Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова»

На правах рукописи

Карпухин Михаил Александрович

Метрики на поверхностях, экстремальные для собственных значений оператора Лапласа-Бельтрами

01.01.04 – Геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2017

Работа выполнена на кафедре высшей геометрии и топологии механико-математического факультета Московского Государственного Университета им. М. В. Ломоносова.

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ:

ПЕНСКОЙ Алексей Викторович - доктор физико-математических наук, доцент кафедры высшей геометрии и топологии механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова».

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ:

МИРОНОВ Андрей Евгеньевич - доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, ведущий научный сотрудник лаборатории динамических систем Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук (специальность – 01.01.04).

КАРАСЁВ Роман Николаевич - доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник кафедры высшей математики Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)» (специальность – 01.01.04).

ВЕДУЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ:

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук (ПОМИ РАН).

Защита состоится 8 июня 2017 года в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 002.022.03 при Математическом Институте им. В.А. Стеклова Российской Академии Наук, расположенному по адресу: 119991, г.Москва, ул. Губкина, д. 8.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук и на сайте МИАН по адресу: http://www.mi.ras.ru/dis/ref17/karpukhin/dis.pdf

Автореферат разослан "___" марта 2017 года. Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя учёного секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь
Диссертационного совета Д 002.022.03,
доктор физико-математических наук Королев М.А.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Данная работа посвящена исследованию минимальных поверхностей в сферах и их приложениям к спектральной теории оператора Лапласа-Бельтрами. Минимальные поверхности в сферах или, более общо, гармонические отображения римановых поверхностей в сферу, являются одним из наиболее интересных примеров интегрируемых систем, возникающих в дифференциальной геометрии. При их изучении применяются методы различных областей современной математики: от теории эллиптических уравнений в частных производных до алгебраической геометрии, см., например, [C, H, S]. В последние годы в этой области произошло несколько научных прорывов, в числе которых доказательство Нэвеса и Маркеса гипотезы Уилмора [MN], а также доказательство Брэндла гипотезы Лоусона [B]. Связь теории минимальных подмногообразий с задачей геометрической оптимизации собственных чисел оператора Лапласа-Бельтрами была впервые отмечена в работах Надирашвили [N1] и Эль Суфи, Илиаса [EI1].

Для произвольной замкнутой (то есть компактной и без границы) поверхности M, оснащенной римановой метрикой g, оператор Лапласа-Бельтрами имеет положительный дискретный спектр,

$$0 = \lambda_0(M,g) < \lambda_1(M,g) \leqslant \lambda_2(M,g) \leqslant \lambda_3(M,g) \leqslant \ldots \nearrow +\infty,$$

где собственные значения записаны с учетом кратности.

Определение 1. *Пусть M является замкнутой гладкой поверхностью.* **Функционал i-го собственного значения** $\Lambda_i(M,g)$ *— функционал на пространстве всех римановых метрик на M, определяемый формулой*

$$\Lambda_i(M,g) = \lambda_i(M,g)\,\mathrm{Area}_g(M).$$

Ограниченность функционалов $\Lambda_i(M,g)$ была доказана Янгом и Яу для $i = 1$ [YY], и позднее Кореваароaveraging в общем случае [K]. Главной задачей геометрической оптимизации является нахождение супремума и максимальных метрик функционалов собственных значений на фиксированной поверхности. Эта задача оказывается крайне сложной и полный ответ известен только для нескольких первых номеров i на поверхностях неотрицательной эйлеровой характеристики. Полный список известных результатов приводится ниже.

- $\Lambda_1(\mathbb{S}^2,g)$: Херш показал в работе [Her], что стандартная метрика на сфере является единственной максимальной метрикой для $\Lambda_1(\mathbb{S}^2,g)$.

- $\Lambda_1(\mathbb{RP}^2, g)$: Ли и Яу показали в работе [LY], что стандартная метрика на проективной плоскости является единственной максимальной метрикой для $\Lambda_1(\mathbb{RP}^2, g)$.
- $\Lambda_1(\mathbb{T}^2, g)$: Надирашвили показал в работе [N1], что единственной максимальной метрикой для $\Lambda_1(\mathbb{T}^2, g)$ является плоская метрика на равностороннем торе, то есть торе, соответствующем решетке из равносторонних треугольников.
- $\Lambda_1(\mathbb{K}, g)$: Для бутылки Клейна существует единственная максимальная метрика, соответствующая минимальному погружению $\tilde{\tau}_{3,1}$, определение которого можно найти в разделе 4.4. Экстремальность данной метрики была показана в [JNP], в то время как ее единственность доказана в [EGJ].

Для следующей группы примеров гладких максимальных метрик не существует (эквивалентно можно сказать, что максимальная метрика сингулярна).

- $\Lambda_2(\mathbb{S}^2, g)$: Максимум достигается на сингулярной метрике, полученной склеиванием двух копий стандартной сферы по точке. Общая схема доказательства была предложена Надирашвили в работе [N2], а строгое доказательство дано Петридесом в работе [Pe].
- $\Lambda_3(\mathbb{S}^2, g)$: Надирашвили и Сир доказали в работе [NS], что максимум достигается на сингулярной метрике, полученной склеиванием трех копий стандартной сферы.
- $\Lambda_2(\mathbb{RP}^2, g)$: Надирашвили и Пенской доказали в работе [NP], что максимум достигается на сингулярной метрике, полученной склеиванием стандартной сферы со стандартной проективной плоскостью.

Промежуточным этапом на пути получения максимальных метрик является изучение экстремальных метрик для функционалов $\Lambda_i(M, g)$. Согласно наблюдению Надирашвили [N1], формализованному Эль Суфи и Илиасом [EI1], метрики на минимальных поверхностях в евклидовых сферах $\mathbb{S}^n$ экстремальны для функционала $\Lambda_i(M, g)$ для некоторого значения i, которое определяется спектральными свойствами индуцированной метрики. Нахождение этого значения является нетривиальной задачей, решение которой в общем случае неизвестно. В настоящее эта задача решена только для трех семейств минимальных торов и бутылок Клейна в $\mathbb{S}^3$ и $\mathbb{S}^4$, см. работы [Lap], [P1], [P2]. Более подробно эти результаты описаны в главе 4. В настоящей диссертации получены два новых семейства экстремальных метрик, индуцированных минимальными вложениями в $\mathbb{S}^4$ и $\mathbb{S}^5$ соответственно, вычислен соответствующий номер функционала, а также изучен вопрос максимальности всех известных примеров экстремальных метрик.

Цель работы. Цель работы состоит в описании двух новых семейств экстремальных метрик на торе. Также целью работы является доказательство немаксимальности всех известных экстремальных метрик для функционалов $\Lambda_i(M, g)$ с $i > 1$.

Методы исследования. В диссертации использованы методы математического анализа и дифференциальной геометрии – задача Штурма-Лиувилля, теория минимальных поверхностей. Для построения примеров экстремальных метрик используются конструкции Миронова и Сяна-Лоусона.

При нахождении номера функционала собственного значения, для которого найденные примеры экстремальны, используются теория уравнения Ламе, полиномы Лагранжа и эллиптические интегралы.

Основные результаты диссертации. Диссертация содержит следующие новые определения, результаты и методы:

- Получена характеризация биполярных торов Оцуки в терминах конструкции Сяна-Лоусона.
- Найдены номера функционалов собственных значений, для которых биполярные торы Оцуки $\tilde{O}_{\frac{p}{q}}$ экстремальны.
- Найдены номера функционалов собственных значений, для которых торы $M_{m,n}$ максимальны.
- Показано, что все известные на данный момент метрики, экстремальные для Λ_i с $i > 1$, не являются максимальными.

Научная новизна. Утверждения 3.1.8, 3.1.9, 3.2.1, 3.4.1, 4.0.2, 4.0.4 являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация имеет теоретический характер. Результаты могут быть полезны математикам, занимающимся теорией минимальных подмногообразий, спектральной теорией оператора Лапласа-Бельтрами и задачей Штурма-Лиувилля.

Результаты диссертации докладывались на следующих научно-исследовательских семинарах:

- 2 октября 2012 г. доклад «Multiple eigenvalues of Laplace operator» на русско-японской мини-конференции в рамках семинара «Геометрия и Топология» кафедры Высшей Геометрии и Топологии МГУ.
- 9 октября 2012 г. доклад «Геометрическая оптимизация собственных значений оператора Лапласа на поверхностях» на семинаре добрушинской математической лаборатории ИППИ РАН.

- 20 марта 2013 г. доклад «Геометрическая оптимизация спектра оператора Лапласа на двумерных поверхностях»на Семинаре отдела геометрии и топологии МИАН «Геометрия, топология и математическая физика».
- 11 декабря 2013 г. доклад «Максимизация первого собственного значения Лапласиана на компактных поверхностях»на Семинаре отдела геометрии и топологии МИАН «Геометрия, топология и математическая физика».
- 21 февраля 2017г. доклад «Метрики на поверхностях, экстремальные для собственных значений оператора Лапласа-Бельтрами» на Семинаре ИППИ РАН «Дискретная и вычислительная геометрия».
- 1 марта 2017г. доклад «Метрики на поверхностях, экстремальные для собственных значений оператора Лапласа-Бельтрами» на Семинаре отдела геометрии и топологии МИАН «Геометрия, топология и математическая физика».

Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

1. постерный доклад «Spectral properties of bipolar surfaces to Otsuki tori» на «Workshop on the geometry of eigenvalues and eigenfunctions» Монреаль, 4 – 8 июня 2012 г.
2. 6 июня 2013 г. доклад «Extremal metrics on torus and Klein bottle» на «Workshop on spectral theory and geometry» Нешатель, 4 – 8 июня 2013 г.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 3 работах (3 в рецензируемых журналах), список которых приведен в конце диссертации.

Структура работы. Диссертация состоит из четырех глав и списка литературы. Первая глава – введение. В ней формулируются основные вопросы, изучаемые в этой работе, дается общий обзор хода доказательства, обозначаются перспективы дальнейших исследований, вводятся используемые обозначения. Во второй главе даются предварительные сведения, касающиеся понятий, возникающих в работе, а также техники работы с ними. Третья глава диссертации посвящена описанию двух новых семейств экстремальных метрик. В четвертой главе мы изучаем немаксимальность известных семейств экстремальных метрик.

Полный объем диссертации – 75 страниц, список литературы состоит из 49 наименований.

1. Краткое содержание работы

Изучение экстремальных метрик возможно благодаря их тесной связи с минимальными подмногообразиями в сферах, о которой пойдет речь ниже. Пусть $M \looparrowright \mathbb{S}^n$ — минимально погруженное подмногообразие единичной сферы $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Обозначим за Δ оператор Лапласа-Бельтрами на M, ассоциированный с индуцированной метрикой g на M. Считающая функция Вейля определяется следующей формулой,

$$N(\lambda) = \#\{i|\lambda_i(M,g) < \lambda\}.$$

Примеры экстремальных метрик могут быть построены с помощью следующей теоремы.

Теорема 2 (Эль Суфи и Илиас, [EI2])**.** *Пусть $M \looparrowright \mathbb{S}^n$ — минимально погруженное подмногообразие единичной сферы $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Тогда метрика, индуцированная на M этим погружением, является экстремальной для функционала $\Lambda_{N(\dim(M))}(M,g)$.*

Тот факт, что размерность многообразия M появляется в аргументе функции Вейля объясняется следующей классической теоремой, доказательство которой можно найти в книге [KN].

Теорема 3. *Пусть $M \looparrowright \mathbb{S}^n$ — минимально погруженное подмногообразие единичной сферы $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Тогда ограничения $x^1|_M, \ldots, x^{n+1}|_M$ координатных функций являются собственными функциями оператора Лапласа-Бельтрами на M с собственным значением $\dim M$.*

Теоремы 2 и 3 верны для многообразий произвольной размерности, но вследствие неограниченности функционала Λ_i в размерностях больше двух (см. [CD]), они особенно интересны в случае поверхностей.

Таким образом, для нахождения экстремальной метрики достаточно рассмотреть минимальную поверхность M в сфере, затем вычислить $N(2)$ и заключить, что метрика, индуцированная на M данным вложением максимальна для функционала $\Lambda_{N(2)}(M,g)$. В таком виде этот метод был впервые сформулирован А. В. Пенским в работе [P1] и им же успешно применен в работах [P1, P2] в случае поверхностей Лоусона и торов Оцуки соответственно. Тем не менее, следует отметить, что некоторые из предложенных Пенским идей были впервые использованы Ляпуантом в работе [Lap] при изучении спектральных свойств биполярных поверхностей Лоусона. Его работа была, в свою очередь, основана на статье [JNP], в которой Д. Якобсон, И. Полтерович и Н. Надирашвили показали, что метрика на биполярной поверхности Лоусона $\tilde{\tau}_{3,1}$ экстремальна для $\Lambda_1(\mathbb{K},g)$. Позднее, Эль Суфи, Джакомини и Жазар доказали единственность экстремальной метрики для $\Lambda_1(\mathbb{K},g)$.

Глава 3 посвящена описанию двух новых примеров экстремальных метрик на торе. Первым результатом данной работы является изучение спектральных свойств биполярных торов Оцуки. Определения торов

Оцуки и биполярных поверхностей даны в разделе 3.1. Торы Оцуки могут быть получены с помощью теоремы редукции Сяна-Лоусона для минимальных подмногообразий. На данном этапе, в целях формулировки результата, достаточно отметить, что для любого рационального числа $\frac{p}{q}$, такого что $(p,q)=1$, $\frac{1}{2}<\frac{p}{q}<\frac{\sqrt{2}}{2}$, существует минимально погруженная поверхность в $\mathbb{S}^4$, в дальнейшем обозначаемая $\tilde{O}_{\frac{p}{q}}$. Экстремальные свойства этих поверхностей собраны в следующей теореме.

Теорема 4. *Биполярная поверхность $\tilde{O}_{\frac{p}{q}}$ к тору Оцуки является тором. Если q нечетно, то метрика, на $\tilde{O}_{\frac{p}{q}}$, индуцированная погружением, экстремальна для функционала $\Lambda_{2q+4p-2}(\mathbb{T}^2,g)$. Если же q четно, то эта метрика экстремальна для функционала $\Lambda_{q+2p-2}(\mathbb{T}^2,g)$.*

Эта теорема доказывается в разделе 3.2. Отметим, что в разделе 3.1 в процессе доказательства мы приводим альтернативную конструкцию биполярных торов Оцуки, используя теорему Сяна-Лоусона о редукции.

Вторым результатом настоящей работы является пример нового семейства экстремальных метрик, для которого минимальное погружение в сферу задается явными формулами. Для любой пары взаимно простых натуральных чисел (m,n), $m\geqslant n$ рассмотрим погружение $\varphi_{m,n}\colon \mathbb{R}^2/(2\pi\mathbb{Z}^2)\to\mathbb{S}^5$, заданное следующим образом,

$$\varphi_{m,n}(x,y) = \left(\sqrt{\frac{m+n}{2m+n}}e^{imy}\sin x, \sqrt{\frac{m+n}{m+2n}}e^{iny}\cos x, \sqrt{\frac{n\cos^2 x}{m+2n}+\frac{m\sin^2 x}{2m+n}}e^{-i(m+n)y}\right), \tag{1}$$

где $\mathbb{S}^5$ рассматривается как множество векторов единичной длины в $\mathbb{C}^3$. Обозначим за $M_{m,n}$ образ отображения $\varphi_{m,n}$. Явная формула (1) была впервые упомянута во введении к статье [M1]. Это погружение может быть получено с помощью общей конструкции, описанной А. Е. Мироновым в работе [M2], см. также раздел 3.3 ниже. Следует отметить, что поверхности $M_{m,n}$ были описаны в конформных координатах с помощью эллиптических функций в работах [Ha, J].

Спектральные свойства $M_{m,n}$ собраны в следующей теореме.

Теорема 5. *Для любой пары взаимно простых натуральных чисел m, n, $m \geqslant n$ погружение $\varphi_{m,n}$ минимально. Соответствующая поверхность $M_{m,n}$ является тором. Если mn четно, то метрика, индуцированная на $M_{m,n}$ этим погружением экстремальна для функционала $\Lambda_{4(m+n)-3}(\mathbb{T}^2, g)$. Если же mn нечетно, то метрика, индуцированная на $M_{m,n}$ этим погружением экстремальна для функционала $\Lambda_{2(m+n)-3}(\mathbb{T}^2, g)$.*

Доказательство этой теоремы приводится в разделе 3.4 и местами следует работе А. В. Пенского [P1]. Тем не менее, наше изложение значительно упрощено, например, мы не используем теорию уравнений Магнуса-Уинклера-Айнса. Также как и в работе [P1], основной идеей доказательства является применение теории уравнения Ламе. Кроме того, мы даем строгое доказательство Предложения 20 из работы [P1], которое было опущено в работе Пенского.

Глава 4 посвящена изучению максимальности экстремальных метрик. Список известных экстремальных метрик длиннее, чем список известных точных значений супремума функционалов $\Lambda_i(M, g)$, однако до сих пор максимальность этих экстремальных метрик не была изучена. В данной работе мы заполняем этот пробел и проверяем максимальность всех известных экстремальных метрик, а известны следующие:

(А) метрики на торах Оцуки $O_{\frac{p}{q}}$, которые были изучены в работе [P2];
(Б) метрики на Лоусоновых торах и бутылках Клейна $\tau_{m,k}$, которые были изучены в работе [P1];
(В) метрики на биполярных Лоусоновых поверхностях $\tilde{\tau}_{m,k}$, которые были изучены в работе [Lap];
(Г) метрики на биполярных поверхностях $\tilde{O}_{\frac{p}{q}}$, которые изучены в главе 3 данной работы;
(Д) метрики на поверхностях $M_{m,n}$, которые также изучены в главе 3 данной работы.

Определения поверхностей (Б) и (В) будут даны разделах 4.3 и 4.4 соответственно. Основной результат главы 4 настоящей работы — это следующая теорема.

Теорема 6. *Среди метрик (А)-(Д) нет максимальных, за исключением $\tilde{\tau}_{3,1}$ и $M_{1,1}$.*

Замечание 7. *Метрика на* $\tilde{\tau}_{3,1}$ *максимальна для функционала* $\Lambda_1(\mathbb{K}, g)$*, см. работы* [EGJ, JNP]*, а* $M_{1,1}$ *является плоским тором с равносторонней решеткой, который максимален для функционала* $\Lambda_1(\mathbb{T}^2, g)$*, см. работу* [N1].

В разделе 4.7 мы также докажем следующее предложение.

Предложение 8. *Метрика на клиффордовом торе экстремальна для бесконечного множества функционалов* $\Lambda_i(M, g)$*, но не максимальна ни для одного из них.*

Список литературы

[K1] M. Карпухин, Немаксимальность экстремальных метрик на торе и бутылке Клейна, *Матем. сб.*, **204**:12 (2013), 31-48.

[K2] M. Karpukhin, Spectral properties of a family of minimal tori of revolution in five-dimensional sphere.*Canadian Mathematical Bulletin*, **58**:2 (2015), 285-296. Preprint `arXiv:1301.2483`.

[K3] M. Karpukhin, Spectral properties of bipolar surfaces to Otsuki tori. *Journal of Spectral Theory*, **4**:1 (2014), 87-111. Preprint `arXiv:1205.6316`.

Список литературы

[BU] S. Bando, H. Urakawa, Generic properties of the eigenvalue of Laplacian for compact Riemannian manifolds. *Tôhoku Math. J.* **35**:2 (1983), 155 - 172.

[Ber] M. Berger, Sur les premières valeurs propres des varétés Riemanniennes, *Compositio Math.* **26** (1973), 129-149.

[B] S. Brendle, Embedded minimal tori in $\mathbb{S}^3$ and the Lawson conjecture, *Acta Mathematica* **211** (2013) 177-190.

[F] P. Byrd, M. Friedman. *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists,* Springer Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1971.

[C] E. Carberry, Minimal tori in $\mathbb{S}^3$, *Pacific J. Math.*, **233**:1 (2007), 41-69.

[Ca] B. Causley, Bipolar Lawson tau-surfaces and generalized Lawson tau-surfaces, *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.* **12** (2016), paper No. 009. Preprint `arXiv:1406.4652`.

[CF] I. Chavel, E. A. Feldman, Spectra of manifolds with small handles, *Comment. Math. Helvetici* **56** (1981), 83-102.

[CL] E. A. Coddington, N. Levinson. *Theory of ordinary differential equations,* McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1955.

[CD] B. Colbois, J. Dodziuk, Riemannian metrics with large λ_1, *Proc. Amer. Math. Soc.* **122**:3 (1994), 905-906.

[CE] B. Colbois, A. El Soufi, Extremal eigenvalues of the Laplacian in a conformal class of metrics: the Conformal Spectrum, *Ann. of Global Analysis and Geometry* **24** 2003, 337-349. Preprint `arXiv:math/0409316`.

[EGJ] A. El Soufi, H. Giacomini, M. Jazar, A unique extremal metric for the least eigenvalue of the Laplacian on the Klein bottle. *Duke Math. J.* **135**:1 (2006), 181-202. Preprint `arXiv:math/0701773`.

[EI1] A. El Soufi, S. Ilias, Laplacian eigenvalues functionals and metric deformations on compact manifolds. *J. Geom. Phys.* **58**:1 (2008), 89-104. Preprint `arXiv:math/0701777`.

[EI2] A. El Soufi, S. Ilias, Riemannian manifolds admitting isometric immersions by their first eigenfunctions. *Pacific. J. Math.* **195**:1 (2000), 91-99.

[EMOT] A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. Tricomi. *Higher transcendental functions*, Vol. III. McGraw-Hill Book Company Inc., New York-Toronto-London, 1955.

[Ha] M. Haskins, Special Lagrangian cones. *American J. of Math.* **126**:4 (2004), 845-871.

[Hen] A. Henrot. *Extremum problems for eigenvalues of elliptic operators,* Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2006.

[Her] J. Hersch, Quatre propriétés isopérimétriques de membranes sphériques homogènes. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér A-B* **270** (1970), A1645-A1648.

[H] N. J. Hitchin,Harmonic maps from a 2-torus to the 3-sphere, *J. Differential Geom.*, **31**:3 (1990), 627-710.

[HL] W.-Y. Hsiang, H. B. Lawson, Minimal submanifolds of low cohomogeneity. *J. Diff. Geom.* **5** (1971), 1-38.

[HS] Z. Hu, H. Song, On Otsuki tori and their Willmore energy. *J. of Math. Anal. and Appl.* **395**:2 (2012), 465-473. Preprint `10.1016/j.jmaa.2012.05.042`.

[JNP] D. Jakobson, N. Nadirashvili, I. Polterovich, Extremal Metric for the First Eigenvalue on a Klein Bottle. *Canad. J. Math.* **58**:2 (2006), 381-400. Preprint `arXiv:math/0311484`.

[J] D. Joyce, Special Lagrangian m-folds in $\mathbb{C}^m$ with symmetries. *Duke Math. J.* **115** (2002), 1-51. Preprint `arXiv:math/0008021`.

[Ken] K. Kenmotsu, A characterization of bipolar minimal surfaces in $\mathbb{S}^4$. *Tôhoku Math. J.* **26** (1974), 587-598.

[KN] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of differential geometry,* Vol. II, Interscience Publishers John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1969.

[K] N. Korevaar, Upper bounds for eigenvalues of conformal metrics. *J. Differential Geom.* **37**:1 (1993), 79-93.

[Lap] H. Lapointe, Spectral properties of bipolar minimal surfaces in $\mathbb{S}^4$. *Differential Geom. Appl.* **26**:1 (2008), 9-22. Preprint `arXiv:math/0511443`.

[L] H. B. Lawson, Complete minimal surfaces in $\mathbb{S}^3$. *Ann. of Math.* **92** (1970), 335-374.

[LY] P. Li, S.-T. Yau, A new conformal invariant and its applications to the Willmore conjecture and the first eigenvalue of compact surfaces. *Invent. Math.* **69**:2 (1982), 269-291.

[MN] F. C. Marques, A. Neves, Min-Max theory and the Willmore conjecture. *Ann. of Math.* **179** (2014), 683-782.

[M1] A. E. Mironov, Finite-gap minimal Lagrangian surfaces in $\mathbb{CP}^2$. *OCAMI Studies Series* **3** (2010), 185-196. Preprint `arXiv:1005.3402`.

[M2] A. E. Mironov, New examples of Hamiltonian-minimal and minimal Lagrangian submanifolds in $\mathbb{C}^n$ and $\mathbb{CP}^n$. *Mat. Sbornik* **195** (2004), 89-102 (Russian); *Sbornik Math.* **195**, 85-96 (English Translation).

[MSY] D. Montgomery, H. Samelson, C. T. Yang, Exceptional orbits of highest dimension, *Ann. of Math.* **64** (1956), 131-141.

[N1] N. Nadirashvili, Berger's isometric problem and minimal immersions of surfaces. *Geom. Funct. Anal* **6**:5 (1996), 877-897.

[N2] N. Nadirashvili, Isoperimetric inequality for the second eigenvalue of a sphere. *J. Differential Geom.* **61**:2 (2002), 335-340.

[NS] N. Nadirashvili, Y. Sire, Isoperimetric inequality for the third eigenvalue of the Laplace-Beltrami operator on $\mathbb{S}^2$. Preprint `arXiv:1506.07017`.

[NP] N. Nadirashvili, A. V. Penskoi, Isoperimetric inequality for the second non-zero eigenvalue of the Laplace-Beltrami operator on the projective plane. Preprint `arXiv:1608.07334`.

[O] T. Otsuki, Minimal hypersurfaces in a Riemannian manifolds of constant curvature. *Amer. J. Math.* **92**:1 (1970), 145-173.

[P1] A. V. Penskoi, Extremal spectral properties of Lawson tau-surfaces and the Lamé equation. *Moscow Math. J.* **12**:1 (2012), 173-192. Preprint `arXiv:1009.0285`.

[P2] A. V. Penskoi, Extremal spectral properties of Otsuki tori. *Math. Nachr.* **286**:4 (2013), 379-391. Preprint `arXiv:1108.5160`.

[P3] A. V. Penskoi, Generalized Lawson tori and Klein bottles. *J. Geom. Anal.* **4**:25 (2015), 2645-2666.

[P4] A. V. Penskoi, Extremal metrics for the eigenvalues of the Laplace-Beltrami operator on surfaces. *Uspekhi Mat. Nauk.* **6**:68 (2013), 107-168 (Russian); *Russian Math. Surveys* **6**:68 (2013), 1073-1130.

[Pe] R. Petrides, Maximization of the second conformal eigenvalue of spheres. Preprint `arXiv: 1206.0229`.

[S] J. Simons, Minimal varieties in Riemannian manifolds. *Ann. of Math.* **88**:2 (1968), 62-105.

[T] T. Takahashi, Minimal immersions of Riemannian manifolds. *J. Math. Soc. Japan*, **18**:4 (1966), 380-385.

[V] H. Volkmer, Coexistance of periodic solutions of Ince's equation. *Analysis* **23** (2003), 97-105.

[YY] P. C. Yang, S.-T. Yau, Eigenvalues of the laplacian of compact Riemann surfaces and minimal submanifolds. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* **7**:1 (1980), 55-63.