Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 517.98

Цылин Иван Вячеславович

ФУНКЦИОНАЛЬНО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ К ВОПРОСУ О РЕГУЛЯРНОСТИ РЕШЕНИЙ ВАРИАЦИОННЫХ И КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

**диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук**

Москва, 2016

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:
СТЕПИН Анатолий Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории функций и функционального анализа механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» (специальность – 01.01.01)

Официальные оппоненты:
БУРЕНКОВ Виктор Иванович - доктор физико-математических наук, профессор, и.о. заведующего кафедрой математического анализа и теории функций ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов» (специальность – 01.01.01)

ФЕДОРОВСКИЙ Константин Юрьевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики факультета фундаментальных наук ФГБОУ ВПО «Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана» (специальность – 01.01.01)

Ведущая организация:
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых"

Защита состоится 26 мая 2016 г. в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 002.022.01 при Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской академии наук по адресу: 119991, Москва, ул. Губкина, д.8 конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук и на сайте

http://www.mi.ras.ru/dis/ref16/tsilin/dis.pdf

Автореферат разослан марта 2016 г.

Ученый секретарь
Диссертационного совета Д 002.022.01
доктор физико-математических наук

В.А. Ватутин

Общая характеристика работы

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Настоящая диссертация посвящена применению методов функционального анализа и теории функций к вопросу регулярности решений вариационных и краевых задач в областях (с нелипшицевой границей) на многообразии. В качестве модельной может служить задача поиска связи между гладкостью решений краевой задачи

$$-\operatorname{div}(\boldsymbol{A}\nabla u + \boldsymbol{a}u) + \boldsymbol{b}\nabla u + cu = f \ \text{ в } \ \Omega; \quad u = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega \qquad (D)$$

и регулярностями правой части f и границы Ω, в случае оператора Лапласа–Бельтрами, возмущенного младшими членами.

Уравнения такого типа являются классическим объектом исследований в функциональном анализе и математической физике; в свою очередь результаты о повышенной гладкости решений используются при численном моделировании решений таких уравнений [20].

Один из первых результатов в этом направлении [29] утверждает, что решение u принадлежит $H^2_{loc}(\Omega)$, если коэффициенты оператора класса C^1 и $f \in L_2(\Omega)$. Затем, L. Lions и M. Magenes [26] установили, что $u \in H^2(\Omega)$ при дополнительном предположении о выпуклости Ω или выполнении равномерного условия шара для границы Ω. В начале 1990-ых был обнаружен невыпуклый многогранник [24], для которого утверждение выше не имеет места. Таким образом, даже если $\partial\Omega$ липшицева, то пространства Соболева целой гладкости не могут быть использованы для измерения гладкости решений. Поэтому, необходимо перейти к формулированию результатов о регулярности в терминах пространств обобщенной гладкости (типа Соболева). D. Jerison и C. E. Kenig [23] для оператора Лапласа, в случае областей с липшицевой границей, установили повышенную гладкость типа $u \in H^{1+s/2}(\Omega)$, если $f \in H^{-1+s/2}(\Omega)$, $s \in (0, 1)$. Техника авторов не допускала обобщение на случай переменной матрицы $\boldsymbol{A}$.

Новым импульсом к исследованиям регулярности решений таких задач послужили статьи S. Dahlke, R.A. DeVore [17] и G. Savaré [31], вышедшие в конце 1990-ых. Так во второй работе было установлено, что заключение вышеприведенной теоремы D. Jerison'a и C. E. Kenig'a имеет место, если $\boldsymbol{A} \in C^{0,1}(\Omega)$, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \equiv 0$, $c \equiv 0$ и граница Ω локально представима в виде графика липшицевой функции. Эта работа G. Savaré стимулировала появление в 2000-ых годах серии новых результатов о разрешимости и регулярности решений вариационных и краевых задач [5, 18]. С теми из них, которые относятся к краевым задачам, можно ознакомиться по недавней монографии М.С. Аграновича [6].

В случае областей с гельдеровой границей, исследования регулярности решений сталкивается с целым рядом трудностей: 1) Отсутствует оператор продолжения типа В. Рычкова [30] функций с Ω на все многообразие с сохранением обобщенной гладкости, 2) Существуют различные подходы [21] к определению пространств обобщенной гладкости в областях с нелипшицевой границей (тем более, в случае областей на многообразиях), 3) Отсутствуют утверждения о вещественной интерполяции пространств, определенных на областях с негладкой границей.

Для получения результатов о регулярности решений рассматриваемых задач, в случае областей с гельдеровой границей, представляется перспективным преодолеть отмеченные трудности, воспользовавшись разностной техникой (ср. [31]) и методами теории функций и функционального анализа.

Другой способ (по сравнению с использующим разностную технику и теорию интерполяции) получения утверждений о повышенной гладкости решений задачи (D) был предложен (2002 г) для уравнения Пуассона в работе G. Savaré и G. Schimperna [32]. Ими было отмечено, что эффект повышения гладкости решения тесно связан с количественными оценками резольвентной непрерывности при вариации области Ω.

Понятие резольвентной сходимости последовательности операторов, действующих в банаховых пространствах, было введено в 1950-ых годах (под названием "обобщенная сходимость операторов") в работах В.П. Маслова [9] и J.D. Newburgh [28]. С середины 1960-ых за данным типом сходимости закрепилось название сходимости в смысле раствора (по истории вопроса, см. монографию Като [25]). Сходимость в смысле раствора измеряет расстояние между пересечениями графиков операторов $T_s : X \to Y$ и единичной сферы $S \subset X \times Y$, и совпадает со сходимостью в равномерной операторной топологии, если T_s – ограниченные операторы. Если же операторы T_s неограничены, $X = Y$, и резольвентные множества T_s содержат общую точку λ, то сходимость в смысле раствора имеет место тогда и только тогда, когда операторы $(T_s - \lambda I)^{-1}$ сходятся по операторной норме.

Как оказалось, наиболее удобным инструментом для работы с резольвентной сходимостью в $L_2(\Omega)$ (применительно к модельной задаче) является эквивалентная ей сходимость U. Mosco [27].

На протяжении 1990-ых в работах D.Bucur, J.-P. Zolesio [14, 13] (подробно см. обзор D. Bucur и G. Buttazzo [13]) исследовались необходимые и достаточные условия на класс варьируемых (по метрике Хаусдорфа) областей Ω, обеспечивающие равномерную резольвентную сходимость. Теоремы в этих работах утверждали лишь сам факт сходимости, не раскрывая количественной оценки.

Что касается исследования количественных оценок резольвентной сходимости, при возмущении коэффициентов оператора, то ему были посвящены работы (список ссылок и историю вопроса можно найти в обзоре A. Henrot [22], отдельно отметим работу G. Barbatis [11]), написанные главным образом в 1980-1990-ых годах.

Однако резольвентная непрерывность при возмущении области привлекла внимание исследователей лишь во второй половине 2000-ых (например, резольвентной непрерывности такого вида посвящена PhD работа E. Feleqi [19], защищенная в 2010 году), а бурное развитие получила уже в 2010-ых (см., например работы В. И. Буренкова, E. Feleqi, P.D. Lamberti, G. Barbatis [12, 15]). Автор диссертации использует оценки резольвентной непрерывности как при возмущении области, так и при возмущении коэффициентов. При этом, интерес представляет не только получение новых оценок, но и их применение к задаче о повышении гладкости решений.

Цель работы. Получить оценки модуля резольвентной непрерывности краевых задач Дирихле для оператора Лапласа–Бельтрами, возмущенного младшими членами, в областях с нелипшицевой границей. Извлечь из резольвентной непрерывности факт повышения гладкости решений задачи в невозмущенной области для достаточно регулярных правых частей.

Для вариационных и краевых задач изучить связь между показателями гладкости границы области, суммируемостью коэффициентов, регулярностью правой части и гладкостью решения, в случае областей на многообразии, границы которых локально представимы в виде графика функции с условием Гельдера.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Получены оценки модуля резольвентной непрерывности первой краевой задачи для оператора Лапласа–Бельтрами относительно малой (по метрике Хаусдорфа–Помпейю) вариации области в классе тех, граница которых локально представима в виде графика непрерывной функции;

2. Для широкого класса вариационных и краевых задач изучена взаимосвязь регулярности правых частей и гладкости решений в случае областей с гельдеровой границей. При этом краевые задачи рассматриваются в случае операторов с коэффициентами из пространств Бесова функций негативной гладкости;

3. Для операторов ассоциированных с секториальными формами и соответствующих краевых задач изучена связь резольвентной непрерывности таких задач и свойства повышения гладкости их решений;

4. Предложен новый подход к установлению стабильности спектра операторов.

Методы исследования. В работе используются методы теории пространств Никольского–Бесова и Соболева–Слободецкого, теории вещественной интерполяции, теории дифференцирования в бесконечномерных пространствах, а также теории возмущений линейных операторов.

Теоретическая и практическая ценность. Работа имеет теоретический характер. Ее результаты и методы, развитые для их получения, могут быть использованы в теории возмущения, спектральной теории, теории граничных задач.

Апробация диссертации. Автор выступал с докладами по теме диссертации на следующих семинарах:

- «Динамические системы и дифференциальные уравнения», МГУ, руководители: академик РАН Д.В. Аносов, проф. А.М. Степин (2013);
- «Асимптотические методы в уравнениях математической физики», МГУ, руководители: проф. В.В. Жиков, проф. Е.В. Радкевич, проф. А.С. Шамаев, проф. Т.А. Шапошникова (2013);
- «Дифференциальные уравнения и динамические системы», МГУ, руководители: проф. А.М. Степин, проф. А.А. Давыдов (2014–2015);
- «Бесконечномерный анализ и математическая физика», МГУ, руководители: проф. О.Г. Смолянов, проф. Е.Т. Шавгулидзе, д.ф.-м.н. Н.Н. Шамаров (2014);
- «Функциональный анализ и его приложения», РУДН, руководитель: проф. В.И. Буренков (2015);
- Научно-исследовательский семинар по теории функций многих действительных переменных и ее приложениям к задачам математической физики (семинар Никольского), МИАН, под руководством член-корр. РАН О.В. Бесова (2015);
- Научно-исследовательский семинар по теории функций под руководством академика РАН Б.С. Кашина, член-корр. РАН, проф. С.В. Конягина, проф. М.И. Дьяченко, проф. Б.И. Голубова (2015);
- Научно-исследовательский семинар по теории приближений аналитическими функциями, МГУ, руководители: проф. П.В. Парамонов, д.ф.-м.н. К.Ю. Федоровский (2015);

- Совместное заседание научно-исследовательских семинаров кафедры математического анализа и теории функций и кафедры нелинейного анализа и оптимизации, РУДН, руководители: проф. А.В. Арутюнов, проф. В.И. Буренков (2015);

- «Дифференциальные и функционально-дифференциальные уравнения», РУДН, руководитель: проф. А.Л. Скубачевский (2016);

- «Операторные модели в математической физике», МГУ, руководители: проф. А.А. Шкаликов, проф. И.А. Шейпак, доц. А.М. Савчук, А.А. Владимиров (2016).

Содержащиеся в диссертации результаты докладывались на следующих конференциях:

- Всероссийская конференция «Дифференциальные уравнения и их приложения» (г. Самара, 2013);

- Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (г. Суздаль, 2014);

- Юбилейная научная конференция «Ломоносовские чтения–2015», посвященная 260-летию Московского университета (г. Москва, 2014);

- XXII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2015» (г. Москва, 2015);

- Международная конференция по функциональным пространствам и теории приближения функций, посвященная 110-летию со дня рождения академика С.М. Никольского (г. Москва, 2015);

- Международная конференция по математической теории управления и механике (г. Суздаль, 2015);

- Международная научная конференция «Теория приближений функций и родственные задачи анализа», посвященная памяти профессора П.П. Коровкина (г. Калуга, 2015).

Публикации. Основные результаты диссертации изложены в 4 статьях, 3 из которых опубликованы в научных журналах из списка, рекомендованного ВАК.

Личный вклад автора. Изучать краевые задачи для оператора Лапласа–Бельтрами в областях с нелипшицевыми границами на многообразиях, используя резольвентную непрерывность краевых задач относительно деформации области, предложена диссертанту научным руководителем. Подготовка к публикации результатов статьи [3] проводилась совместно с А.М. Степиным. Основные результаты диссертации получены лично автором.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы из 40 наименований. Общий объем диссертации составляет 99 страниц.

Краткое содержание диссертации

Во **введении** обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована ее цель и аргументирована научная новизна исследований, представлены выносимые на защиту научные положения.

Пусть (M, g) — гладкое связное компактное риманово d-мерное многообразие без края, $M_O := M\backslash\bar{O}$, $O \subset M$ — фиксированное непустое открытое множество с гладкой границей, $\Omega \subset M_O$ — область, $\boldsymbol{A}$ — эрмитово сечение $T^2_{\mathbb{C}}M$ расслоения, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ — векторные поля на M, c — комплекснозначная функция на M. Для оператора

$$\mathcal{A}u = -\operatorname{div}(\boldsymbol{A}\nabla u + \boldsymbol{a}u) + \boldsymbol{b}\nabla u + cu$$

рассматриваются первая краевая задача

$$\mathcal{A}u = f \ \text{ в } \Omega; \ \ u = 0 \ \text{ на } \partial\Omega, \tag{1}$$

и, в случае $\boldsymbol{a} \equiv \overline{\boldsymbol{b}}$, $\operatorname{Im} c \equiv 0$, соответствующая спектральная задача

$$\mathcal{A}u = \lambda u \ \text{ в } \Omega; \ \ u = 0 \ \text{ на } \partial\Omega.$$

Глава 1 посвящена получению оценок сходимости резольвент оператора $\mathcal{A}$ при возмущении границы области Ω, если $\partial\Omega$ локально представима в виде графика непрерывной функции, $\boldsymbol{A} \in C^{0,1}(M)$, $\boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{b} \equiv 0$,

$c \equiv 0$. Также обсуждается корректность задачи (1) в случае, если коэффициенты оператора $\mathcal{A}$ удовлетворяют достаточно общим условиям регулярности. Излагается новый подход к описанию стабильности спектра.

Для открытого множества $A \subset M$ и чисел $k, l \in \mathbb{Z}_+$ вводится пространство Лебега $L_p(A, \mathcal{T}_k^l)$, $p \in [1, \infty]$, как совокупность всех сечений X расслоения $\mathcal{T}_k^l M := \left(\otimes^k T^*_{\mathbb{C}} M\right) \otimes \left(\otimes^l T_{\mathbb{C}} M\right)$, для которых конечна норма $\|X\|_{L_p(A,\mathcal{T}_k^l)} := \left\| \left| X^{\sharp^l \flat^k}\ \overline{X} \right|^{1/2} \right\|_{L_p(A)}$, где $\sharp : T^*_{\mathbb{C}} M \to T_{\mathbb{C}} M$, $\flat : T_{\mathbb{C}} M \to T^*_{\mathbb{C}} M$ — изоморфизмы, соответствующие операциям поднятия и опускания индексов.

Пусть дополнительно $A \subset M_O$, тогда сечение $X \in L_p(A, \mathcal{T}_k^l)$ принадлежит пространству Соболева $W_p^m(A, \mathcal{T}_k^l)$, $p \in [1, \infty]$, $m \in \mathbb{N}$, если $\nabla^m X \in L_p(A, \mathcal{T}_{k+m}^l)$. Пополнение пространства $\mathcal{D}(A, \mathcal{T}_k^l)$, состоящее из $C_0^\infty(A)$–гладких сечений расслоения $\mathcal{T}_k^l M$, по норме $\|X\|_{w_p^m(A,\mathcal{T}_k^l)} := \|\nabla^m X\|_{L_p(A,\mathcal{T}_{k+m}^l)}$ обозначим $\mathring{W}_p^m(A, \mathcal{T}_k^l)$.

Пространство $W_q^{-m}(A, \mathcal{T}_k^l)$, $q \in (1, \infty)$, вводится как двойственное к $\mathring{W}_p^m(A, \mathcal{T}_k^l)$, $1/p + 1/q = 1$, с нормой $\|f\|_{W_q^{-m}(A,\mathcal{T}_k^l)} := \sup\limits_{u \in \mathcal{D}(A,\mathcal{T}_k^l) \setminus \{0\}} \frac{|\tau(f,u)|}{\|u\|_{w_p^m(A,\mathcal{T}_k^l)}}$, где τ — форма на $\mathcal{D}'(A, \mathcal{T}_k^l) \times \mathcal{D}(A, \mathcal{T}_k^l)$, порожденная скалярным произведением в $L_2(A, \mathcal{T}_k^l)$. Везде ниже будем опускать зависимость пространств от $\mathcal{T}_k^l$. Обозначим $H^m(M) = W_2^m(M)$, $\mathring{H}^m(A) = \mathring{W}_2^m(A)$, $H^{-m}(A) = W_2^{-m}(A)$, $\|u\|_{h^m(A)} = \|u\|_{w_2^m(A)}$. Потребуем выполнения следующих условий

D1 $\exists \alpha > 0 : \forall x \in M\ \forall \xi \in \mathbb{C} \otimes T_x^* M \Rightarrow \alpha\ \xi^\sharp\ \overline{\xi} \le \boldsymbol{A}(\xi \otimes \overline{\xi})$;

и для некоторого $\epsilon > 0$

D2 $\boldsymbol{A} \in L_\infty(M_O)$, $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \in L_{d^*}(M_O)$, $c \in W_{d^*}^{-1}(M_O)$, $d^* = \max\{2 + \epsilon, d\}$;

D3 $\|\mathrm{Re}\, \boldsymbol{b}\|_{L_{d^*}(M_O)} + \|\mathrm{Re}\, \boldsymbol{a}\|_{L_{d^*}(M_O)} + 2\|\mathrm{Re}\, c\|_{W_{d^*}^{-1}(M_O)} < \frac{\alpha - \alpha'}{C_{emb}}$, $\alpha' > 0$,

где C_{emb} — константа непрерывного вложения $\mathring{H}^1(M_O) \hookrightarrow L_{\frac{2d^*}{d^*-2}}(M_O)$.

В **параграфе 1.1** показано, что условий ***D1***–***D3*** достаточно, чтобы корректно определить оператор $\mathcal{A}$. То есть для любой функции

$f \in H^{-1}(\Omega)$ существует единственное решение $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ задачи (1), понимаемое в следующем смысле:

$$\forall v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \quad \Phi(u,v) = \tau(f,v),$$

$$\Phi(u,v) := \int_M \boldsymbol{A}\nabla u \otimes \overline{\nabla v}\, dVol + \int_M \boldsymbol{a} u \overline{\nabla v}\, dVol + \int_M \boldsymbol{b}\nabla u \overline{v}\, dVol + \int_M c u \overline{v}\, dVol$$

и значит, определен ограниченный линейный оператор $\mathcal{R}_\Omega : H^{-1}(\Omega) \to \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, $\mathcal{R}_\Omega : f \mapsto u$; оператор $\mathcal{A}$ вводится как обратный к $\mathcal{R}_\Omega$.

В тексте диссертации определяется оператор $\mathcal{G}_\Omega$ решающий задачу (1) с правыми частями из $H^{-1}(M_O)$. Так как все $\mathcal{G}_\Omega$ имеют общую область определения, то для последовательности областей $\{\Omega_\varepsilon\}$ из M_O, которые в подходящем смысле стремятся к предельной $\Omega \subset M_O$, уместно поставить вопрос о сходимости

$$\|\mathcal{G}_\Omega - \mathcal{G}_{\Omega_\varepsilon}\|_{\mathcal{L}(B_1,B_2)} \to 0, \quad \text{при } \ \varepsilon \to 0, \tag{2}$$

где B_1, B_2 — некоторые банаховы пространства, $\mathcal{L}(B_1, B_2)$ — пространство линейных ограниченных операторов из B_1 в B_2. Если (2) выполнено, то будем говорить, что для оператора $\mathcal{A}$ имеет место резольвентная непрерывность в пространстве B_2 при возмущении $\{\Omega_\varepsilon\}$ области Ω. Функция $\|\mathcal{G}_\Omega - \mathcal{G}_{\Omega_\varepsilon}\|_{\mathcal{L}(B_1,B_2)}$ при этом называется модулем резольвентной непрерывности.

Отдельно рассматриваются два случая резольвентной непрерывности (2), в пространстве $H^{1-s}(M)$ и в пространстве $H^1(M)$. Пусть $\{O_k\}_1^K$ — покрытие многообразия M координатными окрестностями и $\{\psi_k\}_1^K$ — подчиненное ему разбиение единицы. Для произвольного $s \in \mathbb{R}$ полагаем $\|u\|^2_{H^s(M)} = \sum \|u\psi_k\|^2_{H^s(\mathbb{R}^d)}$, $\|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} \left(1 + |\xi|^2\right)^s |F(u)(\xi)|^2 d\xi$, F — преобразование Фурье, где подразумевается, что функция $u\psi_k$ продолжена нулем на все $\mathbb{R}^d$.

Параграф 1.2 посвящен применению сходимости по Mosco [27] к установлению резольвентной непрерывности в пространстве $H^{1-s}(M)$, и спектральной устойчивости оператора $\mathcal{A}$. Пусть (H, h) — гильбертово пространство, а H_l — его подмножества. Рассматриваются множества

$$\text{s-Lim}\inf H_l = \{v \in H | \forall S(v)\ \exists L > 0 : \forall l \geq L\ H_l \cap S(v) \neq \varnothing\}, \tag{3}$$

$$\text{w-Lim}\sup H_l = \{v \in H | \forall W(v)\ \forall l_0 > 0\ \exists l \geq l_0,\ H_l \cap W(v) \neq \varnothing\}, \quad (4)$$

где $S(v)$ и $W(v)$ — слабая и сильная окрестности точки v соответственно. Последовательность H_l сходится в смысле Mosco к H_0, если предельные множества (3) и (4) совпадают с H_0. Дополнительно полезно рассмотреть гильбертово пространство (L, l) и последовательность $\{L_k\}$ его подпространств с тем свойством, что существует линейный ограниченный оператор $\mathrm{id} : H \to L$ реализующий компактные вложения $H \overset{\text{comp}}{\hookrightarrow} L$, $H_k \overset{\text{comp}}{\hookrightarrow} L_k$. Задается абстрактный функционал Рэлея $\mathfrak{J}(v) := \frac{h(v,v)}{l(v,v)}$, который формально равен ∞, если $v = 0$. Тогда выполнено

Предложение 1. *Если H_l — конусы в H, то*

$$\inf_{v \in \text{s-Lim}\inf H_l} \mathfrak{J}(v) \geq \limsup_{l \to \infty} \inf_{v \in H_l} \mathfrak{J}(v),$$

$$\inf_{v \in \text{w-Lim}\sup H_l} \mathfrak{J}(v) \leq \liminf_{l \to \infty} \inf_{v \in H_l} \mathfrak{J}(v). \quad (5)$$

Если в (5) выполнено равенство, то нормированная в H последовательность, минимизирующая правую часть (5), предкомпактна в H.

Пусть μ, δ — мера и метрика порожденные римановой структурой многообразия M, для подмножеств $X, Y \subset M$ положим $e(X, Y) = \sup_{x \in X} \delta(x, Y)$, $\check{e}(X, Y) = \sup_{y \in M \setminus Y} \delta(y, X)$. Основным результатом параграфа 1.2 является то, что сходимость Mosco позволяет получить достаточно слабые условия стабильности спектра оператора $\mathcal{A}$ (при возмущении области Ω) [2] и резольвентной непрерывности в пространстве $H^{1-s}(M)$:

Теорема 1. *Пусть $\{\Omega_l\}$, Ω — области M_O, $\mathcal{G}_\Omega$ — оператор решающий задачу (1), оператор $\mathcal{A}$ удовлетворяет условиям* ***D1–D3***, $\boldsymbol{a} \equiv \overline{\boldsymbol{b}}$, $\mathrm{Im}\, c \equiv 0$, *$\lambda_k(\Omega)$ — k–ое собственное значение в области Ω, тогда*

1. Если $\check{e}(\Omega, \Omega_l) \to 0$, то $\limsup_{l \to \infty} \lambda_k(\Omega_l) \leq \lambda_k(\Omega)$;

2. Если $\mu(\Omega_l \setminus \Omega) \to 0$ и $\partial\Omega$ локально представима в виде графика непрерывной функции, то $\liminf_{l \to \infty} \lambda_k(\Omega_l) \geq \lambda_k(\Omega)$;

3. Если одновременно выполнены условия 1 и 2, то для любого $s > 0$

$$\|\mathcal{G}_{\Omega_l} - \mathcal{G}_\Omega\|_{\mathcal{L}(H^{-1}(M_O), H^{1-s}(M))} \to 0, \quad \textit{при} \quad l \to \infty.$$

Доказательство пунктов 1 и 2 теоремы 1 основано на последовательном применении принципа Куранта–Фишера, определяющего собственные значения оператора $\mathcal{A}$ с помощью соотношения Рэлея, и предложения 1. Утверждение пункта 3 имеет место вследствие того, что из сходимости по Mosco пространств $\mathring{H}^1(\Omega_l)$ к пространству $\mathring{H}^1(\Omega)$ следует резольвентная сходимость в пространстве $H^{1-s}(M)$. Простейший случай оператора Лапласа в области с липшицевой границей рассмотрен в работе [1].

В **параграфе 1.3** устанавливаются оценки модуля резольвентной непрерывности в пространстве $H^1(M)$ для оператора $\mathcal{A}$, $\boldsymbol{b} \equiv \boldsymbol{a} \equiv 0$, $c \equiv 0$, удовлетворяющего условию ***D1***.

Для этого определяются четыре основные величины, измеряющие расстояния между подобластями M_O: расстояния Хаусдорфа для открытых и замкнутых множеств

$$d_{\mathcal{H}}(X,Y)=\max\{e(X,Y),e(Y,X)\}, \quad d^{\mathcal{H}}(X,Y)=\max\{\check{e}(X,Y),\check{e}(Y,X)\}.$$

расстояние Хаусдорфа–Помпейю и величина $d_{\mathcal{HS}}$:

$$d^{\mathcal{HP}}(X,Y) = \max\left\{d_{\mathcal{H}}(X,Y), d^{\mathcal{H}}(X,Y)\right\}.$$
$$d_{\mathcal{HS}}(X,Y) = \min\left\{e(X\Delta Y,\partial Y), e(X\Delta Y,\partial X), d_{\mathcal{H}}(X,Y), d^{\mathcal{H}}(X,Y)\right\}$$

В тексте диссертации на основе конструкции класса $\Pi(\theta,h,r)$ из [16], строится классификация областей $\Omega \subset M$ с границами представимыми в виде графиков непрерывных функций с предписанными модулями непрерывности. Для функции $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такой, что разность $(\omega(r)-\omega(0))$ является неотрицательной и полуаддитивной, вводятся величины $\psi(r) = \sqrt{r^2+\omega(r)^2}$, $\phi(r) = r+\omega(r)$.

Определение 1. *Скажем, что открытое множество Ω удовлетворяет равномерному условию ω-каспа в точке x с параметром r, если существует единичный вектор $\xi_x \in \mathbb{R}^d$ такой, что*

W1 $\left[\left(B_{3\psi(r)}(x)\cap\Omega\right) - \mathcal{C}_{\omega,r}(\xi_x)\right] \cap B_{2\psi(r)} \subset \Omega,$

где $\mathcal{C}_{\omega,r}(\xi_x)$ получается из $\mathcal{C}_{\omega,r}(e_d) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{S}_{\omega,r}(e_d) \cup \mathcal{F}_{\omega,r}(e_d)$ поворотом, так *чтобы* e_d *и* ξ_x *совместились и* $\tilde z=(z^1,\dots,z^{d-1})$,

$$\mathcal{F}_{\omega,r}(e_d)=\left\{z=(\tilde z,z^d)\in\mathbb{R}^d:\ |z|<\psi(r),\ \ z^d\ge\omega(r)\right\},$$
$$\mathcal{S}_{\omega,r}(e_d)=\left\{(\tilde z,z^d)\in\mathbb{R}^d:\omega(|\tilde z|)<z^d<\omega(r),\ \ |\tilde z|<r\right\}.$$

W2 $\left[\left(B_{3\psi(r)}(x)\backslash\Omega\right)+\mathcal{C}_{\omega,r}(\xi_x)\right]\cap\left(B_{2\psi(r)}\cap\Omega\right)=\varnothing.$

Заметим, что ***W1*** эквивалентно требованию ***W2***. Для $\rho>0$, $\vartheta\ge1$ вводится понятие (ρ,ϑ)–технического атласа $\mathfrak{W}=\{(W_y,\chi_y)\}_{y\in M}$ многообразия M.

W3 $\forall y\in M\Rightarrow\mathcal{B}_{3\rho}(y)\overset{\text{def}}{=}\chi_y^{-1}(B_{3\rho}(\chi_y(y))\subset W_y$,

W4 Для любой карты $(W,\chi)\in\mathfrak{W}$, $C^{0,1}$-норма $\mathbf{G}\circ\chi$ и $(\mathbf{G}\circ\chi)^{-1}$ не превосходит ϑ.

W5 Для любых двух карт $W_1,W_2\in\mathfrak{W}$ $C^{0,1}$-норма матрицы Якоби $J=\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right)$ не превосходит ϑ.

Определение 2. *Скажем, что открытое множество* $\Omega\subset M$ *удовлетворяет равномерному условию* ω*-каспа с параметрами* (r,ϑ), $r>0$, $\vartheta\ge1$ *если существует* $(\psi(r),\vartheta)$*–технический атлас такой, что для любого* $y\in M$ *открытое множество* $\chi_y(\Omega\cap\mathcal{B}_{3\psi(r)}(y))$ *удовлетворяет равномерному условию* ω*-каспа с параметром* r *в точке* $\chi_y(y)$. *Данный класс будем обозначать* $\mathcal{W}^{\omega}_{r,\vartheta}$.

Обозначим $C^{0,\omega(\cdot)}$ класс границ, локально представимых в виде графиков непрерывных функций с модулем непрерывности $C\omega$, где C есть некоторая константа, своя для каждой границы. Центральным результатом первой главы является следующая

Теорема 2. *Пусть* $\partial\Omega_1\in C^{0,\omega(\cdot)}$, *оператор* $\mathcal{A}$ *удовлетворяет условию* ***D1***, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\equiv0$, $c\equiv0$, $f\in L_2(M)$, $u_i=\mathcal{G}_{\Omega_i}f$, $i=1,2$. *Тогда, для достаточно малого* $\varepsilon=e(\Omega_2\Delta\Omega_1,\partial\Omega_1)$ *существует константа* $K(M_O,\mathcal{W}^{\omega}_{r,\vartheta},\mathcal{A})$, *такая что*

$$\|u_1-u_2\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(M_O)}\le K\cdot\phi(\varepsilon)\|f\|_{L_2(M_O)}\|f\|_{H^{-1}(M_O)}.$$

Если $\Omega_1,\Omega_2\in\mathcal{W}^{\omega}_{r,\vartheta}$, $\vartheta\ge1$, $r>0$, $\omega(0)=0$, $d_{\mathcal{HS}}(\Omega_1,\Omega_2)$ *мало, то*

$$\|u_1-u_2\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(M_O)}\le K\cdot\phi(d_{\mathcal{HS}}(\Omega_1,\Omega_2))\|f\|_{L_2(M_O)}\|f\|_{H^{-1}(M_O)}.$$

Схема доказательства опубликована в работе [3].

В **главе 2** обобщаются оценки модуля резольвентной непрерывности на случай, когда $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, c \not\equiv 0$. Эти оценки применяются к вопросу о регулярности решений задачи (1).

В **параграфе 2.1** Напоминаются определения пространств Никольского–Бесова, приводятся связанные с ними свойства: теоремы вложения и продолжения, теоремы о взятии повторных норм и теоремы, связанные с конструкцией вещественной интерполяции.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — открытое множество, $\forall\delta > 0$ $\Omega^{-\delta} = \{x \in \Omega \,|\, \rho(x, \partial\Omega) > \delta\}$, $Z(\Omega^{-\delta})$ — некоторое полунормированное пространство функций, заданных на $\Omega^{-\delta}$, $1 \le \theta \le \infty$, $l \in \mathbb{R}_+$, $m, \sigma \in \mathbb{N}$.

Будем говорить, что $f \in d^{m,\sigma}B^l_\theta(Z(\Omega))$, если $f \in L_{1,loc}(\Omega)$ и

$$\begin{gathered} \|f\|_{d^{m,\sigma}B^l_\theta(Z(\Omega))} = \|f\|_{Z(\Omega)} + \sum \|f\|_{d^{m,\sigma}b^l_\theta(Z(\Omega))} < \infty, \\ \|f\|_{d^{m,\sigma}b^l_\theta(Z(\Omega))} = \left\| h^{-l-m} \|\Delta^{\sigma j}_{h,j} \partial^m_j f\|_{Z(\Omega^{-\sigma h})} \right\|_{L^*_\theta(0,H)}, \end{gathered} \tag{6}$$

и обозначим $n^l := b^l_\infty$, $N^l := B^l_\infty$. Здесь $\Delta^\sigma_{h,j}\varphi$ — разность по переменной x_j порядка σ с шагом h, $L^*_\theta(0, H)$ — пространство измеримых на $(0, H)$ функций g одной переменной, для которых при $1 \le \theta < \infty$

$$\|g\|_{L^*_\theta(0,H)} = \left(\int_0^H |g(h)|^\theta \frac{dh}{h}\right)^{1/\theta} < \infty, \quad (L^*_\infty(0, H) = L_\infty(0, H))$$

Будем считать, что набор l, σ, m допустимый, если $\sigma + m > l > m$.

Определение 3. *Пусть набор l, σ, m является допустимым, $l > 0$, $p \in [1, \infty]$, $\theta \in [1, \infty)$ пространствами Бесова и Никольского называются соответственно*

$$d^{m,\sigma}B^l_{p,\theta}(\Omega) := d^{m,\sigma}B^l_\theta(L_p(\Omega)), \quad d^{m,\sigma}N^l_p(\Omega) := d^{m,\sigma}B^l_\infty(L_p(\Omega))$$

Если существует оператор продолжения $P : d^{m,\sigma}B^l_\theta(L_p(\Omega)) \to d^{m,\sigma}B^l_\theta(L_p(\mathbb{R}^d))$, то определение этих пространств не зависит от допустимого набора l, σ, m. В этом случае обозначим

$$B^s_{p,\theta}(\Omega) = d^{m,\sigma}B^s_{p,\theta}(\Omega), \quad N^s_p(\Omega) = d^{m,\sigma}N^s_p(\Omega).$$

Далее вводятся пространства $\tilde{B}^s_{p,\theta}(\Omega) = \{v \in B^s_{p,\theta}(\mathbb{R}^d) \,|\, \operatorname{supp} v \subset \overline{\Omega}\}$, $\tilde{N}^s_p(\Omega) = \{v \in N^s_p(\mathbb{R}^d) \,|\, \operatorname{supp} v \subset \overline{\Omega}\}$. Независимость данного определения от атласа и разбиения единицы см. в [10].

Определение 4. Для произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ скажем, что $f \in \mathring{N}^s_p(\mathbb{R}^d)$, $r+1 \geq \lfloor s \rfloor > r$, $s > 0$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $p \in (1,\infty)$ если одновременно

$$\lim_{h\to 0} \max_j h^{-1} \|\Delta^2_{h,j} \partial^r_j f\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} = 0, \qquad \lim_{|h|\to\infty} \max_j h^{-1} \|\Delta^2_{h,j} \partial^r_j f\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

Для $q \in (1,\infty)$ обозначим $B^{-s}_{p',q'}(\Omega) = \Big(\tilde{B}^s_{p,q}(\Omega)\Big)'$, $B^{-s}_{p',1}(\Omega) = \Big(\mathring{\tilde{N}}^s_p(\Omega)\Big)'$, причем $1/p + 1/p' = 1$, $1/q + 1/q' = 1$.

Напомним определение пространств Никольского–Бесова в случае, если Ω — область в M. Пусть $\{(U, \chi_U)\}$ — конечный атлас и $\{\psi_U\}$ — подчиненное ему гладкое разбиение единицы. Тогда скажем, что сечение $\boldsymbol{S} \in B^s_{p,q}(M)$, $s \in \mathbb{R}$, $p \in [1,\infty]$, $q \in [1,\infty]$ если $(\boldsymbol{S} \cdot \psi_U) \circ \chi_U^{-1} \in B^s_{p,q}(\chi_U(U))$.

Определение 5. *Пусть m, σ, l — допустимый набор, $\mathcal{U} = \{U, \kappa_U\}$ — атлас многообразия M и $\{\psi_U\}$ — подчиненное ему разбиение единицы, $\Omega \subset M$ — открытое множество, то $u \in d^{m,\sigma}_{\mathcal{U}} B^l_{p,q}(\Omega)$, если выполнено (6) для $\psi_U u$ в каждой карте U.*

Далее определяется понятие вещественной интерполяции.

Определение 6. *Пусть $0 < s < 1$, интерполяционные пространства вводятся при $1 \leq \theta \leq \infty$ как*

$$(A_0, A_1)_{s,\theta} = \left\{ a \,\middle|\, a \in A_0 + A_1, \|a\|_{(A_0,A_1)_{s,\theta}} = \left\| t^{-s} K(t,a) \right\|_{L^*_\theta(0,\infty)} \right\},$$

где $K(t,a) = K(t,a;A_0,A_1) = \inf_{a=a_0+a_1} (\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1})$, $a \in A_0 + A_1$.

Вещественная интерполяция позволяет получать непрерывность линейных ограниченных операторов в парах промежуточных пространств. Отметим, что пространства Бесова являются результатом интерполяции пространств Соболева.

Параграф 2.2 посвящен обобщению теоремы 2. Потребуем, чтобы оператор $\mathcal{A}$ удовлетворял условиям ***D1*** и ***D3***, для $\gamma \in (0,1]$ и некоторого

$\epsilon > 0$, $d^* = \max\{2+\epsilon, d\}$ регулярность коэффициентов определялась из таблицы

D2'

γ	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	c
$(0,1)$	$C^{0,\gamma}(M_O)$	$\tilde{N}^{\gamma}_{d+\epsilon}(M_O)$	$L_{\frac{d+\epsilon}{1-\gamma}}(M_O)$	$B^{-1+\gamma}_{d+\epsilon,1}(M_O)$
1	$C^{0,1}(M_O)$	$\mathring{W}^1_{d^*}(M_O)$	$L_\infty(M_O)$	$L_{d^*}(M_O)$

Применяя интерполяционные теоремы (см. [6]) и свойства повторных норм в пространствах Бесова [8], следуя доказательству теоремы 2, получаем оценки модуля резольвентной непрерывности задачи (1) в пространстве $H^1(M)$ относительно возмущения границы области, локально представимой в виде графика непрерывной функции.

Теорема 3. *Пусть $\partial\Omega_1 \in C^{0,\omega(\cdot)}$, Ω_2 — открытое подмножество M_O, оператор $\mathcal{A}$ удовлетворяет условиям **D1**, **D2'**, **D3**. Тогда при достаточно малом $\varepsilon = e(\Omega_2\Delta\Omega_1, \partial\Omega_1)$ существует константа $C(M_O, \mathcal{W}^{\omega}_{r,\vartheta}, \mathcal{A})$, такая что*

$$\|\mathcal{G}_{\Omega_2} - \mathcal{G}_{\Omega_1}\|_{\mathcal{L}(B^{-1+\gamma/2}_{2,1}(M_O), \mathring{H}^1(M_O))} \le C^{1/2}\phi(\varepsilon)^{\gamma/2}.$$

Если $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{W}^{\omega}_{r,\vartheta}$, $\vartheta \ge 1$, $r > 0$, и $d_{\mathcal{HS}}(\Omega_1, \Omega_2)$ мало, то

$$\|\mathcal{G}_{\Omega_2} - \mathcal{G}_{\Omega_1}\|_{\mathcal{L}(B^{-1+\gamma/2}_{2,1}(M_O), \mathring{H}^1(M_O))} \le C^{1/2}\phi(d_{\mathcal{HS}}(\Omega_1, \Omega_2))^{\gamma/2}.$$

Параграф 2.3 посвящен приложению резольвентной непрерывности к задаче о регулярности решений.

Для операторов $\mathcal{A}_{(n)} = -\mathrm{div}(\boldsymbol{A}_{(n)}\nabla u + \boldsymbol{a}_{(n)}u) + \boldsymbol{b}_{(n)}\nabla u + c_{(n)}u$, $n = 1, 2$, удовлетворяющих условиям ***D1***, ***D2***, ***D3***, рассмотрим задачи Дирихле (1) в некоторой произвольной области $\Omega \Subset M_O$. Обозначим $\mathcal{R}^{(n)}_{\Omega} : H^{-1}(\Omega) \to \mathring{H}^1(\Omega)$ — оператор решающий задачу (1) для $\mathcal{A}_{(n)}$.

Предложение 2. *Пусть $u_{(n)} = \mathcal{R}^{(n)}_{\Omega} f_{(n)}$, $f_{(n)} \in H^{-1}(\Omega)$, $n = 1, 2$. Тогда для любого $\epsilon > 0$, $d^* = \max\{d, 2+\epsilon\}$ существует $C = C(M, \epsilon) > 0$, что*

$$\|u_{(1)} - u_{(2)}\|_{\mathring{H}^1(\Omega)} \le C\Big[\Big(\|\boldsymbol{A}_{(1)} - \boldsymbol{A}_{(2)}\|_{L_\infty(\Omega)} + \big\|\boldsymbol{a}_{(1)} - \boldsymbol{a}_{(2)}\big\|_{L_{d^*}(\Omega)} + \big\|\boldsymbol{b}_{(1)} - \boldsymbol{b}_{(2)}\big\|_{L_{d^*}(\Omega)} + \big\|c_{(1)} - c_{(2)}\big\|_{W^{-1}_{d^*}(\Omega)}\Big)\|f_{(2)}\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|f_{(1)} - f_{(2)}\|_{H^{-1}(\Omega)}\Big].$$

Введем условие на коэффициенты $\mathcal{A}$

D2'' $\boldsymbol{A}\in C^{0,T}(M_O), \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\in \tilde{N}^{T}_{d^*}(M_O), c\in B^{-1+T}_{d^*,1}(M_O)$ некоторого $T\in(0,1)$.

Следующая теорема позволяет из резольвентной непрерывности задачи (1) извлечь свойства повышенной гладкости решений.

Теорема 4. *Пусть M_O — диффеоморфно отображается на некоторую область в $\mathbb{R}^d$, оператор $\mathcal{A}$ удовлетворяет условиям* ***D1***, ***D2''***, ***D3***, *$\Omega \Subset M_O$ — фиксированная область, такая что для любой области $\Omega^* \Subset M_O$, и $d^{\mathcal{HP}}(\Omega, \Omega^*)$ достаточно мало, выполнено*

$$\|\mathcal{G}_\Omega - \mathcal{G}_{\Omega^*}\|_{\mathcal{L}(X, \mathring{H}^1(M_O))} \leq C\left(d^{\mathcal{HP}}(\Omega, \Omega^*)\right)^T$$

для $T \in (0,1)$ и некоторого банахова пространства $X \hookrightarrow H^{-1}(M_O)$. Тогда ограничен оператор

$$\mathcal{G}_\Omega : X \cap B^{-1+T}_{2,1}(M_O) \to \tilde{N}^{1+T}_2(M_O).$$

В качестве следствия теорем 3 и 4 получена

Теорема 5. *Пусть M_O — диффеоморфно отображается на некоторую область в $\mathbb{R}^d$, оператор $\mathcal{A}$ удовлетворяет условиям* ***D1***, ***D2'***, ***D2''***, ***D3***, *$T = \gamma/2$, $\Omega \Subset M_O$ — фиксированная область с границей класса $C^{0,t}$, $t \in (0,1]$, тогда оператор*

$$\mathcal{G}_\Omega : B^{-1+\gamma/2}_{2,1}(M_O) \to \tilde{N}^{1+\gamma t/2}_2(M_O),$$

решающий задачу (1) ограничен. Более того, для $s \in (0, \gamma/2)$ для оператора $\mathcal{G}_\Omega$ также имеется ограниченность в парах

$$\mathcal{G}_\Omega : H^{-1+s}(M_O) \to \tilde{H}^{1+st}(M_O).$$

В завершение главы приведено доказательство утверждения, обобщающего классическую теорему G. Savaré [31]. Пусть $\mathcal{V}$ — атлас многообразия M, в каждой карте которого $\partial\Omega$ представима в виде графика липшицевой функции с носителем ортогональным направлению e_1. Запишем этот факт как $\partial\Omega \in C^{0,1}_{\mathcal{V}}$. Определим $C^{0,(t_1,\ldots,t_d)}_{\mathcal{V}}(M)$ как пространство функций v, таких что $v \circ \kappa_V^{-1} \in C^{0,(t_1,\ldots,t_d)}(\kappa_V(V))$ для любой $(V, \kappa_V) \in \mathcal{V}$.

Теорема 6. *Пусть* $\Omega \Subset M_O \Subset \mathbb{R}^d$, $\partial\Omega \in C^{0,1}_{\mathcal{U}}$, $\boldsymbol{A} \in C^{0,(1,1/2,\dots,1/2)}_{\mathcal{U}}(M_O)$, $\mathcal{A}$ *удовлетворяет условию* ***D1***, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \equiv 0$, $c \equiv 0$, *тогда для любого* $s \in (0, 1/2)$ *ограничен оператор* $\mathcal{R}_\Omega : H^{-1+s}(\Omega) \to \tilde{H}^{1+s}(\Omega)$.

Глава 3 посвящена изучению регулярности решений первой краевой задачи поставленной для операторов порядка $2m$. Разработанная техника опирается на аппарат теории функций, и отличается от техники, представленной в первых двух главах диссертации. Данный подход удается применить для вариационных задач при весьма общих ограничениях на минимизируемый функционал.

В **параграфе 3.1** ставятся задачи, а также устанавливаются вспомогательные утверждения.

Для фиксированного натурального числа $N \geq 1$ обозначим через $(\mathcal{J}^{N,k}M, M, \mathbb{R}^N \times (T_xM)^N \times \dots \times (T^k_xM)^N, \mathrm{pr})$ локально-тривиальное расслоение с базой M, слоем $\mathbb{R}^N \times (T_xM)^N \times \dots \times (T^k_xM)^N$ и проекцией $\mathrm{pr} : \mathcal{J}^{N,k}M \to M$. Для области $\Omega \subset M$, $\partial\Omega \in C^{0,t}$, $t \in (0, 1]$ рассмотрим функционал $J : \mathring{W}^m_p(\Omega, \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$,

$$J[u] = \int_\Omega F(x, u, \dots, \nabla^m u) d\mu + \int_\Omega E(x, u, \dots, \nabla^{m-1} u)\, d\mu$$

где E, F — измеримые функции на $\mathcal{J}^{N,m-1}M$ и $\mathcal{J}^{N,m}M$ соответственно, $m \in \mathbb{N}$, $p \in (1, \infty)$ фиксированы. Для $f \in W^{-m}_q(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $1/p + 1/q = 1$, поставим задачу поиска элемента $u \in \mathring{W}^m_p(\Omega, \mathbb{R}^N)$ локально минимизирующего значение функционала $J_f[u] = J[u] - \tau(f, u)$.

Пусть $\mathcal{U} = \{(U, \chi_U)\}$ атлас локально тривиализующий $\mathcal{J}^{N,k}M$, $\chi_U : U \to \tilde{U} \times \mathbb{R}^N \times \dots \times \mathbb{R}^{Nd^k}$. Потребуем, чтобы в каждой карте U были выполнены следующие условия:

F1. E и F дифференцируемы и непрерывны по каждой координате $(\xi^0, .., \xi^{m-1})$ и $(\xi^0, .., \xi^m)$ при почти любом $x \in \tilde{U} \cap \Omega$ и $x \in \tilde{U}$ соответственно, $E + F \geq 0$;

F2. Для любых $(x, \xi^0, \dots, \xi^m) \in \tilde{U} \times \mathbb{R}^N \times \dots \times \mathbb{R}^{Nd^m}$ выполнено

$$\begin{cases} |\nabla_{\xi^m} F| \leq C\left(1 + |\xi|^{p-1}\right) \\ |\nabla_{\xi^k} F| + |\nabla_{\xi^k} E| \leq C\left(1 + \psi_\gamma^k(|\xi|)\right), \quad k = \overline{0, .., m-1} \\ |E| + |F| \leq C\left(1 + |\xi|^p\right) \end{cases}$$

где $|\xi| = \sum_{l=0}^m |\xi^l|$, $\psi_\gamma^k(s)$ равно s^p, $s^{p-\epsilon}$, $s^{p-1+\frac{m-k-\gamma}{d/p}-\epsilon z_\gamma}$ при $m-k-\gamma > d/p$, $m-k-\gamma = d/p$, $m-k-\gamma < d/p$ соответственно, $z_\gamma = 0$, если $\gamma = 1$, и $z_\gamma = 1$, если $\gamma \in (0,1)$;

F3. Функция F выпукла по ξ^m при почти всех $x \in \tilde{U}$ и любых $\xi^1, .., \xi^{m-1}$. Существует $\alpha > 0$ такая, что для $x \in \tilde{U}$, $\xi, \eta \in \prod_{k=0}^m \mathbb{R}^{Nd^k}$

$$\nabla_{\xi^m}\left[F(x, \dots, \xi^{m-1}, \xi^m) - F(x, \dots, \xi^{m-1}, \eta^m)\right] \cdot (\xi^m - \eta^m)$$

оценивается снизу как $\alpha|\xi^m - \eta^m|^p$ и $\alpha\frac{|\xi^m-\eta^m|^2}{(|\xi|+|\eta|)^{2-p}}$ для $p \in (2, \infty)$ и $p \in (1, 2)$ соответственно.

F4. Существуют такие постоянные $L > 0$, $\varkappa \in (0, 1]$, что для любого $\xi \in \prod_{k=0}^m \mathbb{R}^{d^k N}$ и любых $x, y \in \tilde{U}$ $|F(x, \xi) - F(y, \xi)| \leq L|x - y|^\varkappa (1 + |\xi|^p)$.

Показано, что задача минизации функционала J_f, удовлетворяющего условиям ***F1*** – ***F3*** разрешима.

Линейные задачи ставятся следующим образом. Рассмотрим дифференциальное выражение $\mathcal{A}'$:

$$\sum_{0 \leq l \leq k \leq m} (\nabla^*)^l \boldsymbol{A}_{k,l}\, (\nabla)^k u = (\nabla^*)^m \boldsymbol{A}_{m,m} (\nabla)^m u + \sum_{\substack{0 \leq l \leq k \leq m \\ l \neq m}} (\nabla^*)^l \boldsymbol{A}_{k,l} (\nabla)^k u,$$

здесь $\boldsymbol{A}_{k,l}$ — сечения расслоений $\otimes_{\mathbb{C}}^{k+l} TM$, $(\nabla^*)^l$ есть оператор формально сопряженный $(\nabla)^l$ по Лагранжу относительно скалярного произведения $(u, v)_{L_2(M)} = \int_M u\bar{v}d\mu$, $\boldsymbol{A}_{m,m}$ — эрмитово. Так, например

$$(\nabla^*)_i v^i = -\frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_i \left(\sqrt{\det g}\, v^i\right) = -\operatorname{div} v_i$$

$$(\nabla^*)^2_{ij} v^{ij} = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_i \partial_j \left[\sqrt{\det g} \cdot v^{ij}\right] + \frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_k \left[\Gamma_{ij}^k \sqrt{\det g} \cdot u\right]$$

где Γ_{ij}^k — символы Кристоффеля. Для $\epsilon > 0$ обозначим $\tilde{d} = \max\{2 + \epsilon, d + (1-\gamma)\epsilon\}$. Потребуем чтобы выполнялись следующие условия

A1 $\exists \alpha > 0 : \forall x \in M\ \forall \xi \in \otimes_{\mathbb{C}}^m T_x^* M \Rightarrow \alpha\, \xi^{\sharp^m}\, \bar{\xi} \leq \boldsymbol{A}_{m,m}(\xi \otimes \bar{\xi})$;

A2 $\boldsymbol{A}_{m,m} \in C^{0,\varkappa}(M)$, $\varkappa \in (0,1]$, сечения $\boldsymbol{A}_{m_1,m_2}$, $0 \leq m_2 \leq m_1 \leq m$, $m_2 \neq m$, таковы, что для задач Дирихле и Неймана соответственно выполнено требование

d Для некоторого $\gamma \in (0,1]$ имеет место $\boldsymbol{A}_{m_1,m_2} \in W^{-m+m_1}_{p_{m_2,\gamma}}(\Omega)$, при $m_2 < m_1$ и $p_{m_2,\gamma} = \frac{\tilde{d}}{m-m_2-\gamma}$; При $k \leq m-1$: $\boldsymbol{A}_{k,k} \in B^{-m+k+\gamma}_{q_k,1}(\Omega)$ и $\boldsymbol{A}_{k,k} \in W^{-m+k+\gamma}_{q_k}(\Omega)$ для $\gamma \in (0,1)$ и $\gamma = 1$. Где q_k равно 2, $d/(m-k)$ для $m-k \geq d/2$, $m-k < d/2$ соответственно.

n Пусть $\mu = \min\{m-k, m-l-1\}$, $\nu = \max\{m-k, m-l-1\}$ тогда $\boldsymbol{A}_{k,l} \in \tilde{W}^{-\mu}_{\frac{d}{(\lfloor t\nu \rfloor -1)_+}}(\Omega)$, если $\lfloor t\nu \rfloor < \frac{d}{2}$, и $\boldsymbol{A}_{k,l}$ принадлежит $\tilde{W}^{-\mu}_{2+\epsilon}(\Omega)$, $\tilde{W}^{-\mu}_{2}(\Omega)$ при $\lfloor t\nu \rfloor = \frac{d}{2}$, $\lfloor t\nu \rfloor \geq \frac{d}{2}$ соответственно. Здесь $\lfloor s \rfloor$ — максимальное целое число не превосходящее s, $(s)_+ = \max\{s, 0\}$, $\partial\Omega \in C^{0,t}$, $t \in (0,1]$.

A3 Младшие коэффициенты таковы, что форма порожденная оператором $\mathcal{A}$ секториальна с вершиной в правой полуплоскости.

Применяя лемму Лакса–Мильграма, можно корректно определить операторы $\mathcal{A}^D$, $\mathcal{A}^N$ для задачи Дирихле и Неймана соответственно, понимаемые в смысле форм. Ставятся задачи

$$\mathcal{A}'u = f, \quad \nabla^k u|_{\partial\Omega} = 0, \quad k = \overline{0,..,m-1}. \tag{7}$$

для $f \in H^{-m}(\Omega)$, если $\mathcal{A}^D u = f$, и

$$\mathcal{A}'u = f, \quad \sum_{n \leq l \leq k \leq m} \langle \otimes^n \nu, (\nabla^*)^{l-n} \boldsymbol{A}_{k,l} \nabla^k u \rangle|_{\partial\Omega} = 0, \quad l = \overline{1,..,m}. \tag{8}$$

с правой частью $f \in \mathring{W}^{-m}_2(\Omega)$, если $\mathcal{A}^N u = f$. Обозначим $\mathcal{R}^D_\Omega$, $\mathcal{R}^N_\Omega$ операторы, решающие задачи (7), (8).

В **параграфе 3.2** доказывается следующее предложение (формулировку которого приведем для $p \geq 2$, $\gamma \in (0,1)$)

Предложение 3. *Пусть u — нестрогий минимум функционала J_f, $p \in [2,\infty)$, область $\Omega \subset M_O$ обладает гельдеровой границей с показателем $t \in (0,1]$, функционал J удовлетворяет условиям **F1**–**F4**. Тогда если $f \in B^{-m+\gamma}_{p',1}(\Omega)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1$, то $u \in \tilde{N}^{m+t\zeta_0/p}_p(\Omega)$, и справедлива оценка*

$$\|u\|^p_{\tilde{N}^{m+t\zeta_0/p}_p(\Omega)} \leq C\left(1 + \|u\|^p_{\tilde{W}^m_p(\Omega)} + \|u\|_{\tilde{W}^m_p(\Omega)} \|f\|_{B^{-m+\gamma}_{p',1}(\Omega)}\right),$$

где $\zeta_0 = \min\{\varkappa, \gamma\}$. *Если дополнительно известно, что и принадлежит* $\tilde{N}_p^{m+s}(\Omega)$, $s \in (0, 1/p)$, $f \in B_{p',1}^{-m+\gamma}(\Omega)$ *то* $u \in \tilde{N}_p^{m+t\zeta_s/p}(\Omega)$, *причем* $\|u\|^p_{\tilde{N}_p^{m+t\zeta_s/p}(\Omega)}$ *можно оценить сверху как*

$$C\left(1 + \|u\|^p_{\tilde{W}_p^m(\Omega)} + \left(1 + \|u\|^{p-1}_{\tilde{W}_p^m(\Omega)} + \|f\|_{B_{p',1}^{-m+\gamma}(\Omega)}\right)\|u\|_{\tilde{N}_p^{m+s}(\Omega)}\right),$$

где $\zeta_s = \min\{\varkappa, \gamma + s\}$.

Следующая теорема является следствием предложения 3 и теоремы Тартара о вещественной интерполяции нелинейных отображений [33]

Теорема 7. *Пусть* $\Omega \subset M_O$ *— область с гельдеровой границей класса* $C^{0,t}$, $t \in (0, 1]$, $1/p + 1/q = 1$, *выполнены условия* ***F1*–*F4***, $p > 1$, *тогда определено многозначное отображение*

$$\mathcal{R}_\Omega^J : B_{q,1}^{-m+\lambda}(\Omega) \to \tilde{N}_p^{m+\frac{t}{\tilde{p}-t}\lambda}(\Omega), \quad \lambda \in [0, \varkappa/p] \cap [0, \tilde{\lambda}_{\tilde{p}}),$$

ставящее в соответствие f *все точки (локального) минимума функционала* $J_f[u]$, *показатель* $\tilde{\lambda}_{\tilde{p}}$ *равен* $\frac{\tilde{p}-t}{\tilde{p}t}\gamma$, $\tilde{p} = \max\{p, 2\}$. *Более того,*

$$\forall f \in W_q^{-m+\lambda}(M_O) \Rightarrow \mathcal{R}_\Omega^J f \subset \tilde{W}_p^{m+\frac{t}{\tilde{p}-t}\lambda}(\Omega), \quad \lambda \in \left[0, \min\{\tilde{\lambda}_p, \varkappa/p\}\right).$$

Параграф 3.3 посвящен линейным краевым задачам. Доказывается справедливость следующих теорем

Теорема 8. *Пусть* $\partial\Omega \in C^{0,t}$, $t \in (0, 1]$ *выполнены условия* ***A1*–*A3***, *тогда ограничен оператор*

$$\mathcal{R}_\Omega^D : B_{2,1}^{-m+\lambda}(\Omega) \to \tilde{N}_2^{m+\frac{t}{2-t}\lambda}(\Omega), \quad \lambda \in \left[0, \tilde{\lambda}_2\right) \cap [0, \varkappa/2],$$

решающий задачу (7), $\tilde{\lambda}_2 = \frac{2-t}{t}\gamma$.

Теорема 9. *Пусть* $\Omega \subset M_O$ *— область с гельдеровой границей класса* $C^{0,t}$, $t \in (0, 1]$, *выполнены условия* ***A1*–*A3***, $\gamma = \varkappa$, *тогда оператор* $\mathcal{G}_\Omega^D : H^{-m+s}(M_O) \to \tilde{H}^{m+ts}(\Omega)$, $s \in [0, \gamma/2)$ *непрерывен.*

Теорема 10. *Пусть* $\partial\Omega \in C^{0,t}$, $t \in (0, 1]$, *выполнены условия* ***A1*–*A3***, $\gamma = \varkappa$, *тогда для атласа* $\mathcal{V}$, *в котором* $\partial\Omega$ *представима в виде графика гельдеровой функции, оператор* $\mathcal{R}_\Omega^N : \tilde{W}_2^{-m+1}(\Omega) \to d_{\mathcal{V}}^{m,1} N_2^{m+t\gamma}(\Omega)$, *решающий задачу (8), непрерывен.*

Доказательства теорем 8, 9 изложены в работе [4]. Для доказательства теоремы 10 используется теорема продолжения [7]. При $m = 1$ теорема 9 дает более сильное утверждение, чем теорема 5, так как в этом случае условия $\boldsymbol{A2}$ и $\boldsymbol{D2'}$ совпадают. Вместе с тем, теорема 6 показывает, что результаты, предложенного в главе 2 подхода, не покрываются техникой главы 3.

В заключительном **параграфе 3.4** приводятся соображения, позволяющие перенести технику доказательства из параграфа 3.3 на случай негельдеровых границ. При этом подчеркивается необходимость использования анизотропных норм.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору А.М. Степину за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Работы автора по теме диссертации

[1] И. В. Цылин, Разрешимость задачи минимизации первого собственного значения оператора Лапласа с условиями Дирихле, как функции двумерной области, Сборник трудов Международной миниконференции "Качественная теория дифференциальных уравнений и приложения" , 2013, Т. 55, С. 75–91.

[2] И. В. Цылин, О непрерывности собственных значений оператора Лапласа в зависимости от области, Вестн. Моск. Ун-та, 2015, №3, С.35–39.

[3] А. М. Степин, И. В. Цылин, О краевых задачах для эллиптических операторов в случае областей на многообразиях, Докл. РАН, 2015, Т. 463, №2, С. 144–148.

[4] I. V. Tsylin, On the smoothness of solutions to elliptic equations in domains with Hölder boundary, Eurasian Math. J., 2015, **6**:3, P. 76–92.

Цитированная литература

[5] М.С. Агранович *К теории задач Дирихле и Неймана для линейных сильно эллиптических систем в липшицевых областях*, Функц. анализ и его прил., 2007, 41:4, 1–21.

[6] *М.С. Агранович* Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей, М.: МЦНМО, 2013.

[7] В.И. Буренков *Об одном способе продолжения дифференцируемых функций*,

Тр. МИАН СССР. 1976. **140**. 27–67.

[8] В.И. Буренков *Теорема о повторных нормах для пространств Никольского–Бесова и ее применение*, Тр. МИАН СССР. 1988. **181**. 27-39.

[9] В.П. Маслов *Теория возмущений линейных операторных уравнений и проблема малого параметра в дифференциальных уравнениях*, ДАН, 111, 1956, 531–534.

[10] С. М. Никольский *Свойства некоторых классов функций многих переменных на дифференцируемых многообразиях*, Матем. сб. 1953. **33** (75):2. 261–326.

[11] G. Barbatis *Spectral Stability under L^p-perturbation of the Second-Order Coefficients*, Journal of differential equations, 1996, 124, 302-323.

[12] G. Barbatis, V.I. Burenkov, P.D. Lamberti *Stability Estimates for Resolvents, Eigenvalues, and Eigenfunctions of Elliptic Operators on Variable Domains*, Around the Research of Vladimir Maz'ya II. International Mathematical Series Vol. 12. 23–60. 2009.

[13] *D. Bucur, G. Buttazzo* Variational methods in shape optimization problems. Vol. 65. Basel; Boston: Birkhäuser, 2005.

[14] D.Bucur, J.-P. Zolesio *Wiener's criterion and shape continuity for the Dirichlet problem*, Boll. Un. Mat. Ital. B (7) 11 (1997) 757–771.

[15] V.I. Burenkov, E. Feleqi *Extension of the notion of a gap to differential operators defined on different open sets*, Mathematische Nachrichten, 2013, 286, No. 5–6, P. 518 – 535.

[16] D. Chenais *On the Existence of a Solution in a Domain Identification Problem*, J. Math. Anal. Appl. 1975. **52**. 189–219.

[17] S. Dahlke and R. A. DeVore, *Besov regularity for elliptic boundary value problems*, Comm. Partial Differential Equations 22, 1997, 1-16.

[18] S. Dahlke, L. Diening, C. Hartmann, B. Scharf, M. Weimar *Besov regularity of solutions to the p-Poisson equation*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 2016, V.130, P. 298–329.

[19] E. Feleqi, *Spectral stability estimates for eigenfunctions of second order elliptic operators*, PhD thesis, 2008.

[20] A. Gloria *An analytical framework for the numerical homogenization of monotone elliptic operators and quasiconvex energies*, Multiscale Modeling & Simulation, 2006, 5(3), 996-1043.

[21] *P. Grisvard* Elliptic Problems in Nonsmooth Domains, L.:Pitman, 1985.

[22] *A. Henrot* Extremum Problems for Eigenvalues of Elliptic Operators, Birkhäuser

Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2006.

[23] D. Jerison, C. Kenig *Boundary Value Problems on Lipschitz domains*, MMA Studies in Math. 1982. V.23 P.1-68.

[24] D. Jerison and C. E. Kenig *The inhomogeneous Dirichlet problem in Lipschitz domains*, J. Funct. Anal., 1995, 130(1), 161–219.

[25] *T. Kato* Perturbation Theory for linear operators. N.Y.: Springer Verlag, 1966.

[26] *J. L. Lions and E. Magenes*, Non Homogeneous Boundary Value Problems and Applications, Nos. 1, 2, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[27] U. Mosco *Approximation of the solutions of some variational inequalities*, Ann. Scuola Normale Sup. (Pisa). 1967. **21**. 373-394.

[28] J.D. Newburgh *The variation of spectra*, Duke Math. J, 1951, 18, 165-176.

[29] L. Nirenberg *Remarks on strongly elliptic partial differential equations*, Comm. Pure Appl. Math. 1965. V.8 P. 649–675.

[30] V.S. Rychkov *On restrictions and extensions of the Besov and Triebel–Lizorkin spaces with respect to Lipschitz domains*, J. London Math. Soc. 1999. **60**. 237–257.

[31] G. Savaré *Regularity and perturbation results for elliptic equations on Lipschitz domains*, J. Funct. Anal. 1998. **152**. 176–201.

[32] G. Savaré, G. Schimperna *Domain perturbations estimates for the solutions of second order elliptic equations*, J. Math. Pures Appl. 2002. **81**(11). 1071–1112.

[33] L. Tartar *Interpolation non linéaire et régularité*, J. Funct. Anal. 1972. **9**. 469–489.

Подписано в печать 18.02.2016
Тираж 100 экз.

Отпечатано в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН
Москва, 119991, ул. Губкина, 8