

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Математический институт им. В.А. Стеклова  
Российской академии наук

На правах рукописи



Агеев Дмитрий Сергеевич

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ГОЛОГРАФИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ  
НЕРАВНОВЕСНЫХ СИЛЬНОВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ СИСТЕМ

01.04.02 — теоретическая физика

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Москва 2017

Работа выполнена в отделе теоретической физики Федерального государственного бюджетного учреждения науки Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук.

Научный руководитель: Арефьева И.Я. — доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник отдела теоретической физики Федерального государственного бюджетного учреждения науки Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук; (специальность — 01.04.02, теоретическая физика)

Официальные оппоненты: Мецаев Р.Р. — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории квантовой теории поля Федерального государственного бюджетного учреждения науки Физического института им. П. Н. Лебедева Российской академии наук; (специальность — 01.04.02, теоретическая физика )

Андрианов А.А.— доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры физики высоких энергий и элементарных частиц физического факультета Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования "Санкт-Петербургский государственный университет"; (специальность — 01.04.02, теоретическая физика).

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт ядерных исследований Российской академии наук

Защита состоится 19 октября 2017 г. в 15 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д. 002.022.02 при Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской академии наук по адресу: 119991, г. Москва, ул. Губкина, д. 8.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук и на сайте <http://www.mi.ras.ru/dis/ref17/ageev/dis.pdf>

Автореферат разослан “ \_\_\_\_ ” июля 2017 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета,  
доктор физико-математических наук

Дрожжинов Ю.Н.

# Общая характеристика работы

## Актуальность темы.

Дуальность Анти де-Ситтер/Конформная теория поля<sup>1 2 3</sup> (сокращенно, AdS/CFT дуальность или AdS/CFT соответствие) является мощным методом исследования сильновзаимодействующих квантовых систем. Используя голографический принцип, данная дуальность позволяет соотнести свойства теории, определенной в  $(d + 1)$ -мерном пространстве с поведением другой теории на  $d$ -мерной границе этого пространства.

В работах Виттена, а также Габсера, Клебанова и Полякова<sup>2 3</sup> было показано, как делать вычисления конкретных наблюдаемых в рамках этой дуальности, а также представлена основная формула AdS/CFT соответствия. В этих работах было установлено точное соответствие между корреляционными функциями в конформной  $d$ -мерной теории поля и асимптотическим поведением действия теории супергравитации вблизи границы пространства  $AdS_{d+1}$ . Затем была предложена<sup>3</sup> диаграммная техника, позволяющая вычислять  $n$ -точечные функции Грина примарных операторов и токов с помощью вычислений в  $d+1$ -мерной классической гравитации и было показано, что многоточечные функции Грина, полученные с использованием этой техники совпадают с полученными в результате вычислений в конформной теории поля. В работе Арефьевой и Воловича<sup>4</sup> обсуждались перенормировки в голографии и нарушение конформной инвариантности.

---

<sup>1</sup>J. M. Maldacena, "The Large N limit of superconformal field theories and supergravity," Int. J. Theor. Phys. **38**, 1113 (1999).

<sup>2</sup>S. S. Gubser, I. R. Klebanov, A. M. Polyakov, "Gauge theory correlators from noncritical string theory," Phys. Lett. **B428**, 105-114 (1998).

<sup>3</sup>E. Witten, "Anti-de Sitter space and holography," Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 253-291 (1998).

<sup>4</sup>I. Ya. Aref'eva and I. V. Volovich, "On the breaking of conformal symmetry in the AdS / CFT correspondence," Phys. Lett. B **433**, 49 (1998).

AdS/CFT соответствие было обобщено для граничной теории при ненулевой температуре<sup>5</sup>. Для этого вместо метрики *AdS* необходимо рассматривать решение типа черной дыры (или черной браны), при этом остальная часть вычислений остается аналогичной случаю нулевой температуры. Было показано как различные явления в калибровочных теориях, такие как деконфайнмент при высокой температуре, могут описываться при помощи AdS/CFT соответствия. Это соответствие стало широко применяться<sup>6</sup> для феноменологических исследований квантовой хромодинамики (КХД) в режиме сильной связи и других сильновзаимодействующих систем. Хотя точный голографический двойник КХД неизвестен, свободные параметры гравитационной теории могут быть использованы для фитирования экспериментальных данных. Таким образом, возможно получить голографическую модель близкую по своим свойствам к КХД. Голографический подход был также применен для описания столкновения тяжелых ионов<sup>7</sup>. Важной величиной, измеряемой в экспериментах по столкновению тяжелых ионов является множественность рождения заряженных частиц. В работе Габсера, Пуфу и Ярома<sup>8</sup> был предложен голографический метод вычисления множественности заряженных частиц, образующихся в столкновении тяжелых ионов методами AdS/CFT соответствия.

Тяжелый ион в голографической модели рассматривается как точечное возмущение тензора энергии-импульса в квантовой теории поля. С точки зрения голографической дуальности тяжелый ион,двигающийся со скоростями близкими к скорости света, описывается ударной волной внутри

---

<sup>5</sup>E. Witten, “Anti-de Sitter space, thermal phase transition, and confinement in gauge theories,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 505 (1998).

<sup>6</sup>J. Casalderrey-Solana, H. Liu, D. Mateos, K. Rajagopal, U. A. Wiedemann, “Gauge/String Duality, Hot QCD and Heavy Ion Collisions,”

<sup>7</sup>И.Я. Арефьева, “Голографическое описание кварк-глюонной плазмы, образующейся при столкновениях тяжелых ионов”, *УФН*, 184:6 (2014).

<sup>8</sup>S. S. Gubser, S. S. Pufu and A. Yarom, “Entropy production in collisions of gravitational shock waves and of heavy ions,” *Phys. Rev. D* **78**, 066014 (2008).

пространства AdS. Столкновение тяжелых ионов на этом языке описывается столкновением ударных волн внутри  $AdS_5$  и предполагается, что площадь ловушечной поверхности, образующейся в результате столкновения ударных волн, пропорциональна множественности рождения заряженных частиц. Эта оценка восходит к оценке множественности рождения при столкновениях частиц через энтропию, предложенной в 50-х годах Ландау, Ферми и Померанчуком. Модели со сталкивающимися ударными волнами, в качестве дуальной метрики, являются достаточно сложными для исследования, поэтому в работе Шурыка и Лина<sup>9</sup> было предложено вместо сталкивающихся ударных волн рассматривать сталкивающиеся доменные стенки.

Столкновение тяжелых ионов естественно рассматривать с использованием тех 5-мерных голографических моделей, которые дают хорошее описание статических свойств КХД. Такой моделью является 5-мерная модель, использующая дилатонную гравитацию<sup>10</sup>. Несмотря на существенный успех моделей, основанных на дилатонной гравитации в описании различных феноменологических данных, накопленных в результате экспериментов, эти модели не дают корректной зависимости для множественности рождения заряженных частиц от энергии<sup>11</sup>. Для модели дилатонной гравитации было найдено<sup>12</sup> решение, приводящее к такой зависимости площади ловушечной поверхности, полученной в столкновении доменных стенок. Если сталкивающиеся доменные стенки имеют полубесконечный профиль, тогда в результате голографического вычисления воспроизводится необходимый феноменологический результат. Важной задачей яв-

---

<sup>9</sup>S. Lin and E. Shuryak, Grazing collisions of gravitational shock waves and entropy production in heavy ion collision, *Phys. Rev. D* **79** (2009) 124015.

<sup>10</sup>U. Gursoy, "Improved Holographic QCD and the Quark-gluon Plasma," *Acta Phys. Polon. B* **47**, 2509 (2016).

<sup>11</sup>E. Kiritsis and A. Taliotis, Multiplicities from black-hole formation in heavy-ion collisions, *JHEP* **04** (2012) 065.

<sup>12</sup>И. Я. Арефьева, Е. О. Поздеева, Т. О. Поздеева, "Голографическая оценка множественности и столкновение мембран в модифицированных пространствах AdS5", ТМФ, 176:1 (2013).

ляется исследование образования множественности в теории, обладающей конфайнментом и для доменных стенок с профилем конечного размера. Эта задача рассматривается в главе 3 диссертации.

Далее, в работе Арефьевой и Голубцовой<sup>13</sup> была получена анизотропная метрика, воспроизводящая множественность и являющаяся 5-мерной гравитационной теорией, взаимодействующей с векторным и скалярным полем. Данная метрика относится к классу метрик типа Лифшица. Характерной чертой метрики, рассмотренной в работе<sup>13</sup> является анизотропия, т.е. наличие выделенного направления в метрике, что естественно предположить при рассмотрении физики столкновения ионов, где такое направление существует. Представляется актуальным исследовать динамику термализации в квантовой теории, обладающей такой анизотропией. Данное исследование проведено в главе 2 диссертации.

Исследование процесса образования черной дыры в пространстве  $AdS_3$  существенно упрощается в случае трехмерного пространства-времени. Известно, что при столкновении точечных ультрарелятивистских частиц в  $AdS_3$ , при достаточно большой энергии происходит образование черной дыры<sup>14</sup>. Исследование этой более простой, в сравнении с многомерным случаем, задачи представляет значительный интерес.

Важным аспектом  $AdS/CFT$  соответствия является возможность исследования квантовой теории вне равновесной ситуации и вне рамок теории возмущений. Один из неравновесных процессов, которые широко обсуждаются в рамках  $AdS/CFT$  соответствия - так называемый квенч (quench). Рассмотрим систему (при нулевой температуре), изначально находившуюся в равновесии. В определенный момент времени она испытывает внезапное возмущение (изменение одной из констант в лагранжиане, введение (injection) энергии в систему и.т.д.). Выведенная таким образом из равновесия система постепенно снова приходит к состоянию равновесия,

---

<sup>13</sup>I. Ya. Aref'eva and A. A. Golubtsova, Shock waves in Lifshitz-like spacetimes, *JHEP* **1504** (2015) (011).

<sup>14</sup>H. -J. Matschull, "Black hole creation in (2+1)-dimensions," *Class. Quant. Grav.* **16**, 1069 (1999).

соответствующего некоторой конечной температуре. В многомерной теории, в особенности для сильновзаимодействующей теории данная задача не имеет аналитического решения. Однако, имеется возможность исследовать некоторые из этих задач с помощью голографического подхода.

Популярной голографической моделью, описывающей термализацию теории, выведенной из равновесия, является модель Вайдиа<sup>15</sup>. Метрика АдС-Вайдиа описывает пространство  $AdS$ , интерполирующее между  $AdS$  и  $AdS$  с черной дырой. Таким образом, исходным состоянием дуальной модели на границе является теория при нулевой температуре, а в качестве финального состояния рассматривается теория при ненулевой температуре. Модель Вайдиа замечательна тем, что многие метрики допускают прямое обобщение на деформацию типа Вайдиа, если известна ”функция почернения”, т.е. функция описывающая черную дыру. Таким образом функция, описывающая черную дыру в анизотропной метрике, воспроизводящей корректную множественность, была построена в работе<sup>16</sup>. Там же была получена деформация этой метрики типа Вайдиа.

Важной величиной, характеризующей квантовую систему, является голографическая энтропия зацепленности. Рю и Такаянаги связали<sup>17</sup> энтропию зацепленности некоторой  $d-1$ -мерной области в  $d$ -мерной квантовой теории поля с некоторой  $d-1$ -мерной минимальной гиперповерхностью в дуальной  $d+1$ -мерной фоновой метрике. Общие принципы  $AdS/CFT$  соответствия сохраняются при вычислении этой величины, то есть для рассмотрения теории при конечной температуре в качестве дуальной метрики необходимо выбрать некоторую черную дыру (брану). Данная конструкция естественным образом позволяет также вычислять взаимную инфор-

---

<sup>15</sup>J. Abajo-Arrastia, J. Aparicio and E. Lopez, “Holographic Evolution of Entanglement Entropy,” *JHEP* **1011**, 149 (2010).

<sup>16</sup>I. Y. Aref’eva, A. A. Golubtsova and E. Gourgoulhon, Analytic black branes in Lifshitz-like backgrounds and thermalization, *JHEP* **09** (2016) 142.

<sup>17</sup>S. Ryu and T. Takayanagi, “Holographic derivation of entanglement entropy from AdS/CFT,” *Phys. Rev. Lett.* **96**, 181602 (2006).

мацию и её обобщения. Работа Рю и Такаянаги<sup>17</sup> вызвала широкий резонанс, поскольку аналогичное вычисление энтропии зацепленности, и тем более взаимной информации в квантовой теории поля сопряжено со значительными трудностями. Методами голографии было показано<sup>18</sup> наличие эффекта потери памяти в термализующейся конформной теории поля, в том числе многомерной. В силу того, что многие физические неравновесные процессы происходят при ненулевой начальной температуре, актуальной задачей является обобщение формул, описывающих режим потери памяти, на случай ненулевой начальной температуры. Эта задача решена в главе 1 данной диссертации.

### **Цели и задачи исследования.**

- Получить голографическое описание 2-мерной конформной квантовой системы после
  - глобального квенча при ненулевой начальной температуре,
  - анизотропного квенча при нулевой температуре.

Описать эволюцию голографической энтропии зацепленности и взаимной информации в таких системах.

- Вычислить характеристики эволюции пространственноподобных Вильсоновских петель в термализующейся анизотропной четырехмерной квантовой теории поля. Исследовать зависимость различных динамических и статических характеристик такой анизотропной системы.
- Исследовать множественность рождения заряженных частиц в теории с конфайнментом в рамках голографического подхода, описывая столкновение частиц столкновением ударных доменных стенок.

---

<sup>18</sup>H. Liu and S. J. Suh, “Entanglement growth during thermalization in holographic systems,” Phys. Rev. D **89**, 066012 (2014).



### **Научная новизна исследования.**

Все основные результаты, выдвигаемые на защиту, являются новыми.

### **Теоретическая и практическая значимость диссертации.**

Все результаты, полученные в диссертации имеют теоретическое значение и могут быть использованы в исследованиях неравновесных процессов, в физике сильно-коррелированных систем, в частности физике кварк-глюонной плазмы.

### **Методы и подходы диссертационного исследования.**

Основными методом исследования задач, решаемых в данной диссертации является непертурбативный метод  $AdS/CFT$  дуальности. Также, для использования данного метода, применяются методы дифференциальной геометрии и дифференциальных уравнений.

### **Положения выдвигаемые на защиту.**

1. Методами  $AdS/CFT$  соответствия получена формула, описывающая эволюцию голографической энтропии зацепленности отрезка в процессе неравновесного нагрева при ненулевой начальной температуре. Детально описаны различные режимы эволюции энтропии. Полученные формулы обобщают известные результаты, описывающие каждый из режимов, существующих при нулевой температуре, на случай ненулевой температуры. Исследованы различные режимы эволюции взаимной информации, время скрамблинга и пробуждения взаимной информации. Также для теории дуальной пространству, деформированному ультрарелятивистскими частицами вычислена энтропия зацепленности.

2. Исследована зависимость средних от пространственных Вильсоновских петель, в процессе термализации анизотропной четырехмерной квантовой теории поля. Для этого численно получены решения уравнений дви-

жений струны со специальными граничными условиями в метрике типа Лифшица. Показана зависимость времени и характера термализации от ориентации петли в пространстве. В равновесном случае получены асимптотические разложения вакуумных средних от петель для разных ориентаций при малых размерах контура петли. Получена зависимость пространственного струнного натяжения от ориентации петли.

3. Изучено столкновение ударных доменных стенок в метрике, воспроизводящей феноменологические свойства конфайнмента в калибровочной теории. Показано, что ловушечная поверхность образуется при наличии ограничения сверху на энергию сталкивающихся доменных стенок. Получены асимптотические разложения площади ловушечной поверхности для больших энергий сталкивающихся доменных стенок конечного размера.

### **Апробация результатов диссертации.**

Работы, вошедшие в диссертацию, докладывались на семинарах отдела теоретической физики МИАН и сектора квантовой теории поля ФИАН, а также на российских и международных конференциях :

- 1-я международная конференция "Higher spin and holography" 2014 год, ФИАН, Москва
- Сессия-Конференция ОФН РАН, 2016 год, ОИЯИ, Дубна
- 19-й Международный семинар по физике высоких энергий (Кварки-2016), Санкт-Петербург
- Hadron Structure and QCD: from Low to High Energies, ПИЯФ, Гатчина, 2016
- 5-я международная конференция "Higher spin and holography", 2017 год, ФИАН, Москва

## Публикации по теме диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1–4]

## Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, приложений и библиографии. Объем диссертации составляет 135 страниц включая 56 рисунков. Библиография насчитывает 108 наименований.

## Благодарности

Автор хотел бы выразить благодарность своему научному руководителю Ирине Ярославне Арефьевой за постановку задач и введение в круг современных вопросов теоретической физики.

Также автор хотел бы поблагодарить Андрея Алексеевича Славнова и всех сотрудников отдела теоретической физики за доброжелательную атмосферу, в которой проводилась работа над диссертацией и внимание.

Отдельную благодарность хотелось бы выразить Дмитрию Быкову за многочисленные обсуждения научных задач и поддержку.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертации и дан краткий обзор состояния исследуемых вопросов.

В **первой главе** изучаются различные голографические модели, описывающие неравновесные процессы. Изучается неравновесный нагрев двумерной конформной квантовой теории поля от начальной температуры  $T_i$  до конечной температуры  $T_f$  и эволюция энтропии зацепленности и взаимной информации в этом процессе. Также изучается эволюция голографиче-

ской энтропии зацепленности в процессе, дуальному образованию черной дыры в столкновении двух точечных частиц.

Согласно *AdS/CFT* прескрипции, неравновесный нагрев описывается геометрией Вайдиа-БТЗ (Банадос-Тейтельбаум-Занелли). Данная геометрия описывает черную дыру, коллапсирующую из начального состояния, определенного положением изначального горизонта  $z_H$ , в финальное состояние с горизонтом  $z_h$  ( $z_h > 0$ ,  $z_H > 0$ ). Такое пространство задается метрикой

$$ds^2 = \frac{R}{z^2} (-f(v, z)dv^2 - 2dv dz + dx^2), \quad (1)$$

где  $z > 0$ ,  $v \in \mathbb{R}$  и  $f(v, z)$  определена в виде

$$f(z, v) = \theta(v)f_h(z) + \theta(-v)f_H(z). \quad (2)$$

В формуле (2)  $\theta$  - функция Хевисайда, а функции  $f_H$  и  $f_h$  заданы формулами

$$f_H(z) = 1 - \left(\frac{z}{z_H}\right)^2, \quad f_h(z) = 1 - \left(\frac{z}{z_h}\right)^2, \quad z_h < z_H. \quad (3)$$

Без потери общности, в формуле (1) можно положить  $R = 1$ . Согласно *AdS/CFT* прескрипции голографическая энтропия зацепленности отрезка пропорциональна длине геодезической  $(z(x), v(x))$  с граничными условиями  $z(-\ell) = z(\ell) = 0$  и  $v(-\ell) = v(\ell) = \tau$ . В диссертации вычислена длина  $S$  такой геодезической. Обозначив через  $S_{eq}$  длину геодезической в черной дыре с горизонтом  $z_h$ , величина  $\Delta S = S - S_{eq}$  может быть представлена в виде

$$\Delta S(\ell, \tau) = \log \left( \frac{1}{\mathfrak{S}_\kappa(\rho, s)} \frac{\sinh \tau/z_h}{\sinh \ell/z_h} \right), \quad (4)$$

где  $0 < \tau < \ell$  - время,  $\ell$  - размер отрезка, положение горизонта  $z_h$  связано с конечной температурой выражением  $z_h = 1/(2\pi T_f)$ ,  $z_H$  связано с начальной температурой как  $z_H = 1/(2\pi T_i)$ . Функция  $\mathfrak{S}_\kappa$  имеет вид

$$\mathfrak{S}_\kappa(\rho, s) = \frac{c\rho + \Delta}{\Delta} \sqrt{\frac{\Delta^2 - c^2\rho^2}{\rho(c^2\rho + 2c\Delta + \rho) - \kappa^2}}. \quad (5)$$

и  $\kappa = T_i/T_f$ ,  $\Delta = \sqrt{\rho^2 - \kappa^2}$ ,  $c = \sqrt{1 - s^2}$  и  $s \in (0, 1)$ ,  $\rho > \kappa$ .

Формулы (4),(5) содержат параметры  $s$  и  $\rho$ , которые определяются из уравнений

$$\begin{aligned} \ell &= \ell_- + \ell_+, & (6) \\ \ell_- &= \frac{z_h}{2\kappa} \log \left( \frac{(c\kappa + \Delta s)^2}{\rho^2 s^2 - \kappa^2} \right), \\ \ell_+ &= \frac{z_h}{2} \log \left( \frac{c^2\gamma^4 - 4\Delta(cs(\kappa^2 - 2\rho^2 + 1) + \Delta + \Delta(\rho^2 - 2)s^2)}{c^2\gamma^4 - 4\Delta^2(\rho s - 1)^2} \right), \\ \frac{\tau}{z_h} &= \operatorname{arccoth} \left( \frac{-c\kappa^2 + 2c\rho^2 + c + 2\Delta\rho}{2c\rho + 2\Delta} \right). & (7) \end{aligned}$$

Для различных  $\ell$  и  $\tau$  были получены асимптотики зависимости  $\Delta S(\ell, \tau)$  от времени, соответствующие различным возможным режимам эволюции энтропии.

Различные режимы установления равновесия, изученные для процесса неравновесного нагрева определяются величинами  $\ell/z_h$ ,  $\tau/z_h$  и  $\tau/\ell$ :

- *Режим предлокального роста*, в котором  $\tau$  мало.

– при этом  $\tau$  и  $\ell$  являются малыми

$$\tau < \ell < z_h \quad (8)$$

– только  $\tau$  мало, в то время как  $\ell$  велико

$$\tau < z_h < \ell \quad (9)$$

- *Режим потери памяти*. Величины  $\tau$  и  $\ell$  много больше  $z_h$

$$z_h \ll \tau \leq \ell. \quad (10)$$

В зависимости от порядка величин  $\ell - t$  и  $\ell$ ,  $\tau$ ,  $z_h$ , можно выделить следующие подрежимы для режима потери памяти

– режим *насыщения* :

$$\ell - \tau \ll z_h \quad (11)$$

– режим *поздней потери памяти* :

$$\ell \gg \ell - \tau \gg z_h \quad (12)$$

– режим *пост-локального линейного роста*, при этом  $\ell$  велико

$$z_h \ll \tau \ll \ell, \quad (13)$$

и, таким образом,  $\ell - \tau \sim \ell$

Было показано, что аналогично случаю нулевой начальной температуры в режиме потери памяти энтропия зависит только от разницы  $(\ell - \tau)/z_h$ . Для режима насыщения была получена асимптотика следующего вида

$$\begin{aligned} \Delta S &\approx -\mathfrak{f}_\kappa \left( \frac{\ell - \tau}{z_h} \right)^{3/2} - \mathfrak{n}_\kappa \left( \frac{\ell - \tau}{z_h} \right)^2 \\ \mathfrak{f}_\kappa &= \frac{(\sqrt{2}(1 - \kappa^2))}{3}, \quad \mathfrak{n}_\kappa = \frac{(1 - \kappa^2)^2}{6}. \end{aligned} \quad (14)$$

Для режима линейного роста зависимость энтропии от  $T_- = (\ell - \tau)/z_h$  имеет вид

$$\Delta S \approx (1 - \kappa)T_-. \quad (15)$$

Начальный рост энтропии зацепленности характеризуется зависимостью

$$\Delta S \approx \frac{\tau^2}{4z_h^2} (1 - \kappa^2). \quad (16)$$

В параграфе 1.7 диссертации изучается эволюция энтропии зацепленности в неравновесной анизотропной двумерной системе, дуальной пространству  $AdS_3$ , деформированному сталкивающимися ультрарелятивистскими частицами.

Деформация пространства  $AdS_3$  одной ультрарелятивистской частицей описывается на групповом языке. Точки пространства  $AdS_3$  могут быть представлены как элементы группы  $SL(2)$  вещественных матриц  $2 \times 2$

$$\mathbf{x} = x_3 \mathbf{1} + \sum_{\mu=0,1,2} \gamma_\mu x^\mu = \cosh \chi \mathbf{\Omega}(t) + \sinh \chi \mathbf{\Gamma}(\phi), \quad (17)$$

где введены обозначения

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

и

$$\mathbf{\Omega}(t) = \cos t \mathbf{1} + \sin t \gamma_0, \quad \mathbf{\Gamma}(\phi) = \cos \phi \gamma_1 + \sin \phi \gamma_2, \quad (19)$$

здесь  $(t, \chi, \phi)$  так называемые "бочечные координаты":  $\chi \geq 0$ ,  $\phi \simeq \phi + 2\pi$ ,  $-\pi/2 < t < \pi/2$ .

Рассмотрим безмассовую частицу со светоподобным вектором импульса, направленным вдоль направления  $\phi = 0$ . Её значение задается с помощью голономий<sup>19</sup>

$$u = 1 + \tan \epsilon \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad u^{-1} = 1 - \tan \epsilon \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Преобразование изометрии, связанное с голономией имеет вид

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^* = u^{-1} \mathbf{x} u. \quad (21)$$

Мировая линия светоподобной частицы представляет собой стационарные точки действия этой изометрии. Её траектория имеет вид  $r = \tan(t/2)$  и  $\phi = 0$ . Используя процедуру вырезания и склейки, определенную в<sup>14</sup>, строится деформация  $AdS_3$ , зависящая от голономии (21) безмассовой частицы. Было показано<sup>14</sup>, что деформация двумя частицами задается аналогичным образом.

<sup>19</sup>Hooft G., Deser S., Jackiw R. Three-dimensional Einstein gravity: dynamics of flat space //Annals of physics. – 1984. – Т. 152. – №. 1. – С. 220-235.

В диссертации по формуле Рю и Такаянаги вычисляется зависимость голографической энтропии зацепленности отрезка от времени для различных импульсов частиц. Для этого рассматриваются геодезические в пространстве  $AdS_3$ , с деформацией точечными частицами и вычисляется их длина. Часть вычислений длин таких геодезических производится численно. Результаты представлены в диссертации в виде графиков линий постоянного уровня зависимости энтропии зацепленности от времени и длины отрезка. Энтропия зацепленности в результате точечного возмущения показывает резкий переход к нестационарному поведению в определенный момент времени, зависящий от длины отрезка.

Во **второй главе** рассматривается эволюция пространственноподобных Вильсоновских петель в процессе анизотропной термализации, а также исследуется зависимость псевдопотенциала от параметра анизотропии и ориентации петли.

В качестве дуальной метрики рассматривается метрика анизотропной черной браны

$$ds^2 = 2\pi\alpha' \left( \frac{-f(z)dt^2 + dx^2}{z^2} + \frac{dy_1^2 + dy_2^2}{z^{2/\nu}} + \frac{dz^2}{z^2 f(z)} \right), \quad (22)$$

где  $z > 0$ ,  $\nu \geq 1$ , координаты  $x, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ , а функция  $f$  имеет вид

$$f = 1 - mz^{2+2/\nu}, \quad (23)$$

где  $m > 0$  - масса черной браны,  $\alpha'$  - натяжение струны. Также рассматривается нестационарное обобщение этой метрики, соответствующее процессу анизотропной термализации, а именно метрика типа Вайдия, имеющая вид

$$ds^2 = 2\pi\alpha' \left( -\frac{f(v, z)dv^2 - 2dv dz + dx^2}{z^2} + \frac{dy_1^2 + dy_2^2}{z^{2/\nu}} \right), \quad (24)$$



с функцией

$$f(z, v) = 1 - \frac{M}{2} \left( 1 + \tanh \frac{v}{\alpha} \right) z^{\frac{2}{v}+2}, \quad (25)$$

где параметр  $\alpha > 0$  регулирует скорость термализации, а  $v \in \mathbb{R}$ . Без потери общности можно положить  $\alpha' = \frac{1}{2\pi}$ .

В диссертации рассматриваются различные ориентации контура прямоугольной Вильсоновской петли на границе фоновой метрики (22) (стационарный случай) и (24) (анизотропная термализация), а именно петли расположенные в плоскостях  $xy_1$  (или  $xy_2$ ) и  $y_1y_2$ . Можно разместить различные конфигурации тремя различными способами:

- прямоугольная петля в плоскости  $xy_1$  (или  $xy_2$ ) с короткой стороной длины  $\ell_x$ , ориентированной в направлении  $x$  (обозначается  $x, y_{1(\infty)}$ )

$$x \in [0, \ell_x \ll L_{y_1}], \quad y_1 \in [0, L_{y_1}]; \quad (26)$$

- прямоугольная петля  $xy_1$  с короткой стороной длины  $\ell$  ориентированной в направлении  $y_1$  (обозначается  $y_1, x_{(\infty)}$ )

$$x \in [0, L_x], \quad y_1 \in [0, \ell_{y_1} \ll L_x]; \quad (27)$$

- прямоугольная петля в плоскости  $y_1y_2$  (обозначается  $y_1, y_{2(\infty)}$ )

$$y_1 \in [0, \ell_{y_1} \ll L_{y_2}], \quad y_2 \in [0, L_{y_2}]. \quad (28)$$

Следуя голографическому подходу основная формула, связывающая вакуумное среднее Вильсоновской петли в фундаментальном представлении и действие некоторого классического объекта, струны Намбу-Гото, имеет вид

$$W[C] = \langle \text{Tr}_F e^{i \oint_C dx_\mu A_\mu} \rangle = e^{-S_{string}[C]}, \quad (29)$$

где  $C$  является контуром на границе дуального пространства. Действие Намбу-Гото такой струны может быть в общем виде представлено в виде

$$S_{string} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\sigma^1 d\sigma^2 \sqrt{-\det(h_{\alpha\beta})}, \quad (30)$$

где  $h_{\alpha\beta}$  – индуцированная метрика. Индексы  $\alpha, \beta$  принимают значения  $\alpha, \beta = 1, 2$ . Для различных ориентаций контура петли в диссертации численно была получена зависимость действия струны от времени на границе (случай метрики (24)). Псевдопотенциал определяется по действию струны как

$$\mathcal{V}(X) = \frac{S_{string}}{Y}, \quad (31)$$

где  $Y$  – длина контура вдоль "длинного" направления петли. Зависимость псевдопотенциала от времени представлена в диссертации в виде графиков для разных ориентаций и значений параметра  $\nu$ .

Важной величиной, соответствующей термализующейся Вильсоновской петле, с фиксированной ориентацией контура является время термализации. Формула, описывающая время термализации в теории на границе имеет вид

$$t_{therm}(\ell) = \int_0^{z_*(\ell)} \frac{dz}{f(z)}, \quad (32)$$

где  $z_*(\ell)$  – положение максимума струны, вложенной в фоновую метрику (22) и расстояния на границе  $\ell$ . Величина  $\ell(z_*)$  также зависит от ориентации и параметра анизотропии  $\nu$ . В диссертации время термализации Вильсоновских петель для различных ориентаций и значений  $\nu$  сравнивается со временем термализации корреляционной функции и энтропии зацепленности.

Статическая анизотропная система также может быть характеризована параметром "натяжения струны"  $\sigma$ . Натяжение струны определяется как коэффициент в асимптотике псевдопотенциала при конечной температуре на больших расстояниях. Было показано, что для различных ориентаций данная асимптотика имеет вид

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_{y_1, y_2(\infty)}(\ell_y, \nu) &\underset{\ell_y \rightarrow \infty}{\sim} \sigma_{s,3}(\nu) \ell_y, & \sigma_{s,3}(\nu) &\sim T^{2/\nu}, \\
\mathcal{V}_{y_1, x(\infty)}(\ell_y, \nu) &\underset{\ell_y \rightarrow \infty}{\sim} \sigma_{s,2}(\nu) \ell_y, & \sigma_{s,2}(\nu) &\sim T^{(1+\nu)/\nu}, \\
\mathcal{V}_{x, y_1(\infty)}(\ell_x, \nu) &\underset{\ell_x \rightarrow \infty}{\sim} \sigma_{s,1}(\nu) \ell_x & \sigma_{s,1}(\nu) &\sim T^{(1+\nu)/\nu},
\end{aligned} \tag{33}$$

где  $\ell_x$  и  $\ell_y$  расстояния в соответствующем направлении

В **третьей главе** рассматривается зависимость площади ловушечной поверхности образующейся в результате столкновения доменных стенок от энергии в некоторой метрике, приводящей к конфайнменту в двойственной теории (метрике типа Андреева-Захарова).

Метрика  $AdS$ , деформированная функцией  $b(z)$ , называемой деформирующим фактором, имеет вид

$$ds^2 = b^2(z)(-dt^2 + dz^2 + dx_i^2), \tag{34}$$

где  $i = 1, 2, 3$ . Выбор различных  $b(z)$  характеризует выбор двойственной теории. Для метрики, приводящей к конфайнменту в двойственной теории, (метрика типа Андреева-Захарова)  $b(z)$  имеет вид

$$b^2(z) = \frac{L^2 h(z)}{z^2}, \quad h = e^{\frac{az^2}{2}}. \tag{35}$$

Другой, изучающийся в диссертации фактор деформации имеет вид

$$b(z) = b_1(z) \equiv \left( \frac{L_{eff}}{z} \right)^{1/2}, \tag{36}$$

и он соответствует метрике, которая хорошо описывает феноменологию столкновения тяжелых ионов (а именно воспроизводит экспериментальную множественность рождения заряженных частиц). В метриках (35) и (36)  $L_{eff}$  и  $a$  некоторые константы значения которых выбираются из феноменологических предпосылок.

В метрике (34) изучается столкновение доменных стенок, т.е. рассматривается возмущение метрики материей с тензором энергии импульса специального вида, зависящим только от голографической координаты  $z$ .

Согласно предписанию *AdS/CFT* соответствия, столкновение доменных стенок позволяет связать феноменологическую множественность рождения частиц с площадью черной дыры, образовавшейся в столкновении стенок. Уравнения для волнового профиля доменной стенки  $\phi^w(z)$  в пространстве с фактором деформации  $b(z)$  имеет вид

$$\left(\partial_z^2 + \frac{3b'}{b}\partial_z\right)\phi^w(z) = -C\frac{\delta(z-z_*)}{b^3(z)}, \quad (37)$$

где  $C$  является безразмерной переменной задаваемой в виде

$$C = \frac{16\pi G_5 E}{L^2}, \quad (38)$$

где  $E$  - энергия,  $G_5$  - гравитационная постоянная.

Допустимые энергии  $E$ , точка столкновения двух шоковых волн  $z_*$  и функция  $b(z)$  связаны уравнениями

$$\frac{C}{2} = b^3(z_a) + b^3(z_b), \quad (39)$$

$$F(z_*) = \frac{b^{-3}(z_a)F(z_b) + b^{-3}(z_b)F(z_a)}{b^{-3}(z_a) + b^{-3}(z_b)}, \quad (40)$$

где

$$\int_{z_i}^{z_j} b^{-3} dz = F(z_j) - F(z_i), \quad (41)$$

и выполняются условия

$$z_a < z_* < z_b. \quad (42)$$

Данная формула позволяет получить ограничение на энергии сталкивающихся доменных стенок для которых происходит образование черной дыры.

Для получения множественности в зависимости от энергии необходимо вычислить площадь ловушечной поверхности образовавшейся черной

дыры. Для метрики с фиксированным фактором деформации  $b(z)$  формула для множественности  $s$  имеет вид

$$s = \frac{1}{2G_5} \int_{z_a}^{z_b} b^3 dz, \quad (43)$$

где  $z_a$  и  $z_b$  определяются из уравнений (39) и (41).

Для метрики с деформирующим фактором  $b_1(z)$  асимптотика (43) при больших значениях  $C$  имеет вид

$$s(C, z_b) \approx \frac{L_{eff}}{G_5} \left( \left( \frac{C}{2} \right)^{1/3} - \left( \frac{L_{eff}}{z_b} \right)^{1/2} - \frac{1}{3} \left( \frac{2}{C} \right)^{2/3} \left( \frac{L_{eff}}{z_b} \right)^{3/2} + \dots \right). \quad (44)$$

В **заключении** кратко суммируются изложенные в основном тексте результаты.

## Публикации автора по теме диссертации

- [1] Д. С. Агеев, И. Я. Арефьева, “Пробуждение и затухание в модели голографического нагрева”, ТМФ, 193:1 (2017)
- [2] Д. С. Агеев, И. Я. Арефьева, “Внезапное нарушение конформной симметрии голографическими сталкивающимися дефектами”, ТМФ, 189:3 (2016), 389–404
- [3] Dmitry Ageev, “Holographic Wilson loops in anisotropic quark-gluon plasma”, EPJ Web of Conference, 2016, том 125, 4007, 1-6
- [4] Д.С. Агеев, И.Я. Арефьева, “Holographic thermalization in a quark confining background“, ЖЭТФ, 2015, том 147, выпуск 3, 499–507

---

Подписано в печать 01.06.2017  
Тираж 100 экз.

---

Отпечатано в математическом институте им. В.А. Стеклова РАН  
Москва, 119991, ул. Губкина, 8