_{\alpha_0,\beta_0}=\beta_0|x_2|+\sum_{k=3}^n x_k^2$ (при $n=2$ имеем $W_{\alpha_0,\beta_0}=\beta_0|x_2|$),

$$\dot W_{\alpha_0,\beta_0}=\beta_0\frac{\Delta}{a_1}+\beta_0(\operatorname{sgn}x_2)\left(C_{2\hat 1}(x)-\frac{a_2}{a_1}C_{1\hat 1}(x)\right)+2Q_{\hat 1}(x).$$

При движении на множестве $U_{(1)}\cap V_{\beta_0}\cap\{x_1=0,\ x_2\neq 0\}$, где

$$V_{\beta_0}:=\left\{x_2\neq 0,\ \beta_0(\operatorname{sgn}x_2)\left(C_{2\hat 1}(x)-\frac{a_2}{a_1}C_{1\hat 1}(x)\right)+2Q_{\hat 1}(x)<-\frac{3}{4}\beta_0\frac{\Delta}{a_1}\right\},\tag{3.1}$$

имеем $\dot W_{\alpha_0,\beta_0}<\beta_0\Delta/(4a_1)<0$. Так как

$$V_{\beta_0}\supseteq\left\{x_2\neq 0,\beta_0\left|C_{2\hat 1}(x)-\frac{a_2}{a_1}C_{1\hat 1}(x)\right|+2Q_{\hat 1}(x)<-\frac{3}{4}\beta_0\frac{\Delta}{a_1}\right\},$$

то

$$\operatorname{int}\overline{V_{\beta_0}}\supseteq\left\{\beta_0\left|C_{2\hat 1}(x)-\frac{a_2}{a_1}C_{1\hat 1}(x)\right|+2Q_{\hat 1}(x)<-\frac{3}{4}\beta_0\frac{\Delta}{a_1}\right\}.$$

Учитывая, что $\beta_0>0$, $\Delta>0$, $a_1<0$, заключаем отсюда, что $O\in\operatorname{int}\overline{V_{\beta_0}}$. Значит, $\operatorname{int}\overline{V_{\beta_0}}$ – окрестность начала координат. При этом $(\operatorname{int}\overline{V_{\beta_0}})\cap\{x_2\neq 0\}=V_{\beta_0}$. Итак, при движении на множестве

$$\varnothing\neq U_{(1)}\cap(\operatorname{int}\overline{V_{\beta_0}})\cap\{x_1=0,\ x_2\neq 0\}=U_{(1)}\cap V_{\beta_0}\cap\{x_1=0,\ x_2\neq 0\}$$

имеем $\dot W_{\alpha_0,\beta_0}<\beta_0\Delta/(4a_1)<0$.

Теперь обоснуем то, что в рассматриваемом случае существует такая окрестность начала координат (например, можно рассмотреть $U_{(2)}\cap(\operatorname{int}\overline{V_{\alpha_0}})$, см. ниже), что в приведённой системе всюду на её пересечении с множеством $\{x_1 \neq 0,\, x_2 = 0\}$ есть движение, в котором производная функции W_{α_0,β_0} отрицательна и отделена от нуля константой. Так как $\Delta \neq 0$ и $|a_2| < -b_2$, то выполнены условия утверждения 1 леммы 2.2. Пусть $U_{(2)}$ – окрестность начала координат из формулировки этого утверждения. Согласно этому утверждению в приведённой системе всюду на $U_{(2)} \cap \{x_1 \neq 0,\, x_2 = 0\}$ существует движение. Следствие 2.2 устанавливает, что это движение описывается системой уравнений (2.2). На множестве $U_{(2)} \cap \{x_1 \neq 0,\, x_2 = 0\}$ имеем $W_{\alpha_0,\beta_0} = \alpha_0|x_1| + \sum_{k=3}^n x_k^2$ (при $n = 2$ имеем $W_{\alpha_0,\beta_0} = \alpha_0|x_1|$),

$$\dot W_{\alpha_0,\beta_0} = \alpha_0\frac{\Delta}{b_2} + \alpha_0(\operatorname{sgn} x_1)\left(C_{1\widehat{2}}(x) - \frac{b_1}{b_2}C_{2\widehat{2}}(x)\right) + 2Q_{\widehat{2}}(x).$$

При движении на множестве $U_{(2)} \cap V_{\alpha_0} \cap \{x_1 \neq 0,\, x_2 = 0\}$, где

$$V_{\alpha_0} := \left\{x_1 \neq 0,\ \alpha_0(\operatorname{sgn} x_1)\left(C_{1\widehat{2}}(x) - \frac{b_1}{b_2}C_{2\widehat{2}}(x)\right) + 2Q_{\widehat{2}}(x) < -\frac{3}{4}\alpha_0\frac{\Delta}{b_2}\right\}, \tag{3.2}$$

имеем $\dot W_{\alpha_0,\beta_0} < \alpha_0\Delta/(4b_2) < 0$. Так как

$$V_{\alpha_0} \supseteq \left\{x_1 \neq 0, \alpha_0\left|C_{1\widehat{2}}(x) - \frac{b_1}{b_2}C_{2\widehat{2}}(x)\right| + 2Q_{\widehat{2}}(x) < -\frac{3}{4}\alpha_0\frac{\Delta}{b_2}\right\},$$

то

$$\operatorname{int}\overline{V_{\alpha_0}} \supseteq \left\{\alpha_0\left|C_{1\widehat{2}}(x) - \frac{b_1}{b_2}C_{2\widehat{2}}(x)\right| + 2Q_{\widehat{2}}(x) < -\frac{3}{4}\alpha_0\frac{\Delta}{b_2}\right\}.$$

Учитывая, что $\alpha_0 > 0$, $\Delta > 0$, $b_2 < 0$, заключаем отсюда, что $O \in \operatorname{int}\overline{V_{\alpha_0}}$. Значит, $\operatorname{int}\overline{V_{\alpha_0}}$ – окрестность начала координат. При этом $(\operatorname{int}\overline{V_{\alpha_0}}) \cap \{x_1 \neq 0\} = V_{\alpha_0}$. Итак, при движении на множестве

$$\varnothing \neq U_{(2)} \cap (\operatorname{int}\overline{V_{\alpha_0}}) \cap \{x_1 \neq 0,\, x_2 = 0\} = U_{(2)} \cap V_{\alpha_0} \cap \{x_1 \neq 0,\, x_2 = 0\}$$

имеем $\dot W_{\alpha_0,\beta_0} < \alpha_0\Delta/(4b_2) < 0$.

Пусть множества A, B и окрестности C, D начала координат те же, что и в утверждении 5 леммы 2.5. Тогда, как показано в этом утверждении, $\operatorname{int}\overline{A \cup B}$ – окрестность начала координат (при $n = 2$ рассуждение, доказывающее этот факт, такое же, как и при $n \geqslant 3$). Рассмотрим множества

$$P := \left\{\left|b_1C_{2\widehat{1}\widehat{2}}(x) - b_2C_{1\widehat{1}\widehat{2}}(x)\right| < |\Delta|\right\}, \qquad Q := \left\{\left|a_2C_{1\widehat{1}\widehat{2}}(x) - a_1C_{2\widehat{1}\widehat{2}}(x)\right| < |\Delta|\right\}. \tag{3.3}$$

Так как $\Delta \neq 0$, то P и Q являются окрестностями начала координат. (При $n = 2$ здесь и далее во всем доказательстве настоящей теоремы множества, аналогичные P и Q, исключаются из рассуждений и формул.) Определим окрестность S начала координат:

$$S := (\operatorname{int}\overline{A \cup B}) \cap U_{(1)} \cap C \cap U_{(2)} \cap D \cap P \cap Q \cap (\operatorname{int}\overline{V_{\alpha_0,\beta_0}}) \cap (\operatorname{int}\overline{V_{\beta_0}}) \cap (\operatorname{int}\overline{V_{\alpha_0}}).$$

В силу того, что $|b_1| < -a_1$, $|a_2| < -b_2$,

$$S \cap \{x_1 = 0,\, x_2 = 0\} \subseteq (\operatorname{int} \overline{A \cup B}) \cap U_{(1)} \cap C \cap U_{(2)} \cap D \cap \{x_1 = 0,\, x_2 = 0\},$$

из утверждения 5 леммы 2.5 получаем, что в приведённой системе всюду на множестве $S \cap \{x_1 = 0,\, x_2 = 0\}$ существует движение. (При $n = 2$ здесь и далее во всем доказательстве настоящей теоремы рассуждения, относящиеся к движению на $S \cap \{x_1 = 0,\, x_2 = 0\}$, исключаются.) Из этого факта, учитывая, что $\Delta \neq 0$, S – окрестность начала координат,

$$S \cap \{x_1 = 0,\, x_2 = 0\} \cap \Big\{\big|b_1 C_{2\hat{1}\hat{2}}(x) - b_2 C_{1\hat{1}\hat{2}}(x)\big| \leqslant |\Delta|\Big\} \cap \Big\{\big|a_2 C_{1\hat{1}\hat{2}}(x) - a_1 C_{2\hat{1}\hat{2}}(x)\big| \leqslant |\Delta|\Big\} = \\ = S \cap \{x_1 = 0,\, x_2 = 0\} \neq \varnothing,$$

пользуясь леммой 2.6, делаем вывод, что на $S \cap \{x_1 = 0,\, x_2 = 0\}$ движение описывается системой уравнений (2.8). Так как

$$\varnothing \neq S \cap \{x_1 \neq 0,\, x_2 \neq 0\} \subseteq (\operatorname{int} \overline{V_{\alpha_0,\beta_0}}) \cap \{x_1 \neq 0,\, x_2 \neq 0\} = V_{\alpha_0,\beta_0},$$

$\dot{W}_{\alpha_0,\beta_0} < M/4 < 0$ на V_{α_0,β_0},

$$\varnothing \neq S \cap \{x_1 = 0,\, x_2 \neq 0\} \subseteq U_{(1)} \cap (\operatorname{int} \overline{V_{\beta_0}}) \cap \{x_1 = 0,\, x_2 \neq 0\} = U_{(1)} \cap V_{\beta_0} \cap \{x_1 = 0,\, x_2 \neq 0\},$$

$\dot{W}_{\alpha_0,\beta_0} < \beta_0\Delta/(4a_1) < 0$ при движении на $U_{(1)} \cap V_{\beta_0} \cap \{x_1 = 0,\, x_2 \neq 0\}$,

$$\varnothing \neq S \cap \{x_1 \neq 0,\, x_2 = 0\} \subseteq U_{(2)} \cap (\operatorname{int} \overline{V_{\alpha_0}}) \cap \{x_1 \neq 0,\, x_2 = 0\} = U_{(2)} \cap V_{\alpha_0} \cap \{x_1 \neq 0,\, x_2 = 0\},$$

$\dot{W}_{\alpha_0,\beta_0} < \alpha_0\Delta/(4b_2) < 0$ при движении на $U_{(2)} \cap V_{\alpha_0} \cap \{x_1 \neq 0,\, x_2 = 0\}$, то $\dot{W}_{\alpha_0,\beta_0} < \widehat{M}/4 < 0$ на множестве $S \setminus \{x_1 = 0,\, x_2 = 0\} \neq \varnothing$, где

$$\widehat{M} := \max\left\{M,\, \beta_0\frac{\Delta}{a_1},\, \alpha_0\frac{\Delta}{b_2}\right\} = \\ = \max\left\{\alpha_0(a_1 + b_1) + \beta_0(a_2 + b_2),\, \alpha_0(a_1 - b_1) + \beta_0(-a_2 + b_2),\, \beta_0\frac{\Delta}{a_1},\, \alpha_0\frac{\Delta}{b_2}\right\}.$$

При достаточно малом $c > 0$ подокрестность начала координат $\{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\}$ содержится в S, и поэтому на множестве $\{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\} \setminus \{x_1 = 0,\, x_2 = 0\} \neq \varnothing$ справедлива оценка $\dot{W}_{\alpha_0,\beta_0} < \widehat{M}/4 < 0$, из которой следует, что на последнем множестве траектории приведённой системы протыкают поверхности (при $n = 2$ линии) уровня функции W_{α_0,β_0} извне вовнутрь. При этом решение приведённой системы с начальным значением на множестве $\{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\}$ достигает множества $\{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\} \cap \{x_1 = 0,\, x_2 = 0\}$ за конечное время (меньше чем $-4c/\widehat{M}$). Отсюда при $n=2$ получаем, что нулевое решение приведённой системы асимптотически устойчиво, а при $n \geq 3$ с учетом того, что $\{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\}$ – окрестность начала координат, всюду на множестве $\varnothing \neq \{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\} \cap \{x_1 = 0,\, x_2 = 0\} \subseteq S \cap \{x_1 = 0,\, x_2 = 0\}$ в приведённой системе существует движение, описываемое системой уравнений (2.8), получаем, что устойчивость нулевого решения приведённой системы совпадает с устойчивостью движения на множестве $\{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\} \cap \{x_1 = 0,\, x_2 = 0\} \neq \varnothing$, которая, в свою очередь, совпадает с устойчивостью подматрицы $(c_{ij})_{3\leqslant i,j\leqslant n}$ (см. следствие 2.3).

(ii) Так как $\Delta \neq 0$ и $|b_1| > -a_1$, то выполнены условия случая (a) утверждения 2 леммы 2.1. Пусть $V_{(1)}$ – окрестность начала координат из формулировки этого случая. Согласно этому утверждению в приведённой системе нигде на множестве $V_{(1)} \cap \{x_1 = 0,\, x_2 \neq 0\}$ не существует движения. Поскольку $\Delta \neq 0$ и $|a_2| < -b_2$, то выполнены условия утверждения 1 леммы 2.2. Пусть $U_{(2)}$ – окрестность начала координат из формулировки этого утверждения, V_{α_0} – множество (3.2). Тогда, как показано в доказательстве случая (i) настоящей теоремы, $\operatorname{int}\overline{V_{\alpha_0}}$ – окрестность начала координат, $\dot{W}_{\alpha_0,\beta_0} < \alpha_0\Delta/(4b_2) < 0$ при движении на множестве $\varnothing \neq U_{(2)} \cap (\operatorname{int}\overline{V_{\alpha_0}}) \cap \{x_1 \neq 0,\, x_2 = 0\} = U_{(2)} \cap V_{\alpha_0} \cap \{x_1 \neq 0,\, x_2 = 0\}$. Пусть множества A, B и окрестность D начала координат те же, что и в утверждении 4 леммы 2.5. Тогда, как показано в этом утверждении, $\operatorname{int}\overline{A \cup B}$ – окрестность начала координат. (При $n = 2$ рассуждение, обосновывающее этот факт, такое же, как и при $n \geqslant 3$.) Пусть P, Q – окрестности начала координат, определенные в (3.3). Определим окрестность S начала координат:

$$S := (\operatorname{int}\overline{A \cup B}) \cap V_{(1)} \cap U_{(2)} \cap D \cap P \cap Q \cap (\operatorname{int}\overline{V_{\alpha_0,\beta_0}}) \cap (\operatorname{int}\overline{V_{\alpha_0}}).$$

В силу того, что $\Delta > 0$, $|b_1| > -a_1$, $|a_2| < -b_2$,

$$S \cap \{x_1 = 0,\, x_2 = 0\} \subseteq (\operatorname{int}\overline{A \cup B}) \cap V_{(1)} \cap U_{(2)} \cap D \cap \{x_1 = 0,\, x_2 = 0\},$$

из утверждения 4 леммы 2.5 получаем, что в приведённой системе всюду на множестве $S \cap \{x_1 = 0,\, x_2 = 0\}$ существует движение. Из этого факта так же, как в доказательстве случая (i), делаем вывод, что на $S \cap \{x_1 = 0,\, x_2 = 0\}$ движение описывается системой уравнений (2.8). Так как

$$\varnothing \neq S \cap \{x_1 \neq 0,\, x_2 \neq 0\} \subseteq (\operatorname{int}\overline{V_{\alpha_0,\beta_0}}) \cap \{x_1 \neq 0,\, x_2 \neq 0\} = V_{\alpha_0,\beta_0},$$

$\dot{W}_{\alpha_0,\beta_0} < M/4 < 0$ на V_{α_0,β_0},

$$\varnothing \neq S \cap \{x_1 \neq 0,\, x_2 = 0\} \subseteq U_{(2)} \cap (\operatorname{int}\overline{V_{\alpha_0}}) \cap \{x_1 \neq 0,\, x_2 = 0\} = U_{(2)} \cap V_{\alpha_0} \cap \{x_1 \neq 0,\, x_2 = 0\},$$

$\dot W_{\alpha_0,\beta_0} < \alpha_0\Delta/(4b_2) < 0$ при движении на $U_{(2)} \cap V_{\alpha_0} \cap \{x_1 \neq 0,\, x_2 = 0\}$, то $\dot W_{\alpha_0,\beta_0} < \widehat{M}/4 < 0$ на множестве $S \setminus (\{x_1 = 0,\, x_2 = 0\} \cup \{x_1 = 0,\, x_2 \neq 0\}) = S \setminus \{x_1 = 0\} \neq \varnothing$, где

$$\widehat{M} := \max\left\{M,\, \alpha_0\frac{\Delta}{b_2}\right\} = \max\left\{\alpha_0(a_1+b_1)+\beta_0(a_2+b_2),\, \alpha_0(a_1-b_1)+\beta_0(-a_2+b_2),\, \alpha_0\frac{\Delta}{b_2}\right\}.$$

При достаточно малом $c > 0$ подокрестность начала координат $\{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\}$ содержится в S, и поэтому на множестве $\{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\} \setminus (\{x_1 = 0,\, x_2 = 0\} \cup \{x_1 = 0,\, x_2 \neq 0\}) = \{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\} \setminus \{x_1 = 0\} \neq \varnothing$ справедлива оценка $\dot W_{\alpha_0,\beta_0} < \widehat{M}/4 < 0$. Так как

$$\varnothing \neq \{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\} \cap \{x_1 = 0,\, x_2 \neq 0\} \subseteq S \cap \{x_1 = 0,\, x_2 \neq 0\} \subseteq V_{(1)} \cap \{x_1 = 0,\, x_2 \neq 0\}$$

и в приведённой системе нигде на $V_{(1)} \cap \{x_1 = 0,\, x_2 \neq 0\}$ не существует движения, то в приведённой системе нигде на множестве $\{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\} \cap \{x_1 = 0,\, x_2 \neq 0\}$ тоже не существует движения. Поэтому из последней оценки следует, что на множестве $\{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\} \setminus \{x_1 = 0,\, x_2 = 0\}$ траектории приведённой системы протыкают поверхности (при $n = 2$ линии) уровня функции W_{α_0,β_0} извне вовнутрь. Далее доказательство завершается точно так же, как в случае (i).

(iii) Так как $\Delta \neq 0$ и $|b_1| > -a_1$, то выполнены условия случая (a) утверждения 2 леммы 2.1. Пусть $V_{(1)}$ – окрестность начала координат из формулировки этого случая. Согласно этому утверждению в приведённой системе нигде на множестве $V_{(1)} \cap \{x_1 = 0,\, x_2 \neq 0\}$ не существует движения. Так как $\Delta \neq 0$ и $|a_2| > -b_2$, то выполнены условия утверждения 2 леммы 2.2. Обозначим через $V_{(2)}$ окрестность начала координат из формулировки этого утверждения. В соответствии с этим утверждением в приведённой системе нигде на множестве $V_{(2)} \cap \{x_1 \neq 0,\, x_2 = 0\}$ не существует движения. Пусть множества A, B те же, что и в утверждении 1 леммы 2.5. Как показано в этом утверждении, $\operatorname{int}\overline{A \cup B}$ – окрестность начала координат. (При $n = 2$ обоснование этого факта такое же, как и при $n \geqslant 3$.) Пусть P, Q – окрестности начала координат, определенные в (3.3). Определим окрестность S начала координат:

$$S := (\operatorname{int}\overline{A \cup B}) \cap V_{(1)} \cap V_{(2)} \cap P \cap Q \cap (\operatorname{int}\overline{V_{\alpha_0,\beta_0}}).$$

В силу того, что $|a_1| < b_1$, $|b_2| < -a_2$,

$$\varnothing \neq S \cap \{x_1 = 0,\, x_2 = 0\} \subseteq (\operatorname{int}\overline{A \cup B}) \cap V_{(1)} \cap V_{(2)} \cap \{x_1 = 0,\, x_2 = 0\},$$

из утверждения 1 леммы 2.5 получаем, что в приведённой системе всюду на множестве $S \cap \{x_1 = 0,\, x_2 = 0\}$ существует движение. Из этого факта так же, как в доказательстве случая (i), делаем вывод, что на $S \cap \{x_1 = 0,\, x_2 = 0\}$ движение описывается системой уравнений (2.8). Так как

$$\varnothing \neq S \cap \{x_1 \neq 0,\, x_2 \neq 0\} \subseteq (\operatorname{int} \overline{V_{\alpha_0,\beta_0}}) \cap \{x_1 \neq 0,\, x_2 \neq 0\} = V_{\alpha_0,\beta_0}$$

и $\dot{W}_{\alpha_0,\beta_0} < M/4 < 0$ на V_{α_0,β_0}, то эта оценка справедлива и на множестве $S \cap \{x_1 \neq 0,\, x_2 \neq 0\} \neq \varnothing$. При достаточно малом $c > 0$ подокрестность начала координат $\{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\}$ содержится в S, а значит, $\dot{W}_{\alpha_0,\beta_0} < M/4 < 0$ на $\{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\} \cap \{x_1 \neq 0,\, x_2 \neq 0\}$. Так же, как в случае (ii) настоящей теоремы, доказывается, что в приведённой системе нигде на множестве $\{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\} \cap \{x_1 = 0,\, x_2 \neq 0\}$ не существует движения. Аналогично в приведённой системе нигде на множестве $\{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\} \cap \{x_1 \neq 0,\, x_2 = 0\}$ тоже не существует движения. Далее доказательство завершается точно так же, как в случае (ii), но с заменой $\widehat{M}$ на M.

(iv) Случай (iv) сводится к случаю (ii) преобразованием $(x_1, x_2, \widehat{x}) \mapsto (x_2, x_1, \widehat{x})$.

(v) Случай (v) сводится к случаю (iii) заменой $(x_1, x_2, \widehat{x}) \mapsto (-x_1, x_2, \widehat{x})$.

(vi) Исследуем сначала случай $|a_2| < -b_2$. Так как $n \geqslant 2$, $\Delta \neq 0$, $|a_2| < -b_2$, то выполнены условия утверждения 1 леммы 2.2. Пусть $U_{(2)}$ – окрестность начала координат из формулировки этого утверждения, V_{α_0} – множество (3.2). Так же, как в доказательстве утверждения (i), устанавливаем, что $\operatorname{int} \overline{V_{\alpha_0}}$ – окрестность начала координат, $(\operatorname{int} \overline{V_{\alpha_0}}) \cap \{x_1 \neq 0\} = V_{\alpha_0}$, при движении на множестве $\varnothing \neq U_{(2)} \cap (\operatorname{int} \overline{V_{\alpha_0}}) \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\} = U_{(2)} \cap V_{\alpha_0} \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}$ имеем: $\dot{W}_{\alpha_0,\beta_0} < \alpha_0 \Delta/(4b_2) < 0$. Пусть D – множество из формулировки утверждения 4 леммы 2.5. Рассуждая так же, как в доказательстве этого утверждения, получаем, что D – окрестность начала координат.

Рассмотрим сначала подслучай $n \geqslant 3$, $(c_{13}, \ldots, c_{1n}) \neq (0, \ldots, 0)$, $c_{12} \neq 0$. Покажем, что в этом подслучае существует такая окрестность $\widetilde{W}$ начала координат (например, $\widetilde{W} = T_{(1)\beta_0}$, см. ниже) и такие множества $\widetilde{J}$, K (можно рассмотреть $\widetilde{J} = U_{(1)} \cap V_{\beta_0}$, $K = V_{(1)} \cup V_{(10)0}$, см. ниже), что $\widetilde{W}_1 := \widetilde{W} \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\} \subseteq \widetilde{J}_1 \cup K_1$ (допускается, что одно из объединяемых множеств пусто), где $\widetilde{J}_1 := \widetilde{J} \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}$, $K_1 := K \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}$, в приведённой системе всюду на множестве $\widetilde{J}_1$ есть движение, в котором производная функции W_{α_0,β_0} отрицательна и отделена от нуля константой, нигде на множестве K_1 не существует движения. Так как $\Delta \neq 0$, $a_1 + b_1 = 0$, $-a_1 + b_1 > 0$, $n \geqslant 3$, $(c_{13}, \ldots, c_{1n}) \neq (0, \ldots, 0)$, то выполнены условия утверждения 1б леммы 2.1. Пусть $U_{(1)}$ – множество из формулировки этого утверждения. Согласно этому утверждению в приведённой системе всюду на $U_{(1)} \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}$ существует движение. Следствие 2.1 устанавливает, что это движение описывается системой уравнений (2.1). Пусть V_{β_0} – множество (3.1). Так же, как в доказательстве утверждения (i), устанавливаем, что $\operatorname{int}\overline{V_{\beta_0}}$ – окрестность начала координат, $(\operatorname{int}\overline{V_{\beta_0}})\cap\{x_2\neq 0\}=V_{\beta_0}$, при движении на множестве $U_{(1)}\cap(\operatorname{int}\overline{V_{\beta_0}})\cap\{x_1=0,x_2\neq 0\}=U_{(1)}\cap V_{\beta_0}\cap\{x_1=0,x_2\neq 0\}$ имеем: $\dot W_{\alpha_0,\beta_0}<\beta_0\Delta/(4a_1)<0$. Согласно утверждению 1б леммы 2.1 $U_{(1)}\cap\{x_1=0,x_2\neq 0\}\neq\varnothing$. Кроме этого, при $x\in U_{(1)}\cap\{x_1=0,x_2\neq 0\}$ имеем: $\{\gamma x:0<\gamma\leqslant 1\}\subseteq U_{(1)}\cap\{x_1=0,x_2\neq 0\}$. Пусть C – множество из формулировки утверждения 3 леммы 2.5. Рассуждая так же, как в доказательстве последнего утверждения, получаем, что C – окрестность начала координат. Учитывая, что $\operatorname{int}\overline{V_{\beta_0}}$ – окрестность начала координат, $\operatorname{int}\overline{V_{\beta_0}}\cap\{x_2\neq 0\}=V_{\beta_0}$, получаем, что

$$U_{(1)}\cap C\cap V_{\beta_0}\cap\{x_1=0,x_2\neq 0\}=U_{(1)}\cap C\cap(\operatorname{int}\overline{V_{\beta_0}})\cap\{x_1=0,x_2\neq 0\}\neq\varnothing.$$

Итак, при движении на множестве $\varnothing\neq U_{(1)}\cap(\operatorname{int}\overline{V_{\beta_0}})\cap\{x_1=0,x_2\neq 0\}=U_{(1)}\cap V_{\beta_0}\cap\{x_1=0,x_2\neq 0\}$ имеем: $\dot W_{\alpha_0,\beta_0}<\beta_0\Delta/(4a_1)<0$. В силу того, что $n\geqslant 2$, $\Delta\neq 0$, $a_1+b_1=0$, $-a_1+{}+b_1>0$, $(c_{12},\ldots,c_{1n})\neq(0,\ldots,0)$, имеем, что выполнены условия утверждения 2б леммы 2.1. Пусть $V_{(1)}$ – множество из формулировки этого утверждения. Согласно этому утверждению в приведённой системе нигде на $V_{(1)}\cap\{x_1=0,x_2\neq 0\}\neq\varnothing$ не существует движения. Поскольку $\Delta\neq 0$, $a_1+b_1=0$, $-a_1+b_1>0$, $a_2+b_2<0$, $n\geqslant 3$, $(c_{13},\ldots,c_{1n})\neq(0,\ldots,0)$, $c_{12}\neq 0$, то выполнены условия утверждения 3а (при $c_{12}>0$) и утверждения 3б (при $c_{12}<0$) леммы 2.1. Пусть $V_{(10)}$ – окрестность начала координат из формулировки утверждения 3а (при $c_{12}>0$) и утверждения 3б (при $c_{12}<0$) леммы 2.1. Положим $V_{(10)0}:=V_{(10)}\cap\{C_1(x)=0\}$. Согласно этим утверждениям в приведённой системе нигде на $V_{(10)0}\cap\{x_1=0,x_2\neq 0\}\neq\varnothing$ не существует движения. Таким образом, в приведённой системе нигде на $(V_{(1)}\cup V_{(10)0})\cap\{x_1=0,x_2\neq 0\}\neq\varnothing$ не существует движения. При $c_{12}>0$

$$\begin{gathered}(U_{(1)}\cap C\cap V_{\beta_0})\cup V_{(1)}\cup V_{(10)0}\cup\{x_2=0\}\supseteq\Bigg\{|C_1(x)|<-2a_1,\left|C_{2\hat 1}(x)-\frac{a_2}{a_1}C_{1\hat 1}(x)\right|<-\frac{\Delta}{a_1},\\ \beta_0\left|C_{2\hat 1}(x)-\frac{a_2}{a_1}C_{1\hat 1}(x)\right|+2Q_{\hat 1}(x)<-\frac{3}{4}\beta_0\frac{\Delta}{a_1},\left|D_{1\hat 1}(x)-c_{12}\frac{a_2}{a_1}C_{1\hat 1}(x)\right|<-c_{12}\frac{\Delta}{a_1}\Bigg\}.\end{gathered}$$

Так как $a_1<0$, $\Delta>0$, $\beta_0>0$, $c_{12}>0$, то начало координат принадлежит последнему множеству. Учитывая открытость последнего множества и только что выписанное включение, получаем, что при $c_{12}>0$ $O\in\operatorname{int}((U_{(1)}\cap C\cap V_{\beta_0})\cup V_{(1)}\cup V_{(10)0}\cup\{x_2=0\})=:T_{(1)\beta_0}$. Таким образом, при $c_{12} > 0$ $T_{(1)\beta_0}$ – окрестность начала координат. При $c_{12} < 0$

$$(U_{(1)} \cap C \cap V_{\beta_0}) \cup V_{(1)} \cup V_{(10)0} \cup \{x_2 = 0\} \supseteq \Biggl\{ |C_1(x)| < -2a_1, \left| C_{2\hat{1}}(x) - \frac{a_2}{a_1} C_{1\hat{1}}(x) \right| < -\frac{\Delta}{a_1}, \\ \beta_0 \left| C_{2\hat{1}}(x) - \frac{a_2}{a_1} C_{1\hat{1}}(x) \right| + 2Q_{\hat{1}}(x) < -\frac{3}{4}\beta_0 \frac{\Delta}{a_1}, |D_1(x)| < c_{12}(a_2 + b_2) \Biggr\}.$$

Так как $a_1 < 0$, $\Delta > 0$, $\beta_0 > 0$, $c_{12} < 0$, $a_2 + b_2 < 0$, то начало координат принадлежит последнему множеству. Рассуждая так же, как в случае $c_{12} > 0$, получаем, что при $c_{12} < 0$ $T_{(1)\beta_0}$ – окрестность начала координат. Таким образом, при $c_{12} \neq 0$ $T_{(1)\beta_0}$ – окрестность начала координат. Пусть $T_{(1)}$ – окрестность начала координат из формулировки утверждения 6а леммы 2.5. Так как

$$(U_{(1)} \cap C \cap V_{\beta_0}) \cup V_{(1)} \cup V_{(10)0} \cup \{x_2 = 0\} \subseteq (U_{(1)} \cap C) \cup V_{(1)} \cup V_{(10)0} \cup \{x_2 = 0\},$$

то $T_{(1)\beta_0} \subseteq T_{(1)}$.

Пусть множества A, B те же, что и в утверждении 6 леммы 2.5. Тогда, как показано в этом утверждении, $\operatorname{int}\overline{A \cup B}$ – окрестность начала координат. Пусть P, Q – окрестности начала координат, определенные в (3.3). Определим окрестность S начала координат:

$$S := (\operatorname{int}\overline{A \cup B}) \cap T_{(1)\beta_0} \cap U_{(2)} \cap D \cap P \cap Q \cap (\operatorname{int}\overline{V_{\alpha_0,\beta_0}}) \cap (\operatorname{int}\overline{V_{\alpha_0}}).$$

В силу того, что $n \geqslant 3$, $a_1 + b_1 = 0$, $-a_1 + b_1 > 0$, $|a_2| < -b_2$, $(c_{13}, \ldots, c_{1n}) \neq (0, \ldots, 0)$, $c_{12} \neq 0$,

$$S \cap \{x_1 = 0, x_2 = 0\} \subseteq (\operatorname{int}\overline{A \cup B}) \cap T_{(1)\beta_0} \cap U_{(2)} \cap D \cap \{x_1 = 0, x_2 = 0\} \subseteq \\ \subseteq (\operatorname{int}\overline{A \cup B}) \cap T_{(1)} \cap U_{(2)} \cap D \cap \{x_1 = 0, x_2 = 0\},$$

из утверждения 6а леммы 2.5 получаем, что в приведённой системе всюду на множестве $S \cap \{x_1 = 0, x_2 = 0\}$ существует движение. Из этого факта так же, как в доказательстве утверждения (i), делаем вывод, что на $S \cap \{x_1 = 0, x_2 = 0\}$ движение описывается системой уравнений (2.8). Так как

$$\varnothing \neq S \cap \{x_1 \neq 0, x_2 \neq 0\} \subseteq (\operatorname{int}\overline{V_{\alpha_0,\beta_0}}) \cap \{x_1 \neq 0, x_2 \neq 0\} = V_{\alpha_0,\beta_0},$$

$\dot{W}_{\alpha_0,\beta_0} < M/4 < 0$ на V_{α_0,β_0},

$$\varnothing \neq S \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\} \subseteq \\ \subseteq \bigl(U_{(1)} \cap V_{\beta_0} \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}\bigr) \cup \bigl((V_{(1)} \cup V_{(10)0}) \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}\bigr),$$

$\dot{W}_{\alpha_0,\beta_0} < \beta_0\Delta/(4a_1) < 0$ при движении на $U_{(1)} \cap V_{\beta_0} \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\} \neq \varnothing$,

$$\varnothing \neq S \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\} \subseteq$$
$$\subseteq U_{(2)} \cap (\operatorname{int} \overline{V_{\alpha_0}}) \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\} = U_{(2)} \cap V_{\alpha_0} \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\},$$

$\dot{W}_{\alpha_0,\beta_0} < \alpha_0\Delta/(4b_2) < 0$ при движении на $U_{(2)} \cap V_{\alpha_0} \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}$, то $\dot{W}_{\alpha_0,\beta_0} < \widehat{M}/4 < 0$, где

$$\widehat{M} := \max\left\{M, \beta_0\frac{\Delta}{a_1}, \alpha_0\frac{\Delta}{b_2}\right\} =$$
$$= \max\left\{\alpha_0(a_1+b_1) + \beta_0(a_2+b_2), \alpha_0(a_1-b_1) + \beta_0(-a_2+b_2), \beta_0\frac{\Delta}{a_1}, \alpha_0\frac{\Delta}{b_2}\right\},$$

на множестве $S \setminus (\{x_1 = 0, x_2 = 0\} \cup ((V_{(1)} \cup V_{(10)0}) \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\})) \neq \varnothing$. При достаточно малом $c > 0$ подокрестность начала координат $\{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\}$ содержится в S, и поэтому на множестве

$$\{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\} \setminus \Big(\{x_1 = 0, x_2 = 0\} \cup \big((V_{(1)} \cup V_{(10)0}) \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}\big)\Big) \neq \varnothing$$

справедлива оценка $\dot{W}_{\alpha_0,\beta_0} < \widehat{M}/4 < 0$. Рассмотрим множество

$$E := \{x_2 > 0, C_1(x) > 0\} \cup \{x_2 < 0, C_1(x) < 0\} \subseteq V_{(1)}.$$

Так как $n \geqslant 3$, $(c_{13}, \ldots, c_{1n}) \neq (0, \ldots, 0)$, то $E \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\} \neq \varnothing$. Кроме этого, при $x \in E \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}$ имеем: $\{\gamma x : \gamma > 0\} \subseteq E \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}$. Учитывая, что $\{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\}$ – окрестность начала координат, из последних двух фактов получаем, что $\{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\} \cap E \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\} \neq \varnothing$. Так как $E \subseteq V_{(1)}$, то отсюда следует, что $\{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\} \cap V_{(1)} \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\} \neq \varnothing$. Поскольку $n \geqslant 3$, $(c_{13}, \ldots, c_{1n}) \neq (0, \ldots, 0)$, то $\{x_1 = 0, x_2 \neq 0, C_1(x) = 0\} \neq \varnothing$. Отсюда вытекает, что замыкание последнего множества содержит начало координат. Учитывая, что $\{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\}$, $V_{(10)}$ – окрестности начала координат, получаем, что $\{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\} \cap V_{(10)0} \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\} \neq \varnothing$. Таким образом, в приведённой системе нигде на $\{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\} \cap (V_{(1)} \cup V_{(10)0}) \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\} \neq \varnothing$ не существует движения. Поэтому из последней оценки следует, что на множестве $\{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\} \setminus \{x_1 = 0, x_2 = 0\}$ траектории приведённой системы протыкают поверхности уровня функции W_{α_0,β_0} извне вовнутрь. Далее доказательство завершается точно так же, как в утверждении (i), но с исключением рассуждений, относящихся к $n = 2$.

Перейдем к подслучаю $(c_{13}, \ldots, c_{1n}) = (0, \ldots, 0)$ (при $n = 2$ здесь и далее во всем доказательстве настоящей теоремы это условие исключается), $c_{12} < 0$. Покажем, что в этом подслучае существует такая окрестность $\widetilde{W}$ начала координат (например, $\widetilde{W} = T_{(1)\beta_0}$, см. ниже) и такие множества $\widetilde{J}$, K (можно рассмотреть $\widetilde{J} = U_{(1)} \cap V_{\beta_0}$, $K = V_{(1)}$, см. ниже), что $\widetilde{W}_1 := \widetilde{W} \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\} \subseteq \widetilde{J}_1 \cup K_1$ (допускается, что одно из объединяемых множеств пусто), где $\widetilde{J}_1 := \widetilde{J} \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}$, $K_1 := K \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}$, в приведённой системе всюду на множестве $\widetilde{J}_1$ есть движение, в котором производная функции W_{α_0,β_0} отрицательна и отделена от нуля константой, нигде на множестве K_1 не существует движения. Так как $n \geqslant 2$, $\Delta \neq 0$, $a_1 + b_1 = 0$, $-a_1 + b_1 > 0$, $c_{12} < 0$, то выполнены условия утверждения 1б леммы 2.1. Пусть $U_{(1)}$ – множество из формулировки этого утверждения. Согласно этому утверждению в приведённой системе всюду на $U_{(1)} \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\} \neq \varnothing$ существует движение. Следствие 2.1 устанавливает, что это движение описывается системой уравнений (2.1). Пусть V_{β_0} – множество (3.1). Так же, как в доказательстве утверждения (i), устанавливаем, что $\operatorname{int} \overline{V_{\beta_0}}$ – окрестность начала координат, $(\operatorname{int} \overline{V_{\beta_0}}) \cap \{x_2 \neq 0\} = V_{\beta_0}$, при движении на множестве

$$U_{(1)} \cap (\operatorname{int} \overline{V_{\beta_0}}) \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\} = U_{(1)} \cap V_{\beta_0} \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}$$

имеем: $\dot{W}_{\alpha_0,\beta_0} < \beta_0 \Delta/(4a_1) < 0$. Пусть C – множество из формулировки утверждения 3 леммы 2.5. Рассуждая так же, как в доказательстве последнего утверждения, получаем, что C – окрестность начала координат. Так же, как в подслучае $n \geqslant 3$, $(c_{13}, \ldots, c_{1n}) \neq (0, \ldots, 0)$, $c_{12} \neq 0$, обосновываем, что

$$U_{(1)} \cap C \cap V_{\beta_0} \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\} = U_{(1)} \cap C \cap (\operatorname{int} \overline{V_{\beta_0}}) \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\} \neq \varnothing.$$

(При $n = 2$ рассуждение, обосновывающее этот факт, такое же, как и при $n \geqslant 3$.) Итак, при движении на множестве

$$\varnothing \neq U_{(1)} \cap (\operatorname{int} \overline{V_{\beta_0}}) \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\} = U_{(1)} \cap V_{\beta_0} \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}$$

имеем: $\dot{W}_{\alpha_0,\beta_0} < \beta_0 \Delta/(4a_1) < 0$. В силу того, что $n \geqslant 2$, $\Delta \neq 0$, $a_1 + b_1 = 0$, $-a_1 + b_1 > > 0$, $(c_{12}, \ldots, c_{1n}) \neq (0, \ldots, 0)$, имеем, что выполнены условия утверждения 2б леммы 2.1. Пусть $V_{(1)}$ – множество из формулировки этого утверждения. Согласно этому утверждению в приведённой системе нигде на $V_{(1)} \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\} \neq \varnothing$ не существует движения. Имеем:

$$\begin{gathered}(U_{(1)} \cap C \cap V_{\beta_0}) \cup V_{(1)} \cup \{C_1(x) = 0\} \cup \{x_2 = 0\} \supseteq \{|C_1(x)| < -2a_1, \\ \left| C_{2\widehat{1}}(x) - \frac{a_2}{a_1} C_{1\widehat{1}}(x) \right| < -\frac{\Delta}{a_1}, \beta_0 \left| C_{2\widehat{1}}(x) - \frac{a_2}{a_1} C_{1\widehat{1}}(x) \right| + 2Q_{\widehat{1}}(x) < -\frac{3}{4} \beta_0 \frac{\Delta}{a_1} \right\}.\end{gathered}$$

Так как $a_1 < 0$, $\Delta > 0$, $\beta_0 > 0$, то начало координат принадлежит последнему множеству. Учитывая открытость последнего множества и только что выписанное включение, получаем, что $O \in \operatorname{int}((U_{(1)} \cap C \cap V_{\beta_0}) \cup V_{(1)} \cup \{C_1(x) = 0\} \cup \{x_2 = 0\}) =: T_{(1)\beta_0}$. Таким образом, $T_{(1)\beta_0}$ – окрестность начала координат. Пусть $T_{(1)}$ – окрестность начала координат из формулировки утверждения 6б леммы 2.5. (При $n = 2$ здесь и далее во всем доказательстве настоящей теоремы рассуждения, относящиеся к окрестности $T_{(1)}$ начала координат, исключаются.) Так как

$$(U_{(1)} \cap C \cap V_{\beta_0}) \cup V_{(1)} \cup \{C_1(x) = 0\} \cup \{x_2 = 0\} \subseteq (U_{(1)} \cap C) \cup V_{(1)} \cup \{C_1(x) = 0\} \cup \{x_2 = 0\},$$

то $T_{(1)\beta_0} \subseteq T_{(1)}$.

Пусть множества A, B те же, что и в утверждении 6 леммы 2.5. Тогда, как показано в этом утверждении, $\operatorname{int} \overline{A \cup B}$ – окрестность начала координат (при $n = 2$ рассуждение, доказывающее этот факт, такое же, как и при $n \geqslant 3$). Пусть P, Q – окрестности начала координат, определенные в (3.3). Определим окрестность S начала координат:

$$S := (\operatorname{int} \overline{A \cup B}) \cap T_{(1)\beta_0} \cap U_{(2)} \cap D \cap P \cap Q \cap (\operatorname{int} \overline{V_{\alpha_0,\beta_0}}) \cap (\operatorname{int} \overline{V_{\alpha_0}}).$$

Так как $n \geqslant 3$, $a_1 + b_1 = 0$, $-a_1 + b_1 > 0$, $|a_2| < -b_2$, $(c_{13}, \ldots, c_{1n}) = (0, \ldots, 0)$, $c_{12} < 0$,

$$S \cap \{x_1 = 0, x_2 = 0\} \subseteq (\operatorname{int} \overline{A \cup B}) \cap T_{(1)\beta_0} \cap U_{(2)} \cap D \cap \{x_1 = 0, x_2 = 0\} \subseteq$$
$$\subseteq (\operatorname{int} \overline{A \cup B}) \cap T_{(1)} \cap U_{(2)} \cap D \cap \{x_1 = 0, x_2 = 0\},$$

то из утверждения 6б леммы 2.5 получаем, что в приведённой системе всюду на множестве $S \cap \{x_1 = 0, x_2 = 0\}$ существует движение. Из этого факта так же, как в доказательстве утверждения (i), делаем вывод, что на $S \cap \{x_1 = 0, x_2 = 0\}$ движение описывается системой уравнений (2.8). Так как

$$\varnothing \neq S \cap \{x_1 \neq 0, x_2 \neq 0\} \subseteq (\operatorname{int} \overline{V_{\alpha_0,\beta_0}}) \cap \{x_1 \neq 0, x_2 \neq 0\} = V_{\alpha_0,\beta_0},$$

$\dot{W}_{\alpha_0,\beta_0} < M/4 < 0$ на V_{α_0,β_0},

$$\varnothing \neq S \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\} \subseteq \big(U_{(1)} \cap V_{\beta_0} \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}\big) \cup \big(V_{(1)} \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}\big)$$

(в силу того, что $(c_{13}, \ldots, c_{1n}) = (0, \ldots, 0)$, $c_{12} \neq 0$, имеем: $\{C_1(x) = 0\} \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\} = \varnothing$), $\dot{W}_{\alpha_0,\beta_0} < \beta_0 \Delta/(4a_1) < 0$ при движении на $U_{(1)} \cap V_{\beta_0} \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\} \neq \varnothing$,

$$\varnothing \neq S \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\} \subseteq U_{(2)} \cap (\operatorname{int} \overline{V_{\alpha_0}}) \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\} =$$
$$= U_{(2)} \cap V_{\alpha_0} \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\},$$

$\dot W_{\alpha_0,\beta_0} < \alpha_0\Delta/(4b_2) < 0$ при движении на $U_{(2)} \cap V_{\alpha_0} \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}$, то $\dot W_{\alpha_0,\beta_0} < \widehat{M}/4 < 0$, где

$$\widehat{M} := \max\left\{M, \beta_0\frac{\Delta}{a_1}, \alpha_0\frac{\Delta}{b_2}\right\} =$$
$$= \max\left\{\alpha_0(a_1+b_1)+\beta_0(a_2+b_2), \alpha_0(a_1-b_1)+\beta_0(-a_2+b_2), \beta_0\frac{\Delta}{a_1}, \alpha_0\frac{\Delta}{b_2}\right\},$$

на множестве $S\setminus(\{x_1=0,x_2=0\}\cup(V_{(1)}\cap\{x_1=0,x_2\neq 0\}))\neq\varnothing$. При достаточно малом $c>0$ подокрестность начала координат $\{W_{\alpha_0,\beta_0}<c\}$ содержится в S, и поэтому на множестве

$$\{W_{\alpha_0,\beta_0}<c\}\setminus\big(\{x_1=0,x_2=0\}\cup(V_{(1)}\cap\{x_1=0,x_2\neq 0\})\big)\neq\varnothing$$

справедлива оценка $\dot W_{\alpha_0,\beta_0} < \widehat{M}/4 < 0$. Так как в приведённой системе нигде на $V_{(1)}\cap$ $\cap\{x_1=0,x_2\neq 0\}\neq\varnothing$ не существует движения, то из последней оценки следует, что на множестве $\{W_{\alpha_0,\beta_0}<c\}\setminus\{x_1=0,x_2=0\}$ траектории приведённой системы протыкают поверхности (при $n=2$ линии) уровня функции W_{α_0,β_0} извне вовнутрь. Далее доказательство завершается точно так же, как в утверждении (i).

Исследуем подслучай $(c_{13},\ldots,c_{1n})=(0,\ldots,0)$, $c_{12}>0$. Так как $n\geqslant 2$, $\Delta\neq 0$, $a_1+b_1=0$, $-a_1+b_1>0$, $(c_{12},\ldots,c_{1n})\neq(0,\ldots,0)$, то выполнены условия утверждения 2б леммы 2.1. Пусть $V_{(1)}$ – множество из формулировки этого утверждения. Рассмотрим множество

$$E := \{x_2>0, C_1(x)>0\}\cup\{x_2<0, C_1(x)<0\}\subseteq V_{(1)}.$$

Так как $(c_{13},\ldots,c_{1n})=(0,\ldots,0)$, $c_{12}>0$, то $E\cap\{x_1=0,x_2\neq 0\}=\{x_1=0,x_2\neq 0\}$. Согласно утверждению 2б леммы 2.1 в приведённой системе нигде на $V_{(1)}\cap\{x_1=0,x_2\neq 0\}$ не существует движения. Поэтому в приведённой системе нигде на $E\cap\{x_1=0,x_2\neq 0\}=\{x_1=0,x_2\neq 0\}$ не существует движения. Пусть множества A, B те же, что и в утверждении 6 леммы 2.5. Тогда, как показано в этом утверждении, $\operatorname{int}\overline{A\cup B}$ – окрестность начала координат (при $n=2$ рассуждение, доказывающее этот факт, такое же, как и при $n\geqslant 3$). Пусть P, Q – окрестности начала координат, определенные в (3.3). Определим окрестность S начала координат:

$$S := (\operatorname{int}\overline{A\cup B})\cap U_{(2)}\cap D\cap P\cap Q\cap(\operatorname{int}\overline{V_{\alpha_0,\beta_0}})\cap(\operatorname{int}\overline{V_{\alpha_0}}).$$

Так как $n\geqslant 3$, $a_1+b_1=0$, $-a_1+b_1>0$, $|a_2|<-b_2$, $(c_{13},\ldots,c_{1n})=(0,\ldots,0)$, $c_{12}>0$,

$$S\cap\{x_1=0,x_2=0\}\subseteq(\operatorname{int}\overline{A\cup B})\cap U_{(2)}\cap D\cap\{x_1=0,x_2=0\},$$

то из утверждения 6в леммы 2.5 получаем, что в приведённой системе всюду на множестве $S\cap\{x_1=0,x_2=0\}$ существует движение. Из этого факта так же, как в доказательстве утверждения (i), делаем вывод, что на $S \cap \{x_1 = 0, x_2 = 0\}$ движение описывается системой уравнений (2.8). Так как

$$\varnothing \neq S \cap \{x_1 \neq 0, x_2 \neq 0\} \subseteq (\operatorname{int} \overline{V_{\alpha_0,\beta_0}}) \cap \{x_1 \neq 0, x_2 \neq 0\} = V_{\alpha_0,\beta_0},$$

$\dot{W}_{\alpha_0,\beta_0} < M/4 < 0$ на V_{α_0,β_0},

$$\varnothing \neq S \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\} \subseteq U_{(2)} \cap (\operatorname{int} \overline{V_{\alpha_0}}) \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\} = U_{(2)} \cap V_{\alpha_0} \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\},$$

$\dot{W}_{\alpha_0,\beta_0} < \alpha_0\Delta/(4b_2) < 0$ при движении на $U_{(2)} \cap V_{\alpha_0} \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}$, то $\dot{W}_{\alpha_0,\beta_0} < \widehat{M}/4 < 0$, где

$$\widehat{M} := \max\left\{M, \alpha_0\frac{\Delta}{b_2}\right\} = \max\left\{\alpha_0\left(a_1+b_1\right)+\beta_0\left(a_2+b_2\right), \alpha_0\left(a_1-b_1\right)+\beta_0\left(-a_2+b_2\right), \alpha_0\frac{\Delta}{b_2}\right\},$$

на множестве $S \setminus (\{x_1 = 0, x_2 = 0\} \cup \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}) = S \setminus \{x_1 = 0\} \neq \varnothing$. При достаточно малом $c > 0$ подокрестность начала координат $\{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\}$ содержится в S, и поэтому на множестве

$$\{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\} \setminus (\{x_1 = 0, x_2 = 0\} \cup \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}) = \{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\} \setminus \{x_1 = 0\} \neq \varnothing$$

справедлива оценка $\dot{W}_{\alpha_0,\beta_0} < \widehat{M}/4 < 0$. Так как

$$\varnothing \neq \{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\} \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\} \subseteq \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\},$$

в приведённой системе нигде на $\{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}$ не существует движения, то в приведённой системе нигде на множестве $\{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\} \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}$ тоже не существует движения. Поэтому из последней оценки следует, что на множестве $\{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\} \setminus \{x_1 = 0, x_2 = 0\}$ траектории приведённой системы протыкают поверхности (при $n = 2$ линии) уровня функции W_{α_0,β_0} извне вовнутрь. Далее доказательство завершается точно так же, как в утверждении (i).

Разберем подслучай $(c_{12}, \ldots, c_{1n}) = (0, \ldots, 0)$, $c_{11} > 0$. Так как $n \geqslant 2$, $\Delta \neq 0$, $a_1 + b_1 = 0$, $-a_1 + b_1 > 0$, $(c_{12}, \ldots, c_{1n}) = (0, \ldots, 0)$, $c_{11} > 0$, то выполнены условия утверждения 2в леммы 2.1. Это утверждение устанавливает, что в приведённой системе нигде на $\{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}$ не существует движения. Далее доказательство завершается точно так же, как в подслучае $(c_{13}, \ldots, c_{1n}) = (0, \ldots, 0)$, $c_{12} > 0$, но с заменой условий $(c_{13}, \ldots, c_{1n}) = (0, \ldots, 0)$, $c_{12} > 0$ на условия $(c_{12}, \ldots, c_{1n}) = (0, \ldots, 0)$, $c_{11} > 0$.

Переходим к подслучаю $(c_{12}, \ldots, c_{1n}) = (0, \ldots, 0)$, $c_{11} \leqslant 0$. Так как $n \geqslant 2$, $\Delta \neq 0$, $a_1 + {}+b_1 = 0$, $-a_1 + b_1 > 0$, $(c_{12}, \ldots, c_{1n}) = (0, \ldots, 0)$, $c_{11} \leqslant 0$, то выполнены условия утверждения 1в леммы 2.1. Согласно этому утверждению в приведённой системе всюду на $\{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}$ существует движение. Следствие 2.1 устанавливает, что это движение описывается системой уравнений (2.1). Пусть V_{β_0} – множество (3.1). Так же, как в доказательстве утверждения (i), устанавливаем, что $\operatorname{int}\overline{V_{\beta_0}}$ – окрестность начала координат, $(\operatorname{int}\overline{V_{\beta_0}}) \cap \{x_2 \neq 0\} = V_{\beta_0}$, при движении на множестве $\varnothing \neq (\operatorname{int}\overline{V_{\beta_0}}) \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\} = V_{\beta_0} \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}$ имеем: $\dot{W}_{\alpha_0,\beta_0} < \beta_0\Delta/(4a_1) < 0$. Пусть множества A, B те же, что и в утверждении 6 леммы 2.5. Тогда, как показано в этом утверждении, $\operatorname{int}\overline{A \cup B}$ – окрестность начала координат (при $n = 2$ рассуждение, доказывающее этот факт, такое же, как и при $n \geqslant 3$). Пусть P, Q – окрестности начала координат, определенные в (3.3). Определим окрестность S начала координат:

$$S := (\operatorname{int}\overline{A \cup B}) \cap C \cap U_{(2)} \cap D \cap P \cap Q \cap (\operatorname{int}\overline{V_{\alpha_0,\beta_0}}) \cap (\operatorname{int}\overline{V_{\beta_0}}) \cap (\operatorname{int}\overline{V_{\alpha_0}}).$$

Так как $n \geqslant 3$, $a_1 + b_1 = 0$, $-a_1 + b_1 > 0$, $|a_2| < -b_2$, $(c_{12}, \dots, c_{1n}) = (0, \dots, 0)$, $c_{11} \leqslant 0$,

$$S \cap \{x_1 = 0, x_2 = 0\} \subseteq (\operatorname{int}\overline{A \cup B}) \cap C \cap U_{(2)} \cap D \cap \{x_1 = 0, x_2 = 0\},$$

то из утверждения 6г леммы 2.5 получаем, что в приведённой системе всюду на множестве $S \cap \{x_1 = 0, x_2 = 0\}$ существует движение. Из этого факта так же, как в доказательстве утверждения (i), делаем вывод, что на $S \cap \{x_1 = 0, x_2 = 0\}$ движение описывается системой уравнений (2.8). Так как

$$\varnothing \neq S \cap \{x_1 \neq 0, x_2 \neq 0\} \subseteq (\operatorname{int}\overline{V_{\alpha_0,\beta_0}}) \cap \{x_1 \neq 0, x_2 \neq 0\} = V_{\alpha_0,\beta_0},$$

$\dot{W}_{\alpha_0,\beta_0} < M/4 < 0$ на V_{α_0,β_0},

$$\varnothing \neq S \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\} \subseteq (\operatorname{int}\overline{V_{\beta_0}}) \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\} = V_{\beta_0} \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\},$$

$\dot{W}_{\alpha_0,\beta_0} < \beta_0\Delta/(4a_1) < 0$ при движении на $V_{\beta_0} \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}$,

$$\varnothing \neq S \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\} \subseteq U_{(2)} \cap (\operatorname{int}\overline{V_{\alpha_0}}) \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\} = U_{(2)} \cap V_{\alpha_0} \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\},$$

$\dot{W}_{\alpha_0,\beta_0} < \alpha_0\Delta/(4b_2) < 0$ при движении на $U_{(2)} \cap V_{\alpha_0} \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}$, то $\dot{W}_{\alpha_0,\beta_0} < \widehat{M}/4 < 0$, где

$$\begin{aligned}\widehat{M} :&= \max\left\{M, \beta_0\frac{\Delta}{a_1}, \alpha_0\frac{\Delta}{b_2}\right\} = \\ &= \max\left\{\alpha_0\left(a_1 + b_1\right) + \beta_0\left(a_2 + b_2\right), \alpha_0\left(a_1 - b_1\right) + \beta_0\left(-a_2 + b_2\right), \beta_0\frac{\Delta}{a_1}, \alpha_0\frac{\Delta}{b_2}\right\},\end{aligned}$$

на множестве $S \setminus \{x_1 = 0, x_2 = 0\} \neq \varnothing$. Далее доказательство завершается точно так же, как в утверждении (i).

Перейдем к случаю $|b_2| < -a_2$. Так как $n \geqslant 2$, $\Delta \neq 0$, $|a_2| = -a_2 > |b_2| \geqslant -b_2$, то выполнены условия утверждения 2 леммы 2.2. Пусть $V_{(2)}$ – окрестность начала координат из формулировки этого утверждения. Согласно этому утверждению в приведённой системе нигде на $V_{(2)} \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}$ не существует движения.

Далее доказательство завершается точно таким же рассмотрением тех же самых подслучаев, что и в случае $|a_2| < -b_2$, но со следующими изменениями.

В подслучае $n \geqslant 3$, $(c_{13}, \dots, c_{1n}) \neq (0, \dots, 0)$, $c_{12} \neq 0$ (см. с. 62–63) изменения таковы:

1. Пусть множества A, B те же, что и в утверждении 7 леммы 2.5.

2. Определим окрестность S начала координат:

$$S := (\operatorname{int} \overline{A \cup B}) \cap T_{(1)\beta_0} \cap V_{(2)} \cap P \cap Q \cap (\operatorname{int} \overline{V_{\alpha_0,\beta_0}}).$$

3. В силу того, что $n \geqslant 3$, $a_1 + b_1 = 0$, $-a_1 + b_1 > 0$, $|b_2| < -a_2$, $(c_{13}, \dots, c_{1n}) \neq (0, \dots, 0)$, $c_{12} \neq 0$,

$$\begin{aligned} S \cap \{x_1 = 0, x_2 = 0\} &\subseteq (\operatorname{int} \overline{A \cup B}) \cap T_{(1)\beta_0} \cap V_{(2)} \cap \{x_1 = 0, x_2 = 0\} \subseteq \\ &\subseteq (\operatorname{int} \overline{A \cup B}) \cap T_{(1)} \cap V_{(2)} \cap \{x_1 = 0, x_2 = 0\} \end{aligned},$$

из утверждения 7а леммы 2.5 получаем, что в приведённой системе всюду на множестве $S \cap \{x_1 = 0, x_2 = 0\}$ существует движение.

4. Так как

$$\varnothing \neq S \cap \{x_1 \neq 0, x_2 \neq 0\} \subseteq (\operatorname{int} \overline{V_{\alpha_0,\beta_0}}) \cap \{x_1 \neq 0, x_2 \neq 0\} = V_{\alpha_0,\beta_0},$$

$\dot W_{\alpha_0,\beta_0} < M/4 < 0$ на V_{α_0,β_0},

$\varnothing \neq S \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\} \subseteq \big(U_{(1)} \cap V_{\beta_0} \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}\big) \cup \big((V_{(1)} \cup V_{(10)0}) \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}\big)$,

$\dot W_{\alpha_0,\beta_0} < \beta_0 \Delta/(4a_1) < 0$ при движении на $U_{(1)} \cap V_{\beta_0} \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\} \neq \varnothing$, то $\dot W_{\alpha_0,\beta_0} < \widehat{M}/4 < < 0$, где

$$\widehat{M} := \max\left\{M, \beta_0 \frac{\Delta}{a_1}\right\} = \max\left\{\alpha_0(a_1 + b_1) + \beta_0(a_2 + b_2), \alpha_0(a_1 - b_1) + \beta_0(-a_2 + b_2), \beta_0 \frac{\Delta}{a_1}\right\},$$

на множестве

$$S \setminus (\{x_1 = 0, x_2 = 0\} \cup ((V_{(1)} \cup V_{(10)0}) \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}) \cup \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}) \neq \varnothing.$$

При достаточно малом $c > 0$ подокрестность начала координат $\{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\}$ содержится в S, и поэтому на множестве

$$\{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\} \setminus (\{x_1 = 0, x_2 = 0\} \cup ((V_{(1)} \cup V_{(10)0}) \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}) \cup \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}) \neq \varnothing$$

справедлива оценка $\dot{W}_{\alpha_0,\beta_0} < \widehat{M}/4 < 0$.

5. Так как

$$\varnothing \neq \{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\} \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\} \subseteq S \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\} \subseteq V_{(2)} \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}$$

и в приведённой системе нигде на $V_{(2)} \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}$ не существует движения, то в приведённой системе нигде на множестве $\{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\} \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}$ тоже не существует движения. Поэтому из последней оценки следует, что на множестве $\{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\} \setminus \{x_1 = 0, x_2 = 0\}$ траектории приведённой системы протыкают поверхности уровня функции W_{α_0,β_0} извне вовнутрь.

В подслучае $(c_{13}, \ldots, c_{1n}) = (0, \ldots, 0)$, $c_{12} < 0$ (см. с. 65–66) делаются следующие изменения:

1. Пояснения в скобках про исключение условий, рассуждений, множеств при $n = 2$ отсутствуют.

2. Пусть множества A, B те же, что и в утверждении 7 леммы 2.5.

3. Определим окрестность S начала координат:

$$S := (\operatorname{int} \overline{A \cup B}) \cap T_{(1)\beta_0} \cap V_{(2)} \cap P \cap Q \cap (\operatorname{int} \overline{V_{\alpha_0,\beta_0}}).$$

4. Так как $n \geqslant 3$, $a_1 + b_1 = 0$, $-a_1 + b_1 > 0$, $|b_2| < -a_2$, $(c_{13}, \ldots, c_{1n}) = (0, \ldots, 0)$, $c_{12} < 0$,

$$S \cap \{x_1 = 0, x_2 = 0\} \subseteq (\operatorname{int} \overline{A \cup B}) \cap T_{(1)\beta_0} \cap V_{(2)} \cap \{x_1 = 0, x_2 = 0\} \subseteq$$
$$\subseteq (\operatorname{int} \overline{A \cup B}) \cap T_{(1)} \cap V_{(2)} \cap \{x_1 = 0, x_2 = 0\},$$

то из утверждения 7б леммы 2.5 получаем, что в приведённой системе всюду на множестве $S \cap \{x_1 = 0, x_2 = 0\}$ существует движение.

5. Так как

$$\varnothing \neq S \cap \{x_1 \neq 0, x_2 \neq 0\} \subseteq (\operatorname{int} \overline{V_{\alpha_0,\beta_0}}) \cap \{x_1 \neq 0, x_2 \neq 0\} = V_{\alpha_0,\beta_0},$$

$\dot{W}_{\alpha_0,\beta_0} < M/4 < 0$ на V_{α_0,β_0},

$$\varnothing \neq S \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\} \subseteq (U_{(1)} \cap V_{\beta_0} \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}) \cup (V_{(1)} \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\})$$

(в силу того, что $(c_{13}, \ldots, c_{1n}) = (0, \ldots, 0)$, $c_{12} \neq 0$, имеем: $\{C_1(x) = 0\} \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\} = \varnothing$), $\dot{W}_{\alpha_0,\beta_0} < \beta_0 \Delta/(4a_1) < 0$ при движении на $U_{(1)} \cap V_{\beta_0} \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\} \neq \varnothing$, то $\dot{W}_{\alpha_0,\beta_0} < \widehat{M}/4 <$ < 0, где

$$\widehat{M} := \max\left\{M, \beta_0 \frac{\Delta}{a_1}\right\} = \max\left\{\alpha_0(a_1 + b_1) + \beta_0(a_2 + b_2), \alpha_0(a_1 - b_1) + \beta_0(-a_2 + b_2), \beta_0 \frac{\Delta}{a_1}\right\},$$

на множестве $S \setminus (\{x_1 = 0, x_2 = 0\} \cup (V_{(1)} \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}) \cup \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}) \neq \varnothing$. При достаточно малом $c > 0$ подокрестность начала координат $\{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\}$ содержится в S, и поэтому на множестве

$$\{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\} \setminus (\{x_1 = 0, x_2 = 0\} \cup (V_{(1)} \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}) \cup \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}) \neq \varnothing$$

справедлива оценка $\dot{W}_{\alpha_0,\beta_0} < \widehat{M}/4 < 0$.

6. В приведённой системе нигде на $V_{(1)} \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\} \neq \varnothing$ не существует движения. Так как

$$\varnothing \neq \{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\} \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\} \subseteq S \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\} \subseteq V_{(2)} \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}$$

и в приведённой системе нигде на $V_{(2)} \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}$ не существует движения, то в приведённой системе нигде на множестве $\{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\} \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}$ тоже не существует движения. Поэтому из последней оценки следует, что на множестве $\{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\} \setminus \{x_1 = 0, x_2 = 0\}$ траектории приведённой системы протыкают поверхности (при $n = 2$ линии) уровня функции W_{α_0,β_0} извне вовнутрь.

В подслучае $(c_{13}, \ldots, c_{1n}) = (0, \ldots, 0)$, $c_{12} > 0$ (см. с. 66–67) делаются следующие изменения:

1. Пусть множества A, B те же, что и в утверждении 7 леммы 2.5.

2. Определим окрестность S начала координат:

$$S := (\operatorname{int} \overline{A \cup B}) \cap V_{(2)} \cap P \cap Q \cap (\operatorname{int} \overline{V_{\alpha_0,\beta_0}}).$$

3. Так как $n \geqslant 3$, $a_1 + b_1 = 0$, $-a_1 + b_1 > 0$, $|b_2| < -a_2$, $(c_{13}, \ldots, c_{1n}) = (0, \ldots, 0)$, $c_{12} > 0$, $S \cap \{x_1 = 0, x_2 = 0\} \subseteq (\operatorname{int} \overline{A \cup B}) \cap V_{(2)} \cap \{x_1 = 0, x_2 = 0\}$, то из утверждения 7в леммы 2.5 получаем, что в приведённой системе всюду на множестве $S \cap \{x_1 = 0, x_2 = 0\}$ существует движение.

4. Так как

$$\varnothing \neq S \cap \{x_1 \neq 0, x_2 \neq 0\} \subseteq (\operatorname{int} \overline{V_{\alpha_0,\beta_0}}) \cap \{x_1 \neq 0, x_2 \neq 0\} = V_{\alpha_0,\beta_0},$$

$\dot{W}_{\alpha_0,\beta_0} < M/4 < 0$ на V_{α_0,β_0}, то эта оценка справедлива и на множестве $S \cap \{x_1 \neq 0, x_2 \neq 0\} \neq \varnothing$. При достаточно малом $c > 0$ подокрестность начала координат $\{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\}$ содержится в S, а значит, $\dot{W}_{\alpha_0,\beta_0} < M/4 < 0$ на $\{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\} \cap \{x_1 \neq 0, x_2 \neq 0\}$.

5. Поскольку

$$\varnothing \neq \{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\} \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\} \subseteq S \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\} \subseteq V_{(2)} \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}$$

и в приведённой системе нигде на $V_{(2)} \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}$ не существует движения, то в приведённой системе нигде на множестве $\{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\} \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}$ тоже не существует движения. Поэтому из последней оценки следует, что на множестве $\{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\} \setminus \{x_1 = 0, x_2 = 0\}$ траектории приведённой системы протыкают поверхности (при $n = 2$ линии) уровня функции W_{α_0,β_0} извне вовнутрь.

В подслучае $(c_{12}, \ldots, c_{1n}) = (0, \ldots, 0)$, $c_{11} > 0$ изменения точно такие же, как в подслучае $(c_{13}, \ldots, c_{1n}) = (0, \ldots, 0)$, $c_{12} > 0$, но с заменой условий $(c_{13}, \ldots, c_{1n}) = (0, \ldots, 0)$, $c_{12} > 0$ на условия $(c_{12}, \ldots, c_{1n}) = (0, \ldots, 0)$, $c_{11} > 0$.

Наконец, в подслучае $(c_{12}, \ldots, c_{1n}) = (0, \ldots, 0)$, $c_{11} \leqslant 0$ (см. с. 68–68) изменения таковы:

1. Пусть множества A, B те же, что и в утверждении 7 леммы 2.5.

2. Определим окрестность S начала координат:

$$S := (\operatorname{int} \overline{A \cup B}) \cap C \cap V_{(2)} \cap P \cap Q \cap (\operatorname{int} \overline{V_{\alpha_0,\beta_0}}) \cap (\operatorname{int} \overline{V_{\beta_0}}).$$

3. Так как $n \geqslant 3$, $a_1 + b_1 = 0$, $-a_1 + b_1 > 0$, $|b_2| < -a_2$, $(c_{12}, \ldots, c_{1n}) = (0, \ldots, 0)$, $c_{11} \leqslant 0$,

$$S \cap \{x_1 = 0, x_2 = 0\} \subseteq (\operatorname{int} \overline{A \cup B}) \cap C \cap V_{(2)} \cap \{x_1 = 0, x_2 = 0\},$$

то из утверждения 7г леммы 2.5 получаем, что в приведённой системе всюду на множестве $S \cap \{x_1 = 0, x_2 = 0\}$ существует движение.

4. Так как

$$\varnothing \neq S \cap \{x_1 \neq 0, x_2 \neq 0\} \subseteq (\operatorname{int} \overline{V_{\alpha_0,\beta_0}}) \cap \{x_1 \neq 0, x_2 \neq 0\} = V_{\alpha_0,\beta_0},$$

$\dot{W}_{\alpha_0,\beta_0} < M/4 < 0$ на V_{α_0,β_0},

$$\varnothing \neq S \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\} \subseteq (\operatorname{int} \overline{V_{\beta_0}}) \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\} = V_{\beta_0} \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\},$$

$\dot{W}_{\alpha_0,\beta_0} < \beta_0 \Delta/(4a_1) < 0$ при движении на $V_{\beta_0} \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}$, то $\dot{W}_{\alpha_0,\beta_0} < \widehat{M}/4 < 0$, где

$$\widehat{M} := \max\left\{M, \beta_0 \frac{\Delta}{a_1}\right\} = \max\left\{\alpha_0(a_1 + b_1) + \beta_0(a_2 + b_2), \alpha_0(a_1 - b_1) + \beta_0(-a_2 + b_2), \beta_0 \frac{\Delta}{a_1}\right\},$$

на множестве $S \setminus (\{x_1 = 0, x_2 = 0\} \cup \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}) = S \setminus \{x_2 = 0\} \neq \varnothing$. При достаточно малом $c > 0$ подокрестность начала координат $\{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\}$ содержится в S, и поэтому на множестве

$$\{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\} \setminus (\{x_1 = 0, x_2 = 0\} \cup \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}) = \{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\} \setminus \{x_2 = 0\} \neq \varnothing$$

справедлива оценка $\dot{W}_{\alpha_0,\beta_0} < \widehat{M}/4 < 0$. Поскольку

$$\varnothing \neq \{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\} \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\} \subseteq S \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\} \subseteq V_{(2)} \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}$$

и в приведённой системе нигде на $V_{(2)} \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}$ не существует движения, то в приведённой системе нигде на множестве $\{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\} \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}$ тоже не существует движения. Поэтому из последней оценки следует, что на множестве $\{W_{\alpha_0,\beta_0} < c\} \setminus \{x_1 = 0, x_2 = 0\}$ траектории приведённой системы протыкают поверхности (при $n = 2$ линии) уровня функции W_{α_0,β_0} извне вовнутрь. Далее доказательство завершается точно так же, как в утверждении (i).

(vii), (ix) Случай (vii) (случай (ix)) сводится к случаю (vi) (случаю (viii)) симметрией $(x_1, x_2, \widehat{x}) \mapsto (-x_1, x_2, \widehat{x})$.

(viii) Случай (viii) сводится к случаю (vi) заменой $(x_1, x_2, \widehat{x}) \mapsto (x_2, x_1, \widehat{x})$. $\square$

Замечание 3.1. *В работе Д. В. Аносова [4] используется функция $W_\alpha(x_1, \ldots, x_n)$, имеющая вид $\alpha|x_1| + \sum_{i,j=1}^n f_{ij}x_ix_j$, где $\alpha > 0$. Для наших целей нужно обобщить конструкцию, учитывая два слагаемых $\alpha|x_1|$, $\alpha > 0$, и $\beta|x_2|$, $\beta > 0$. При этом в теореме 3.4 мы не используем квадратичные слагаемые.*

Замечание. Вместо 1/4 и 3/4 в определениях множеств V_{α_0,β_0} и V_{β_0}, V_{α_0} соответственно можно взять любые числа из интервала $(0, 1)$.

3.2 Достаточные условия неустойчивости

Докажем несколько теорем о неустойчивости нулевого решения приведённой системы.

Если $\Delta \neq 0$, то в достаточно малой окрестности начала координат основной вклад в вектор фазовой скорости приведённой системы в любой из координатных четвертей $\{x_1 > > 0, x_2 > 0\}$, $\{x_1 < 0, x_2 > 0\}$, $\{x_1 < 0, x_2 < 0\}$, $\{x_1 > 0, x_2 < 0\}$ вносят ненулевые постоянные слагаемые $a_1 \operatorname{sgn} x_1 + b_1 \operatorname{sgn} x_2$ и $a_2 \operatorname{sgn} x_1 + b_2 \operatorname{sgn} x_2$ из уравнений для $\dot{x}_1$ и $\dot{x}_2$ соответственно. Рассмотрим некоторые случаи, в которых решение приведённой системы с начальным значением на множестве $\{x_1x_2 > 0\}$ (случаи (i), (iii), (iv)) или на множестве $\{x_1x_2 < 0\}$ (случаи (ii), (v), (vi)), сколь угодно близким к началу координат, отходит от начала координат, двигаясь по соответствующему множеству. В этих случаях нулевое решение приведённой системы неустойчиво.

Теорема 3.2. *Пусть $n \geqslant 2$, $\Delta \neq 0$ и выполнена хотя бы одна из систем условий:*

(i) $a_1 + b_1 > 0,\ a_2 + b_2 > 0$;

(ii) $-a_1 + b_1 < 0,\ -a_2 + b_2 > 0$;

(iii) $a_1 + b_1 = 0,\ a_2 + b_2 > 0,\ c_{12} > 0$;

(iv) $a_2 + b_2 = 0,\ a_1 + b_1 > 0,\ c_{21} > 0$;

(v) $-a_1 + b_1 = 0,\ -a_2 + b_2 > 0,\ c_{12} < 0$;

(vi) $-a_2 + b_2 = 0,\ -a_1 + b_1 < 0,\ c_{21} < 0$.

Тогда нулевое решение приведённой системы неустойчиво.

Доказательство. (i) В первой координатной четверти $\{x_1 > 0,\, x_2 > 0\}$ значения «главной части» $(a_1 \operatorname{sgn} x_1 + b_1 \operatorname{sgn} x_2, a_2 \operatorname{sgn} x_1 + b_2 \operatorname{sgn} x_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) =: (v_1^{++}, v_2^{++})$ компонент $v_{1,2}$ векторного поля, заданного приведённой системой, положительны. Линейный «довесок» $C_{1,2}(x)$ есть $o(1)$ при $x \to 0$. Выберем $\varepsilon > 0$ таким, что

$$A := B_\varepsilon(O) \subseteq \left\{ |C_1(x)| < \frac{3}{4}(a_1 + b_1),\ |C_2(x)| < \frac{3}{4}(a_2 + b_2) \right\}.$$

Тогда в области $A^{++} := A \cap \{x_1 > 0,\, x_2 > 0\}$ имеем $v_{1,2}(x) = v_{1,2}^{++} + o(1) > v_{1,2}^{++}/4 > 0$. (В этой формуле либо всюду берется индекс 1, либо всюду индекс 2.) Так как в области A^{++} выполнены неравенства $x_{1,2} > 0$, $\dot{x}_{1,2} > 0$, то решение приведённой системы с начальным значением в A^{++} не может выйти из этой области через гиперплоскость $x_1 = 0$ или $x_2 = 0$. В силу того, что в области A^{++} имеем $x_1 < \varepsilon$, $\dot{x}_1 > v_1^{++}/4 > 0$, рассматриваемое решение не может навсегда остаться в A^{++}. Учитывая непрерывность функций $x_1(t), \dots, x_n(t)$, делаем вывод, что решение приведённой системы с начальным значением в области A^{++} через некоторый конечный (длины меньше $4\varepsilon/v_1^{++}$) промежуток времени выходит из неё через ту часть её границы, которая принадлежит $\partial A = S_\varepsilon(O)$. Так как $\overline{A^{++}} \ni O$, то отсюда следует, что нулевое решение приведённой системы неустойчиво.

(ii) Этот случай сводится к случаю (i) преобразованием $(x_1, x_2, \widehat{x}) \mapsto (-x_1, x_2, \widehat{x})$.

(iii) В первой координатной четверти $\{x_1 > 0, x_2 > 0\}$ значение «главной части» $a_2 \operatorname{sgn} x_1 + b_2 \operatorname{sgn} x_2 = a_2 + b_2 =: v_2^{++}$ компоненты v_2 векторного поля, заданного приведённой системой, положительно. Линейный «довесок» $C_2(x)$ является $o(1)$ при $x \to 0$. В рассматриваемой координатной четверти значение «главной части» $c_{12}(a_2 \operatorname{sgn} x_1 + b_2 \operatorname{sgn} x_2) = c_{12}(a_2 + b_2) =: (\dot{C}_1)^{++}$ производной функции $C_1(x)$ в силу приведённой системы положительно.

Линейный «довесок» $D_1(x)$ является $o(1)$ при $x \to 0$. Выберем $\varepsilon > 0$ таким, что

$$A := B_\varepsilon(O) \subseteq \left\{ |C_2(x)| < \frac{3}{4}\,(a_2 + b_2)\,, |D_1(x)| < c_{12}\,(a_2 + b_2) \right\}.$$

Так как $c_{12} > 0$, то при $x_2 > 0$ имеем: $c_{12}x_2 > 0$. Поэтому при достаточно малых $x_1 > 0$, $x_3, \ldots, x_n$ (в случае $n = 2$ при достаточно малом $x_1 > 0$) выполнено неравенство $C_1(x) > 0$. Отсюда получаем, что $B := \{x_1 > 0, x_2 > 0, C_1(x) > 0\} \neq \varnothing$. Поскольку при $x \in B$ верно, что $\{\gamma x : 0 < \gamma \leqslant 1\} \subseteq B$, то $A^{+++} := A \cap B \neq \varnothing$. В области A^{+++} имеем: $\dot{x}_1 = C_1(x) > 0$, $\dot{C}_1(x) = (\dot{C}_1)^{++} + o(1) > 0$, $v_2(x) = v_2^{++} + o(1) > v_2^{++}/4 > 0$. Так как в области A^{+++} $x_1 > 0$, $\dot{x}_1 > 0$, $C_1(x) > 0$, $\dot{C}_1(x) > 0$, $x_2 > 0$, $\dot{x}_2 > 0$, то решение приведённой системы с начальным значением в A^{+++} не может выйти из этой области через гиперплоскости $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ или $C_1(x) = 0$. Из того, что в A^{+++} $x_2 < \varepsilon$, $\dot{x}_2 > v_2^{++}/4 > 0$, получаем, что рассматриваемое решение не может навсегда остаться в A^{+++}. Принимая во внимание непрерывность функций $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, делаем вывод, что решение приведённой системы с начальным значением в области A^{+++} через некоторый конечный (длины меньше $4\varepsilon/v_2^{++}$) промежуток времени выходит из неё через ту часть её границы, которая принадлежит $\partial A = S_\varepsilon(O)$. Так как $\overline{A^{+++}} \ni O$, то отсюда следует, что нулевое решение приведённой системы неустойчиво.

(iv), (vi) Случай (iv) (случай (vi)) сводится к случаю (iii) (случаю (v)) преобразованием $(x_1, x_2, \widehat{x}) \mapsto (x_2, x_1, \widehat{x})$.

(v) Случай (v) сводится к случаю (iii) заменой $(x_1, x_2, \widehat{x}) \mapsto (-x_1, x_2, \widehat{x})$. $\square$

Замечание. При выполнении условий теоремы 3.2 для исследования устойчивости нулевого решения приведённой системы не требуется как-либо доопределять её ни на одном из множеств $\{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}$, $\{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}$, $\{x_1 = 0, x_2 = 0\}$. (Требуется лишь показать, что вектор-функция $x(t) \equiv 0$ является решением приведённой системы. Это сделано в утверждении 1.1 для системы (1.1), частным случаем которой (при $p_3 = \ldots = p_n = 0$, $q_3 = \ldots = q_n = 0$) является приведённая система (1.6).) Поэтому при доказательстве теоремы 3.2 не используется ни одна из лемм 2.1–2.6.

Если $\Delta \neq 0$, существует открытое множество D (соответственно, F) такое, что $\overline{D_1} \ni O$ (соответственно, $\overline{F_2} \ni O$), где $D_1 := D \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}$ (соответственно, $F_2 := F \cap \{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}$), в приведённой системе всюду на множестве D_1 (соответственно, на множестве F_2) существует движение, то из леммы 2.3 (соответственно, из леммы 2.4) следует, что в достаточно малой окрестности начала координат основной вклад в вектор фазовой скорости в этом движении вносит постоянное слагаемое $(\Delta/a_1)\operatorname{sgn} x_2$ (соответственно, $(\Delta/b_2)\operatorname{sgn} x_1$)

из уравнения для $\dot{x}_2$ (соответственно, для $\dot{x}_1$). Следующая теорема устанавливает некоторые случаи, в которых решение приведённой системы с начальным значением на множестве $\{x_1 = 0,\ x_2 \neq 0\}$ (случаи (i), (iii), (iv)) (на множестве $\{x_1 \neq 0,\ x_2 = 0\}$ (случаи (ii), (v), (vi))), сколь угодно близким к началу координат, отходит от начала координат, двигаясь по соответствующему множеству. В этих случаях нулевое решение приведённой системы неустойчиво.

Теорема 3.3. *Пусть $n \geqslant 2$, $\Delta < 0$ и выполнена хотя бы одна из систем условий:*

(i) $|b_1| < -a_1$;

(ii) $|a_2| < -b_2$;

(iii) $a_1 + b_1 = 0$, $-a_1 + b_1 > 0$ *и, кроме того, выполнено либо неравенство* $c_{12} < 0$, *либо каждое из условий* $(c_{12}, \dots, c_{1n}) = (0, \dots, 0)$ *и* $c_{11} \leqslant 0$;

(iv) $-a_1 + b_1 = 0$, $a_1 + b_1 < 0$ *и, кроме того, выполнено либо неравенство* $c_{12} > 0$, *либо каждое из условий* $(c_{12}, \dots, c_{1n}) = (0, \dots, 0)$ *и* $c_{11} \leqslant 0$;

(v) $a_2 + b_2 = 0$, $-a_2 + b_2 < 0$ *и, кроме того, выполнено либо неравенство* $c_{21} < 0$, *либо каждое из условий* $(c_{21}, c_{23}, c_{24}, \dots, c_{2n}) = (0, \dots, 0)$ *(при $n = 2$ здесь и далее в формулировке и доказательстве настоящей теоремы это условие имеет вид $c_{21} = 0$) и* $c_{22} \leqslant 0$;

(vi) $-a_2 + b_2 = 0$, $a_2 + b_2 < 0$ *и, кроме того, выполнено либо неравенство* $c_{21} > 0$, *либо каждое из условий* $(c_{21}, c_{23}, c_{24}, \dots, c_{2n}) = (0, \dots, 0)$ *и* $c_{22} \leqslant 0$.

Тогда нулевое решение приведённой системы неустойчиво.

Доказательство. (i) Пусть U – окрестность начала координат из формулировки случая (a) утверждения 1 леммы 2.1. Согласно этому утверждению в приведённой системе всюду на $U_1 := U \cap \{x_1 = 0,\ x_2 \neq 0\}$ существует движение. Следствие 2.1 устанавливает, что это движение описывается системой уравнений (2.1). На множестве $U \cap \{x_1 = 0,\ x_2 > 0\}$ значение «главной части» $(\Delta/a_1)\operatorname{sgn} x_2 = \Delta/a_1 =: v_2^{0+}$ компоненты v_2 векторного поля, заданного приведённой системой, положительно. Линейный «довесок» $C_{2\hat{1}}(x) - (a_2/a_1)C_{1\hat{1}}(x)$ есть $o(1)$ при $x \to 0$. Возьмем $\varepsilon > 0$ таким, что $A := B_\varepsilon(O) \subseteq U \cap \{|C_{2\hat{1}}(x) - (a_2/a_1)C_{1\hat{1}}(x)| < 3\Delta/(4a_1)\}$. Тогда на множестве $A^{0+} := A \cap \{x_1 = 0,\ x_2 > 0\}$ имеем $v_2(x) = v_2^{0+} + o(1) > v_2^{0+}/4 > 0$. Решение приведённой системы с начальным значением на A^{0+} не может выйти из этого множества через гиперплоскость $x_2 = 0$. Так как на множестве A^{0+} имеем $x_2 < \varepsilon$ и $\dot{x}_2 > v_2^{0+}/4 > 0$, то рассматриваемое решение не может бесконечно долго оставаться на A^{0+}. Таким образом, решение приведённой системы с начальным значением на множестве A^{0+} через некоторый конечный (длины меньше $4\varepsilon/v_2^{0+}$) промежуток времени выходит из этого множества через ту часть его относительной (в топологии гиперплоскости $x_1 = 0$, индуцированной стандартной топологией $\mathbb{R}^n$) границы, которая принадлежит $\partial A = S_\varepsilon(O)$. Так как $\overline{A^{0+}} \ni O$, то отсюда следует, что нулевое решение приведённой системы неустойчиво.

(ii) Случай (ii) сводится к случаю (i) симметрией $(x_1, x_2, \widehat{x}) \mapsto (x_2, x_1, \widehat{x})$.

(iii) Рассмотрим сначала случай $c_{12} < 0$. Пусть U – множество из формулировки утверждения 1б леммы 2.1. Согласно этому утверждению в приведённой системе всюду на $U_1 :=$ $:= U \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}$ существует движение. Следствие 2.1 устанавливает, что это движение описывается системой уравнений (2.1). На множестве $U_{1+} := U \cap \{x_1 = 0, x_2 > 0\} \neq \varnothing$ (см. утверждение 1б леммы 2.1) значение «главной части» $(\Delta/a_1)\operatorname{sgn} x_2 = \Delta/a_1 =: v_2^{1+}$ компоненты v_2 векторного поля, заданного приведённой системой, положительно. Линейный «довесок» $C_{2\widehat{1}}(x) - (a_2/a_1)C_{1\widehat{1}}(x)$ есть $o(1)$ при $x \to 0$. На рассматриваемом множестве значение «главной части» $c_{12}(\Delta/a_1)\operatorname{sgn} x_2 = c_{12}\Delta/a_1 =: (\dot{C}_{1\widehat{1}})^{1+}$ производной функции $C_{1\widehat{1}}(x)$ в силу приведённой системы отрицательно. Линейный «довесок» $D_{1\widehat{1}}(x) - c_{12}(a_2/a_1)C_{1\widehat{1}}(x)$ есть $o(1)$ при $x \to 0$. Линейная функция $C_1(x)$ также есть $o(1)$ при $x \to 0$. Выберем $\varepsilon > 0$ таким, что

$$A := B_\varepsilon(O) \subseteq \Big\{|C_1(x)| < -2a_1\Big\} \cap \left\{\left|C_{2\widehat{1}}(x) - \frac{a_2}{a_1}C_{1\widehat{1}}(x)\right| < \frac{3\Delta}{4a_1}\right\} \cap$$
$$\cap \left\{\left|D_{1\widehat{1}}(x) - c_{12}\frac{a_2}{a_1}C_{1\widehat{1}}(x)\right| < -c_{12}\frac{\Delta}{a_1}\right\}.$$

Тогда на множестве $A \cap U_{1+}$ имеем: $v_2(x) = v_2^{1+} + o(1) > v_2^{1+}/4 > 0$, $\dot{C}_1(x) = \dot{C}_{1\widehat{1}}(x) = (\dot{C}_{1\widehat{1}})^{1+} +$ $+ o(1) < 0$. Решение приведённой системы с начальным значением на $A \cap U_{1+}$ не может выйти из этого множества через гиперплоскости $x_2 = 0$ или $C_1(x) = 0$. Так как на множестве $A \cap U_{1+}$ имеем: $x_2 < \varepsilon$ и $\dot{x}_2 > v_2^{1+}/4 > 0$, то рассматриваемое решение не может бесконечно долго оставаться на $A \cap U_{1+}$. Таким образом, решение приведённой системы с начальным значением на множестве $A \cap U_{1+}$ через некоторый конечный (длины меньше $4\varepsilon/v_2^{1+}$) промежуток времени выходит из этого множества через ту часть его относительной (в топологии гиперплоскости $x_1 = 0$, индуцированной стандартной топологией $\mathbb{R}^n$) границы, которая принадлежит $\partial A =$ $S_\varepsilon(O)$. Так как $\overline{A \cap U_{1+}} \ni O$ (этот факт следует из того, что $A \cap U_{1+} \neq \varnothing$ и при $x \in A \cap U_{1+}$ имеем: $\{\gamma x : 0 < \gamma \leqslant 1\} \subseteq A \cap U_{1+}$), то отсюда следует, что нулевое решение приведённой системы неустойчиво.

Теперь перейдем к случаю $(c_{12}, \dots, c_{1n}) = (0, \dots, 0)$, $c_{11} \leqslant 0$. Пусть $U := \mathbb{R}^n$ – окрестность начала координат из формулировки утверждения 1в леммы 2.1. Согласно этому утверждению в приведённой системе всюду на $U_1 := U \cap \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\} = \{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}$ существует движение. Следствие 2.1 устанавливает, что это движение описывается системой уравнений (2.1). На множестве $U_{1+} := U \cap \{x_1 = 0, x_2 > 0\} = \{x_1 = 0, x_2 > 0\}$ значение «главной части» $(\Delta/a_1)\operatorname{sgn} x_2 = \Delta/a_1 =: v_2^{1+}$ компоненты v_2 векторного поля, заданного приведённой системой, положительно. Линейный «довесок» $C_{2\widehat{1}}(x) - (a_2/a_1)C_{1\widehat{1}}(x) = C_{2\widehat{1}}(x)$ есть $o(1)$ при $x \to 0$. Возьмем $\varepsilon > 0$ таким, что $A := B_\varepsilon(O) \subseteq \{|C_{2\widehat{1}}(x)| < 3\Delta/(4a_1)\}$. Тогда на множестве $A \cap U_{1+} = A \cap \{x_1 = 0, x_2 > 0\} =: A_{1+}$ имеем: $v_2(x) = v_2^{1+} + o(1) > v_2^{1+}/4 > > 0$. Решение приведённой системы с начальным значением на A_{1+} не может выйти из этого множества через гиперплоскость $x_2 = 0$. Далее доказательство завершается точно так же, как в случае $c_{12} < 0$, но с заменой $A \cap U_{1+}$ на A_{1+} и с исключением пояснения в скобках, начинающегося словами «этот факт».

(iv), (vi) Случай (iv) (случай (vi)) сводится к случаю (iii) (случаю (v)) симметрией $(x_1, x_2, \widehat{x}) \mapsto (-x_1, x_2, \widehat{x})$.

(v) Случай (v) сводится к случаю (iii) с помощью замены $(x_1, x_2, \widehat{x}) \mapsto (x_2, x_1, \widehat{x})$. $\square$

Замечание. При выполнении любой из систем условий (i), (iii), (iv) (соответственно, (ii), (v), (vi)) теоремы 3.3 для исследования устойчивости нулевого решения приведённой системы не требуется как-либо доопределять её ни на одном из множеств $\{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}$, $\{x_1 = 0, x_2 = 0\}$ (соответственно, $\{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}$, $\{x_1 = 0, x_2 = 0\}$). Во-первых, требуется показать, что вектор-функция $x(t) \equiv 0$ является решением приведённой системы. Это сделано в утверждении 1.1 для системы (1.1), частным случаем которой (при $p_3 = \ldots = p_n = 0$, $q_3 = \ldots = q_n = 0$) является приведённая система (1.6). Во-вторых, нужно доопределить приведённую систему в какой-либо окрестности начала координат на множестве $\{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}$ (соответственно, $\{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}$), что и делается в утверждении 1 леммы 2.1 и в следствии 2.1 (соответственно, в утверждении 1 леммы 2.2 и в следствии 2.2), которые используются при доказательстве теоремы 3.3. Леммы 2.5, 2.6 при доказательстве теоремы 3.3 не используются. Кроме того, при доказательстве случаев (i), (iii), (iv) (соответственно, (ii), (v), (vi)) теоремы 3.3 не используются леммы 2.2, 2.4 (соответственно, леммы 2.1, 2.3).

В теореме 3.4 указаны некоторые случаи, когда в достаточно малой окрестности начала координат в приведённой системе нигде ни на множестве $\{x_1 = 0,\ x_2 \neq 0\}$, ни на множестве $\{x_1 \neq 0,\ x_2 = 0\}$ не существует движения, а фазовые точки, находящиеся в начальный момент времени сколь угодно близко к началу координат вне множества $\{x_1 = 0, x_2 = 0\}$, удаляются от начала координат. При этом траектория такой фазовой точки протыкает каждое из множеств $\{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}$ и $\{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}$ и совершает бесконечно много оборотов вокруг множества $\{x_1 = 0, x_2 = 0\}$, так что её ортогональная проекция на плоскость x_1, x_2 напоминает спираль. В этих случаях нулевое решение приведённой системы неустойчиво.

Теорема 3.4. *Пусть $n \geqslant 2$, $r := a_1|a_2| + b_2|b_1| > 0$ и выполнена одна из систем условий*

(i) $|a_1| < -b_1,\ |b_2| < a_2$;

(ii) $|a_1| < b_1,\ |b_2| < -a_2$.

Тогда нулевое решение приведённой системы неустойчиво.

Замечание. Условие $\Delta \neq 0$ следует из условий каждого из случаев (i)–(ii) теоремы.

Доказательство (теоремы 3.4). Так как $\Delta \neq 0$, $|b_1| > |a_1| \geqslant -a_1$ и $|a_2| > |b_2| \geqslant -b_2$, то выполнены условия утверждения 2а леммы 2.1 и условия утверждения 2 леммы 2.2. Пусть $V_{(1)}$, $V_{(2)}$ – окрестности начала координат из формулировок этих утверждений соответственно. Развивая идеи Д. В. Аносова [4] (см. замечание 3.1), рассмотрим функцию $W_{\alpha,\beta}(x_1, \ldots, x_n) := \alpha|x_1| + \beta|x_2|$. На множестве $\{x_1 = 0,\ x_2 = 0\}$ имеем $W_{\alpha,\beta} = 0$. Если $\alpha > 0$, $\beta > 0$, то $W_{\alpha,\beta} > 0$ на множестве $\mathbb{R}^n \setminus \{x_1 = 0,\ x_2 = 0\}$. Найдем производную функции $W_{\alpha,\beta}$ в силу приведённой системы при $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$:

$$\dot W_{\alpha,\beta} = \alpha(\operatorname{sgn} x_1)\dot x_1 + \beta(\operatorname{sgn} x_2)\dot x_2 =$$
$$= \alpha(a_1 + b_1 \operatorname{sgn}(x_1x_2)) + \beta(a_2 \operatorname{sgn}(x_1x_2) + b_2) + \alpha(\operatorname{sgn} x_1)C_1(x) + \beta(\operatorname{sgn} x_2)C_2(x).$$

Так как $r > 0$, то при выполнении любой из двух систем условий, указанных в формулировке настоящей теоремы, существует решение (α_0, β_0) системы неравенств (относительно переменных α, β) $\alpha(a_1 + b_1) + \beta(a_2 + b_2) > 0$, $\alpha(a_1 - b_1) + \beta(-a_2 + b_2) > 0$ такое, что $\alpha_0 > 0$, $\beta_0 > 0$. Тогда функция W_{α_0,β_0} такова, что на множестве $\{x_1 \neq 0,\ x_2 \neq 0\}$ значение «главной части»

$$\alpha_0(a_1 + b_1 \operatorname{sgn}(x_1x_2)) + \beta_0(a_2 \operatorname{sgn}(x_1x_2) + b_2) = \begin{cases} \alpha_0(a_1 + b_1) + \beta_0(a_2 + b_2), & \text{если } x_1x_2 > 0, \\ \alpha_0(a_1 - b_1) + \beta_0(-a_2 + b_2), & \text{если } x_1x_2 < 0, \end{cases}$$

её производной в силу приведённой системы положительно. Кусочно линейный при $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ «довесок» $\alpha_0(\operatorname{sgn} x_1)C_1(x) + \beta_0(\operatorname{sgn} x_2)C_2(x)$ есть $o(1)$ при $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, $x \to 0$.

Положим

$$m := \min\bigl\{\alpha_0(a_1+b_1)+\beta_0(a_2+b_2),\, \alpha_0(a_1-b_1)+\beta_0(-a_2+b_2)\bigr\},$$

$$T := \Bigl\{|\alpha_0 C_1(x)+\beta_0 C_2(x)| < \alpha_0(a_1+b_1)+\beta_0(a_2+b_2)-\frac{1}{4}m,$$
$$|\alpha_0 C_1(x)-\beta_0 C_2(x)| < \alpha_0(a_1-b_1)+\beta_0(-a_2+b_2)-\frac{1}{4}m\Bigr\}.$$

Поскольку $\alpha_0(a_1+b_1)+\beta_0(a_2+b_2)-m/4>0$ и $\alpha_0(a_1-b_1)+\beta_0(-a_2+b_2)-m/4>0$, множество T – окрестность начала координат. Выберем $\varepsilon>0$ так, что $A := B_\varepsilon(O) \subseteq T\cap V_{(1)}\cap V_{(2)}$. Тогда на множестве $A\cap\{x_1\neq 0,\, x_2\neq 0\}$

$$\dot W_{\alpha_0,\beta_0} = \alpha_0(a_1+b_1\operatorname{sgn}(x_1x_2))+\beta_0(a_2\operatorname{sgn}(x_1x_2)+b_2)+o(1) > \frac{1}{4}m > 0.$$

В силу того, что $A\cap\{x_1=0,\, x_2\neq 0\}\subseteq V_{(1)}\cap\{x_1=0,\, x_2\neq 0\}$, из утверждения 2а леммы 2.1 получаем, что в приведённой системе нигде на множестве $A\cap\{x_1=0,\, x_2\neq 0\}$ не существует движения. Поскольку $A\cap\{x_1\neq 0,\, x_2=0\}\subseteq V_{(2)}\cap\{x_1\neq 0,\, x_2=0\}$, то утверждение 2 леммы 2.2 даёт, что в приведённой системе нигде на множестве $A\cap\{x_1\neq 0,\, x_2=0\}$ не существует движения.

Предположим, что нулевое решение приведённой системы устойчиво. Тогда по определению устойчивости найдется $\delta\leqslant\varepsilon$ такое, что любое решение $x(t) := (x_1(t),\ldots,x_n(t))$ приведённой системы с начальным условием $x(t_0)=x_0 := (x_{10},\ldots,x_{n0})\in B_\delta(O)$ при всех $t_0\leqslant t<+\infty$ существует и не покидает $A := B_\varepsilon(O)$. Возьмем начальное значение $x_0\in B_\delta(O)\setminus\{x_1=0, x_2=0\}$. Так как $B_\delta(O)\subseteq A := B_\varepsilon(O)\subseteq T\cap V_{(1)}\cap V_{(2)}$, то $W_{\alpha_0,\beta_0}(x(t)) - W_{\alpha_0,\beta_0}(x(t_0)) > m(t-t_0)/4 > 0$ при $t>t_0$, откуда $W_{\alpha_0,\beta_0}(x(t)) > m(t-t_0)/4>0$ и $x(t)\notin\{x_1=0,\, x_2=0\}$. Переходя к пределу в последнем неравенстве при $t\to+\infty$, получаем, что $W_{\alpha_0,\beta_0}(x(t))\to+\infty$ при $t\to+\infty$. Но с другой стороны, $x(t)\in A\setminus\{x_1=0,\, x_2=0\} = B_\varepsilon(O)\setminus\{x_1=0,\, x_2=0\}$ при $t\geqslant t_0$, и поэтому в силу непрерывности функции W_{α_0,β_0} в $\overline{A}=\overline{B_\varepsilon(O)}$ имеем

$$W_{\alpha_0,\beta_0}(x(t)) \leqslant \max_{\overline{A}} W_{\alpha_0,\beta_0} = \max_{\overline{B_\varepsilon(O)}} W_{\alpha_0,\beta_0} < +\infty \qquad \forall t\geqslant t_0.$$

Противоречие. Следовательно, нулевое решение приведённой системы неустойчиво. □

Замечание. При выполнении условий теоремы 3.4 для исследования устойчивости нулевого решения приведённой системы не требуется как-либо доопределять её на множестве $\{x_1=0, x_2=0\}$. Во-первых, требуется показать, что вектор-функция $x(t)\equiv 0$ является решением приведённой системы. Это сделано в утверждении 1.1 для системы (1.1), частным случаем которой (при $p_3 = \ldots = p_n = 0$, $q_3 = \ldots = q_n = 0$) является приведённая система (1.6). Во-вторых, нужно доопределить приведённую систему в какой-либо окрестности начала координат на каждом из множеств $\{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}$ и $\{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}$, что и делается в утверждении 2а леммы 2.1 и в утверждении 2 леммы 2.2 соответственно, которые используются при доказательстве теоремы 3.4. Леммы 2.3–2.6 при доказательстве теоремы 3.4 не используются.

3.3 Суммирование полученных достаточных условий устойчивости и неустойчивости

В каждой из теорем 3.1 и 3.2–3.4 мы доказали ряд достаточных условий устойчивости и неустойчивости нулевого решения приведённой системы соответственно. Но, оказывается, в совокупности эти достаточные условия покрывают довольно широкое множество значений параметров приведённой системы. А именно, из доказанных нами случаев (i)–(v) теоремы 3.1, случаев (i)–(ii) теорем 3.2 и 3.3, теоремы 3.4 получается полный ответ на вопрос об устойчивости нулевого решения приведённой системы, параметры которой принадлежат открытому всюду плотному множеству в пространстве параметров a_1, b_1, a_2, b_2, c_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$, приведённой системы, заданному неравенствами $\Delta \neq 0$, $a_1 + b_1 \neq 0$, $-a_1 + b_1 \neq 0$, $a_2 + b_2 \neq 0$, $-a_2 + b_2 \neq 0$ и, если $|a_1| < |b_1|$, $|b_2| < |a_2|$, $a_2 b_1 < 0$, то дополнительно $r := a_1|a_2| + b_2|b_1| \neq 0$. (Это открытое всюду плотное множество указано в формулировке утверждения 3.1.) Справедливо

Утверждение 3.1. *Условия случаев (i)–(v) теоремы 3.1, случаев (i)–(ii) теорем 3.2 и 3.3, условия теоремы 3.4 покрывают открытое всюду плотное множество в пространстве параметров* a_1, b_1, a_2, b_2, c_{ij}, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, *приведённой системы, заданное неравенствами* $\Delta \neq 0$, $a_1 + b_1 \neq 0$, $-a_1 + b_1 \neq 0$, $a_2 + b_2 \neq 0$, $-a_2 + b_2 \neq 0$ *и, если* $|a_1| < |b_1|$, $|b_2| < |a_2|$, $a_2 b_1 < 0$, *то дополнительно* $r := a_1|a_2| + b_2|b_1| \neq 0$.

Доказательство. Если каждое из чисел a_1+b_1, $-a_1+b_1$, a_2+b_2, $-a_2+b_2$ отлично от нуля, то возможны 16 различных комбинаций знаков этих чисел. Условия случаев (i)–(v) теоремы 3.1, случаев (i)–(ii) теорем 3.2 и 3.3, условия теоремы 3.4 покрывают каждую такую комбинацию с дополнительным требованием, чтобы определитель Δ был отличен от нуля. (В случаях комбинаций $++-+$ и $--+-$ накладывается еще одно требование, чтобы величина r из формулировок теорем 3.1 и 3.4 была отлична от нуля.) $\square$

3.4 Заключительные выводы о механизмах устойчивости и неустойчивости

Теоремы 3.1–3.4 и утверждение 3.1 приводят нас к следующим выводам.

Для приведённой системы, параметры которой принадлежат открытому всюду плотному множеству, указанному в формулировке утверждения 3.1, устойчивость нулевого решения возможна только в одном из случаев (см. случаи (i)–(v) теоремы 3.1):

(i) $|b_1| < -a_1,\ |a_2| < -b_2;$

(ii) $\Delta > 0,\ |b_1| > -a_1,\ |a_2| < -b_2;$

(iii) $|a_1| < b_1,\ |b_2| < -a_2,\ r := a_1|a_2| + b_2|b_1| < 0;$

(iv) $\Delta > 0,\ |b_1| < -a_1,\ |a_2| > -b_2;$

(v) $|a_1| < -b_1,\ |b_2| < a_2,\ r < 0.$

Механизм, обеспечивающий в каждом из случаев (i)–(v) при $n \geqslant 3$ совпадение устойчивости нулевого решения приведённой системы с устойчивостью подматрицы $(c_{ij})_{3\leqslant i,j\leqslant n}$ (определение см. перед следствием 2.3), а при $n = 2$ – асимптотическую устойчивость нулевого решения приведённой системы (ради краткости назовём этот механизм механизмом, обеспечивающим возможность устойчивости нулевого решения приведённой системы), следующий. В некоторой окрестности начала координат всюду на множестве $\{x_1 = 0,\ x_2 = 0\}$ существует движение (при $n = 2$ этого условия нет), а любое решение приведённой системы, находящееся в начальный момент времени в этой окрестности, достигает множества $\{x_1 = 0,\ x_2 = 0\}$ за конечное время.

В остальных случаях, когда параметры a_1, b_1, a_2, b_2, c_{ij}, $1 \le i, j \le n$, приведённой системы принадлежат вышеуказанному открытому всюду плотному множеству, но не удовлетворяют ни одной из систем неравенств (i)–(v), нулевое решение этой системы неустойчиво. Возможны три различных механизма неустойчивости:

1) Решение приведённой системы с начальным значением на множестве $\{x_1x_2 > 0\}$ или на множестве $\{x_1x_2 < 0\}$, сколь угодно близким к началу координат, отходит от начала

координат, двигаясь по соответствующему множеству. Этот механизм имеет место в каждом из случаев (см. случаи (i)–(ii) теоремы 3.2):

(i) $\Delta \neq 0$, $a_1 + b_1 > 0$, $a_2 + b_2 > 0$;

(ii) $\Delta \neq 0$, $-a_1 + b_1 < 0$, $-a_2 + b_2 > 0$.

2) Решение приведённой системы с начальным значением на множестве $\{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}$ или на множестве $\{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}$, сколь угодно близким к началу координат, отходит от начала координат, двигаясь по соответствующему множеству. Этот механизм имеет место в каждом из случаев (см. случаи (i)–(ii) теоремы 3.3):

(i) $\Delta < 0$, $|b_1| < -a_1$;

(ii) $\Delta < 0$, $|a_2| < -b_2$.

3) Решение приведённой системы с начальным значением вне множества $\{x_1 = 0, x_2 = 0\}$, сколь угодно близким к началу координат, отходит от начала координат, причём траектория, соответствующая этому решению, протыкает каждое из множеств $\{x_1 = 0, x_2 \neq 0\}$ и $\{x_1 \neq 0, x_2 = 0\}$ и совершает бесконечно много оборотов вокруг множества $\{x_1 = 0, x_2 = 0\}$, так что её ортогональная проекция на плоскость x_1, x_2 напоминает спираль. Этот механизм имеет место в каждом из случаев (см. теорему 3.4):

(i) $r > 0$, $|a_1| < -b_1$, $|b_2| < a_2$;

(ii) $r > 0$, $|a_1| < b_1$, $|b_2| < -a_2$.

Вышеуказанный механизм, обеспечивающий возможность устойчивости нулевого решения приведённой системы, и каждый из первых двух вышеизложенных механизмов неустойчивости нулевого решения приведённой системы имеют место и для некоторых приведённых систем, параметры которых принадлежат одной из следующих граничных гиперповерхностей открытого всюду плотного множества, указанного в формулировке утверждения 3.1: $\{a_1 + b_1 = 0\}$, $\{-a_1 + b_1 = 0\}$, $\{a_2 + b_2 = 0\}$, $\{-a_2 + b_2 = 0\}$ (см. соответственно случаи (vi)–(ix) теоремы 3.1; теорему 3.2; теорему 3.3). Заметим, что если выполнены условия хотя бы одного из случаев (i)–(v) теоремы 3.1 или условия теоремы 3.4, то $a_1 + b_1 \neq 0$, $-a_1 + b_1 \neq 0$, $a_2 + b_2 \neq 0$, $-a_2 + b_2 \neq 0$.

Заключение

В настоящей работе изучена устойчивость нулевого решения системы вещественных обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя реле вида

$$\dot{y}_i = p_i \operatorname{sgn} y_1 + q_i \operatorname{sgn} y_2 + \sum_{j=1}^{n} r_{ij} y_j, \qquad i = 1, \dots, n, \tag{1}$$

при различных значениях параметров $p_1, \dots, p_n$, $q_1, \dots, q_n$, $r_{ij}, 1 \leqslant i, j \leqslant n$, этой системы. Здесь $n \geqslant 2$; $y_1(t), \dots, y_n(t)$ – неизвестные функции времени t; $\dot{y}_i$ обозначает производную dy_i/dt, $i = 1, \dots, n$; $(p_1, \dots, p_n)^{\mathrm{T}}$ и $(q_1, \dots, q_n)^{\mathrm{T}}$ – заданные постоянные n-мерные векторы (символ T обозначает транспонирование); $(r_{ij})_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n}$ – заданная постоянная $(n \times n)$-матрица.

Если $\Delta := p_1 q_2 - p_2 q_1 \neq 0$, то, вычитая из всех уравнений системы (1), начиная с третьего, первые два с подходящими коэффициентами, мы приводим её к виду

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 \operatorname{sgn} x_1 + b_1 \operatorname{sgn} x_2 + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_{1j} x_j, \\ \dot{x}_2 = a_2 \operatorname{sgn} x_1 + b_2 \operatorname{sgn} x_2 + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_{2j} x_j, \\ \dot{x}_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j, \quad i = 3, \dots, n \qquad \text{(если } n = 2\text{, то этих уравнений нет).} \end{cases} \tag{2}$$

При этом $x_k \equiv y_k$, $a_k = p_k$, $b_k = q_k$, $k = 1, 2$, $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1$. Релейную систему вида (2) мы называем *приведённой*. Если $n = 2$, то рассматриваемая система (1) изначально имеет вид (2), т.е. является приведённой.

В настоящей диссертации получен полный ответ на вопрос об устойчивости нулевого решения приведённой системы для открытого всюду плотного множества в пространстве параметров a_1, b_1, a_2, b_2, c_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$, этой системы, заданного неравенствами $\Delta \neq 0$, $a_1 + b_1 \neq 0$, $-a_1 + b_1 \neq 0$, $a_2 + b_2 \neq 0$, $-a_2 + b_2 \neq 0$ и, если $|a_1| < |b_1|$, $|b_2| < |a_2|$, $a_2 b_1 < 0$, то дополнительно $r := a_1|a_2| + b_2|b_1| \neq 0$. Согласно утверждению 3.1 условия случаев (i)–(v) теоремы 3.1, случаев (i)–(ii) теорем 3.2 и 3.3, условия теоремы 3.4 покрывают вышеуказанное открытое всюду плотное множество.

В настоящей работе частично решён вопрос об устойчивости нулевого решения для множества приведённых систем, параметры которых принадлежат одной из следующих граничных гиперповерхностей вышеупомянутого открытого всюду плотного множества: $\{a_1 + b_1 =$

$0\}$, $\{-a_1+b_1=0\}$, $\{a_2+b_2=0\}$, $\{-a_2+b_2=0\}$. Это сделано в утверждениях случаев (vi)–(ix) теоремы 3.1, в теоремах 3.2 и 3.3. Заметим, что если выполнены условия хотя бы одного из случаев (i)–(v) теоремы 3.1 или условия теоремы 3.4, то $a_1+b_1\neq 0$, $-a_1+b_1\neq 0$, $a_2+b_2\neq 0$, $-a_2+b_2\neq 0$. Геометрически принадлежность параметров приведённой системы одной из четырёх вышеуказанных гиперповерхностей означает следующее. Если $\Delta\neq 0$, то условие $a_i+b_i=0$ (соответственно, $-a_i+b_i=0$) означает, что в первой и третьей (соответственно, во второй и четвёртой) четвертях фазового пространства, выделяемых условиями на знаки координат x_1 и x_2, «главная часть»

$$\begin{cases}(a_1\operatorname{sgn}x_1+b_1\operatorname{sgn}x_2, a_2\operatorname{sgn}x_1+b_2\operatorname{sgn}x_2, 0,\dots,0) & \text{при } n\geqslant 3,\\ (a_1\operatorname{sgn}x_1+b_1\operatorname{sgn}x_2, a_2\operatorname{sgn}x_1+b_2\operatorname{sgn}x_2) & \text{при } n=2,\end{cases}$$

векторного поля, заданного приведённой системой, перпендикулярна координатной оси x_i, $i=1$ или 2.

Сведём результаты исследования устойчивости нулевого решения приведённой системы, полученные в теоремах 3.1–3.4, в таблицу 1. В ней перечислены все случаи, в которых результаты настоящей работы устанавливают устойчивость либо неустойчивость нулевого решения приведённой системы. В первых четырёх её столбцах указаны (символами «+», «−», «0») знаки чисел a_1+b_1, $-a_1+b_1$, a_2+b_2, $-a_2+b_2$. В последнем столбце приводятся отвечающие этому набору знаков результаты. Запись вида «$[\Delta>0]$» означает, что в этом случае определитель Δ положителен. После каждого результата даётся ссылка на соответствующую теорему: запись вида «(1, iv)» означает случай (iv) теоремы 1.

Таблица 1. Сводная таблица результатов исследования устойчивости нулевого решения приведённой системы, полученных в настоящей работе

a_1+b_1	$-a_1+b_1$	a_2+b_2	$-a_2+b_2$	Устойчивость
$+$	$+$	$+$	$+$	$\Delta \neq 0$: неустойчиво (3.2,i)
$+$	$+$	$+$	$-$	$[\Delta < 0]$ неустойчиво (3.2,i)
$+$	$+$	$+$	0	$[\Delta < 0]$ неустойчиво (3.2,i)
$+$	$+$	$-$	$+$	$[\Delta > 0]$ • $r > 0$: неустойчиво (3.4,ii) • $r < 0$: при $n = 2$ асимптотически устойчиво, при $n \geqslant 3$ устойчивость совпадает с устойчивостью подматрицы $(c_{ij})_{3 \leqslant i,j \leqslant n}$ (3.1,iii)
$+$	$+$	$-$	$-$	• $\Delta > 0$: при $n = 2$ асимптотически устойчиво, при $n \geqslant 3$ устойчивость совпадает с устойчивостью подматрицы $(c_{ij})_{3 \leqslant i,j \leqslant n}$ (3.1,ii) • $\Delta < 0$: неустойчиво (3.3,ii)
$+$	$+$	$-$	0	$[\Delta > 0]$ при $n = 2$ асимптотически устойчиво, при $n \geqslant 3$, $c_{21} \neq 0$ или $(c_{21}, c_{23}, c_{24}, \ldots, c_{2n}) = (0, \ldots, 0)$ устойчивость совпадает с устойчивостью подматрицы $(c_{ij})_{3 \leqslant i,j \leqslant n}$ (3.1,ix)
$+$	$+$	0	$+$	$[\Delta > 0]$ $c_{21} > 0$: неустойчиво (3.2,iv)

Продолжение на следующей странице

Таблица 1. Сводная таблица результатов исследования устойчивости нулевого решения приведённой системы, полученных в настоящей работе

a_1+b_1	$-a_1+b_1$	a_2+b_2	$-a_2+b_2$	Устойчивость
$+$	$+$	0	$-$	$[\Delta<0]$ • $c_{21}>0$: неустойчиво (3.2,iv) • $c_{21}<0$: неустойчиво (3.3,v) • $(c_{21},c_{23},c_{24},\dots,c_{2n})=(0,\dots,0)$ (при $n=2$ это условие имеет вид $c_{21}=0$), $c_{22}\leqslant 0$: неустойчиво (3.3,v)
$+$	$-$	$+$	$+$	$[\Delta>0]$ неустойчиво (3.2,i)
$+$	$-$	$+$	$-$	неустойчиво (3.2,i)
$+$	$-$	$+$	0	$[\Delta>0]$ неустойчиво (3.2,i)
$+$	$-$	$-$	$+$	неустойчиво (3.2,ii)
$+$	$-$	$-$	$-$	$[\Delta<0]$ неустойчиво (3.3,ii)
$+$	$-$	$-$	0	$[\Delta<0]$ • $c_{21}>0$: неустойчиво (3.3,vi) • $c_{21}<0$: неустойчиво (3.2,vi) • $(c_{21},c_{23},c_{24},\dots,c_{2n})=(0,\dots,0)$ (при $n=2$ это условие имеет вид $c_{21}=0$), $c_{22}\leqslant 0$: неустойчиво (3.3,vi)

Продолжение на следующей странице

Таблица 1. Сводная таблица результатов исследования устойчивости нулевого решения приведённой системы, полученных в настоящей работе

a_1+b_1	$-a_1+b_1$	a_2+b_2	$-a_2+b_2$	Устойчивость
$+$	$-$	0	$+$	$[\Delta > 0]$ неустойчиво (3.2,ii)
$+$	$-$	0	$-$	$[\Delta < 0]$ • $c_{21} > 0$: неустойчиво (3.2,iv) • $c_{21} < 0$: неустойчиво (3.3,v) • $(c_{21}, c_{23}, c_{24}, \ldots, c_{2n}) = (0, \ldots, 0)$ (при $n = 2$ это условие имеет вид $c_{21} = 0$), $c_{22} \leqslant 0$: неустойчиво (3.3,v)
$+$	0	$+$	$+$	$[\Delta > 0]$ неустойчиво (3.2,i)
$+$	0	$+$	$-$	$[\Delta < 0]$ неустойчиво (3.2,i)
$+$	0	$-$	$+$	$[\Delta > 0]$ $c_{12} < 0$: неустойчиво (3.2,v)
$+$	0	$-$	$-$	$[\Delta < 0]$ неустойчиво (3.3,ii)

Продолжение на следующей странице

Таблица 1. Сводная таблица результатов исследования устойчивости нулевого решения приведённой системы, полученных в настоящей работе

a_1+b_1	$-a_1+b_1$	a_2+b_2	$-a_2+b_2$	Устойчивость
+	0	0	+	$[\Delta>0]$ • $c_{21}>0$: неустойчиво (3.2,iv) • $c_{12}<0$: неустойчиво (3.2,v) • $(c_{21},c_{23},c_{24},\ldots,c_{2n})=(0,\ldots,0)$ (при $n=2$ это условие имеет вид $c_{21}=0$), $c_{22}\leqslant 0$: неустойчиво (3.3,vi)
+	0	0	−	$[\Delta<0]$ • $c_{21}>0$: неустойчиво (3.2,iv) • $c_{21}<0$: неустойчиво (3.3,v) • $(c_{21},c_{23},c_{24},\ldots,c_{2n})=(0,\ldots,0)$ (при $n=2$ это условие имеет вид $c_{21}=0$), $c_{22}\leqslant 0$: неустойчиво (3.3,v)
−	+	+	+	$[\Delta<0]$ неустойчиво (3.3,i)
−	+	+	−	• $\Delta>0$: при $n=2$ асимптотически устойчиво, при $n\geqslant 3$ устойчивость совпадает с устойчивостью подматрицы $(c_{ij})_{3\leqslant i,j\leqslant n}$ (3.1,iv) • $\Delta<0$: неустойчиво (3.3,i)
−	+	+	0	$[\Delta<0]$ неустойчиво (3.3,i)

Продолжение на следующей странице

Таблица 1. Сводная таблица результатов исследования устойчивости нулевого решения приведённой системы, полученных в настоящей работе

a_1+b_1	$-a_1+b_1$	a_2+b_2	$-a_2+b_2$	Устойчивость
$-$	$+$	$-$	$+$	• $\Delta > 0$: при $n=2$ асимптотически устойчиво, при $n \geqslant 3$ устойчивость совпадает с устойчивостью подматрицы $(c_{ij})_{3\leqslant i,j\leqslant n}$ (3.1,iv) • $\Delta < 0$: неустойчиво (3.3,i)
$-$	$+$	$-$	$-$	$[\Delta > 0]$ при $n=2$ асимптотически устойчиво, при $n \geqslant 3$ устойчивость совпадает с устойчивостью подматрицы $(c_{ij})_{3\leqslant i,j\leqslant n}$ (3.1,i)
$-$	$+$	$-$	0	$[\Delta > 0]$ при $n=2$ асимптотически устойчиво, при $n \geqslant 3$, $c_{21}\neq 0$ или $(c_{21}, c_{23}, c_{24}, \ldots, c_{2n}) = (0, \ldots, 0)$ устойчивость совпадает с устойчивостью подматрицы $(c_{ij})_{3\leqslant i,j\leqslant n}$ (3.1,ix)
$-$	$+$	0	$+$	$[\Delta < 0]$ неустойчиво (3.3,i)
$-$	$+$	0	$-$	$[\Delta > 0]$ при $n=2$ асимптотически устойчиво, при $n \geqslant 3$, $c_{21}\neq 0$ или $(c_{21}, c_{23}, c_{24}, \ldots, c_{2n}) = (0, \ldots, 0)$ устойчивость совпадает с устойчивостью подматрицы $(c_{ij})_{3\leqslant i,j\leqslant n}$ (3.1,viii)
$-$	$-$	$+$	$+$	$\Delta \neq 0$: неустойчиво (3.2,ii)

Продолжение на следующей странице

Таблица 1. Сводная таблица результатов исследования устойчивости нулевого решения приведённой системы, полученных в настоящей работе

a_1+b_1	$-a_1+b_1$	a_2+b_2	$-a_2+b_2$	Устойчивость
$-$	$-$	$+$	$-$	$[\Delta > 0]$ • $r > 0$: неустойчиво (3.4,i) • $r < 0$: при $n = 2$ асимптотически устойчиво, при $n \geqslant 3$ устойчивость совпадает с устойчивостью подматрицы $(c_{ij})_{3\leqslant i,j\leqslant n}$ (3.1,v)
$-$	$-$	$+$	0	$[\Delta > 0]$ $c_{21} < 0$: неустойчиво (3.2,vi)
$-$	$-$	$-$	$+$	$[\Delta < 0]$ неустойчиво (3.2,ii)
$-$	$-$	$-$	$-$	• $\Delta > 0$: при $n = 2$ асимптотически устойчиво, при $n \geqslant 3$ устойчивость совпадает с устойчивостью подматрицы $(c_{ij})_{3\leqslant i,j\leqslant n}$ (3.1,ii) • $\Delta < 0$: неустойчиво (3.3,ii)
$-$	$-$	$-$	0	$[\Delta < 0]$ • $c_{21} > 0$: неустойчиво (3.3,vi) • $c_{21} < 0$: неустойчиво (3.2,vi) • $(c_{21}, c_{23}, c_{24}, \ldots, c_{2n}) = (0, \ldots, 0)$ (при $n = 2$ это условие имеет вид $c_{21} = 0$), $c_{22} \leqslant 0$: неустойчиво (3.3,vi)
$-$	$-$	0	$+$	$[\Delta < 0]$ неустойчиво (3.2,ii)

Продолжение на следующей странице

Таблица 1. Сводная таблица результатов исследования устойчивости нулевого решения приведённой системы, полученных в настоящей работе

a_1+b_1	$-a_1+b_1$	a_2+b_2	$-a_2+b_2$	Устойчивость
$-$	$-$	0	$-$	$[\Delta > 0]$ при $n=2$ асимптотически устойчиво, при $n \geqslant 3$, $c_{21} \neq 0$ или $(c_{21}, c_{23}, c_{24}, \ldots, c_{2n}) = (0, \ldots, 0)$ устойчивость совпадает с устойчивостью подматрицы $(c_{ij})_{3 \leqslant i,j \leqslant n}$ (3.1,viii)
$-$	0	$+$	$+$	$[\Delta < 0]$ • $c_{12} > 0$: неустойчиво (3.3,iv) • $c_{12} < 0$: неустойчиво (3.2,v) • $(c_{12}, \ldots, c_{1n}) = (0, \ldots, 0)$, $c_{11} \leqslant 0$: неустойчиво (3.3,iv)
$-$	0	$+$	$-$	$[\Delta > 0]$ при $n=2$ асимптотически устойчиво, при $n \geqslant 3$, $c_{12} \neq 0$ или $(c_{12}, \ldots, c_{1n}) = (0, \ldots, 0)$ устойчивость совпадает с устойчивостью подматрицы $(c_{ij})_{3 \leqslant i,j \leqslant n}$ (3.1,vii)
$-$	0	$-$	$+$	$[\Delta < 0]$ • $c_{12} > 0$: неустойчиво (3.3,iv) • $c_{12} < 0$: неустойчиво (3.2,v) • $(c_{12}, \ldots, c_{1n}) = (0, \ldots, 0)$, $c_{11} \leqslant 0$: неустойчиво (3.3,iv)

Продолжение на следующей странице

Таблица 1. Сводная таблица результатов исследования устойчивости нулевого решения приведённой системы, полученных в настоящей работе

a_1+b_1	$-a_1+b_1$	a_2+b_2	$-a_2+b_2$	Устойчивость
$-$	0	$-$	$-$	$[\Delta>0]$ при $n=2$ асимптотически устойчиво, при $n\geqslant 3$, $c_{12}\neq 0$ или $(c_{12},\ldots,c_{1n})=(0,\ldots,0)$ устойчивость совпадает с устойчивостью подматрицы $(c_{ij})_{3\leqslant i,j\leqslant n}$ (3.1,vii)
$-$	0	0	$+$	$[\Delta<0]$ • $c_{12}>0$: неустойчиво (3.3,iv) • $c_{12}<0$: неустойчиво (3.2,v) • $(c_{12},\ldots,c_{1n})=(0,\ldots,0)$, $c_{11}\leqslant 0$: неустойчиво (3.3,iv)
0	$+$	$+$	$+$	$[\Delta<0]$ • $c_{12}>0$: неустойчиво (3.2,iii) • $c_{12}<0$: неустойчиво (3.3,iii) • $(c_{12},\ldots,c_{1n})=(0,\ldots,0)$, $c_{11}\leqslant 0$: неустойчиво (3.3,iii)
0	$+$	$+$	$-$	$[\Delta<0]$ • $c_{12}>0$: неустойчиво (3.2,iii) • $c_{12}<0$: неустойчиво (3.3,iii) • $(c_{12},\ldots,c_{1n})=(0,\ldots,0)$, $c_{11}\leqslant 0$: неустойчиво (3.3,iii)

Продолжение на следующей странице

Таблица 1. Сводная таблица результатов исследования устойчивости нулевого решения приведённой системы, полученных в настоящей работе

a_1+b_1	$-a_1+b_1$	a_2+b_2	$-a_2+b_2$	Устойчивость
0	+	+	0	$[\Delta<0]$ • $c_{12}>0$: неустойчиво (3.2,iii) • $c_{12}<0$: неустойчиво (3.3,iii) • $(c_{12},\ldots,c_{1n})=(0,\ldots,0)$, $c_{11}\leqslant 0$: неустойчиво (3.3,iii)
0	+	−	+	$[\Delta>0]$ при $n=2$ асимптотически устойчиво, при $n\geqslant 3$, $c_{12}\neq 0$ или $(c_{12},\ldots,c_{1n})=(0,\ldots,0)$ устойчивость совпадает с устойчивостью подматрицы $(c_{ij})_{3\leqslant i,j\leqslant n}$ (3.1,vi)
0	+	−	−	$[\Delta>0]$ при $n=2$ асимптотически устойчиво, при $n\geqslant 3$, $c_{12}\neq 0$ или $(c_{12},\ldots,c_{1n})=(0,\ldots,0)$ устойчивость совпадает с устойчивостью подматрицы $(c_{ij})_{3\leqslant i,j\leqslant n}$ (3.1,vi)
0	−	+	+	$[\Delta>0]$ неустойчиво (3.2,ii)
0	−	+	−	$[\Delta>0]$ $c_{12}>0$: неустойчиво (3.2,iii)
0	−	+	0	$[\Delta>0]$ • $c_{12}>0$: неустойчиво (3.2,iii) • $c_{21}<0$: неустойчиво (3.2,vi)

Продолжение на следующей странице

Таблица 1. Сводная таблица результатов исследования устойчивости нулевого решения приведённой системы, полученных в настоящей работе

$a_1 + b_1$	$-a_1 + b_1$	$a_2 + b_2$	$-a_2 + b_2$	Устойчивость
0	$-$	$-$	$+$	$[\Delta < 0]$ неустойчиво (3.2,ii)
0	$-$	$-$	$-$	$[\Delta < 0]$ неустойчиво (3.3,ii)
0	$-$	$-$	0	$[\Delta < 0]$ • $c_{21} > 0$: неустойчиво (3.3,vi) • $c_{21} < 0$: неустойчиво (3.2,vi) • $(c_{21}, c_{23}, c_{24}, \ldots, c_{2n}) = (0, \ldots, 0)$ (при $n = 2$ это условие имеет вид $c_{21} = 0$), $c_{22} \leqslant 0$: неустойчиво (3.3,vi)

Список литературы

[1] *Айзерман М.А., Пятницкий Е.С.* Основы теории разрывных систем. I, II // Автомат. и телемех. 1974. Т. 35. № 7. С. 33–47; № 8. С. 39–61;

[2] *Алидема Р.И.* Исследование устойчивости системы с двумя линиями разрыва в критических случаях второго порядка. II // Вестн. ЛГУ. 1985. № 15. С. 3–10;

[3] *Алидема Р.И.* Исследование устойчивости системы с двумя линиями разрыва в критических случаях первого порядка // Publ. Inst. Math. 1979. V. 26 (40). P. 19–25;

[4] *Аносов Д.В.* Об устойчивости положений равновесия релейных систем // Автомат. и телемех. 1959. Т. 20, № 2. С. 135–149;

[5] *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967;

[6] *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970;

[7] *Болтянский В.Г., Понтрягин Л.С.* Об устойчивости положения равновесия «релейной» системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Труды третьего всесоюзного математического съезда / Под ред. Никольского С.М. М.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 1. С. 217–218;

[8] *Гришин С.А., Уткин В.И.* О доопределении разрывных систем // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 2. С. 227–235;

[9] *Емельянов С.В.* Теория систем автоматического управления с переменной структурой: зарождение и начальный этап развития // Нелинейная динамика и управление. Сборник статей / Под ред. Емельянова С.В., Коровина С.К. М., 2004. Вып. 4. С. 5–16;

[10] *Емельянов С.В., Уткин В.И., Таран В.А. и др.* Теория систем с переменной структурой. М.: Наука, 1970;

[11] *Изосимов Д.Б., Уткин В.И.* Об эквивалентности систем с большими коэффициентами и систем с разрывными управлениями // Автомат. и телемех. 1981. Т. 42. № 11. С. 189–191;

[12] *Леонов Г.А.* Теория управления. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2006;

[13] *Лозгачев Г.И.* Достаточные условия устойчивости одного класса разрывных систем // Сб. трудов ВНИИ систем. исслед. 1980. № 4. С. 21–24;

[14] *Лосев А.А.* Достаточные условия неустойчивости положений равновесия релейных систем // Тезисы докладов Международной конференции «Системы Аносова и современная динамика», посвящённой 80-летию со дня рождения Д. В. Аносова. Москва. 2016. С. 78–79;

[15] *Лосев А.А.* Достаточные условия устойчивости положений равновесия релейных систем // Тезисы докладов Международной школы-конференции «Соболевские чтения». Новосибирск. 2016. С. 114;

[16] *Лосев А.А.* Исследование устойчивости нулевого решения релейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя реле // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53;

[17] *Лосев А.А.* Устойчивость нулевого решения релейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя реле // Тр. МИАН. 2015. Т. 291. С. 182–201;

[18] *Ляпунов А.М.* О постоянных движениях твёрдого тела в жидкости // Сообщ. Харьк. мат. о-ва. Сер. 2. 1888. Т. 1, № 1. С. 7–60;

[19] *Ляпунов А.М.* Об одном свойстве дифференциальных уравнений задачи о движении тяжёлого твёрдого тела, имеющего неподвижную точку // Сообщ. Харьк. мат. о-ва. Сер. 2. 1894. Т. 4, № 3. С. 123–140;

[20] *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. Харьков, 1892; М.; Л.: Гостехтеориздат, 1950;

[21] *Неймарк Ю.И.* О скользящем режиме релейных систем автоматического регулирования // Автомат. и телемех. 1957. Т. 18. № 1. С. 27–33;

[22] *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974;

[23] *Уткин В.И.* Короткий комментарий к методу А. Ф. Филиппова продолжения решения на границе разрыва // Автомат. и телемех. 2015. Т. 76. № 5. С. 165–174;

[24] *Уткин В.И.* Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. М.: Наука, 1981;

[25] *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с правой частью, разрывной на пересекающихся поверхностях // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 10. С. 1814–1823;

[26] *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью // Матем. сб. 1960. Т. 51 (93), № 1. С. 99–128;

[27] *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985;

[28] *Филиппов А.Ф.* Исследование системы дифференциальных уравнений с двумя пересекающимися линиями разрыва // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат., мех. 1979. № 6. С. 68–75;

[29] *Филиппов А.Ф.* Система дифференциальных уравнений с несколькими разрывными функциями // Матем. заметки. 1980. Т. 27. № 2. С. 255–266;

[30] *Филиппов А.Ф.* Устойчивость для дифференциальных уравнений с разрывными и многозначными правыми частями // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 6. С. 1018–1027;

[31] *Финогенко И.А.* О дифференциальных уравнениях с разрывной правой частью // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Математика. 2010. Т. 3. № 2. С. 88–102;

[32] *Liapounoff A.M.* Sur une série dans la théorie des equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients périodiques // Зап. Акад. наук по физ.-мат. отд. Сер. 8. 1902. Т. 13, № 2. С. 1–70;

[33] *Painleve P.* Lecons sur le frottement. Paris: Hermann, 1895. Русск. пер.: *Пэнлеве П.* Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954.

Список иллюстративного материала