Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова

На правах рукописи
УДК 517.957+ 512.72+ 512.71

Жеглов Александр Борисович

Пучки без кручения на многообразиях и интегрируемые системы

01.01.06 – математическая логика,
алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2016

Работа выполнена на кафедре Дифференциальной геометрии и приложений ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова»

Официальные оппоненты:

Бабич Михаил Васильевич, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории математических проблем физики ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук (ПОМИ), научная специальность 01.01.06

Тихомиров Александр Сергеевич, доктор физико-математических наук, профессор, профессор факультета математики Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», научная специальность 01.01.06

Тюрин Николай Андреевич, доктор физико-математических наук, профессор РАН, начальник сектора Лаборатории Теоретической физики Международной межправительственной научно-исследовательской организации Объединенный институт ядерных исследований, научная специальность 01.01.06

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет»

Защита диссертации состоится 20 октября 2016 г.
в 13 часов на заседании диссертационного совета Д 002.022.03 при Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук по адресу: 119991, г. Москва, ул. Губкина, д. 8, 9-ый этаж, конференц-зал.
С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Математического института им. В. А. Стеклова РАН и на сайте МИАН по адресу
http://www.mi.ras.ru/dis/ref16/zheglov/dis.pdf

Автореферат разослан “_____” июля 2016 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 002.022.03 при МИАН,
д. ф.-м. н. М. А. Королев

Актуальность темы

В алгебре, теории интегрируемых систем и теории уравнений в частных производных есть две классические проблемы, появившиеся и впервые исследовавшиеся еще в работах Валленберга [1], Шура [2] и Бурхнала-Чаунди [3] : это проблема явного построения семейств коммутирующих дифференциальных операторов и проблема классификации колец коммутирующих дифференциальных операторов в частных производных.

В 20-х годах 20-го века Бурхнал и Чаунди дали описание пар коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов взаимно простых порядков, сведя задачу к системе уравнений, связанной с аффинной спектральной кривой (т.е. плоской кривой, заданной уравнением, задающим алгебраическое соотношение между коммутирующими операторами). Тогда же Бейкер заметил [4], что можно ввести общую собственную для коммутирующих операторов функцию; эта функция впоследствии (будучи разнообразно модифицирована) сыграла решающую роль в эффективном построении коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов произвольных порядков.

Новый прорыв в решении этих задач был совершён лишь в 70-е годы в связи с бурно развивавшейся теорией точно решаемых нелинейных уравнений в частных производных методом обратной задачи рассеяния, а также теорией конечнозонных периодических и условно периодических решений уравнения КдФ. В работах И. М. Кричевера [5] была дана классификация колец коммутирущих обыкновенных дифференциальных операторов «общего положения» (т.е. для гладких спектральных кривых) в терминах «геометрических спектральных данных», а также изложена идея эффективного построения коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов произвольных порядков. Центральную роль в таком построении, а также в классификации колец, и для построения точных решений нелинейных уравнений в частных производных играла функция Бейкера-Ахиезера или ее векторный аналог. В случае, когда размерность пространства собственных функций кольца дифференциальных операторов в общей точке спектральной кривой равна 1 (такая размерность называется рангом кольца), Кричевером была дана формула для этой функции через тета-функции якобиана спектральной кривой. Классифи-

[1] Wallenberg G., *Über die Vertauschbarkeit homogener linearer Differentialausdrücke*, Archiv der Math. u. Phys., Drittle Reihe **4** (1903) 252-268

[2] Schur I., *Über vertauschbare lineare Differentialausdrčke*, Sitzungsber. der Berliner Math. Gesel. **4** (1905) 2-8

[3] Burchnall J.L., Chaundy T.W., *Commutative ordinary differential operators*, Proc. London Math. Soc. Ser. 2, **21** (1923) 420-440; Proc. Royal Soc. London Ser. A, **118** (1928) 557-583.

[4] Baker H. F., *Note on the foregoing paper Commutative ordinary differential operators*, Proc. Royal. Soc. London 118 (1928), 584-593

[5] Кричевер И.М., *Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений*, УМН **32**, 6 (1977), 183-208; *Коммутативные кольца обыкновенных линейных дифференциальных операторов*, Функц. анализ и его прил., 12:3, 1978, 20–31

цируемые кольца удовлетворяли некоторым ограничениям: рассматривались лишь эллиптические кольца, т.е. содержащие оператор ненулевого порядка со старшим коэффициентом 1. Это условие не слишком ограничивало общность, т.к. заменой переменной всегда можно привести кольцо к эллиптическому виду. Геометрические спектральные данные состояли, грубо говоря, из гладкой алгебраической проективной кривой произвольного рода, стабильного векторного расслоения наклона 1 (которое задавалось с помощью детерминантного дивизора и набора параметров Тюрина), и набора функциональных параметров.

В общем случае ранга >1 задача вычисления векторного аналога функции Бейкера-Ахиезера сводится, согласно классификационной теореме Кричевера, к системе сингулярных интегральных уравнений, решить которую в общем случае в явном виде не представляется возможным. Тем не менее, для построения коэффициентов коммутирующих операторов знание явного вида функции Бейкера-Ахиезера не необходимо. С. П. Новиковым и И. М. Кричевером [6] был предложен для этой цели метод деформации параметров Тюрина (задающих общее стабильное векторное расслоение на неособой кривой), с помощью которого можно в некоторых случаях строить явные примеры коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов. В той же работе они применили его для построения всех коммутирующих операторов порядков 4 и 6 со скалярными коэффициентами, порождающих кольцо ранга два, с эллиптической спектральной кривой. Впоследствии с помощью этого метода и некоторых других соображений О. И. Моховым, П. Г. Гриневичем, А. Е. Мироновым, а также их учениками были получены явные примеры большого количества других коммутирующих операторов разных рангов, со скалярными или матричными коэффициентами.

Наиболее интересные примеры таких операторов — операторы со скалярными полиномиальными коэффициентами. Первые примеры таких операторов ранга 2 и 3, отвечающих кривой рода 1, были получены Диксмье [7] чисто алгебраическими методами. П. Г. Гриневич [8] нашел условия на функциональный параметр, участвующий в описании операторов Кричевера-Новикова, при которых коэффициенты операторов принимают вид рациональных функций. В частности, он нашел условие, при котором получались и примеры Диксмье. В дальнейшем коммутирующим операторам порядков 4 и 6 были посвящены еще несколько статей зарубежных авторов [9], а также недавние препринты диссертанта с соавторами [10]. Тем не менее до

[6] И.М. Кричевер, С.П. Новиков, *Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения*, УМН, **35**:6 (1980), 47–68.

[7] J. Dixmier, *Sur les algèbres de Weyl*, Bull. Soc. Math. France, **96** (1968), 209–242.

[8] П.Г. Гриневич, *Рациональные решения уравнений коммутации дифференциальных операторов*, Функц. анализ и его прил., **16**:1 (1982), 19–24.

[9] F. Grunbaum, *Commuting pairs of linear ordinary differential operators of orders four and six*, Phys. D, **31**:3 (1988), 424–433; E. Previato, G. Wilson, *Differential operators and rank 2 bundles over elliptic curves*, Compositio Math., **81**:1 (1992), 107–119; P. Dehornoy. *Operateurs differentiels et courbes elliptiques*, Compositio Math., **43**:1 (1981), 71–99.

[10] I. Burban, A. Zheglov *Fourier-Mukai transform on Weierstrass cubics and commuting differential*

сих пор полного описания коммутирующих операторов с полиномиальными коэффициентами даже порядков 4 и 6 не было найдено.

С полиномиальными примерами связана следующая гипотеза Ю. Береста. Рассмотрим полиномиальное уравнение от двух переменных в первой алгебре Вейля $A_1 = \{\sum_{j=0}^{n} u_j \partial_x^j, u_j \in \mathbb{C}[x]\}$:

$$f(X,Y) = \sum_{j,i=0}^{n} \alpha_{ij} X^i Y^j = 0, \quad X, Y \in A_1, \alpha_{ij} \in \mathbb{C}.$$

Группа автоморфизмов очевидным образом действует на решениях этого уравнения. Гипотеза заключается в том, что при общих значениях коэффициентов $\alpha_{ij} \in \mathbb{C}$ пространство орбит конечно, если род соответствующей кривой $f = 0$ больше 1, и бесконечно в случае рода 1. Если бы гипотеза была верна для некоторой кривой рода > 1, то можно было бы получить доказательство известной гипотезы Диксмье для первой алгебры Вейля. Долгое время стоял вопрос о том, существуют ли нетривиальные решения уравнения $f = 0$, если эта спектральная кривая имеет произвольный род $g > 1$. Ответ на этот вопрос был получен А. Е. Мироновым [11]: он построил серию примеров коммутирующих операторов с полиномиальными коэффициентами ранга 2 и 3 с гиперэллиптической спектральной кривой произвольного рода. Впоследствии О. И. Мохов [12] расширил список таких примеров для произвольного ранга. Отметим, что при построении таких примеров каждый раз необходимо решать нетривиальную систему уравнений, даже существование решений которой установить непросто. Иногда это удается сделать с помощью алгебро-геометрических методов. В работе [11], комбинируя различные методы, мы доказываем гипотезу Береста для кривых рода 1, и приводим пример гиперэллиптических кривых старшего рода, для которых она неверна.

Классификация Кричевера впоследствии была переформулирована на абстрактном алгеброгеометрическом языке. Так, для случая особых спектральных кривых она была модифицирована Мамфордом [13], а абстрактная алгебро-геометрическая версия соответствия между спектральными данными и кольцами обыкновенных дифференциальных операторов была дана В. Г. Дринфельдом [14]. В геометрических спектральных данных по Мамфорду стабильное расслоение заменялось на произ-

---

operators, Oberwolfach preprints, v.3, 2016, 1-32; А. Б. Жеглов, А. Е. Миронов, Б. Т. Сапарбаева, *Коммутирующие несамосопряженные дифференциальные операторы с полиномиальными коэффициентами*, принят к печати в Сиб. Мат. Ж., 6 р.;

[11] A.E. Mironov, *Self-adjoint commuting ordinary differential operators*, Invent math, **197**: 2 (2014), 417–431

[12] O.I. Mokhov, *Commuting ordinary differential operators of arbitrary genus and arbitrary rank with polynomial coefficients*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **234** (2014), 309–322.

[13] Mumford D., *An algebro-geometric constructions of commuting operators and of solutions to the Toda lattice equations, Korteweg-de Vries equations and related non-linear equations*, In Proc. Internat. Symp. on Alg. Geom., Kyoto 1977, Kinokuniya Publ. (1978) 115-153.

[14] Дринфельд В., *О коммутативных подкольцах некоторых некоммутативных колец*, Функц. анализ и его прил. 11:1 (1977), 11-14.

вольный пучок без кручения с нулевыми когомологиями. Набор же функцональных параметров в дальнейшем превратился в выбор тривиализации этого пучка в точке кривой на «бесконечности».

Особые кривые играют важную роль для построения точных решений ряда нелинейных уравнений в частных производных: например, для уравнений Кортевега де Фриза (КдФ) или Кадомцева-Петвиашвили (КП) известные n-солитонные решения соотвествуют рациональным кривым с n двойными точками [15]. Уравнение КП особо выделяется среди точно решаемых нелинейных уравнений в частных производных, так как с ним связано решение известной проблемы Шоттки, а также огромное количество работ из разных областей математики. С этим уравнением тесно связана бесконечная иерархия уравнений — иерархия КП, конструкцию некоторых точных решений которых, строящихся по алгебро-геометрическим спектральным данным колец коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов, приводил Кричевер в упоминавшихся выше работах. В 1982 году М. Сато и Я. Сато обнаружили [16], что иерархия КП допускает линеаризацию, если ее рассматривать как динамическую систему на бесконечномерном грассмановом многообразии (грассманиане Сато). Эффективность такой точки зрения была указана в работе Сигала и Вилсона [17]. Параллельно с этой работой Муласе [18] доказал слабый вариант гипотезы С. П. Новикова, относящейся к проблеме Шоттки: θ-функция абелевого многообразия доставляет решение иерархии КП тогда и только тогда, когда это многообразие является якобианом какой-то кривой. Более того, было показано, что это абелево многообразие является орбитой КП-потоков на грассманиане Сато, и что по этой орбите легко восстанавливается сама кривая. Оказалось, что уравнения иерархии задают универсальные семейства изоспектральных деформаций колец коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов, которые параметризуются точками якобиана спектральной кривой. Попутно в этих и более поздних работах была получена еще одна модификация теоремы классификации коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов: имеется взаимно-однозначное соответствие между классами изоморфных геометрических спектральных данных ранга r (где ранг — это ранг пучка в общей точке), точками большой клетки грассманиана Сато ранга r (или классами «пар Шура»), и нормированными коммутативными алгебрами обыкновенных дифференциальных операторов ранга r с регулярными скалярными коэффициентами. Отображение, строящее по геометрическим спектральным данным точку грассманиана Сато, было названо в работах Сигала, Вилсона и Муласе отображением Кричевера. Отметим, что рассмотрение точек грассманиана

[15]Mumford D., *Tata lectures on Theta II*, Birkhäuser, Boston, 1984

[16]Sato M., Sato Ya. *Soliton equations as dynamical systems on infnite dimensional Grassmann manifold*, Lect. Notes in Num. Appl.Anal., 1982, V. 5., P. 259-271

[17]Segal G., Wilson G., *Loop Groups and Equations of KdV Type*, Publ. Math. IHES, n. 61, 1985, pp. 5-65

[18]Mulase M. *Cohomological structure in soliton equations and Jacobian varieties*, J. Diff. Geom., 1984, V. 19, P. 403-430.

Сато оказалось эффективным для нахождения точной формулы функции Бейкера-Ахиезера для коммутирующих операторов ранга один, отвечающих рацинальной особой кривой: такая формула приведена в работе Вилсона [19].

О классификации или построении явных примеров коммутирующих дифференциальных операторов в *частных производных* (ДО) известно гораздо меньше. В работе И. М. Кричевера [5] 1977 года рассматривались также кольца коммутирущих дифференциальных операторов в частных производных, удовлетворящие некоторым условиям «общего положения», содержащие n (n — число переменных) операторов с алгебраически независимыми постоянными старшими символами. Для таких колец был доказан аналог леммы Бурхнала-Чаунди, определено спектральное многообразие и предложена его компактификация, а также было доказано существование однозначно определенной функции Бейкера-Ахиезера (порождающей модуля собственных функций кольца), вполне определяющей кольцо по его спектральному многообразию. Там же отмечалось, что компактифицированное спектральное многообразие имеет особенности. Обратная задача пока до сих пор не решена: неизвестно, по каким именно многообразиям или более широким спектральным данным можно построить кольцо коммутирующих ДО, есть ли аналоги точных формул функций Бейкера-Ахиезера, строящихся по многообразиям высшей размерности. Явные примеры таких колец известны, но их, в некотором смысле, не очень много. Первые нетривиальные примеры появились в работах [20]; они были связаны с квантовыми (деформированными) системами Калоджеро-Мозера. Системам Калоджеро-Мозера и связанным с ними примерам было посвящено с тех пор много работ, см. например обзоры [21]. Кроме этих примеров, были примеры, полученные с помощью преобразования Дарбу [22]. Наконец, есть совсем недавние интересные примеры [23]

В работе [24] А. Н. Паршин определил аналог отображения Кричевера для алгебраических поверхностей, точнее говоря, для геометрических данных (данных Паршина), состоящих из Коэно-Маколеевой поверхности, обильного дивизора Картье,

[19] Wilson G. *Bispectral commutative ordinary differential operators*, J. Reine Angew. Math. 442 (1993), 177–204

[20] Chalykh O., Veselov A., *Commutative rings of partial differential operators and Lie algebras*, Comm. Math. Phys. 125 (1990) 597-611; Chalykh O., Veselov A., *Integrability in the theory of the Schrödinger operators and harmonic analysis*, Comm. Math. Phys. 152 (1993) 29-40; Chalykh O., Styrkas K., Veselov A., *Algebraic integrability for the Schrödinger operators and reflections groups*, Theor. Math. Phys. 94 (1993) 253-275.

[21] P. Etingof, *Lectures on Calogero-Moser systems*, arXiv:math/0606233; Chalykh O., *Algebro-geometric Schrödinger operators in many dimensions*, Philos. Trans. R. Soc. Lond., Ser. A, Math. Phys. Eng. Sci. 366, No. 1867, 947-971 (2008).

[22] Yu. Berest, A. Kasman *D-modules and Darboux transformations*, Lett. Math. Phys., vol. 43, 3, 1998, 279–294

[23] Sokolov, V. V.; *Algebraic quantum Hamiltonians on the plane.* Teoret. Mat. Fiz. 184 (2015), no. 1, 57–70;

[24] Паршин А. Н., *Соответствие Кричевера для алгебраических поверхностей*, Функ. Анал. и Прил., том 35 (2001), 1, стр. 88-90

регулярной точки, векторного расслоения и некоторых данных тривиализации. Образом отображения является некоторое бесконечномерное подпространство (обобщенное фредгольмово) в двумерном локальном поле. Позже, и другими методами, это отображение было обобщено Д. В. Осиповым [25] на данные произвольной размерности. В то же время, в работе [26] А. Н. Паршин развил элементы техники Шура для колец многомерных псевдодифференциальных операторов, а также исследовал в этих кольцах аналог иерархии КП. Таким образом, появилась надежда на то, что грассманов подход к задаче классификации может быть применен и для случая большого количества переменных.

Обобщенное отображение Кричевера-Паршина обладало свойством инъективности, причем исходные геометрические данные могли быть восстановлены по подпространству. Но оно не было сюръективным. В работе [4] мы определили новый вид геометрических данных, формальные проколотые ленты (риббоны) и пучки без кручения на них, на который переносится обобщенное отображение Кричевера-Паршина, и которое устанавливает биективное соответствие между этими данными и обобщенными фредгольмовыми подпространствами в двумерном локальном поле. Такие данные, в частности, строятся по любым данным Паршина, а последние могут быть однозначно восстановлены по первым. Риббоны и пучки без кручения на них похожи на известные в алгебраической геометрии формальные объекты: формальные схемы, получающиеся пополнением схемы вдоль подсхемы, и когерентные пучки на них. В качестве подсхемы в случае данных Паршина выступает неприводимая кривая - обильный дивизор Картье. Преимущество рассмотрения таких объектов было в том, что аналог иерархии КП, а также его модификации, изучавшиеся в препринте [27] и работе [3], задавали деформации обобщенных фредгольмовых пространств в двумерном локальном поле, а через теорему о взаимно-однозначном соответствии — деформации пучков без кручения на риббонах, в связи с чем возникал вопрос о возможной интерпертации этих иерархий как динамических систем на пространстве модулей таких пучков. Позже они помогли вывести также некоторые геометрические свойства спектральных данных колец дифференциальных операторов в частных производных.

В работе [5] было установлено, что пучки без кручения на риббонах, ограничение которых на кривую локально свободно, сами являются локально свободными. В связи с этим там же была исследована группа Пикара риббона (Pic^0). Оказалось, что при некоторых ограничениях на когомологии структурного пучка риббона она обладает структурой инд-схемы, причем множество k-точек этой инд-схемы совпадает с множеством k-точек бесконечномерной алгебраической группы — группы

[25] Осипов Д.В., *Соответствие Кричевера для алгебраических многообразий*, Изв. РАН. Сер. матем., 2001, 65:5, 91–128

[26] Паршин А. Н., *О кольце формальных псевдодифференциальных операторов*, Труды МИАН, **224** (1999), 266-280

[27] Zheglov A. *Two dimensional KP systems and their solvability* Preprints of Humboldt University. — Vol. 5. — Humboldt University of Berlin, Berlin, 2005. — P. 1–42.

Пикара формальной схемы (в случае риббона, происходящего из данных Паршина — пополнения поверхности вдоль дивизора).

Несмотря на все эти результаты, оставалась неясной связь между геометрическими данными Паршина, фредгольмовыми подпространствами в двумерном локальном поле, а также теорией риббонов, и кольцами коммутирующих дифференциальных операторов. Этот пробел был устранен в работе [6], играющей центральную роль в настоящей диссертации, в которой был предложен аналог теоремы классификации колец коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов: теорема классификации коммутативных подалгебр в *пополненном* кольце дифференциальных операторов от двух переменных в терминах некоторых геометрических данных и в терминах некоторых подпространств в двумерном локальном поле, тесно связанных с геометрическими данными Паршина и с фредгольмовыми подпространствами. Объясним подробней суть этой теоремы, и ее связь с проблемой классификации колец коммутирующих ДО.

Пользуясь идеями и техникой, развитой при исследовании двумерных локальных тел в работах [28] и [1], а также развивая чисто алгебраическую технику Шура для колец многомерных псевдодифференциальных операторов, в работе [6] мы определили пополнение $\hat{D}$ кольца дифференциальных операторов от двух переменных, которое содержит кольцо дифференциальных операторов в частных производных в качестве плотного подкольца. Среди операторов этого кольца есть также разностные операторы, и все его операторы линейны и действуют на кольце ростков аналитических функций. В той же работе мы ввели понятие квази-эллиптических колец коммутирующих операторов в $\hat{D}$ — аналог эллиптических колец коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов. Эти кольца определяются тем, что содержат пару операторов специального вида. Это условие достаточно слабое: так, все кольца коммутирующих операторов, упоминавшиеся выше в разных работах, становятся квази-эллиптическими после линейной замены переменных. При этом квази-эллиптические кольца *дифференциальных* операторов обладают свойством «чистоты»: любое коммутативное кольцо, содержащее такое кольцо, лежит в D, то есть состоит лишь из дифференциальных операторов. Далее в этой работе мы доказали теорему классификации таких колец: а именно, мы установили взаимно-однозначное соответствие между классами таких колец, подпространствами определенного типа в двумерном локальном поле (двумерными парами Шура), и классами изоморфных геометрических данных, очень похожих на геометрические данные Паршина (модифицированные данные Паршина), состоящих из проективной поверхности, обильного $\mathbb{Q}$-Картье дивизора, регулярной точки на дивизоре, квазикогерентного пучка без кручения с определенными условиями на когомологии, и некоторых данных тривиализации. При этом возникает формальный аналог функ-

[28] Жеглов А.Б. *О структуре двумерных локальных тел*, Известия РАН: Сер. Мат., 1, 2001, стр. 25-60

ции Бейкера-Ахиезера, которая строится по подпространству из пары Шура при помощи двумерного аналога теоремы Сато, доказанного в той же работе [6]. Кроме того, там же был посчитан первый пример кольца коммутирующих пополненных операторов, отвечающих простейшей паре Шура, выведены некоторые явные уравнения одной из обобщенных иерархий КП, и найдено их решение. И операторы, и решение оказались разностными операторами необычного вида, а одно из уравнений совпало с уравнением КдФ, что было обусловлено выбором подпространства в паре Шура.

Поскольку модифицированные геометрические данные Паршина классифицируют в том числе кольца *дифференциальных* операторов, возник естественный вопрос об условиях, выделяющих среди таких данных те, которые отвечают этим кольцам. В работах [8], [7], [10] были определены и исследованы спектральные данные коммутативных конечно порожденных колец с некоторыми условиями на старшие символы. Кроме того, в работе [8] отображение Кричевера-Паршина было расширено на модифицированные данные Паршина, и установлена связь с теорией риббонов (в частности, установлена связь между парами Шура и обобщенными фредгольмовыми подпространствами), а в работе [10] получены результаты о преобразованиях Дарбу колец дифференциальных операторов с рациональной спектральной поверхностью и разобрано несколько известных примеров. В итоге были выведены некоторые необходимые условия на модифицированные данные Паршина, описывающие кольца дифференциальных операторов. Эти условия сильно сузили класс допустимых геометрических данных, особенно данных, описывающих кольца ранга 1 (алгебраически интегрируемые квантовые системы). Есть гипотеза, что эти условия также достаточны.

В частности, оказалось, что достаточно рассматривать Коэно-Маколеевы поверхности с обильным рациональным $\mathbb{Q}$-Картье дивизором C с индексом самопересечения $C^2 = 1$ и с Коэно-Маколеевым пучком без кручения $\mathcal{F}$ с фиксированным полиномом Гильберта и нулевыми когомологиями. Пространство модулей таких пучков (ранга 1), наряду с групповой инд-схемой Пикара риббона, происходящего из таких геометрических данных, могут служить подходящим аналогом обобщенного якобиана спектральной кривой (из теории в размерности один), параметризующим деформации колец коммутирующих операторов.

Цель работы

Цель работы — исследование алгебро-геометрических свойств колец коммутирующих дифференциальных операторов со скалярными коэффициентами, имеющих важное значение для решения классических проблем, упомянутых в начале реферата, а также доказательство существования бесконечных серий коммутирующих операторов в первой алгебре Вейля, лежащих в разных орбитах относительно действия группы автоморфизмов.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми. Основные из них состоят в следующем.

1. Доказано существование бесконечных серий коммутирующих операторов в первой алгебре Вейля со спектральными кривыми произвольного рода, лежащих в разных орбитах относительно действия группы автоморфизмов.

2. Определены алгебро-геометрические спектральные данные для алгебр коммутирующих дифференциальных операторов в частных производных с пустым пересечением характеристических дивизоров и исследованы их основные свойства.

3. В пополненном кольце дифференциальных операторов в частных производных от двух переменных определен класс коммутативных подалгебр, включающий в себя алгебры коммутирующих дифференциальных операторов в частных производных. Алгебры из этого класса классифицированы в терминах специальных подпространств двумерного локального поля («пар Шура»), а также в терминах геометрических данных (модифицированных данных Паршина).

4. Определены формальные проколотые ленты (риббоны) и пучки без кручения на них и исследованы их основные свойства. Доказана восстанавливаемость модифицированных данных Паршина по связанным с ними риббону и пучку без кручения на нем. Установлено взаимно-однозначное соответствие между этими объектами и обобщенными фредгольмовыми подпространствами в двумерном локальном поле.

5. Изучена группа Пикара риббонов. В частности, доказана про-представимость функтора Пикара для риббонов, удовлетворяющих определенным условиям.

6. Получены необходимые условия на геометрические данные, выделяющие среди них спектральные данные алгебр коммутирующих дифференциальных операторов в частных производных. Как следствие теории, получены результаты о преобразованиях Дарбу колец дифференциальных операторов с рациональной спектральной поверхностью, и о пополнении аффинной плоскости.

Методы исследования

В работе используются методы алгебраической геометрии, коммутативной алгебры, теории интегрируемых систем, а также общие методы теории многомерных локальных полей.

Теоретическая и практическая ценность

Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в алгебраической геометрии, теории интегрируемых систем и теории нелинейных дифференциальных уравнений.

Апробация работы

Результаты работы докладывались автором на семинаре отдела алгебры и теории чисел (семинар И. Р. Шафаревича) и семинаре по арифметической алгебраической геометрии в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН (МИАН), на семинаре «Дифференциальная геометрия и приложения», на семинаре «Группы Ли и теория инвариантов» и на семинаре «Узлы и теория представлений» на Механико-математическом факультете Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, на семинаре «Геометрия, топология и мат. физика» отдела геометрии и топологии МИАН, на семинаре сектора мат физики ИТФ (Черноголовка), на семинаре «Римановы поверхности, алгебры Ли и математическая физика» в Независимом московском университете, на семинаре в ИТЭФ, на семинарах в Берлинском университете им. Гумбольда и свободном университете Берлина, университете Кельна (Германия), в Саламанском университете (Испания), в центральном колледже Лиона (Франция), в Математическом институте им. Макса Планка (Бонн, Германия), а также на международных конференциях, в том числе:

— Международная конференция (Воркшоп) «Локальные поля, алгебраическая геометрия и обобщенные иерархии КП», Гумбольдтский Университет г. Берлин, Германия, 2 - 7 июня 2005

— Международная конференция «Geometry and quantization», МИРАН, Москва, 9-23 сентября 2007

— Летняя школа-конференция по алгебраической геометрии и комплексному анализу, Ярославль, ЯГПУ, 2-7 июня 2008

— Международная конференция им. Л.Понтрягина «Дифференциальные уравнения и топология», Москва, МГУ, 17-22 июня 2008

— Международная конференция по геометрии и квантованию в Люксембурге GeoQuant, 31 августа - 12 сентября 2009, университет Люксембурга

— Международная конференция, посвященная 70-летию В.А. Садовничего, апрель 2009, МГУ, Москва

— Международная конференция, посвященная памяти Рохлина, С-Петербург, 10-16 января 2010

— Международная конференция «Дни геометрии в Новосибирске, 2011», посвященная 50-летию кафедры геометрии и топологии Новосибирского государственного университета

— Международная конференция “Торическая топология и автоморфные функции”, 2011, Хабаровск, ИПМ ДВО РАН

— Международная конференция «Геометрия, топология, алгебра и теория чисел, приложения», посвященная 120-летнему юбилею Бориса Делоне, 16–20 августа 2010, Москва, МИАН, МГУ им. Ломоносова,

— Четвертая международная конференция по геометрии и квантованию «Geoquant», 11–17 сентября 2011, Китай, Tianjin, Chern Institute of Mathematics,

— Международная конференция «Дни геометрии в Новосибирске, 2012, 2014, 2015», ИМ СО РАН, Новосибирск,

— Международная Конференция XVII geometrical seminar, 2012, Златибор, Сербия,

— Международная научно-практическая конференция «Математика в современном мире», посвященная 150-летию со дня рождения выдающегося российского математика Д.А. Граве, 2013, Вологда, ВГПУ,

— Международная Конференция: Around Sato's theory on soliton equations, 2013, Токио, Япония,

— Международная Конференция: 13 Serbian Mathematical Congress, 2014, Vrnjachka Banja, Сербия,

— Международная Конференция : "Torus Actions in Geometry, Topology, and Applications", Сколково, Skoltech, Москва, 16-21 февраля 2015 г.

— V школа-конференция по алгебраической геометрии и комплексному анализу для молодых математиков России, Коряжма, 17-23 августа 2015 г.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 11 работах автора, список которых приведен к конце автореферата.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, 6-ти глав, разбитых на параграфы, и списка литературы.

Содержание работы

Во введении приводится краткий обзор ранее известных результатов и результатов диссертации.

Содержание главы 1

В первой главе напоминаются необходимые сведения и результаты о классификации колец обыкновенных дифференциальных операторов, об отображении Кричевера и его свойствах. Также первая глава содержит результаты о существовании бесконечных серий коммутирующих операторов в первой алгебре Вейля со спектральными кривыми произвольного рода, лежащих в разных орбитах относительно действия группы автоморфизмов.

Раздел 1.1 начинается с введения обозначений и краткого описания известных результатов.

Рассмотрим k-алгебру (в этом разделе $k = \mathbb{C}$) обыкновенных дифференциальных операторов

$$D = k[[x]][\partial].$$

И. М. Кричевер классифицировал [5] эллиптические подалгебры коммутирующих операторов общего положения в терминах спектральных данных.

Определение 1.

$$B \subset D\text{— эллиптическая} \Longleftrightarrow \exists P \in B, P = \partial^n + p_{n-1}(x)\partial^{n-1} + \ldots + p_0(x)$$

Каждое такое кольцо B, согласно классификационной теореме, изоморфно кольцу мероморфных функций на спектральной кривой C — неприводимой гладкой проективной алгебраической кривой рода g над полем k — с полюсами в фиксированной точке P. Размерность пространства собственных функций операторов из кольца B в общей точке спектральной кривой называется *рангом* кольца B. Это число также совпадает с числом

$$r = rk(B) := GCD\{\mathrm{ord}(Q) | Q \in B\}.$$

Кроме кривой, по кольцу B определяются следующие геометрические спектральные данные:

- z — локальный параметр в окрестности P: $z(P) = 0$.
- $\gamma_1, \ldots \gamma_{rg} \in C$, $\alpha_i = (\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{ir-1})$ — набор чисел, — параметры Тюрина, определяющие общее (стабильное по Мамфорду) расслоение $\mathcal{F}$ ранга r и степени rg на C с набором голоморфных сечений $\eta_1, \ldots, \eta_r$:
$$\eta_r(\gamma_i) = \sum_{j=1}^{r-1} \alpha_{ij}\eta_j(\gamma_i).$$
- $\phi = (\omega_1(x), \ldots, \omega_{r-1}(x))$ — некоторые (произвольные) функции.

По этим данным однозначно строится *векторная функция Бейкера-Ахиезера* $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_r)$, которая однозначно определяется следующими свойствами:

1. $\psi(x, P) = \left(\sum_{s=0}^{\infty} \xi_s(x) z^s\right) \Psi_0(x, P)$, $\xi_0 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\frac{d}{dx}\Psi_0 = A\Psi_0$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ z^{-1} + \omega_1(x) & \omega_1(x) & \omega_2(x) & \ldots & \omega_{r-1}(x) & 0 \end{pmatrix}$$

2. На $C - \{P\}$ ψ мероморфна, с простыми полюсами в точках $\gamma_1, \dots, \gamma_{rg}$

3. $\mathrm{Res}_{\gamma_i} \psi_j = \alpha_{ij} \mathrm{Res}_{\gamma_i} \psi_{r-1}$.

По функции Бейкера-Ахиезера алгебра коммутирующих операторов может быть восстановлена: если f — мероморфная функция на кривой с полюсом в P порядка n, то однозначно определен оператор $L(f)$

$$L(f)\psi = f\psi, \ \mathrm{ord}L(f) = rn.$$

В разделе 1.1 далее излагается метод деформации параметров Тюрина, предложенный в работе [6] Кричевера и Новикова, с помощью которого можно находить коэффициенты коммутирующих операторов не зная явного вида функции Бейкера-Ахиезера. С помощью этого метода А. Е. Миронов в работах [29] смог построить серию явных самосопряженных операторов 4-го порядка

$$L_4 = (\partial^2 + V(x))^2 + W(x),$$

коммутирующих с операторами порядка $4g+2$. В частности, он показал, что таков оператор

$$L_4^\natural = (\partial_x^2 + \alpha_1 \cosh x + \alpha_0)^2 + \alpha_1 g(g+1) \cosh x, \quad \alpha_1 \neq 0,$$

причем соответствующая спектральная кривая алгебры $\mathbb{C}[L_4^\natural, L_{2g+2}^\natural]$ задается уравнением

$$w^2 = z^{2g+1} + c_{2g}^\natural z^{2g} + \dots + c_1^\natural z + c_0^\natural, \tag{1}$$

где коэффициенты $c_j^\natural$ задаются с помощью явной рекуррентной формулы.

В конце раздела мы доказываем следующие теоремы.

Теорема 2 *Для произвольного целого $m > 0$ и произвольной спектральной кривой Γ, заданной уравнением $w^2 = z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0$, существуют полиномы*

$$V_m = \alpha_{m+2} x^{m+2} + \ldots + \alpha_0, \quad W_m = \beta_m x^m + \ldots + \beta_0, \quad \alpha_{m+2} \neq 0, \beta_m \neq 0$$

такие что оператор

$$L_{4,m} = (\partial_x^2 + V_m(x))^2 + W_m(x)$$

коммутирует с оператором шестого порядка $L_{6,m}$, а спектральная кривая операторов $L_{4,m}, L_{6,m}$ изоморфна Γ.

Теорема 3 *Множество орбит группы $Aut(A_1)$ автоморфизмов первой алгебры Вейля в пространстве решений произвольного уравнения вида*

$$Y^2 = X^3 + c_2 X^2 + c_1 X + c_0, \quad X, Y \in A_1, c_j \in \mathbb{C}$$

бесконечно.

[29] A.E. Mironov, *Self-adjoint commuting ordinary differential operators*, Invent math, **197**: 2 (2014), 417–431; *Periodic and rapid decay rank two self-adjoint commuting differential operators*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **234** (2014), 309–322

Теорема 4 *Множество орбит группы $Aut(A_1)$ в пространстве решений уравнения*

$$Y^2 = X^{2g+1} + c^\natural_{2g} X^{2g} + \cdots + c^\natural_1 X + c^\natural_0, \quad X, Y \in A_1$$

бесконечно.

В разделе 1.2 первой главы мы напоминаем модификацию классификации коммутирующих операторов по Мамфорду-Муласе, в том числе классификацию в терминах точек большой клетки грассманиана Сато, напоминаем конструкцию отображения Кричевера в размерности один, и доказываем необходимые для дальнейшего изложения технические свойства этого отображения.

Содержание главы 2

Во второй главе напоминаются необходимые сведения и известные результаты о свойствах колец дифференциальных операторов в частных производных, а также доказывается теорема об общих свойствах спектральных данных.

Раздел 2.1 является вводным, содержит определения и краткое описание известных результатов. Рассмотрим k-алгебру (в этой главе k — алгебраически замкнутое поле характристики ноль) дифференциальных операторов в частных производных от n переменных:

$$D = k[[x_1, \ldots, x_n]][\partial_1, \ldots, \partial_n].$$

Через $\mathbf{ord}(P)$ будем обозначать порядок оператора в алгебре D. Для всякого правого идеала $J \subset D$ определена *характеристическая подсхема* в $\mathrm{Proj}(gr(D))$, задаваемая однородным идеалом $\langle \sigma_i(P), P \in J \rangle$ в $gr(D)$.

В разделе 2.2 доказывается следующая теорема, которая иллюстрирует основные свойства и одновременно служит определением алгебро-геометрических спектральных данных колец коммутирующих дифференциальных операторов, удовлетворяющих условиям определенного вида.

Теорема 5 *Пусть $P_1, \ldots, P_n \in D$ — некоторые коммутирующие операторы положительного порядка. Пусть B — коммутативная k-подалгебра в D, содержащая операторы $P_1, \ldots, P_n$. Предположим, что пересечение характеристических дивизоров операторов $P_1, \ldots, P_n$ пусто.*

Тогда отображение из $gr(D)$ в $gr(D)/x_1 gr(D) + ... + x_n gr(D) = k[\xi_1, ..., \xi_n]$ индуцирует вложение на $gr(B)$, и имеют место следующие свойства.

1. *$k[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ конечно порожден как $\mathrm{gr}(B)$-модуль.*

2. *Кольца B и $\mathrm{gr}\, B$ — конечно порожденные целые k-алгебры размерности Крулля n.*

3. *Аффинное многообразие $U = \mathrm{Spec}\ B$ над k может быть естественным образом пополнено до n-мерного неприводимого проективного многообразия X с*

границей C — целым дивизором Вейля, не содержащимся в особом локусе X. Более того, C — унирациональный и обильный $\mathbb{Q}$-Картье дивизор.

4. *B-модуль $L = D/x_1D + \ldots + x_nD$ определяет когерентный пучок на U, который может быть естественным образом продолжен до когерентного пучка без кручения $\mathcal{L}$ на X. Более того, индекс самопересечения (C^n) на X равен $\delta^n/\operatorname{rk}(\mathcal{L})$, где*

$$\delta = \min \{\mathbf{ord}(f) - \mathbf{ord}(g) \ \mid \ f, g \in B, \ \mathbf{ord}(f) > \mathbf{ord}(g)\}.$$

Содержание главы 3

В третьей главе излагается теория, посвященная классификации коммутативных подалгебр в пополненной алгебре дифференциальных операторов от двух переменных.

В разделе 3.1 вводятся обозначения и определения, а также доказываются основные свойства пополненной алгебры операторов. Пусть $R = k[[x_1, x_2]]$, M — максимальный идеал в R.

Пусть $N \subset D$ — подалгебра; определим для всякой последовательности $(P_n \in N)_{n \in \mathbb{N}}$, такой что $P_n(R)$ равномерно сходится в R (т.е. для любого $k > 0$ существует $N > 0$ такое что $P_n(R) \subseteq M^k$ для $n \geq N$), k-линейный оператор $P : R \to R$

$$P(f) = \varinjlim_{n \to \infty} \sum_{v=0}^{n} P_v(f), \quad P := \sum_n P_n$$

(он может не быть дифференциальным оператором).

Обозначим через $\hat{N}$ ассоциативную алгебру таких операторов. Определим также

$$\hat{D}_N = \text{ алгебра порожденная } \hat{N} \text{ и } D.$$

Пусть $D_1 = R[\partial_1]$. Определим алгебры

$$\hat{D}_{D_1} = \hat{D}_1[\partial_2], \quad E_+ = D_1((\partial_2^{-1})) \quad \hat{E}_+ = \hat{D}_1((\partial_2^{-1})).$$

На этих алгебрах определяется функция анти-лексикографического порядка $\operatorname{ord}_\Gamma$.

Определение 6. Скажем, что оператор $P \in \hat{E}_+$ имеет порядок $\operatorname{ord}_\Gamma(P) = (k, l)$, если $P = \sum_{s=-\infty}^{l} p_s \partial_2^s$, где $p_s \in \hat{D}_1$, $p_l \in k[[x_1, x_2]][\partial_1] = D_1$, и $\mathbf{ord}(p_l) = k$.

В разделе 3.2 вводятся дополнительные определения технического характера, необходимые для дальнейшего изложения, а также доказываются утверждения о том, что кольца коммутирующих операторов $B \subset D$, порожденные операторами с постоянными старшими символами, приводятся линейными заменами переменных к некоторому специальному виду. Этот раздел служит отчасти мотивировкой для разработки последующей теории.

Определение 7. Для коммутативного кольца $B \subset D$ определим числа $\tilde{N}_B$, N_B — ранги B относительно фунций порядка **ord**, ord_Γ — следующим образом:

$$\tilde{N}_B = GCD\{\mathbf{ord}(a), \quad a \in B\},$$

$$N_B = GCD\{q(a), \quad a \in B \text{ такие что } \mathrm{ord}_\Gamma(a) = (0, q(a)) \text{ и } \mathbf{ord}(a) = q(a)\}.$$

Особо отметим, что ранг кольца B, определенный как $N_B = \tilde{N}_B$, меньше либо равен ранга пучка общих собственных функций операторов из B. Мы будем пользоваться обозначением $\mathbf{rk}(B)$ для ранга во втором смысле.

Определение 8. Скажем, что коммутативное кольцо $B \subset D$ строго допустимо, если $\tilde{N}_B = N_B$.

Предложение 9 *Пусть B — коммутативное кольцо дифференциальных операторов, $B \subset D$, k — алгебраически замкнутое поле, и пусть B содержит два оператора P, Q порядков m, n с постоянными главными символами $\sigma_m(P)$, $\sigma_n(Q)$, причем $\sigma_m(P)^n/\sigma_n(Q)^m$ — непостоянная функция на $\mathbb{P}^1$.*

Тогда существует k-линейная замена координат, такая что в новых координатах

- $N_B = \tilde{N}_B$.
- *в B существуют операторы с постоянными старшими символами P', Q' порядков* $\mathrm{ord}_\Gamma(P') = (0, m)$, $\mathrm{ord}_\Gamma(Q') = (1, n)$.

В разделе 3.3 излагается аналог теории Шура для подкольца $\hat{E}_+$ пополненного кольца двумерных псевдодиффенциальных операторов. Для охвата возможно большего класса операторов из $\hat{D}$ вводятся подкольца в $\hat{E}_+$ с особыми условиями роста на коэффициенты операторов (условия (A_α)). При значении $\alpha = 1$ эти условия играют особую роль для классификации коммутативных подколец в терминах алгебро-геометрических спектральных данных.

Определение 10. Определим функцию порядка на кольце $k[[x_1, x_2]]$ по правилу

$$\mathrm{ord}_M(a) = \sup\{n | a \in (x_1, x_2)^n\}.$$

Скажем, что оператор $P \in \hat{E}_+$, $P = \sum p_{ij}\partial_1^i\partial_2^j$ порядка $\mathrm{ord}_\Gamma(P) = (k, l)$ *удовлетворяет условию* A_α, $\alpha \geq 0$, если

$$(A_\alpha) \qquad \mathrm{ord}_M(p_{ij}) \geq \begin{cases} 0 & \text{если } i \leq \alpha(l-j) + k \\ i - \alpha(l-j) - k & \text{иначе} \end{cases}$$

Скажем, что оператор $Q \in \hat{E}_+$, $Q = \sum q_{ij}\partial_1^i\partial_2^j$ *удовлетворяет условию A_α для порядка (k, l)* если A_α выполняется для всех q_{ij}.

Определение 11. Кольцо $B \subset \hat{E}_+$ коммутирующих операторов называется квазиэллиптическим, если оно содержит два таких оператора P, Q с постоянными старшими коэффициентами, что $\mathrm{ord}_\Gamma(P) = (0, k)$ и $\mathrm{ord}_\Gamma(L) = (1, l)$ для некоторых $k, l \in \mathbb{Z}$.

Кольцо B называется α-квази-эллиптическим, если P, Q удовлетворяют условию A_α.

Определение 12. Скажем, что коммутирующие операторы с постоянными равными 1 старшими коэффициентами $P, Q \in \hat{E}_+$, где $\mathrm{ord}_\Gamma(P) = (0, k)$, $\mathrm{ord}_\Gamma(Q) = (1, l)$, почти нормализованы, если

$$P = \partial_2^k + \sum_{s=-\infty}^{k-1} p_s \partial_2^s \quad Q = \partial_1 \partial_2^l + \sum_{s=-\infty}^{l-1} q_s \partial_2^s,$$

где $p_s, q_s \in \hat{D}_1$.

Скажем, что P, Q нормализованы, если

$$P = \partial_2^k + \sum_{s=-\infty}^{k-2} p_s \partial_2^s \quad Q = \partial_1 \partial_2^l + \sum_{s=-\infty}^{l-1} q_s \partial_2^s,$$

где $p_s, q_s \in \hat{D}_1$.

В качестве следствия теории Шура получается следующий результат о чистоте колец дифференциальных операторов.

Предложение 13 *Пусть $B \subset D \subset \hat{D}$ — 1-квази-эллиптическое кольцо коммутирующих дифференциальных операторов в частных производных. Тогда любое кольцо $B' \subset \hat{D}$ коммутирующих операторов, такое что $B' \supset B$, — кольцо дифференциальных операторов в частных производных, т.е. $B' \subset D$.*

В разделе 3.4 классифицируются 1-квази-эллиптические кольца коммутирующих операторов в терминах подпространств определенного вида (пар Шура) двумерного локального поля $V = k((z_1))((z_2))$. Для этого доказываются аналоги теорем Сато (описывающих соответствие между точками большой клетки грассманиана Сато и операторами из группы Вольтерра) для подпространств в V, снабженном стандартной топологией.

Определение 14 Члены ряда $v = \sum_{(i_1,i_2)} v_{i_1 i_2} z_1^{i_1} z_2^{i_2} \in V$ — это элементы $v_{i_1 i_2} z_1^{i_1} z_2^{i_2}$ с $v_{i_1 i_2} \neq 0$, мы упорядочиваем их с помощью антилексикографического порядка на Γ, $\mathrm{ord}_\Gamma(z_1^{i_1} z_2^{i_2}) = (i_1, i_2)$. У каждого ряда v есть *младший член* $\mathrm{LT}(v)$ (член наименьшего порядка), чей порядок называется Γ-порядком v, $\mathrm{ord}_\Gamma(v)$.

Отметим, что ord_Γ — дискретное нормирование ранга 2 на V. В $\hat{E}_+$ определен правый идеал $x_1 \hat{E}_+ + x_2 \hat{E}_+ \subset \hat{E}_+$ и правый $\hat{E}_+$-модуль $\hat{E}_+/(x_1 \hat{E}_+ + x_2 \hat{E}_+) \simeq k[z_1^{-1}]((z_2))$ (изоморфизм k-векторных пространств), что определяет структуру правого $\hat{E}_+$-модуля на $V_0 = k[z_1^{-1}]((z_2))$.

Предложение 15 *Пусть* $W_0 = k[z_1^{-1}, z_2^{-1}] \subset V$ *— линейное пространство. Тогда* D *можно описать следующим образом:*

$$D = \{P \in E_+ \quad | \quad W_0 P \subseteq W_0\}.$$

Аналогично, $\hat{D} = \{P \in \hat{E}_+ | W_0 P \subseteq W_0\}$.

Определение 16 Носитель k-подпространства W в пространстве $k((z_1))((z_2))$ — замкнутое k-подпространство $\mathrm{Supp}(W)$ в пространстве $k((z_1))((z_2))$, порожденное $\mathrm{LT}(a)$ для всех $a \in W$.

Теорема 17 *Для всякого замкнутого* k*-подпространства* $W \subset k[z_1^{-1}]((z_2))$ *с носителем* $\mathrm{Supp}(W) = W_0 = k[z_1^{-1}, z_2^{-1}]$ *существует единственный оператор* $S = 1+S^-$, *где* $S^- \in \hat{D}_1[[\partial_2^{-1}]]\partial_2^{-1}$, *такой что* $W_0 S = W$.

Теорема 18 *Пусть* W *—* k*-подпространство:* $W \subset k[z_1^{-1}]((z_2))$ *и* $\mathrm{Supp}(W) = W_0$. *Пусть* $\{w_{i,j}, i, j \geq 0\}$ *— базис в* W, *однозначно определенный условиями* $w_{i,j} = z_1^{-i} z_2^{-j} + w_{i,j}^-$, *где* $w_{i,j}^- \in k[z_1^{-1}][[z_2]]z_2$. *Предположим, что все элементы* $w_{i,j}$ *удовлетворяют условию* A_α *с* $\alpha \geq 1$.

Тогда существует единственный оператор $S = 1 + S^-$ *удовлетворяющий условию* A_α, *где* $S^- \in \hat{D}_1[[\partial_2^{-1}]]\partial_2^{-1}$, *такой что* $W_0 S = W$.

Следствие 19 *Пусть* W *— подпространство из теоремы. Пусть* $A \subset k[z_1^{-1}]((z_2))$ *— кольцо, такое что* $WA \subset W$. *Тогда имеется вложение* $SAS^{-1} \subset \hat{D}$ *(здесь мы отождествляем кольцо* $k[z_1^{-1}]((z_2))$ *и* $k[\partial_1]((\partial_2^{-1}))$*).*

В конце раздела доказывается теорема классификации 1-квази-эллиптических колец в терминах пар Шура.

Определение 20. Подпространство $W \subset k[z_1^{-1}]((z_2))$ называется α-пространством, если существует такой базис w_i в W, что w_i удовлетворяют условию A_α для всех i.

Определение 21. Скажем, что пара подпространств (A, W), где $A, W \subset k[z_1^{-1}]((z_2))$ и A — k-алгебра с единицей, причем $WA \subset W$, — α-пара Шура, если $A \subset \Pi_\alpha$ и W — α-пространство.

Скажем, что α-пара Шура α-квази-эллиптична, если A — α-квази-эллиптическое кольцо (мы отождествляем здесь кольцо $k[z_1^{-1}]((z_2))$ с кольцом $k[\partial_1]((\partial_2^{-1}))$ через соответствие $z_1 \mapsto \partial_1^{-1}$, $z_2 \mapsto \partial_2^{-1}$).

Определение 22. Оператор $T \in \hat{E}_+$ называется допустимым, если он обратим, порядка нуль, и такой что $T\partial_1 T^{-1}$, $T\partial_2 T^{-1} \in k[\partial_1]((\partial_2^{-1}))$.

Оператор $T \in \hat{E}_+$ называется α-допустимым, если он допустим и удовлетворяет условию A_α (в этом случае $T\partial_1 T^{-1}$, $T\partial_2 T^{-1} \in \Pi_\alpha$).

Скажем, что две α-пары Шура (A, W) и (A', W') эквивалентны, если $A' = T^{-1}AT$ и $W' = WT$, где T — допустимый оператор.

Определение 23. Коммутативные 1-квази-эллиптические кольца B_1, $B_2 \subset \hat{D}$ эквивалентны, если существует обратимый оператор $S \in \hat{D}_1$ (автоматически лежащий в Π_1), такой что $B_1 = SB_2S^{-1}$.

Теорема 24 *Существует взаимно-однозначное соответствие между классами эквивалентности* 1*-квази-эллиптических пар Шура* (A, W) *с носителем* $\mathrm{Supp}(W) = \langle z_1^{-i} z_2^{-j} \quad | i, j \geq 0\rangle$ *и классами эквивалентности* 1*-квази-эллиптических колец коммутирующих операторов* $B \subset \Pi_1 \subset \hat{D}$*.*

В разделе 3.5 излагается классификация 1-квази-эллиптических колец коммутирующих операторов в терминах геометрических данных. Для этого доказывается эквивалентность двух категорий: категории пар Шура и категории геометрических данных.

Оказывается, что для такой классификации удобнее работать с другими парами Шура, состоящими из пространств, естественно изоморфных пространствам из пар Шура, определенных выше.

Полученную с помощью этого изоморфизма пару Шура мы будем также обозначать (A, W). Пространства A, W лежат в поле $k((u))((t))$, на котором определено нормирование ранга 2 $\nu = (\nu_u, \nu_t)$, где ν_t обозначает дискретное нормирование поля $k((u))((t))$ *рядов по* t, а ν_u обозначает дискретное нормирование поля $k((u))$.

Определение 25 Для кольца $A \subset k[[u]]((t))$ определим число

$$N_A = GCD\{\nu_t(a), \quad a \in A \quad \text{такой что} \quad \nu(a) = (0, *)\},$$

где $*$ обозначает любое значение нормирования.

Будем говорить, что кольцо A допустимо, если существует элемент $a \in A$ со свойством $\nu(a) = (1, *)$.

Определим также число

$$\tilde{N}_A = GCD\{\nu_t(a), \quad a \in A\}.$$

Скажем, что кольцо A строго допустимо, если оно допустимо и $\tilde{N}_A = N_A$.

Числа $N_A, \tilde{N}_A$ являются аналогами чисел $N_B, \tilde{N}_B$ для кольца $B \subset D$. Для 1-квази-эллиптических коммутативных колец $B \subset \hat{D}$ можно обобщить эти определения: по теореме классификации B соответствует паре Шура (A, W) с точностью до эквивалентности, т.е. кольцо A определено с точностью до сопряжения на 1-допустимый оператор. Однако, всегда $A \subset \Pi_1$ и A — 1-квази-эллиптическое кольцо.

Определение 26. Для 1-квази-эллиптического коммутативного кольца $B \subset \hat{D}$ положим числа $\tilde{N}_B$, N_B равными числам $\tilde{N}_A$, N_A. Скажем, что B строго допустимо, если A строго допустимо.

Определение 27. Пару (A, W), где $A, W \subset k[[u]]((t))$, будем называть парой Шура ранга r, если выполняются следующие условия:

1. A — k-алгебра с единицей, $\mathrm{Supp}(W) = \langle u^i t^{-j} \quad | i, j \geq 0, i - j \leq 0\rangle$ и $A \cdot W \subset W$.

2. A — строго допустимое кольцо, A конечно порождена как k-алгебра, $\mathrm{trdeg}(\mathrm{Quot}(A)) = 2$ и $N_A = r$.

Обозначим через $\mathcal{S}_r$ множество всех пар Шура ранга r.

Определение 28. Определим категорию пар Шура $\mathcal{S}$ следующим образом:

1. $Ob(\mathcal{S}) = \bigcup_{r\in\mathbb{N}} \mathcal{S}_r$.
2. Морфизм $T : (A_2, W_2) \to (A_1, W_1)$ двух пар состоит из подкрученных вложений
$$T^{-1}A_2T \hookrightarrow A_1, \quad W_2T \hookrightarrow W_1,$$
где T — произвольный 1-допустимый оператор.

Для определения геометрических данных введем следующие обозначения. $T = \operatorname{Spec} k[[u,t]] \supset T_1 = \operatorname{Spec} k[[u]]$ (схема определенная уравнением $t = 0$), $O = \operatorname{Spec}(k) \in T_1$, $\mathcal{T} = k[[u,t]]$, $\mathcal{M} = (u,t) \subset \mathcal{T}$.

Определение 29. Геометрические данные (ранга r) — это тройка $(X, j, \mathcal{F})$, где X — неприводимая проективная поверхность,
$$j : T \to X$$
— доминантный k-морфизм, и $\mathcal{F} \subset j_*\mathcal{O}_T$ — квазикогерентный подпучок, удовлетворяющий следующим условиям:

1. $j_*(T_1) = C \subset X$ — кривая[30] (автоматически неприводимая), и через $P = j(O)$ — точку, регулярную в C и в X.
2. $T_1 \times_X \{P\} = \{O\}$, $T \times_X C = rT_1$ (расслоенное произведение здесь — подсхема в T, и rT_1 — эффективный дивизор Картье в T), число r называется рангом тройки $(X, j, \mathcal{F})$.
3. Существует эффективный, очень обильный дивизор Картье $C' \subset X$ с циклом $Z(C') = dC$, и для всех $n > 0$ индуцированное отображение (вложением $\mathcal{F} \subset j_*\mathcal{O}_T$)
$$\begin{aligned} H^0(X, \mathcal{F}(nC')) \to H^0(X, j_*\mathcal{O}_T(nC')) = H^0(T, \mathcal{O}_T(ndrT_1)) = \\ \mathcal{T}t^{-ndr} \to \mathcal{T}t^{-ndr}/\mathcal{M}^{ndr+1}t^{-ndr} \end{aligned} \tag{2}$$
— изоморфизм.

Сложные условия на когомологии значительно упрощаются в случае, когда геометрические данные происходят из спектральных данных колец дифференциальных операторов. Это подробно изложено в главе 5. Далее в главе определяется категория $\mathcal{Q}$ геометрических данных.

[30]Обозначение: для морфизма нетеровых схем $f : X \to Y$ и замкнутой подсхемы $Z \subset X$, через $f_*Z \subset Y$ мы обозначаем замкнутую подсхему, определенную идеалом $\ker(\mathcal{O}_Y \xrightarrow{f^*} f_*\mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_Z)$

Теорема 30 *Категории $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{S}^{op}$ эквивалентны.*

Из теоремы об эквивалентности категорий сразу вытекает следствие о классификации коммутативных k-алгебр операторов в терминах геометрических спектральных данных.

Следствие 31 *Существует взаимно однозначное соответствие между множеством классов эквивалентных 1-квази-эллиптических строго допустимых конечно порожденных коммутативных k-алгебр операторов в $\hat{D}$ и множеством классов изоморфных геометрических данных $\mathcal{M}$.*

Функтор, задающий эквивалентность категорий, а также квази-обратный к нему, строятся вполне конструктивно. Их построению и доказательству этой теоремы посвящена оставшаяся часть главы.

Содержание главы 4

В четвертой главе излагается теория формальных пунктированных лент (риббонов) и пучков без кручения на них.

В разделе 4.1 вводятся определения риббонов и пучков без кручения на них, напоминается конструкция Паршина, строящая по геометрическим спектральным данным пару подпространств $(\mathbb{A}, \mathbb{W})$ в двумерном локальном поле $k((u))((t))$ (другая версия пар Шура, тесно связанная с парами из предыдущей главы), а также ее обобщение на данные, состоящие из риббона и пучка без кручения на нем. В конце раздела доказывается теорема классификации данных, состоящих из риббона, пучка без кручения на нем, и некоторых тривиализаций, в терминах пар $(\mathbb{A}, \mathbb{W})$, а также объясняется связь пар $(\mathbb{A}, \mathbb{W})$ и (A, W).

В разделе 4.1.2 вводятся определения и доказываются общие свойства технического характера. Пусть S — нетерова базисная схема.

Определение 32. Формальная лента, или риббон $(C, \mathcal{A})$ над S состоит из следующих данных.

1. Плоское семейство приведенных алгебраических кривых $\tau : C \to S$.

2. Пучок $\mathcal{A}$ коммутативных $\tau^{-1}\mathcal{O}_S$-алгебр на C.

3. Убывающая фильтрация подпучками $(\mathcal{A}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ пучка $\mathcal{A}$ при помощи $\tau^{-1}\mathcal{O}_S$-подмодулей, которая удовлетворяет следующим аксиомам:

   (a) $\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j \subset \mathcal{A}_{i+j}$, $1 \in \mathcal{A}_0$ (таким образом, $\mathcal{A}_0$ — подкольцо, и для любого $i \in \mathbb{Z}$ пучок $\mathcal{A}_i$ — это $\mathcal{A}_0$-подмодуль);

   (b) $\mathcal{A}_0/\mathcal{A}_1$ — структурный пучок $\mathcal{O}_C$ кривой C;

   (c) для каждого i пучок $\mathcal{A}_i/\mathcal{A}_{i+1}$ (который $\mathcal{A}_0/\mathcal{A}_1$-модуль по (3a)) — это когерентный пучок на C, плоский над S, и для любой точки $s \in S$ пучок $\mathcal{A}_i/\mathcal{A}_{i+1}\mid_{C_s}$ не содержит когерентных подпучков с конечным носителем и изоморфен пучку $\mathcal{O}_{C_S}$ на плотном открытом подмножестве;

(d) $\mathcal{A} = \varinjlim_{i\in\mathbb{Z}} \mathcal{A}_i$, и $\mathcal{A}_i = \varprojlim_{j>0} \mathcal{A}_i/\mathcal{A}_{i+j}$ для каждого i.

Типичный и наиболее важный пример риббона — риббон, возникающий из спектральной поверхности и дивизора. Пусть X — алгебраическая поверхность над полем k, и $C \subset X$ — приведенный эффективный дивизор Картье. Тогда можно следующим образом построить риббон $(C, \mathcal{A})$ над k:

$$\mathcal{A} := \mathcal{O}_{\hat{X}_C}(*C) = \varinjlim_{i\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\hat{X}_C}(-iC) = \varinjlim_{i\in\mathbb{Z}} \varprojlim_{j\geq 0} J^i/J^{i+j}$$

$$\mathcal{A}_i := \mathcal{O}_{\hat{X}_C}(-iC) = \varprojlim_{j\geq 0} J^i/J^{i+j}, \quad i \in \mathbb{Z},$$

где $\hat{X}_C$ — формальная схема, являющаяся пополнением X вдоль C, и J — пучок идеалов, определяющий кривую C на X (пучок J — обратимый пучок).

Далее в этом разделе даются вполне естественные определения морфизма риббонов и замены базы. Способом, аналогичным определению риббона, дается определение *пучка без кручения* на ленте.

В разделе 4.1.3 доказываются технические алгебраические результаты о свойствах когерентности пучков без кручения на риббонах.

В подразделе 4.1.3.1 доказываются технические свойства инд-про-квазикогерентных пучков (пучки с несколько более слабыми свойствами, чем пучки без кручения).

В подразделе 4.1.3.2 исследуются свойства когерентности таких пучков и, в частности, пучков без кручения.

В подразделе 4.1.3.3 вводится определение аналитических риббонов и доказываются для них аналогичные свойства.

В разделе 4.1.4 доказываются технические результаты о пополнении пучков на риббонах. Для этого вводится еще одно важное понятие, используемое в дальнейшем — гладкая точка риббона и пучка без кручения на нем.

По геометрическим данным $(X, j, \mathcal{F})$ из предыдущей главы, где $\mathcal{F}$ — когерентный пучок, каноническим образом строится риббон с пучком без кручения конечного ранга (равного рангу $\mathcal{F}$) с гладкой точкой.

Предложение 33 *По геометрическим данным $(X, j, \mathcal{F})$, где $\mathcal{F}$ — когерентный пучок ранга r (не обязательно совпадающий с рангом данных), каноническим образом строится риббон $(C, \mathcal{A})$ над полем k, пучок без кручения $\mathcal{N}$ ранга r с гладкой точкой P, формальные локальные параметры u', t' и тривиализация $e_P : \hat{\mathcal{N}}_{0,P} \to \hat{\mathcal{A}}_{0,P}^r \simeq k[[u', t']]^r$.*

В разделе 4.1.5 доказывается основной результат раздела 4.1: теорема классификации данных на риббоне в терминах пар $(\mathbb{A}, \mathbb{W})$.

Дадим определения классифицируемых объектов. Сначала определим данные на риббонах.

Определение 34. Пусть $(\overset{\circ}{X}_\infty, \mathcal{N})$, $(\overset{\circ}{X}'_\infty, \mathcal{N}')$ — два риббона над полем k с двумя пучками без кручения ранга r на них. Скажем, что пара $(\overset{\circ}{X}_\infty, \mathcal{N})$ изоморфна паре $(\overset{\circ}{X}'_\infty, \mathcal{N}')$, если существует изоморфизм

$$\varphi \; : \; \overset{\circ}{X}_\infty \longrightarrow \overset{\circ}{X}'_\infty$$

риббонов и изоморфизм

$$\psi \; : \; \mathcal{N}' \to \varphi_*(\mathcal{N})$$

градуированных $\mathcal{A}'$-модулей, т. е. $\psi(\mathcal{N}'_i) = \varphi_*(\mathcal{N}_i)$ и $\psi(ln) = \varphi^\sharp(l)\psi(n)$ для любых сечений $n \in \mathcal{N}'(U)$, $l \in \mathcal{A}'(U)$ над открытым $U \subset C'$.

Определение 35. Рассмотрим следующие геометрические данные $(C, \mathcal{A}, \mathcal{N}, P, u, t, e_P)$, где

- $(C, \mathcal{A})$ — риббон над полем k,
- $\mathcal{N}$ — пучок без кручения ранга r на $(C, \mathcal{A})$,
- $P \in C$ — гладкая k-точка пучка $\mathcal{N}$,
- u, t — формальные локальные параметры риббона в P,
- $e_P : \widetilde{\mathcal{N}}_{0,P} \to \widetilde{\mathcal{A}}_{0,P}^{\oplus r} \simeq k[[u,t]]^{\oplus r}$ — изоморфизм $\widetilde{\mathcal{A}}_{0,P}$-модулей.

Изоморфизм данных определяется естественным образом.

Теперь приведем определение пар $(\mathbb{A}, \mathbb{W})$.

Определение 36. Для k-подпространства $\mathbb{W}$ в $K = k((u))((t))^{\oplus r}$, для $n \in \mathbb{N}$ определим

$$\mathbb{W}(n) = \frac{\mathbb{W} \cap t^n k((u))[[t]]^{\oplus r}}{\mathbb{W} \cap t^{n+1} k((u))[[t]]^{\oplus r}}$$

как k-подпространство в $k((u))^{\oplus r} = \frac{t^n k((u))[[t]]^{\oplus r}}{t^{n+1} k((u))[[t]]^{\oplus r}}$.

k-подпространство $\mathbb{W}$ в $k((u))((t))^{\oplus r}$ называется *обобщенным Фредгольмовым подпространством*, если для любого $n \in \mathbb{Z}$ k-подпространство $\mathbb{W}(n)$ в $k((u))^{\oplus r}$ является Фредгольмовым подпространством.

Определение 37. Пусть k-подалгебра $\mathbb{A}$ в $k((u))((t))$ — обобщенное Фредгольмово подпространство. Пусть k-подпространство $\mathbb{W}$ в $k((u))((t))^{\oplus r}$ — обобщенное Фредгольмово подпространство. Скажем, что $(\mathbb{A}, \mathbb{W})$ — *обобщенная пара Шура*, если $\mathbb{A} \cdot \mathbb{W} \subset \mathbb{W}$.

Основной результат раздела — следующая

Теорема 38 *Обобщенные пары Шура* $(\mathbb{A}, \mathbb{W})$ *находятся во взаимно-однозначном соответствии с данными* $(C, \mathcal{A}, \mathcal{N}, P, u, t, e_P)$ *с точностью до изоморфизма, при этом мы дополнительно предполагаем, что* C *— проективная неприводимая кривая.*

В разделе 4.1.6 вводится понятие «картинных» когомологий — когомологии некоторого комплекса, построенного по паре пространств $(\mathbb{A}, \mathbb{W})$ — и устанавливается связь этих когомологий с когомологиями пучка без кручения на риббоне, построенных по паре $(\mathbb{A}, \mathbb{W})$. В случае, когда риббон и пучок происходят из геометрических спектральных данных, эти когомологии совпадают с когомологиями спектрального пучка на поверхности. Преимуществом этих когомологий является их легкая вычислимость и наглядность. Результаты этого раздела используются в главе 5.

В разделе 4.2 излагаются результаты о группе и о функторе Пикара риббона $\mathrm{Pic}_{\mathring{X}_\infty}$.

В разделе 4.2.1 доказываются основные свойства *функции порядка* $\mathbf{ord}_{\mathcal{A}}$, определенной на структурном пучке риббона. Функция порядка играет важную роль при изучении группы Пикара риббона.

Функция порядка особенно хорошо ведет себя, если выполняется следующее условие.

Определение 39. Скажем, что пучок $\mathcal{A}$ риббона $(C, \mathcal{A})$ удовлетворяет условию (**), если существует покрытие кривой C открытыми аффинными множествами $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$, такое что для любого $\alpha \in I$ существует обратимое сечение $a \in \mathcal{A}_1(U_\alpha) \subset \mathcal{A}(U_\alpha)$ с $a^{-1} \in \mathcal{A}_{-1}(U_\alpha)$.

Условие (**) выполняется, например, для риббонов, приходящих из алгебраической поверхности и дивизора Картье. В этом случае элементы a — локальные уравнения дивизора Картье на поверхности.

Предложение 40 *Предположим, что пучок $\mathcal{A}$ риббона $(C, \mathcal{A})$ удовлетворяет условию (**). Пусть пучок без кручения $\mathcal{N}$ ранга r удовлетворяет следующему условию: пучок $\mathcal{N}_0/\mathcal{N}_1$ локально свободен на C. Тогда пучок $\mathcal{N}$ — локально свободный ранга r на риббоне $(C, \mathcal{A})$.*

В разделе 4.2.2 приведен результат о строении группы Пикара риббона, определенного над артиновым кольцом.

В разделе 4.2.3 определяется функтор Пикара риббона $\mathrm{Pic}_{\mathring{X}_\infty}$, а также функтор Пикара соответствующей ему формальной схемы Pic_{X_∞}, на категории аффинных нетеровых k-схем, и излагаются результаты о формальной группе Пикара и формальной группе Брауэра риббона. Эти результаты используются в следующих разделах, где доказывается глобальная представимость функтора Пикара.

Определение 41. Пусть $\mathcal{B}$ — категория аффинных нетеровых k-схем. Определим контравариантные функторы Пикара $Pic_{\mathring{X}_\infty}$ и Pic_{X_∞} из $\mathcal{B}$ в категорию абелевых групп:

(i) $Pic_{\mathring{X}_\infty}(S) \stackrel{\mathrm{def}}{=} Pic(\mathring{X}_{\infty,S}) = H^1(C_S, \mathcal{A}_S^*)$;

(ii) $Pic_{X_\infty}(S) \stackrel{\mathrm{def}}{=} Pic(X_{\infty,S}) = H^1(C_S, \mathcal{A}_{S,0}^*)$.

В подразделе 4.2.3.1 доказывается предложение технического характера о касательном пространстве к функторам Пикара в нуле.

В подразделе 4.2.3.2 доказывается предложение технического характера о формальной группе Брауэра алгебраической поверхности. По существу, это упрощенный вариант для поля характеристики 0 результата Артина и Мазура [31] о пропредставимости функтора $\widehat{Br}_X$.

В подразделе 4.2.3.3 доказывается предложение технического характера о формальной группе Брауэра риббона.

В подразделе 4.2.3.4 доказывается предложение технического характера о формальной группе Пикара риббона.

В разделе 4.2.4 доказывается теорема об обращении в ноль, необходимая для теорем представимости в следующих разделах.

Теорема 42 *Пусть $\pi : X \to S$ — собственный морфизм схем, слои которого неприводимы. Тогда $R^1\pi_*\mathbb{Z} = 0$.*

В разделе 4.2.5 доказываются результаты о представимости функтора Pic_{X_∞}.

Определение 43. Обозначим через $\mathbf{Pic}_{X_\infty}$ пучок на большом сайте Зарисского схемы $\mathrm{Spec}\, k$, ассоциированный с предпучком $S \mapsto Pic_{X_\infty}(S)$.

Нетрудно видеть, что для любой нетеровой схемы S

$$\mathbf{Pic}_{X_\infty}(S) = H^0(S, R^1\pi_*\mathcal{A}^*_{S,0}),$$

где $\pi : C \times_k S \to S$ — морфизм проекции.

Основным результатом раздела является следующее предложение.

Предложение 44 *Пусть $\mathring{\mathrm{X}}_\infty = (C, \mathcal{A})$ — риббон над алгебраически замкнутым полем k характеристики 0, и C — неприводимая проективная кривая. Тогда*

1. *Пучок $\mathbf{Pic}_{X_\infty}$ — групповая схема.*

2. *Имеется следующая точная последовательность групповых схем:*

$$0 \longrightarrow \mathbb{V} \longrightarrow \mathbf{Pic}_{X_\infty} \xrightarrow{\phi} \mathbf{Pic}_C \longrightarrow 0, \tag{3}$$

   где $\mathbb{V}$ — аффинная групповая схема, и $\mathbf{Pic}_C$ — многообразие Пикара кривой C, чья связная компонента единицы — обобщенный якобиан кривой C. Существует сечение отображения ϕ из последовательности (3) над любой аффинной подсхемой U схемы $\mathbf{Pic}_C$.

В разделе 4.2.6 доказываются основные результаты о представимости функтора Пикара риббона $\mathrm{Pic}_{\mathring{X}_\infty}$. Эти результаты доказываются при дополнительных условиях на риббоны. А именно, предполагается, что рассматриваются риббоны над полем k с неприводимой проективной кривой C и либо с гладкой точкой, либо

[31] Artin, M., Mazur, B. *Formal groups arising from algebraic varieties*, Ann. Sci. Ec. Norm. Super. (4) 10, 87-132 (1977).

удовлетворяющие условию (**). В этом же разделе определяются важные дополнительные функторы- аналоги функтора Пикара, и доказывается их представимость.

Определим пучок групп на $C \times_k S$ по правилу:

$$\Im_S \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Ker}\,(\mathbf{ord}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A}_S^* \to \mathbb{Z}_{C\times_k S}) = \mathcal{A}_{S,0}^* \coprod_{\mathcal{N}_S \boxtimes_k \mathcal{A}_0} \mathcal{N}_S \boxtimes_k \mathcal{A}, \qquad (4)$$

где $\mathcal{N}_S$ обозначает нильрадикал.

Определение 45. Определим контравариантный функтор $\widetilde{Pic}_{\overset{\circ}{X}_\infty}$ из $\mathcal{B}$ в категорию абелевых групп:

$$\widetilde{Pic}_{\overset{\circ}{X}_\infty}(S) \stackrel{\text{def}}{=} H^1(C \times_k S, \Im_S),$$

где отображения ограничения — композиции естественных отображений

$$H^1(C \times_k S, \Im_S) \to H^1(C \times_k S, (id \times f)_*(\Im_{S'})) \to H^1(C \times_k S', \Im_{S'}),$$

где второе отображение — вложение из спектральной последовательности Картана-Лере для морфизма $f : S' \to S$.

Определение 46. Обозначим через $\widetilde{\mathbf{Pic}}_{\overset{\circ}{X}_\infty}$ пучок на большом сайте Зарисского схемы $\mathrm{Spec}\, k$, ассоциированный с предпучком $S \mapsto \widetilde{Pic}_{\overset{\circ}{X}_\infty}(S)$.

Аналогично, обозначим через $\mathbf{Pic}_{\overset{\circ}{X}_\infty}$ пучок на большом сайте Зарисского схемы $\mathrm{Spec}\, k$, ассоциированный с предпучком $S \mapsto Pic_{\overset{\circ}{X}_\infty}(S)$.

Имеем:

$$\widetilde{\mathbf{Pic}}_{\overset{\circ}{X}_\infty}(S) = H^0(S, R^1\pi_*\Im_S) \qquad , \qquad \widetilde{\mathbf{Pic}}_{\overset{\circ}{X}_\infty}(S) = H^0(S, R^1\pi_*\mathcal{A}_{S,}^*),$$

где $\pi : C \times_k S \to S$ — морфизм проекции.

Теорема 47 *Пусть* $\overset{\circ}{\mathrm{X}}_\infty$ *— риббон, удовлетворяющий условиям, сформулированным в начале раздела. Предположим, что*

$$\mathrm{Coker}(H^0(C, \mathcal{A}) \longrightarrow H^0(C, \mathcal{A}/\mathcal{A}_0)) = \mathcal{H}^1(\mathbb{A}) = 0. \qquad (5)$$

Тогда пучок $\widetilde{\mathbf{Pic}}_{\overset{\circ}{\mathrm{X}}_\infty}$ *— формальная групповая схема, которая изоморфна (неканонически) произведению* $\mathbf{Pic}_{X_\infty} \times_k \widehat{\mathbf{Br}}_{\overset{\circ}{\mathrm{X}}_\infty}$.

Условие 5 из теоремы 47 не является слишком ограниченным: оно выполняется, например, для риббонов, происходящих из нормализаций спектральных поверхностей колец коммутирующих ДО.

Теорема 48 *Пусть* $\overset{\circ}{\mathrm{X}}_\infty$ *— риббон из предыдущей теоремы. Предположим дополнительно, что он происходит из проективной поверхности и дивизора Картье* C *с* $(C \cdot C) \neq 0$. *Тогда следующая последовательность пучков точна:*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \widetilde{\mathbf{Pic}}_{\overset{\circ}{\mathrm{X}}_\infty} \longrightarrow \mathbf{Pic}_{\overset{\circ}{\mathrm{X}}_\infty} \longrightarrow 0,$$

и $Pic_{\overset{\circ}{\mathrm{X}}_\infty}$ *— формальная групповая схема, (неканонически) изоморфная*

$$(\coprod_{i=1}^{|(C\cdot C)|} \mathbf{Pic}^0_{X_\infty}) \times_k \widehat{\mathbf{Br}}_{\overset{\circ}{\mathrm{X}}_\infty}.$$

Содержание главы 5

В пятой главе изложены результаты об общих геометрических свойствах данных $(X, j, \mathcal{F})$, а также о необходимых условиях, выделяющих среди них спектральные данные алгебр коммутирующих дифференциальных операторов в частных производных. В конце главы доказываются теоремы о преобразованиях Дарбу алгебр ДО с рациональной спектральной поверхностью и о пополнении аффинной плоскости.

Глава начинается с общих замечаний в разделе 5.1.

В разделе 5.2 изучаются свойства поверхности X.

Теорема 49 *Пусть X, C — поверхность и дивизор из геометрических данных $(X, j, \mathcal{F})$. Тогда X Коэно-Маколеева всюду кроме конечного числа точек, не лежащих на C.*

Оказывается, однако, что кольцо коммутирующих операторов в $\hat{D}$ всегда можно увеличить, так что X будет Коэно-Маколеевой всюду. Это следует из теоремы классификации геометрических данных в терминах пар Шура и следующей теоремы.

Теорема 50 *Пусть (A, W) — пара Шура ранга r, причем W — конечно порожденный A-модуль. Тогда $(CM(A), W)$ — тоже пара Шура ранга r.*

В частности, если (A, W) соответствует кольцу $B \subset D$ дифференциальных операторов в частных производных, то пара $(CM(A), W)$ также соответствует кольцу дифференциальных операторов в частных производных, которое будет Коэно-Маколеевым. Соответствующая паре $(CM(A), W)$ проективная поверхность X также Коэно-Маколеева.

В конце раздела напоминается общая конструкция Ферранда [32] о склейке замкнутых подсхем, и некоторое ее упрощение для проективных поверхностей. Оказывается, что всякая Коэно-Маколеева спектральная поверхность получается при помощи этой конструкции из своей нормализации. Нормализации спектральных поверхностей, или *нормальные формы*, — интересный объект для дальнейших исследований. Из условий на спектральные поверхности следует, что далеко не всякая нормальная поверхность может быть спектральной.

В разделе 5.3 изучаются свойства спектрального пучка $\mathcal{F}$. Он начинается с почти очевидного предложения о сравнении геометрических спектральных данных из главы 2 и геометрических данных $(X, j, \mathcal{F})$ главы 3.

Предложение 51 *Пусть $B \subset D$ — кольцо коммутирующих ДО, удовлетворяющее условиям теоремы из главы 2 и следствия 31 главы 3. Тогда тройка $(X, C, \mathcal{L})$ из теоремы главы 2 изоморфна тройке $(X, C, \mathcal{F})$ (части геометрических данных) следствия 31. В частности, пучок $\mathcal{F}$ когерентен. В этом случае также имеет место равенство*

$$\mathrm{rk}(\mathcal{F})(C^2) = \delta^2 = r^2,$$

где r — ранг данных $(X, j, \mathcal{F})$.

[32] Ferrand D., *Conducteur, descente et pincement*, Bull. Soc. math. France, 131 (4), 2003, p.553-585.

Непосредственным следствием теоремы 49 является

Предложение 52 *Если пучок $\mathcal{F}$ геометрических данных $(X, j, \mathcal{F})$ когерентен, то он Коэно-Маколеев вдоль кривой C. В частности, $\mathcal{F}_P$ является свободным $\mathcal{O}_P$-модулем.*

Оказывается, что ранг пучка $\mathcal{F}$ (в случае когда он когерентен) всегда больше либо равен рангу данных $(X, j, \mathcal{F})$. Равенство рангов — особо хороший случай, который описывается следующим критерием.

Предложение 53 *Пусть $(X, j, \mathcal{F})$ — геометрические данные ранга r. Пучок $\mathcal{F}$ — когерентный пучок ранга r тогда и только тогда, когда индекс самопересечения дивизора $(C^2) = r$.*

Для дальнейшего изучения свойств спектральных пучков, а также для построения явных примеров спектральных данных и соответствующих им колец коммутирующих операторов определяется расширение функтора, строящего по геометрическим данным соответствующую им пару Шура, на более широкий класс пучков. Пусть X, j, C, C', P — фиксированная часть геометрических данных (по ним строится кольцо A пары Шура). Тогда для любых пучков без кручения на X, для которых дополнительно определено вложение $\mathcal{O}_P$-модулей $\mathcal{F}_P \hookrightarrow k[[u,t]]$, определяются пространства $W, W_n, \tilde{W} = \oplus_{i=0}^{\infty} W_n$. Для всех таких пучков определяется отображение «ограничения»

$$\zeta : \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_0/\mathcal{F}_{-1}, \quad \mathcal{F}_i = \mathrm{Proj}(\tilde{W}(i))$$

из множества пучков без кручения на X в множество пучков без кручения на кривой C. Оказывается, что для некоторого класса пучков: например, для пучков без кручения ранга один, локально свободных в точке P, или для когерентных пучков ранга r (где r совпадает с рангом данных), имеются изоморфизмы $H^0(X, \mathcal{F}(nC')) \simeq W_{nd}$ и $\zeta(\mathcal{F}) \simeq i^*(\mathcal{F})$, где $i : C \hookrightarrow X$ — отображение вложения.

С помощью этих технических конструкций доказываются следующие необходимые условия на геометрические спектральные данные.

Теорема 54 *Пусть $(X, j, \mathcal{F})$ — геометрические данные, соответствующие коммутативному кольцу ДО $B \subset D$, удовлетворяющему условиям теоремы из главы 2 и следствия 31 главы 3.*

Тогда $\mathcal{F}$ — Коэно-Маколеев пучок на X.

Для вывода дальнейших условий сравниваются пары (A, W) и $(\mathbb{A}, \mathbb{W})$ ранга 1 и используются некоторые результаты главы 4.

Теорема 55 *Пусть (A, W) — пара Шура, соответствующая геометрическим данным $(X, j, \mathcal{F})$, где X — Коэно-Маколеева поверхность, а $\mathcal{F}$ — когерентный пучок ранга 1. Пусть $(\mathbb{A}, \mathbb{W})$ — пара, соответствующая данным на риббоне, построенным по данным $(X, j, \mathcal{F})$. Тогда*

- $$A = \mathbb{A} \cap k[[u]]((t)), \quad W = \mathbb{W} \cap k[[u]]((t)).$$

- $\mathcal{H}^i(\mathbb{W}) \simeq H^i(X, \mathcal{F})$, $i = 0, 1, 2$; $H^1(X, \mathcal{F}) = H^2(X, \mathcal{F}) = 0$,

$$\chi(X, \mathcal{F}(nC')) = \frac{(nd+1)(nd+2)}{2}.$$

В частности, геометрические данные $(X, j, \mathcal{F})$ однозначно восстанавливаются по соответствующим им данным на риббоне.

Следствие 56 *Пусть $(X, j, \mathcal{F})$ — геометрические данные, соответствующие максимальному коммутативному кольцу $B \subset D$ ранга 1.*

Тогда

- *X — Коэно-Маколеева поверхность,*
- *C — обильный рациональный $\mathbb{Q}$-Картье дивизор с $(C^2) = 1$,*
- *$\mathcal{F}$ — Коэно-Маколеев пучок с*

$$\chi(X, \mathcal{F}(nC')) = \frac{(nd+1)(nd+2)}{2},$$
$$H^0(C, \zeta(\mathcal{F}_k)(-(k+1)P)) = H^1(C, \zeta(\mathcal{F}_k)(-(k+1)P)) = 0,$$

где $0 \le k < d$, и $\mathcal{F}|_C \simeq n_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$, где $n : \mathbb{P}^1 \to C$ — морфизм нормализации. Кроме того, такой пучок не является прямым образом пучка с аналогичными свойствами на конечном накрытии X.

Ответ на вопрос о том как строить геометрические данные, дается следующей теоремой.

Теорема 57 *Пусть $\mathcal{F}$ — когерентный пучок без кручения ранга один на проективной поверхности X, определенной над несчетным алгебраически замкнутым полем k. Предположим, что существует обильный неприводимый $\mathbb{Q}$-Картье дивизор $C \subset X$, не содержащийся в сингулярном локусе и такой что $C^2 = 1$. Пусть $C' = dC$ — очень обильный дивизор Картье. Предположим, что выполняются следующие условия:*

$$\chi(X, \mathcal{F}(nC')) = \frac{(nd+1)(nd+2)}{2},$$
$$H^0(C, \zeta(\mathcal{F}_k)(-(k+1)Q)) = H^1(C, \zeta(\mathcal{F}_k)(-(k+1)Q)) = 0$$

для гладкой точки $Q \in C$, $n \ge 0$, где $0 \le k < d$. Тогда

i) существует морфизм $j : T \to X$ с $j(O) = P \in C \backslash (C^{sing} \cup X^{sing})$ и $j^{-1}(C) = T_1$ (т.е. $\mathcal{T} = k[[u,t]] \simeq \hat{\mathcal{O}}_{X,P}$, $\mathcal{T}/t\mathcal{T} \simeq \hat{\mathcal{O}}_{C,P}$), такой что для некоторого выбора порождающей $\mathcal{O}_{X,P}$-модуля $\mathcal{F}_P$ вложение $\mathcal{F} \hookrightarrow j_*\mathcal{O}_T$ (соответствующее изоморфизму $(j^*\mathcal{F})_O = \mathcal{T} \otimes_{\mathcal{O}_{X,P}} \mathcal{F} \simeq \hat{\mathcal{F}}_P$) удовлетворяет условию 3 определения геометрических данных, т.е. отображения $H^0(X, \mathcal{F}(nC')) \to \mathcal{T} \cdot t^{-nd}/\mathcal{M}^{nd+1} \cdot t^{-nd}$ — изоморфизмы;

ii) пучок $\mathcal{F}$ Коэно-Маколеев;

В разделе 5.4 изложены некоторые следствия теории: результаты о преобразованиях Дарбу колец дифференциальных операторов с рациональной спектральной поверхностью, и о пополнении аффинной плоскости.

Теорема о пополнении получается в этом разделе с помощью конструкции обобщенного отображения Кричевера-Паршина.

Теорема 58 *Пусть X — проективная поверхность, $C \subset X$ — целый дивизор Вейля, не содержащийся в сингулярном локусе X, являющийся также обильным $\mathbb{Q}$-Картье дивизором, и $C^2 = 1$. Предположим, что $X \backslash C \simeq \mathbb{A}^2$.*

Тогда $X \simeq \mathbb{P}^2$, $C \simeq \mathbb{P}^1$.

Теорема о преобразовании Дарбу является естественным обобщением подобной теоремы в размерности один. Преобразование Дарбу как метод использовался в работе [33] для построения новых нетривиальных примеров коммутативных колец ДО.

Теорема 59 *Пусть $B \subset D$ — коммутативное кольцо ранга $\mathbf{rk}(B) = 1$, удовлетворяющее свойствам теоремы главы 2. Предположим, что нормализация $\mathrm{Spec}(B)$ изоморфна $\mathbb{A}^2$.*

Тогда существует дифференциальный оператор F, такой что $F^{-1}BF \subset k[\partial_1, \partial_2]$.

А именно, $F = S\partial_2^n$, где S — оператор как в аналоге теоремы Сато.

Содержание главы 6

Шестая глава посвящена разбору уже известных примеров коммутирующих ДО и коммутирующих разностных операторов с точки зрения новой теории, построению новых примеров коммутирующих операторов в пополненном кольце, а также исследованию их деформаций, описываемых модификациями двумерных аналогов иерархии КП.

В разделе 6.1 обсуждается достаточно очевидный, но широкий класс примеров. Эти примеры получаются, например, из примеров коммутативных колец обыкновенных дифференциальных операторов (скажем, от переменной x_2) добавлением дифференцирования по другой переменной (скажем, ∂_1), которая, очевидно, коммутирует со всеми операторами в исходном кольце. Обобщая это наблюдение, мы называем коммутативные алгебры в $\hat{D}$, содержащие ∂_1, *тривиальными*. Геометрические данные «тривиальных» алгебр описываются следующим критерием.

Теорема 60 *Пусть $B \subset \hat{D}$ — конечно порожденное 1-квазиэллиптическое вполне допустимое кольцо Коэно-Маколея коммутирующих операторов.*

Тогда B содержит ∂_1 если и только если дивизор C соответствующих геометрических данных — дивизор Картье, пучок $\mathcal{F}$ когерентен ранга один, $\mathcal{O}_C(C) \simeq$

[33] Yu. Berest, A. Kasman *D-modules and Darboux transformations*, Lett. Math. Phys., 43, 3, 1998, 279–294

$\mathcal{O}_C(P)$, *и отображение*

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) \to H^1(X, \mathcal{O}_X(C))$$

инъективно.

Более того, если основное поле k несчетно и алгебраически замкнуто, то пучок $\mathcal{F}$ Коэно-Маколеев на X.

В разделе 6.2 разбираются примеры поверхностей с дивизором и точкой, для которых можно явно вычислить все возможные геометрические данные ранга один с данной поврехностью и дивизором, соответствующие пары Шура и соответствующие алгебры коммутирующих операторов в $\hat{D}$. Заодно получаются примеры поверхностей, которые не могут быть спектральными поверхностями максимальных колец *дифференциальных* операторов.

В разделе 6.3 определяются модифицированные системы Паршина, а в конце раздела приводится пример геометрических данных, построенных по паре Шура, соответствующие им коммутирующие операторы в $\hat{D}$, пример модифицированной системы, определяющей деформации операторов, некоторые ее уравнения — аналоги уравнения КдФ из классической теории КП, а также точные решения — аналог рациональных решений уравнения КдФ (эта система определяет также деформации ряда других «тривиальных» алгебр, а также определяет потоки на пространстве модулей Коэно-Маколеевых пучков ранга один с фиксированным полиномом Гильберта на спектральной поверхности таких алгебр).

Работы автора по теме диссертации

1. А. Б. Жеглов, “О диких алгебрах с делением над полями степенных рядов”, *Матем. сб.*, **195**:6 (2004), 21–56.

2. А. Б. Жеглов, Д. В. Осипов, “О некоторых вопросах, связанных с соответствием Кричевера”, *Матем. заметки*, **81**:2 (2007), 528–539.

3. А. Б. Жеглов, Д. В. Осипов, “Высшие иерархии КП и проколотые ленты”, *Современные проблемы математики и механики*, **3** - Математика, Издательство Моск. Ун-та МГУ, 2009, 15–35.

4. H. Kurke, D. Osipov, A. Zheglov, “Formal punctured ribbons and two-dimensional local fields”, *Journal fuer die Reine und Angewandte Mathematik*, **629** (2009), 133–170.

5. H. Kurke, D. Osipov, A. Zheglov, “Formal groups arising from formal punctured ribbons”, *International Journal of Mathematics*, **21**:6 (2010), 755–797.

6. А. Б. Жеглов, “О кольцах коммутирующих дифференциальных операторов”, *Алгебра и Анализ*, **25**:5 (2013), 86–145.

7. А. Б. Жеглов, А. Е. Миронов, “Модули Бейкера–Ахиезера, пучки Кричевера и коммутативные кольца дифференциальных операторов в частных производных”, *Дальневосточный математический журнал*, **12**:1 (2012), 20–34.

8. H. Kurke, D. Osipov, A. Zheglov, “Commuting differential operators and higher-dimensional algebraic varieties ”, *Selecta Mathematica, New Series*, **20**:4 (2014), 1159–1195.

9. А. Б. Жеглов, А. Е. Миронов, “О коммутирующих дифференциальных операторах с полиномиальными коэффициентами, отвечающих спектральным кривым рода один”, *Доклады Академии наук*, **91**:3 (2015), 281–282.

10. А. Б. Жеглов, Х. Курке, “Геометрические свойства коммутативных подалгебр дифференциальных операторов в частных производных”, *Матем. Сб.*, **206**:5 (2015), 676–717.

11. A. Zheglov, A. Mironov, “Commuting ordinary differential operators with polynomial coefficients and automorphisms of the first weyl algebra”, *International Mathematics Research Notices*, (2015), DOI: 10.1093/imrn/rnv218

Подписано в печать 24.06.2016

Тираж 100 экз.

Отпечатано в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН

Москва, 119991, ул. Губкина, 8