Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук

На правах рукописи

Ильин Николай Борисович

ЭКСТРЕМУМЫ ЦЕЛЕВЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ ДВУХУРОВНЕВЫМИ КВАНТОВЫМИ СИСТЕМАМИ

01.01.03 — математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2017

Работа выполнена в отделе математической физики Федерального государственного бюджетного учреждения науки Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук.

Научный руководитель: Печень А.Н. — доктор физико-математических наук, профессор РАН, ведущий научный сотрудник кафедры математики Федерального государственного автономного образовательного учреждения науки «Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС», заведующий лабораторией математических методов квантовых технологий Федерального государственного бюджетного учреждения науки Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук. (01.01.03 — математическая физика).

Официальные оппоненты: Смолянов О.Г. — доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Федерального государственного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова». (01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ).

Турилова Е.А. — кандидат физико-математических наук, доцент, заведующая кафедрой математической статистики Института вычислительной математики и информационных технологий Казанского (Приволжского) Федерального Университета. (01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ).

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)».

Защита состоится 19 октября 2017 г. в 15 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д. 002.022.02 при Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской академии наук по адресу: 119991, г. Москва, ул. Губкина, д. 8.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук и на сайте http://www.mi.ras.ru/dis/ref17/ilin/dis.pdf

Автореферат разослан “_____”июня 2017 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук Дрожжинов Ю.Н.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Возникшая в первой половине XX века квантовая механика не только изменила общее понимание фундаментальных законов физики, но также оказала существенное влияние на развитие новых технологий. Современные технологии позволяют манипулировать объектами и процессами на атомных масштабах — отдельными атомами и молекулами, состоянием фотонов в резонаторе и другими. Использование квантово–механических систем и процессов находит широкие применения в квантовых технологиях. Для манипулирования такими системами необходимо учитывать их квантовую природу, в связи с чем в настоящее время большую актуальность приобретает развитие математических методов управления квантовыми системами.

Теория управления квантовыми системами является актуальным разделом современной математической физики. В этой области возникает широкий спектр задач, которые требуют для своего рассмотрения строгих математических методов, традиционно принадлежащих математической физике, таких как теория операторов, вариационное исчисление, теория обобщеных функций. Теория управления квантовыми системами возникла на стыке квантовой механики и теории оптимального управления, развивавшейся в 1950-х и 1960-х годах в работах Л.С. Понтрягина, В.Г. Болтянского, Р.В. Гамкрелидзе и Е.Ф. Мищенко, предложивших принцип максимума Понтрягина[1], и Р. Беллмана[2], создавшего метод динамического программирования. В дальнейшем теория оптимального управления разрабатывалась Н.Н. Красовским, А.А. Красовским, В.Ф. Кротовым, А.Я. Дубовицким, В.М. Тихомировым, Ю.С. Осиповым, А.А. Аграчевым, С.М. Асеевым, М.С. Никольским, Р.Е. Калманом (R.E. Kalman), Э.Б. Ли (E.B. Lee),

[1] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.

[2] Беллман, Р. Динамическое программирование. М: Иностранная литература, 1960.

Л. Маркусом (L. Markus) и другими авторами. Методы управления квантовыми системами, как самостоятельная область исследований, возникли и стали активно развиваться в 1980-х годах в работах В.П. Белавкина, А.Г. Бутковского, П. Брюмера (P. Brumer), Х. Вайсмана (H. Wiseman), В.С. Летохова, Х. Рабица (H. Rabitz), С. Райса (S. Rice), Ю.И. Самойленко, Д. Тэннора (D. Tannor), М. Шапиро (M. Shapiro) и других авторов.

В качестве примеров современных исследований, связанных с управлением квантовыми системами, можно отметить, например, работы Х. Рабица, М. Хсиеха и К. Розенталя о субоптимальных максимумах в задаче максимизации вероятности перехода[3], Т. Шульте-Хербрюггена, С. Глезера, Г. Дирра и У. Хелмке об использовании градиентных потоков на римановых многообразиях в квантовом управлении[4], Х. Вайзмана об управлении с помощью нечетких измерений[5], Дж. Гафа, В.П. Белавкина и О.Г. Смолянова об уравнении Гамильтона-Якоби-Беллмана для управления квантовыми системами с обратной связью[6], А.Н. Печеня и Х. Рабица об управлении открытыми квантовыми системами с помощью окружения[7], Т. Каневы, Т. Каларко и С. Монтанжеро о контролируемом создании долгоживущих зацепленных состояний[8]. Вопросы, связанные с управлением квантовыми системами, получили освещение в ряде монографий, включая книги А.Г. Бутковского и Ю.И. Самойленко “Управление квантовомеханическими процессами” (М.: Наука, 1984), S.A. Rice и M. Zhao. “Optical control of molecular dynamics” (New York: John Wiley, 2000), P.W. Brumer и M. Shapiro “Principles of the quantum control of molecular processes” (Wiley-

[3]Rabitz H., Hsieh M., Rosenthal C. Quantum optimally controlled transition landscapes. Science. 2004. Т. 303. С. 1998-2001.

[4]Schulte-Herbruggen T., Glazer S., Dirr G., Helmke U. Gradient flow for optimization in quantum information and quantum dynamics: foundations and applications. Rev. Math. Phys. 2010. Т. 22. С. 597-669.

[5]Wiseman H. Quantum control: Squinting at quantum systems Nature. 2011. Т. 470. С. 178-179.

[6]Gough J., Belavkin V. P., Smolyanov O. G. Hamilton-Jacobi-Bellman equations for quantum optimal feedback control. Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics. 2005. Т. 7. С. 237-244.

[7]Pechen A., Rabitz H. Teaching the environment to control quantum systems. Phys. Rev. A. 2006. Т. 73. С. 062102.

[8]Caneva T., Calarco T., Montangero S. Entanglement-storage units. New J. Phys. 2012. Т. 14. С. 093041.

Interscience, 2003), V.S. Letokhov “Laser control of atoms and molecules” (Oxford University, 2007), D. D’Alessandro, “Introduction to quantum control and dynamics” (Chapman and Hall, 2007), D.J. Tannor “Introduction to quantum mechanics: a time dependent perspective” (Sausalito: University Science Press, 2007), H.M. Wiseman и G.J. Milburn “Quantum Measurement and Control” (Cambridge University Press, 2010). Получили развитие геометрические методы, в частности, задачи управления на группах Ли, которые изложены в монографии А.А. Аграчева и Ю.Л. Сачкова “Геометрическая теория управления” (М.: Физматлит, 2005).

В диссертационной работе рассматриваются двухуровневые квантовые системы. Одним из широко использующихся способов управления квантовыми системами является когеретное управление, при котором система предполагается изолированной от окружения и описывается унитарной динамикой. Эволюция замкнутой двухуровневой квантовой системы под воздействием когерентного управления f описывается уравнением Шредингера для оператора унитарной эволюции U_t^f:

$$i\frac{dU_t^f}{dt} = (H_0 + f(t)V)U_t^f, \qquad U_0^f = \mathbb{I}. \tag{1}$$

Здесь H_0 и V — свободный гамильтониан и потенциал взаимодействия (2×2 эрмитовы матрицы), $f \in L^1([0,T];\mathbb{R})$ — управление. Рассматривается невырожденный случай $[H_0, V] \neq 0$. Предполагается, что матричные элементы U_t^f принадлежат пространству абсолютно непрерывных функций, $[U_t^f]_{ik} \in AC[0,T]$. В этом случае уравнение (1) с начальным условием $U_0 = \mathbb{I}$ имеет единственное решение для каждого управления f.

Многие задачи теории управления квантовыми системами ставятся как задачи по поиску глобального экстремума целевого функционала, зависящего от состояния системы в конечный момент времени $T > 0$ действия управления f. Для определенности всюду в дальнейшем будем говорить о задаче максимизации. В диссертационной работе рассматривается терминальная задача по максимизации функционала вида

$$\mathcal{J}[f] = \mathcal{F}(U_T^f), \tag{2}$$

где U_T^f — оператор унитарной эволюции, описывающий изменение состояния системы на интервале времени $[0, T]$ под воздействием управления f, а $\mathcal{F} : U(n) \to \mathbb{R}$ — некоторая функция на унитарной группе $U(2)$. Цель управления состоит в том, чтобы для данного T найти такое управление $f^{\rm opt} \in L^1([0, T]; \mathbb{R})$, для которого функционал $\mathcal{J}[f]$ достигает максимума.

$$\mathcal{J}[f^{\rm opt}] = \max_{f\in L^1([0,T];\mathbb{R})} \mathcal{J}[f]. \tag{3}$$

Функционалы вида (2) включают в себя, в частности, такой важный для приложений функционал, как квантовое среднее наблюдаемой

$$\mathcal{J}_O[f] = \mathrm{Tr}(U_T^f \rho_0 U_T^{f\dagger} O), \tag{4}$$

где O — целевая наблюдаемая (2×2 эрмитова матрица), ρ_0 — начальное состояние (2×2 неотрицательная эрмитова матрица с единичным следом), $T > 0$ — конечный момент времени, а также целевой функционал для квантового вентиля $W \in U(2)$,

$$\mathcal{J}_W[f] = \frac{1}{4}|\mathrm{Tr}(W^\dagger U_T^f)|^2, \tag{5}$$

который описывает генерацию унитарного квантового канала. Квантовые каналы играют ключевую роль в теории квантовой информации.[9,10] В частности, важную роль играют бозонные гауссовые каналы, для которых недавно В. Джованетти, А.С. Холево и Р. Гарсиа-Патроном была доказана давно высказанная гипотеза о гауссовых оптимизаторах[11].

Важной проблемой в теории управления квантовыми системами является анализ целевого функционала $\mathcal{J}[f]$ на наличие ловушек. Ловушка-

[9]Ohya M., Volovich I. Mathematical foundations of quantum information and computation and its applications to nano- and bio-systems. Springer, 2011.

[10]Холево А.С. Квантовые системы, каналы, информация. М.: МЦНМО, 2010.

[11]Giovannetti, V., Holevo, A. S., García-Patrón R. A solution of Gaussian optimizer conjecture for quantum channels. Communications in Mathematical Physics. 2015. Т. 334:3. С. 1553.

ми для задачи максимизации называются локальные максимумы целевого функционала, не являющиеся глобальными. Проблема ловушек имеет важное значение для оценки алгоритмов поиска решения оптимизационной задачи, использующих локальные данные, такие как градиент целевого функционала в данной точке или значения целевого функционала в точках близких к данной. Наличие ловушек оказывает влияние на вероятность нахождения глобального максимума или минимума с помощью методов, основанных на локальных алгоритмах, и может значительно снижать степень их эффективности. Существуют методы, такие как генетические алгоритмы, которые позволяют избегать трудностей, связанных с наличием ловушек, но их реализация требует существенно больших ресурсов, чем методы, основанные на локальных алгоритмах. Поэтому исследование экстремумов целевых функционалов в задачах управления квантовыми системами является важной задачей.

Проблема исследования ловушек была поставлена в работе Х. Рабица, М. Хсиеха и К. Розенталя[12], в которой была высказана гипотеза об их отсутствии для случая общего положения. Однако, несмотря на большой интерес к этой проблеме, доказать отсутствие ловушек удалось только для задачи управления двухуровневыми квантовыми системами [1,2] при условии достаточно большой длительности управления T и для задачи управления коэффициентом прохождения частицы через одномерный барьер[13].

Другим активно развивающимся способом управления квантовыми системами является некогерентное управление с использованием резервуара или квантовых измерений. Этот способ важен для приложений, потому что большинство систем в реальных условиях являются открытыми.

[12]Rabitz H., Hsieh M., Rosenthal C. Quantum optimally controlled transition landscapes. Science. 2004. Т. 303. С. 1998–2001.

[13]Pechen A. N., Tannor D. J. Control of quantum transmission is trap-free. Canadian Journal of Chemistry. 2014. Т. 92:2. С. 152.

В этом случае помимо унитарной эволюции квантовая система изменяет свое состояние в результате неселективных измерений заданных наблюдаемых, что дает дополнительную возможность по управлению, которая в некоторых случаях более удобна.

Управление с помощью измерений тесно связано с эффектом Зенона в квантовой теории, который был впервые рассмотрен советским физиком Л.А. Халфиным[14], а также Э.Ч.Д. Сударшаном и Б. Мисрой[15]. Чтобы описать этот эффект, введем некоторые предварительные определения. Пусть система находится в начальном состоянии с матрицей плотности ρ_0, а через промежутки времени δt_k производятся измерения состояния, описываемого проектором P таким, что $\rho_0 = P\rho_0 P$. Тогда в пределе непрерывного измерения $\max \delta t_k \to 0$ система с вероятностью единица остается в состоянии ρ_0 все время. Это утверждение составляет содержание квантового эффекта Зенона. В работе А.П. Балахандрана и С.М. Роя[16] рассматривается обобщение предыдущего результата. Пусть измеряется состояние, соответствующее зависящему от времени проектору $P_t = W_t P W_t^{\dagger}$, при этом предполагаются некоторые условия гладкости. Тогда в пределе $\max \delta t_k \to 0$ в каждый момент времени система с вероятностью единица находится в состоянии P_t. Это может быть интерпретировано как управление системой с помощью измерений. Следование квантовой системой за изменением проектора P_t было названо А.П. Балахандраном и С.М. Роем эффектом анти-Зенона. В некоторых работах этот эффект называется также динамическим эффектом Зенона. Важной проблемой является построение оптимальной дискретной аппроксимации квантового эффекта Зенона, которая была осуществлена в работе [5]. Квантовые измерения также используются

[14]Халфин Л. А. К теории распада квазистационарного состояния. ДАН СССР 1957. Т. 115. С. 277.

[15]Sudarshan E. C. G., Misra B. The Zeno's paradox in quantum theory. J. Math. Phys. 1977. T. 18. C. 756.

[16]Balachandran A. P., Roy S. M. Quantum anti-Zeno paradox. Phys. Rev. Lett. 2000. T. V. 84. C. 4019.

для томографического представления состояний квантовых систем[17], для создания зацепленных состояний[18] и т.д.

В диссертационной работе исследуются задачи управления как изолированными от окружения так и открытыми двухуровневыми квантовыми системами. Для замкнутых систем проанализирована проблема наличия локальных максимумов и минимумов, не являюшихся глобальными. Для открытых систем получено решение задачи максимизации целевой функции с помощью последовательности неселективных квантовых измерений.

Цели работы.

а) Исследование экстремумов целевых функционалов $\mathcal{J}_O[f]$ и $\mathcal{J}_W[f]$ в задачах когерентного управления изолированными от окружения двухуровневыми квантовыми системами.

б) Исследование экстремумов целевой функции в задачах управления с помощью неселективных измерений открытыми двухуровневыми квантовыми системами. Построение оптимальной дискретной аппроксимации квантового динамического эффекта Зенона для двухуровневых квантовых систем.

Основные результаты.

а) Теоремы об экстремумах целевых функционалов $\mathcal{J}_O[f]$ и $\mathcal{J}_W[f]$, описывающих среднее значение наблюдаемой O и генерацию унитарного процесса W, на множестве всех управлений, кроме одного исключительного, в задачах когерентного квантового управления замкнутыми двухуровневыми системами.

б) Теоремы об экстремумах целевых функционалов $\mathcal{J}_O[f]$ и $\mathcal{J}_W[f]$ на множестве всех управлений для определенных значений параметров задачи.

[17]Dodonov V. V., Man'ko V. I. Positive distribution description for spin states. Phys. Lett. A. 1997. T. 229:6. C. 335–339. Filippov S. N., Man'ko V. I. Measuring microwave quantum states: Tomogram and moments. Phys. Rev. A. 2011 T. 84. C. 033827.

[18]Grishanin B. A., Zadkov V. N. Entangling quantum measurements. Opt. spect. 2004. T. 96(5). C. 683-690.

в) Теорема о наблюдаемых, которые реализуют глобальный максимум вероятности перехода в задаче управления с помощью неселективных квантовых измерений в двухуровневых системах.

Научная новизна. Все основные результаты, полученные в диссертации, являются новыми и получены автором лично. Доказано, что ни одно управление, кроме, возможно, одного исключительного управления, не является ловушкой для целевых функционалов $\mathcal{J}_O[f]$ и $\mathcal{J}_W[f]$ в задачах когерентного управления изолированной от окружения двухуровневой квантовой системой. Этот результат является первым математически обоснованным утверждением об отсутствии ловушек. Получены новые ограничения на длительность управляющего импульса и параметры задачи, обеспечивающие отсутствие ловушек у целевых функционалов $\mathcal{J}_O[f]$ и $\mathcal{J}_W[f]$ на множестве всех управлений в задаче когерентного управления изолированной от окружения двухуровневой квантовой системой на малых временах. Получены выражения для наблюдаемых, которые доставляют глобальный максимум целевой функции в задаче управления с помощью измерений в открытых двухуровневых квантовых системах для любого фиксированного числа измерений.

Методы исследования. В диссертации используются методы функционального анализа, вариационного исчисления, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории групп и алгебр Ли, асимптотические методы.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертационная работа носит теоретический характер. Результаты, полученные в главе 1, являются первым математически обоснованным утверждением об отсутствии ловушек для достаточно больших времен у целевых функционалов $\mathcal{J}_O[f]$ и $\mathcal{J}_W[f]$ в широком классе задач теории управления квантовыми системами. Результаты, полученные в главе 2, могут использоваться в практических задачах по управлению двухуровневыми квантовыми системами, так как дают оценки минимального времени управления, при котором ловушки отсутствуют. Результаты, полученные в главе 3, также могут применяться в задачах по управлению квантовыми системами. Выражения для оптимальных наблюдаемых могут использоваться для оценки верхней границы значений целевого функционала при произвольной последовательности управляющих измерений и служить для оценки эффективности того или иного конкретного алгоритма решения задачи максимизации целевых функционалов с помощью измерений в двухуровневой системе.

Апробация работы. Результаты работы докладывались автором на следующих международных конференциях: “Математическая физика и её приложения” (Самара, 27 августа — 1 сентября 2012 г.), “55-я Научная конференция” (Долгопрудный, МФТИ, 19–25 ноября, 2012 г.), “Теоретическая физика и её приложения” (Москва, Московский государственный открытый университет, 24–28 июня 2013 г.), “Международная конференция по математической теории управления и механике” (Суздаль, 5–9 июля 2013 г.), “Управление и оптимизация неголономных систем” (Переславль–Залесский, университет г. Переславля 10–13 июля 2013 г.), “QP-34 Quantum Probability and Related Topics” (Москва, МИАН, 16–20 сентября 2013 г.), “Геометрия и управление” (Москва, МИАН, 14–18 апреля 2014 г.), “Математическая физика и её приложения” (Самара, 26 августа — 1 сентября 2014 г.), “Международная конференция по математической теории управления и механике” (Суздаль, 3–7 июля 2015 г.), “3-я Международная конференция по квантовым технологиям” (Москва, 13–17 июля 2015 г.), а также на семинарах отдела математической физики Математического института им. В.А. Стеклова под руководством И.В. Воловича, семинарах механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова под руководством О.Г. Смолянова, семинаре МФТИ «Квантовая физика и квантовая информация» под руководством В.И. Манько и С.Н. Филиппова, семинарах «Квантовая математическая физика» под руководством В.В. Козлова, И.В. Воловича, С.В. Козырева и А.С. Трушечкина, действующего в рамках Научно-образовательного центра при Математическом институте им. В.А. Стеклова, семинаре отдела дифференциальных уравнений Математического института им. В.А. Стеклова «Проблемы математической теории управления» под руководством С.М. Асеева и М.С. Никольского и семинаре кафедры математики НИТУ «МИСиС» под руководством В.В. Козлова, А.А. Давыдова, А.Н. Печеня и К.В. Халкечева.

Публикации. Основные результаты опубликованы в работах [1–4].

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и библиографии. Объём диссертации составляет 78 страниц. Библиография включает 75 наименований.

Благодарности. Автор выражает благодарность своему научному руководителю А.Н. Печеню за постановку задач и постоянное внимание к работе, сотрудникам отдела математической физики Математического института им. В.А. Стеклова И.В. Воловичу, С.В. Козыреву, А.К. Гущину, В.П. Михайлову и А.С. Трушечкину за полезные обсуждения. Исследования частично поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований (грант РФФИ № 14-01-31115 «Исследование локальных экстремумов целевых функционалов для задач управления квантовыми системами») и Российским научным фондом (гранты РНФ № 14-11-00687 «Квантовая динамика и управление в нано- и биосистемах», № 14-50-00005 «Современная математика и ее приложения», направление «Теоретическая/математическая физика и топология», № 17-11-01388 «Математические методы для задач квантовых технологий и динамика открытых квантовых систем»).

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследуемой проблемы, дается краткий исторический обзор по теме диссертации, излагаются основные результаты, а также описывается структура диссертационной работы.

В **главе 1** исследуются экстремумы целевых функционалов $\mathcal{J}_O[f]$ и $\mathcal{J}_W[f]$ в задачах когерентного управления изолированными от окружения двухуровневыми системами.

Определим специальное управление f_0 и время T_0.

Определение.

$$f_0 := \frac{-\mathrm{Tr}H_0\mathrm{Tr}V + 2\mathrm{Tr}(H_0V)}{(\mathrm{Tr}V)^2 - 2\mathrm{Tr}V^2}, \tag{6}$$

$$T_0 := \frac{\pi}{\|H_0 - \mathbb{I}\mathrm{Tr}H_0/2 + f_0(V - \mathbb{I}\mathrm{Tr}V/2)\|}. \tag{7}$$

Здесь и далее под нормой матрицы A подразумевается операторная норма $||A|| = \sup\limits_{|\mathbf{a}|=1} |A\mathbf{a}|$. Будем также использовать матрицы Паули σ_x, σ_y и σ_z:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Основным результатом этой главы являются теоремы 1 и 2 о том, что никакое управление $f \neq f_0$ не является ловушкой для целевых функционалов $\mathcal{J}_O[f]$ и $\mathcal{J}_W[f]$.

Теорема 1. *Пусть* 2×2 *унитарная матрица* U_t^f *для данного* $f \in L^1([0,T];\mathbb{R})$ *подчиняется уравнению (1), где* $[H_0, V] \neq 0$. *Тогда для любого* $T > 0$, *если* $f \neq f_0$, *то* f *не является ловушкой в задаче максимизации (3) целевого функционала* $\mathcal{J}_O[f]$, *заданного формулой (4).*

Теорема 2. *Пусть* 2×2 *унитарная матрица* U_t^f *для данного* $f \in L^1([0,T];\mathbb{R})$ *подчиняется уравнению (1), где* $[H_0, V] \neq 0$. *Тогда для любого* $T > 0$, *если* $f \neq f_0$, *то* f *не является ловушкой в задаче максимизации (3) целевого функционала* $\mathcal{J}_W[f]$, *заданного формулой (5).*

Для управления f_0 справедлива теорема об отсутствии ловушек для целевых функционалов $\mathcal{J}_O[f]$ и $\mathcal{J}_W[f]$ при достаточно больших T.

Теорема 3. *Пусть* 2×2 *унитарная матрица* U_t^f *для данного* $f \in L^1([0,T];\mathbb{R})$ *подчиняется уравнению (1), где* $[H_0, V] \neq 0$. *Тогда если* $T > T_0$, *то* f_0 *не является ловушкой в задаче максимизации (3) целевых функционалов* $\mathcal{J}_O[f]$ *и* $\mathcal{J}_W[f]$, *заданных формулами (4) и (5).*

В **главе 2** исследуются экстремумы целевых функционалов $\mathcal{J}_O[f]$ и $\mathcal{J}_W[f]$ в задачах когерентного управления изолированными от окружения двухуровневыми квантовыми системами на достаточно малых временах. Основным результатом этой главы являются теоремы 4 и 5.

Из теорем 1, 2 и 3 главы 1 вытекает, что при $T > T_0$ в рассматриваемой задаче у целевых функционалов $\mathcal{J}_O[f]$ и $\mathcal{J}_W[f]$ нет ловушек. В главе 2 доказывается, что для широкого класса двухуровневых систем это значение T_0 можно уменьшить. Рассматривается гамильтониан, для которого $\mathrm{Tr}H_0 = 0$, $\mathrm{Tr}V = 0$ и $\mathrm{Tr}(H_0 V) = 0$. В этом случае уравнение Шредингера для оператора эволюции U_t с помощью унитарного преобразования и замены времени преобразуется к виду

$$i\frac{dU_t^f}{dt} = (\sigma_z + f(t)(v_x\sigma_x + v_y\sigma_y))U_t^f. \tag{9}$$

При этом для системы (9) $f_0 = 0$ и $T_0 = \pi$.

Задача определяется тремя векторными параметрами $\mathbf{r}, \mathbf{a}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{r} = \mathrm{Tr}(\rho_0\boldsymbol{\sigma}), \qquad \mathbf{a} = \mathrm{Tr}(e^{i\sigma_z T} O e^{-i\sigma_z T}\boldsymbol{\sigma}), \qquad \mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(V\boldsymbol{\sigma}), \tag{10}$$

где $\mathbf{r}$ — вектор, соответствующий начальному состоянию, $\mathbf{a}$ — вектор, соответствующий целевой наблюдаемой, $\mathbf{v}$ — вектор, соответствующий потенциалу взаимодействия. Доказывается, что если $\delta\mathcal{J}_O[f]/\delta f|_{f=0} = 0$ и управление $f = 0$ не является глобальным экстремумом, то векторы $\mathbf{r}, \mathbf{a}, \mathbf{v}$ принадлежат плоскости Oxy.

В следующих теоремах представлены достаточные условия того, что управление f_0 не является ловушкой целевых функционалов $\mathcal{J}_O[f]$ и $\mathcal{J}_W[f]$ в задаче управления системой (9) для $T < T_0$.

Теорема 4. *Пусть 2×2 унитарная матрица U_t^f для данного $f \in L^1([0,T];\mathbb{R})$ подчиняется уравнению (9). Тогда если $T > \pi/2$, то управление $f = 0$ не является ловушкой в задаче максимизации (3) целевого функционала $\mathcal{J}_O[f]$, заданного формулой (4).*

Отметим, что произвольная матрица W, такая что $[W, \sigma_z] = 0$, имеет вид

$$W = e^{i\alpha_W \sigma_z + i\beta_W}, \quad \text{где } \alpha_W \in (0,\pi],\ \beta_W \in [0, 2\pi). \tag{11}$$

Теорема 5. *Если $[W, \sigma_z] \neq 0$, то для любого $T > 0$ все максимумы целевого функционала $\mathcal{J}_W$ — глобальные. Пусть $[W, \sigma_z] = 0$. Тогда если $\alpha_W \in (0, \pi/2)$, то все максимумы целевого функционала $\mathcal{J}_W$ — глобальные для любого $T > 0$, если $\alpha_W \in [\pi/2, \pi]$, то все максимумы целевого функционала $\mathcal{J}_W$ — глобальные для любого $T > \pi - \alpha_W$.*

Теоремы 4 и 5 уточняют границу для длительности T управляющего импульса, выше которой у целевого функционала отсутствуют ловушки. Следует отметить, что в некоторых специальных и вырожденных случаях ловушки в двухуровневых системах существуют. В частности, ловушки существуют для управлений с ограничениями, например, для управлений в виде кусочно-постоянных функций с заданным числом интервалов постоянства $f(t) = \sum_i^N a_i \chi[t_i, t_{i+1}]$.

В **главе 3** исследуются экстремумы целевых функций в задачах управления с помощью измерений в двухуровневых квантовых системах. Основным результатом этой главы является теорема 6 о наблюдаемых, которые доставляют глобальный максимум целевой функции в задаче управления с помощью измерений в двухуровневых квантовых системах для любого фиксированного числа измерений.

В начале главы 3 приводится постановка рассматриваемой задачи управления. В этой задаче состояние двухуровневой системы описывается с помощью матрицы плотности ρ (неотрицательная эрмитова 2×2 матрица с единичным следом). Собственная динамика системы описывается уравнением Шредингера

$$i\frac{d\rho}{dt} = [H, \rho], \tag{12}$$

где H — гамильтониан системы (эрмитова 2×2 матрица). В силу уравнения Шредингера (12) матрица плотности ρ преобразуется с помощью оператора унитарной эволюции $U_t = e^{-iHt}$:

$$\rho \to \mathcal{U}_t(\rho) := U_t \rho U_t^\dagger. \tag{13}$$

Кроме собственной динамики, задаваемой гамильтонианом H, состояние квантовой системы преобразуется под воздействием неселективных измерений наблюдаемой Q по следующему правилу:

$$\rho \to \mathcal{M}_Q(\rho) := \sum_i P_i \rho P_i. \tag{14}$$

Здесь P_i — проекторы на собственные подпространства измеряемой наблюдаемой Q, входящие в её спектральное представление $Q = \sum_i q_i P_i$. Совместно неселективные измерения величин Q_k в моменты времени t_k и унитарная эволюция на временных отрезках $[t_k, t_{k+1}]$ определяют следующее преобразование матрицы плотности:

$$\rho_N = \mathcal{U}_N \circ \ \mathcal{M}_{Q_N} \circ \ \mathcal{U}_{N-1} \circ \ \dots \ \circ \ \mathcal{M}_{Q_1} \circ \ \mathcal{U}_0 \ (\rho_0). \tag{15}$$

Здесь $\mathcal{U}_k(\rho) = U_{t_{k+1}-t_k} \rho U^\dagger_{t_{k+1}-t_k}$, $t_0 = 0$ — начальный момент времени и $t_{N+1} = T$ — конечный момент времени, ρ_0 — матрица плотности начального состояния системы.

Цель управления — найти оптимальные наблюдаемые $Q_1^{\text{opt}}, \dots, Q_N^{\text{opt}}$, которые максимизируют целевую функцию

$$\mathcal{J}_N[Q_1, \dots, Q_N] := \mathrm{Tr}[\rho_N O] \tag{16}$$

на множестве последовательностей эрмитовых матриц $Q_1, \dots, Q_N$. Оптимальные наблюдаемые $Q_1^{\text{opt}}, \dots, Q_N^{\text{opt}}$ удовлетворяют соотношению

$$\mathcal{J}_N[Q_1^{\text{opt}}, \dots, Q_N^{\text{opt}}] = \max_{Q_1, \dots, Q_N} \mathcal{J}_N[Q_1, \dots, Q_N] \equiv \mathcal{J}_N^{\max}[\rho_0, O]. \tag{17}$$

Основным результатом главы 3 является следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть состояние системы преобразуется согласно (15),* $O=\lambda\cdot\mathbb{I}+\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\sigma}$, $H=h_0\cdot\mathbb{I}+\mathbf{h}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ *и* $\rho_T=U_T\rho_0U_T^\dagger=\frac{1}{2}[\mathbb{I}+\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\sigma}]$. *В моменты времени* t_k, $k=1,\dots,N$ *производятся неселективные измерения наблюдаемых* Q_k. *Тогда выражения для оптимальных наблюдаемых* Q_k^{opt}, *которые доставляют максимум целевой функции (16) в задаче максимизации (17), имеют вид*

$$\begin{aligned}
Q_k^{\mathrm{opt}} &= \alpha P_k^{\mathrm{opt}}+\beta(\mathbb{I}-P_k^{\mathrm{opt}}),\quad P_k^{\mathrm{opt}}=\frac{1}{2}[\mathbb{I}+\mathbf{p}_k\cdot\boldsymbol{\sigma}],\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R},\quad \alpha\neq\beta,\\
\mathbf{p}_k &= \boldsymbol{e}_h(\mathbf{a}_k\cdot\boldsymbol{e}_h)+(\mathbf{a}_k-\boldsymbol{e}_h(\mathbf{a}_k\cdot\boldsymbol{e}_h))\cos\psi_k-\mathbf{a}_k\times\boldsymbol{e}_h\sin\psi_k,\\
\psi_k &= 2|\mathbf{h}|(T-t_k),\quad \boldsymbol{e}_h=\frac{\mathbf{h}}{|\mathbf{h}|}.
\end{aligned}$$

Если $\Delta\varphi=\angle(\mathbf{a},\boldsymbol{\lambda})\in(0,\pi)$ *(здесь* $\angle(\mathbf{a},\boldsymbol{\lambda})$ *— угол между векторами* $\mathbf{a}$ *и* $\boldsymbol{\lambda}$*), то вектор* $\mathbf{a}_k$ *получается вращением единичного вектора* $\mathbf{e}_0=\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ *на угол* $k\Delta\varphi/(N+1)$ *в плоскости векторов* $\boldsymbol{e}_0$ *и* $\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{\lambda}/|\boldsymbol{\lambda}|$,

$$\mathbf{a}_k=\boldsymbol{e}_0\frac{\sin\left[\frac{N-k+1}{N+1}\Delta\varphi\right]}{\sin\Delta\varphi}+\boldsymbol{e}_1\frac{\sin\left[\frac{k}{N+1}\Delta\varphi\right]}{\sin\Delta\varphi},\quad k=1,\dots,N. \tag{18}$$

Если $\Delta\varphi=\angle(\mathbf{a},\boldsymbol{\lambda})=0$, *то*

$$\mathbf{a}_k=\mathbf{e}_0\quad k=1,\dots,N. \tag{19}$$

Если $\Delta\varphi=\angle(\mathbf{a},\boldsymbol{\lambda})=\pi$, *то вектор* $\mathbf{a}_k$ *получается вращением единичного вектора* $\mathbf{e}_0=\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ *на угол* $\pi k/(N+1)$ *в плоскости векторов* $\boldsymbol{e}_0$ *и* $\tilde{\boldsymbol{e}}_1$, *где* $\tilde{\boldsymbol{e}}_1$ *— любой единичный вектор ортогональный вектору* $\boldsymbol{e}_0=\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$,

$$\mathbf{a}_k=\boldsymbol{e}_0\cos\left[\frac{k}{N+1}\pi\right]+\tilde{\boldsymbol{e}}_1\sin\left[\frac{k}{N+1}\pi\right],\quad k=1,\dots,N. \tag{20}$$

Теорема 6 дает оптимальную дискретную аппроксимацию динамического эффекта Зенона.

В **заключении** кратко суммируются изложенные в основном тексте результаты.

Публикации автора по теме диссертации

[1] Печень, А. Н., Ильин, Н. Б. Об экстремумах целевого функционала в задаче генерации однокубитных квантовых вентилей на малых временах // Известия РАН. Серия математическая. — 2016. — Т. 80:6. — С. 217.

[2] Печень, А. Н., Ильин, Н. Б. Когерентное управление кубитом свободно от ловушек // Труды МИАН. — 2014. — Т. 285. — С. 244.

[3] Pechen, A. N., Il'in, N. B., Shuang F., Rabitz H. Quantum control by von Neumann measurements // Phys. Rev. A. — 2006. — Т. 74. — С. 052102.

[4] Ильин, Н. Б. Управление посредством квантовых измерений и квантовый эффект Зенона // Третья международная конференция “Математическая физика и её приложения”: Материалы конф. / под ред. чл. корр. РАН И.В. Воловича и д.ф.-м.н., проф. В.П. Радченко. — Самара: СамГТУ. — 2012. — С. 151.

Подписано в печать 01.06.2017
Тираж 100 экз.

Отпечатано в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН
119991, Москва, ул. Губкина, д. 8