Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 517.98

Цылин Иван Вячеславович

ФУНКЦИОНАЛЬНО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ К ВОПРОСУ О РЕГУЛЯРНОСТИ РЕШЕНИЙ ВАРИАЦИОННЫХ И КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор А.М. Степин.

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2016

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Общая характеристика работы

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Настоящая диссертация посвящена применению методов функционального анализа и теории функций к вопросу регулярности решений вариационных и краевых задач в областях (с нелипшицевой границей) на многообразии. В качестве модельной может служить задача поиска связи между гладкостью решений краевой задачи

$$-\mathrm{div}(\boldsymbol{A}\nabla u + \boldsymbol{\beta} u) + \boldsymbol{b}\nabla u + cu = f \ \text{ в } \ \Omega; \quad u = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega \qquad (D)$$

и регулярностями правой части f и границы Ω, в случае оператора Лапласа–Бельтрами, возмущенного младшими членами.

Уравнения такого типа являются классическим объектом исследований в функциональном анализе и математической физике; в свою очередь результаты о повышенной гладкости решений используются при численном моделировании решений таких уравнений[1].

Один из первых результатов в этом направлении[2] утверждает, что решение u принадлежит $H^2_{loc}(\Omega)$, если коэффициенты оператора класса C^1 и $f \in L_2(\Omega)$. Затем, L. Lions и M. Magenes[3] установили, что $u \in H^2(\Omega)$ при дополнительном предположении о выпуклости Ω или выполнении равномерного условия шара для границы Ω. В начале 1990-ых был обнаружен многогранник[4], для которого утверждение выше не имеет место. Таким образом, даже если $\partial\Omega$ липшицева, то пространства Соболева целой гладкости не могут быть использованы для измерения гладкости

[1] A. Gloria *An analytical framework for the numerical homogenization of monotone elliptic operators and quasiconvex energies*, Multiscale Modeling & Simulation, 2006, 5(3), 996-1043.

[2] L. Nirenberg *Remarks on strongly elliptic partial differential equations* Comm. Pure Appl. Math. 1965. V.8 P. 649–675

[3] *J. L. Lions and E. Magenes*, Non Homogeneous Boundary Value Problems and Applications, Nos. 1, 2, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[4] D. Jerison and C. E. Kenig *The inhomogeneous Dirichlet problem in Lipschitz domains*, J. Funct. Anal., 1995, 130(1), 161–219.

решений. Поэтому, необходимо перейти к формулированию результатов о регулярности в терминах пространств обобщенной гладкости (типа Соболева). D. Jerison и C. E. Kenig[5] для оператора Лапласа, в случае областей с липшицевой границей, установили повышенную гладкость типа $u \in H^{1+s/2}(\Omega)$, если $f \in H^{-1+s/2}(\Omega)$, $s \in (0,1)$. Техника авторов не позволяла обобщение на случай переменной матрицы $\boldsymbol{A}$.

Новым импульсом к исследованиям регулярности решений таких задач послужили статьи S. Dahlke, R.A. DeVore[6] и G. Savaré [7], вышедшие в конце 1990-ых. Так во второй работе было установлено, что заключение вышеприведенной теоремы D. Jerison'a и C. E. Kenig'a имеет место, если $\boldsymbol{A} \in C^{0,1}(\Omega)$, $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{b} \equiv 0$, $c \equiv 0$ и граница Ω локально представима в виде графика липшицевой функции. Эта работа G. Savaré стимулировала появление в 2000-ых годах серии новых результатов о разрешимости и регулярности решений вариационных и краевых задач [8] [9]. С теми из них, которые относятся к краевым задачам, можно ознакомиться по недавней монографии М.С. Аграновича[10].

В случае областей с гельдеровой границей, исследования регулярности решений сталкивается с целым рядом трудностей: 1) Отсутствует оператор продолжения типа В. Рычкова[11] функций с Ω на все многообразие с сохранением обобщенной гладкости, 2) Существуют различные подходы[12] к определению пространств обобщенной гладкости в областях

[5]D. Jerison, C. Kenig *Boundary Value Problems on Lipschitz domains.* MMA Studies in Math. 1982. V.23 P.1-68.

[6]S. Dahlke and R. A. DeVore, *Besov regularity for elliptic boundary value problems*, Comm. Partial Differential Equations 22, 1997, 1-16.

[7] G. Savaré *Regularity and perturbation results for elliptic equations on Lipschitz domains.* J. Funct. Anal. 1998. **152**. 176–201.

[8]М.С. Агранович *Регулярность вариационных решений линейных граничных задач в липшицевых областях*, Функц. анализ и его прил., 2006, 40:4, 83-103

[9]S. Dahlke, L. Diening, C. Hartmann, B. Scharf, M. Weimar *Besov regularity of solutions to the p-Poisson equation*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 2016, V.130, P. 298–329

[10] *М.С. Агранович* Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей, М.: МЦНМО, 2013

[11] V.S. Rychkov *On restrictions and extensions of the Besov and Triebel–Lizorkin spaces with respect to Lipschitz domains* J. London Math. Soc. 1999. **60**. 237–257.

[12]*P. Grisvard* Elliptic Problems in Nonsmooth Domains, L.:Pitman, 1985.

с нелипшицевой границей (тем более, в случае областей на многообразиях), 3) Отсутствуют утверждения о вещественной интерполяции пространств, определенных на областях с негладкой границей.

Для получения результатов о регулярности решений рассматриваемых задач, в случае областей с гельдеровой границей, представляется перспективным преодолеть отмеченные трудности, воспользовавшись разностной техникой и методами теории функций и функционального анализа.

Другой способ (по сравнению с использующим разностную технику и теорию интерполяции) получения утверждений о повышенной гладкости решений задачи (D) был предложен (2002 г) для уравнения Пуассона в работе G. Savaré и G. Schimperna [13]. Ими было отмечено, что эффект повышения гладкости решения тесно связан с количественными оценками резольвентной непрерывности при вариации области Ω.

Понятие резольвентной сходимости последовательности операторов, действующих в банаховых пространствах, было введено в 1950-ых годах (под названием "обобщенная сходимость операторов") в работах В.П. Маслова [14] и J.D. Newburgh [15]. С середины 1960-ых за данным типом сходимости закрепилось название сходимости в смысле раствора (по истории вопроса, см. монографию Като [16]). Сходимость в смысле раствора измеряет расстояние между пересечениями графиков операторов $T_s : X \to Y$ и единичной сферы $S \subset X \times Y$, и совпадает со сходимостью в равномерной операторной топологии, если T_s – ограниченные операторы. Если же операторы T_s неограничены, $X = Y$, и резольвентные множества T_s содержат общую точку λ, то сходимость в смысле раствора имеет место тогда и только тогда, когда операторы $(T_s - \lambda I)^{-1}$ сходятся по операторной норме.

[13] G. Savaré, G. Schimperna *Domain perturbations estimates for the solutions of second order elliptic equations* J. Math. Pures Appl. 2002. **81**(11). 1071–1112.

[14] В.П. Маслов *Теория возмущений линейных операторных уравнений и проблема малого параметра в дифференциальных уравнениях*, ДАН, 111, 1956, 531–534.

[15] J.D. Newburgh *The variation of spectra* Duke Math. J, 1951, 18, 165-176

[16] *T. Kato* Perturbation Theory for linear operators. N.Y.: Springer Verlag, 1966.

Как оказалось, наиболее удобным инструментом для работы с резольвентной сходимостью в $L_2(\Omega)$ (применительно к модельной задаче) является эквивалентная ей сходимость U. Mosco [17].

На протяжении 1990-ых в работах D.Bucur, J.-P. Zolesio [18] [19] (подробно см. обзор D. Bucur и G. Buttazzo [19]) исследовались необходимые и достаточные условия на класс варьируемых (по метрике Хаусдорфа) областей Ω, обеспечивающие равномерную резольвентную сходимость. Теоремы в этих работах утверждали лишь сам факт сходимости, не раскрывая количественной оценки.

Что касается исследования количественных оценок резольвентной сходимости, при возмущении коэффициентов оператора, то ему были посвящены работы (список ссылок и историю вопроса можно найти в обзоре A. Henrot [20], отдельно отметим работу G. Barbatis [21]), написанные главным образом в 1980-1990-ых годах.

Однако резольвентная непрерывность при возмущении области привлекла внимание исследователей лишь во второй половине 2000-ых (например, резольвентной непрерывности такого вида посвящена PhD работа E. Feleqi[22], защищенная в 2010 году), а бурное развитие получила уже в 2010-ых (см., например работы В. И. Буренкова, E. Feleqi, P.D. Lamberti, G. Barbatis [23] [24]). Автор диссертации использует оценки

---

[17] U. Mosco *Approximation of the solutions of some variational inequalities* Ann. Scuola Normale Sup. (Pisa). 1967. **21**. 373-394.

[18] D.Bucur, J.-P. Zolesio *Wiener's criterion and shape continuity for the Dirichlet problem*, Boll. Un. Mat. Ital. B (7) 11 (1997) 757–771.

[19] *D. Bucur, G. Buttazzo* Variational methods in shape optimization problems. Vol. 65. Basel; Boston: Birkhäuser, 2005.

[20] *A. Henrot* Extremum Problems for Eigenvalues of Elliptic Operators, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2006.

[21] G. Barbatis *Spectral Stability under L^p-perturbation of the Second-Order Coefficients* Journal of differential equations, 1996, 124, 302-323

[22] E. Feleqi, *Spectral stability estimates for eigenfunctions of second order elliptic operators*, PhD thesis, 2008

[23] G. Barbatis, V.I. Burenkov, P.D. Lamberti *Stability Estimates for Resolvents, Eigenvalues, and Eigenfunctions of Elliptic Operators on Variable Domains.* Around the Research of Vladimir Maz'ya II. International Mathematical Series Vol. 12. 23–60. 2009.

[24] V.I. Burenkov, E. Feleqi *Extension of the notion of a gap to differential operators defined on different open sets* Mathematische Nachrichten, 2013, 286, No. 5–6, P. 518 – 535

резольвентной непрерывности как при возмущении области, так и при возмущении коэффициентов. При этом, интерес представляет не только получение новых оценок, но и их применение к задаче о повышении гладкости решений.

Цель работы. Получить оценки модуля резольвентной непрерывности краевых задач Дирихле для оператора Лапласа–Бельтрами, возмущенного младшими членами, в областях с нелипшицевой границей. Извлечь из резольвентной непрерывности факт повышения гладкости решений задачи в невозмущенной области для достаточно регулярных правых частей.

Для вариационных и краевых задач изучить связь между показателями гладкости границы области, суммируемостью коэффициентов, регулярностью правой части и гладкостью решения, в случае областей на многообразии, границы которых локально представимы в виде графика функции с условием Гельдера.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Получены оценки модуля резольвентной непрерывности первой краевой задачи для оператора Лапласа–Бельтрами относительно малой (по метрике Хаусдорфа–Помпейю) вариации области в классе тех, граница которых локально представима в виде графика непрерывной функции;

2. Для широкого класса вариационных и краевых задач изучена взаимосвязь регулярности правых частей и гладкости решений в случае областей с гельдеровой границей. При этом краевые задачи рассматриваются в случае операторов с коэффициентами из пространств Бесова функций негативной гладкости;

3. Для операторов ассоциированных с секториальными формами и соответствующих краевых задач изучена связь резольвентной непрерыв-

ности таких задач и свойства повышения гладкости их решений;

4. Предложен новый подход к установлению стабильности спектра операторов.

Методы исследования. В работе используются методы теории пространств Никольского–Бесова и Соболева–Слободецкого, теории вещественной интерполяции, теории дифференцирования в бесконечно-мерных пространствах, а также теории возмущений линейных операторов.

Теоретическая и практическая ценность. Работа имеет теоретический характер. Ее результаты и методы, развитые для их получения, могут быть использованы в теории возмущения, спектральной теории, теории граничных задач.

Апробация диссертации. Автор выступал с докладами по теме диссертации на следующих семинарах:

- «Динамические системы и дифференциальные уравнения», МГУ, руководители: академик РАН Д.В. Аносов, проф. А.М. Степин (2013);
- «Асимптотические методы в уравнениях математической физики», МГУ, руководители: проф. В.В. Жиков, проф. Е.В. Радкевич, проф. А.С. Шамаев, проф. Т.А. Шапошникова (2013);
- «Дифференциальные уравнения и динамические системы», МГУ, руководители: проф. А.М. Степин, проф. А.А. Давыдов (2014–2015);
- «Бесконечномерный анализ и математическая физика», МГУ, руководители: проф. О.Г. Смолянов, проф. Е.Т. Шавгулидзе, д.ф.-м.н. Н.Н. Шамаров (2014);
- Научно-исследовательский семинар по теории функций под руководством академика РАН Б.С. Кашина, член-корр. РАН, проф. С.В. Конягина, проф. М.И. Дьяченко, проф. Б.И. Голубова (2015);

- Научно-исследовательский семинар по теории функций многих действительных переменных и ее приложениям к задачам математической физики (семинар Никольского), МИАН, под руководством член-корр. РАН О.В. Бесова (2015);

- «Функциональный анализ и его приложения», РУДН, руководитель: проф. В.И. Буренков (2015);

- Совместное заседание научно-исследовательских семинаров кафедры математического анализа и теории функций и кафедры нелинейного анализа и оптимизации, РУДН, руководители: проф. А.В. Арутюнов, проф. В.И. Буренков (2015);

- Научно-исследовательский семинар по теории приближений аналитическими функциями, МГУ, руководители: проф. П.В. Парамонов, д.ф.-м.н. К.Ю. Федоровский (2015);

- «Дифференциальные и функционально-дифференциальные уравнения» (Научный семинар DFDE), РУДН, руководитель: проф. А.Л. Скубачевский (2016).

Содержащиеся в диссертации результаты докладывались на следующих конференциях:

- Всероссийская конференция «Дифференциальные уравнения и их приложения» (г. Самара, 2013);

- Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (г. Суздаль, 2014);

- Юбилейная научная конференция «Ломоносовские чтения–2015», посвященная 260-летию Московского университета (г. Москва, 2014);

- XXII Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2015» (г. Москва, 2015);

- Международная конференция по функциональным пространствам и теории приближения функций, посвященная 110-летию со дня рождения академика С.М. Никольского (г. Москва, 2015);
- Международная конференция по математической теории управления и механике (г. Суздаль, 2015);
- Международная научная конференция «Теория приближений функций и родственные задачи анализа», посвященная памяти профессора П.П. Коровкина (г. Калуга, 2015).

Публикации. Основные результаты диссертации изложены в 4 статьях, 3 из которых опубликованы в научных журналах из списка, рекомендованного ВАК.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы из 40 наименований. Общий объем диссертации составляет 99 страниц.

Краткое содержание диссертации

Во **Введении** обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована ее цель и аргументирована научная новизна исследований, представлены выносимые на защиту научные положения.

Пусть (M, g) — гладкое связное компактное риманово d-мерное многообразие без края, $M_O := M \backslash \bar{O}$, $O \subset M$ — фиксированное непустое открытое множество с гладкой границей, $\Omega \subset M_O$ — область, $\boldsymbol{A}$ — эрмитово сечение $T^2_{\mathbb{C}}M$ расслоения, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{b}$ — векторные поля на M, c — комплексно-значная функция на M. Для эллиптического оператора

$$\mathcal{A}u = -\operatorname{div}(\boldsymbol{A}\nabla u + \boldsymbol{\beta} u) + \boldsymbol{b}\nabla u + cu$$

рассматриваются первая краевая задача

$$\mathcal{A}u = f \text{ в } \Omega; \quad u = 0 \text{ на } \partial\Omega, \tag{1}$$

и, в случае $\boldsymbol{\beta} \equiv \overline{\boldsymbol{b}}$, $\operatorname{Im} c \equiv 0$, соответствующая спектральная задача

$$\mathcal{A}u = \lambda u \text{ в } \Omega; \;\; u = 0 \text{ на } \partial\Omega.$$

Глава 1 посвящена получению оценок сходимости резольвент оператора $\mathcal{A}$ при возмущении границы области Ω, если $\partial\Omega$ локально представима в виде графика непрерывной функции, $\boldsymbol{A} \in C^{0,1}(M)$, $\boldsymbol{\beta} \equiv \boldsymbol{b} \equiv 0$, $c \equiv 0$. Также обсуждается корректность задачи (1) в случае, если коэффициенты оператора $\mathcal{A}$ удовлетворяют достаточно общим условиям регулярности. Излагается новый подход к описанию стабильности спектра.

Для открытого множества $A \subset M$ и чисел $k, l \in \mathbb{Z}_+$ вводится пространство Лебега $L_p(A, \mathcal{T}_k^l)$, $p \in [1, \infty]$, как совокупность всех сечений X расслоения $\mathcal{T}_k^l M := \big(\otimes^k T^*_{\mathbb{C}} M\big) \otimes \big(\otimes^l T_{\mathbb{C}} M\big)$, для которых конечна норма $\|X\|_{L_p(A,\mathcal{T}_k^l)} := \left\| \left| X^{\sharp^l \flat^k} \; \overline{X} \right|^{1/2} \right\|_{L_p(A)}$, где $\sharp : T^*_{\mathbb{C}} M \to T_{\mathbb{C}} M$, $\flat : T_{\mathbb{C}} M \to T^*_{\mathbb{C}} M$ — изоморфизмы, соответствующие операциям поднятия и опускания индексов.

Пусть дополнительно $A \subset M_O$, тогда сечение $X \in L_p(A, \mathcal{T}_k^l)$ принадлежит пространству Соболева $W_p^m(A, \mathcal{T}_k^l)$, $p \in [1, \infty]$, $m \in \mathbb{N}$, если $\nabla^m X \in L_p(A, \mathcal{T}_{k+m}^l)$. Пополнение пространства $\mathcal{D}(A, \mathcal{T}_k^l)$, состоящее из $C_0^\infty(A)$–гладких сечений расслоения $\mathcal{T}_k^l M$, по норме $\|X\|_{w_p^m(A,\mathcal{T}_k^l)} := \|\nabla^m X\|_{L_p(A,\mathcal{T}_{k+m}^l)}$ обозначим $\mathring{W}_p^m(A, \mathcal{T}_k^l)$.

Пространство $W_q^{-m}(A, \mathcal{T}_k^l)$, $q \in (1, \infty)$, вводится как двойственное к $\mathring{W}_p^m(A, \mathcal{T}_k^l)$, $1/p + 1/q = 1$, с нормой $\|f\|_{W_q^{-m}(A,\mathcal{T}_k^l)} := \sup\limits_{u \in \mathcal{D}(A,\mathcal{T}_k^l)\setminus\{0\}} \frac{|\tau(f,u)|}{\|u\|_{w_p^m(A,\mathcal{T}_k^l)}}$, где τ — форма на $\mathcal{D}'(A, \mathcal{T}_k^l) \times \mathcal{D}(A, \mathcal{T}_k^l)$, порожденная скалярным произведением в $L_2(A, \mathcal{T}_k^l)$. Везде ниже будем опускать зависимость пространств от $\mathcal{T}_k^l$. Обозначим $H^m(M) = W_2^m(M)$, $\mathring{H}^m(A) = \mathring{W}_2^m(A)$, $H^{-m}(A) = W_2^{-m}(A)$, $\|u\|_{h^m(A)} = \|u\|_{w_2^m(A)}$. Потребуем выполнения следующих условий

D1 $\exists \alpha > 0 : \forall x \in M \; \forall \xi \in \mathbb{C} \otimes T_x^* M \Rightarrow \alpha \; \xi^\sharp \; \overline{\xi} \leq \boldsymbol{A}(\xi \otimes \overline{\xi})$;

и для некоторого $\epsilon > 0$

D2 $\boldsymbol{A} \in L_\infty(M_O)$, $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{\beta} \in L_{d^*}(M_O)$, $c \in W^{-1}_{d^*}(M_O)$, $d^* = \max\{2+\epsilon, d\}$;

D3 $\|\mathrm{Re}\,\boldsymbol{b}\|_{L_{d^*}(M_O)} + \|\mathrm{Re}\,\boldsymbol{\beta}\|_{L_{d^*}(M_O)} + 2\|\mathrm{Re}\,c\|_{W^{-1}_{d^*}(M_O)} < \frac{\alpha-\alpha'}{C_{emb}}$, $\alpha' > 0$,

где C_{emb} — константа непрерывного вложения $\overset{\circ}{H}{}^1(M_O) \hookrightarrow L_{\frac{2d^*}{d^*-2}}(M_O)$.

В **параграфе 1.1** показано, что условий ***D1–D3*** достаточно, чтобы корректно определить оператор $\mathcal{A}$. То есть для любой функции $f \in H^{-1}(\Omega)$ существует единственное решение $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ задачи (1), понимаемое в следующем смысле

$$\forall v \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \quad \Phi(u,v) = \tau(f,v),$$

$$\Phi(u,v) := \int_M \boldsymbol{A}\nabla u \otimes \overline{\nabla v}\, dVol + \int_M \boldsymbol{\beta} u \overline{\nabla v}\, dVol + \int_M \boldsymbol{b}\nabla u \overline{v}\, dVol + \int_M cu\overline{v}\, dVol$$

и значит, определен ограниченный линейный оператор $\mathcal{R}_\Omega : H^{-1}(\Omega) \to \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, $\mathcal{R}_\Omega : f \mapsto u$; оператор $\mathcal{A}$ вводится как обратный к $\mathcal{R}_\Omega$.

В тексте диссертации определяется оператор $\mathcal{G}_\Omega$ решающий задачу (1) с правыми частями из $H^{-1}(M_O)$. Так как все $\mathcal{G}_\Omega$ имеют общую область определения, то для последовательности областей $\{\Omega_\varepsilon\}$ из M_O, которые в подходящем смысле стремятся к предельной $\Omega \subset M_O$, законно поставить вопрос о сходимости

$$\|\mathcal{G}_\Omega - \mathcal{G}_{\Omega_\varepsilon}\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \to 0, \quad \text{при} \;\; \varepsilon \to 0, \tag{2}$$

где X, Y — некоторые банаховы пространства, $\mathcal{L}(X,Y)$ — пространство линейных ограниченных операторов из X в Y. Если (2) выполнено, то будем говорить, что для оператора $\mathcal{A}$ имеет место резольвентная непрерывность в пространстве Y при возмущении $\{\Omega_\varepsilon\}$ области Ω. Функция $\|\mathcal{G}_\Omega - \mathcal{G}_{\Omega_\varepsilon}\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ при этом называется модулем резольвентной непрерывности.

Отдельно рассматриваются два случая резольвентной непрерывности (2), в пространстве $H^{1-s}(M)$ и в пространстве $H^1(M)$. Пусть $\{O_k\}_1^K$ — покрытие многообразия M координатными окрестностями и $\{\psi_k\}_1^K$ — подчиненное разбиение единицы. Для произвольного $s \in \mathbb{R}$ полагаем

$\|u\|^2_{H^s(M)} = \sum \|u\psi_k\|^2_{H^s(\mathbb{R}^d)}$, $\|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} \left(1+|\xi|^2\right)^s |F(u)(\xi)|^2 d\xi$, F — преобразование Фурье, где подразумевается, что функция $u\psi_k$ продолжена нулем на все $\mathbb{R}^d$.

Параграф 1.2 посвящен применению сходимости по Mosco [17] к установлению резольвентной непрерывности в пространстве $H^{1-s}(M)$, и спектральной устойчивости оператора $\mathcal{A}$. Пусть (H,h) — гильбертово пространство, а H_l — его подмножества. Рассматриваются множества

$$\text{s-Lim}\inf H_l = \{v \in H | \forall S(v)\ \exists L > 0 : \forall l \geq L\ H_l \cap S(v) \neq \varnothing\}, \quad (3)$$

$$\text{w-Lim}\sup H_l = \{v \in H | \forall W(v)\ \forall l_0 > 0\ \exists l \geq l_0,\ H_l \cap W(v) \neq \varnothing\}, \quad (4)$$

где $S(v)$ и $W(v)$ — слабая и сильная окрестности точки v соответственно. Последовательность H_l сходится в смысле Mosco к H_0, если предельные множества (3) и (4) совпадают с H_0. Дополнительно полезно рассмотреть гильбертово пространство (L,l) и последовательность $\{L_k\}$ его подпространств с тем свойством, что существует линейный ограниченный оператор $\mathrm{id} : H \to L$ реализующий компактные вложения $H \overset{\text{comp}}{\hookrightarrow} L$, $H_k \overset{\text{comp}}{\hookrightarrow} L_k$. Задается абстрактный функционал Рэлея $\mathfrak{J}(v) := \frac{h(v,v)}{l(v,v)}$, который формально равен ∞, если $v = 0$. Тогда выполнено

Предложение 1. *Если H_l — конусы в H, то*

$$\inf_{v\in \text{s-Lim}\inf H_l} \mathfrak{J}(v) \geq \limsup_{l\to\infty} \inf_{v\in H_l} \mathfrak{J}(v),$$
$$\inf_{v\in \text{w-Lim}\sup H_l} \mathfrak{J}(v) \leq \liminf_{l\to\infty} \inf_{v\in H_l} \mathfrak{J}(v). \quad (5)$$

Если в (5) выполнено равенство, то нормированная в H последовательность, минимизирующая правую часть (5), предкомпактна в H.

Пусть μ, δ — мера и метрика порожденные римановой структурой многообразия M, для подмножеств $X, Y \subset M$ положим $e(X,Y) = \sup_{x\in X} \delta(x,Y)$, $\check{e}(X,Y) = \sup_{y\in M\setminus Y} \delta(y,X)$. Основным результатом параграфа 1.2 является то, что сходимость Mosco позволяет получить достаточно слабые условия стабильности спектра оператора $\mathcal{A}$ (при возмущении области Ω) [38] и резольвентной непрерывности в пространстве $H^{1-s}(M)$:

Теорема 1. *Пусть* $\{\Omega_l\}$, Ω *— области* M_O, $\mathcal{G}_\Omega$ *— оператор решающий задачу (1), оператор* $\mathcal{A}$ *удовлетворяет условиям* ***D1–D3***, $\boldsymbol{\beta} \equiv \overline{\boldsymbol{b}}$, $\operatorname{Im} c \equiv 0$, $\lambda_k(\Omega)$ *— k–ое собственное значение в области* Ω*, тогда*

1. Если $\check{e}(\Omega, \Omega_l) \to 0$, *то* $\limsup_{l\to\infty} \lambda_k(\Omega_l) \le \lambda_k(\Omega)$*;*

2. Если $\mu(\Omega_l \backslash \Omega) \to 0$ *и* $\partial\Omega$ *локально представима в виде графика непрерывной функции, то* $\liminf_{l\to\infty} \lambda_k(\Omega_l) \ge \lambda_k(\Omega)$*;*

3. Если одновременно выполнены условия 1 и 2, то для любого $s > 0$

$$\|\mathcal{G}_{\Omega_l} - \mathcal{G}_\Omega\|_{\mathcal{L}(H^{-1}(M_O), H^{1-s}(M))} \to 0, \quad \textit{при} \quad l \to \infty.$$

Доказательство пунктов 1 и 2 теоремы 1 основано на последовательном применении принципа Куранта–Фишера, определяющего собственные значения оператора $\mathcal{A}$ с помощью соотношения Рэлея, и предложения 1. Утверждение пункта 3 имеет место вследствие того, что из сходимости по Mosco пространств $\mathring{H}^1(\Omega_l)$ к пространству $\mathring{H}^1(\Omega)$ следует резольвентная сходимость в пространстве $H^{1-s}(M)$. Простейший случай (если $\mathcal{A}$ является оператором Лапласа и Ω удовлетворяет равномерному условию конуса) рассмотрен в работе [37].

В **параграфе 1.3** устанавливаются оценки модуля резольвентной непрерывности в пространстве $H^1(M)$ для оператора $\mathcal{A}$, $\boldsymbol{b} \equiv \boldsymbol{\beta} \equiv 0$, $c \equiv 0$, удовлетворяющего условию ***D1***.

Для этого определяются четыре основные величины, измеряющие расстояния между подобластями M_O: расстояния Хаусдорфа для открытых и замкнутых множеств

$$d_{\mathcal{H}}(X,Y) = \max\{e(X,Y), e(Y,X)\}, \quad d^{\mathcal{H}}(X,Y) = \max\{\check{e}(X,Y), \check{e}(Y,X)\}.$$

расстояние Хаусдорфа–Помпейю и величина $d_{\mathcal{HS}}$:

$$d^{\mathcal{HP}}(X,Y) = \max\left\{d_{\mathcal{H}}(X,Y), d^{\mathcal{H}}(X,Y)\right\}.$$
$$d_{\mathcal{HS}}(X,Y) = \min\left\{e(X\Delta Y, \partial Y), e(X\Delta Y, \partial X), d_{\mathcal{H}}(X,Y), d^{\mathcal{H}}(X,Y)\right\}$$

В тексте диссертации на основе конструкции класса $\Pi(\theta, h, r)$ из [25],

[25] D. Chenais *On the Existence of a Solution in a Domain Identification Problem* J. Math. Anal. Appl. 1975. **52**. 189–219.

строится классификация областей $\Omega \subset M$ с границами представимыми в виде графиков непрерывных функций с предписанными модулями непрерывности. Для функции $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ такой, что разность $(\omega(r) - \omega(0))$ является неотрицательной и полуаддитивной, вводятся величины $\psi(r) = \sqrt{r^2 + \omega(r)^2}$, $\phi(r) = r + \omega(r)$.

Определение 1. *Скажем, что открытое множество Ω удовлетворяет равномерному условию ω-каспа в точке x с параметром r, если существует единичный вектор $\xi_x \in \mathbb{R}^d$ такой, что*

W1 $\left[\left(B_{3\psi(r)}(x) \cap \Omega\right) - \mathcal{C}_{\omega,r}(\xi_x)\right] \cap B_{2\psi(r)} \subset \Omega$*;*
где $\mathcal{C}_{\omega,r}(\xi_x)$ получается из $\mathcal{C}_{\omega,r}(e_d) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathcal{S}_{\omega,r}(e_d) \cup \mathcal{F}_{\omega,r}(e_d)$ поворотом, так чтобы e_d и ξ_x совместились и $\tilde{z} = (z^1, \ldots, z^{d-1})$,

$$\mathcal{F}_{\omega,r}(e_d) = \left\{z = (\tilde{z}, z^d) \in \mathbb{R}^d : \ |z| < \psi(r), \ \ z^d \geq \omega(r)\right\},$$
$$\mathcal{S}_{\omega,r}(e_d) = \left\{(\tilde{z}, z^d) \in \mathbb{R}^d : \omega(|\tilde{z}|) < z^d < \omega(r), \ \ |\tilde{z}| < r\right\}.$$

W2 $\left[\left(B_{3\psi(r)}(x) \backslash \Omega\right) + \mathcal{C}_{\omega,r}(\xi_x)\right] \cap \left(B_{2\psi(r)} \cap \Omega\right) = \varnothing$*.*

Заметим, что ***W1*** эквивалентно требованию ***W2***. Для $\rho > 0$, $\vartheta \geq 1$ вводится понятие (ρ, ϑ)–технического атласа $\mathfrak{W} = \{(W_y, \chi_y)\}_{y \in M}$ многообразия M.

W3 $\forall y \in M \Rightarrow \mathcal{B}_{3\rho}(y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \chi_y^{-1}(B_{3\rho}(\chi_y(y)) \subset W_y$,

W4 Для любой карты $(W, \chi) \in \mathfrak{W}$, $C^{0,1}$-норма $\mathbf{G} \circ \chi$ и $(\mathbf{G} \circ \chi)^{-1}$ не превосходит ϑ.

W5 Для любых двух карт $W_1, W_2 \in \mathfrak{W}$ $C^{0,1}$-норма матрицы Якоби $J = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right)$ не превосходит ϑ.

Определение 2. *Скажем, что открытое множество $\Omega \subset M$ удовлетворяет равномерному условию ω-каспа с параметрами (r, ϑ), $r > 0$, $\vartheta \geq 1$ если существует $(\psi(r), \vartheta)$–технический атлас такой, что для любого $y \in M$ открытое множество $\chi_y(\Omega \cap \mathcal{B}_{3\psi(r)}(y))$ удовлетворяет равномерному условию ω-каспа с параметром r в точке $\chi_y(y)$. Данный класс будем обозначать $\mathcal{W}^{\omega}_{r,\vartheta}$.*

Обозначим $C^{0,\omega(\cdot)}$ класс границ, локально представимых в виде графиков непрерывных функций с модулем непрерывности $C\omega$, где C есть некоторая константа, своя для каждой границы. Центральным результатом первой главы является следующая

Теорема 2. *Пусть* $\partial\Omega_1 \in C^{0,\omega(\cdot)}$, *оператор* $\mathcal{A}$ *удовлетворяет условию* ***D1***, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{\beta} \equiv 0$, $c \equiv 0$, $f \in L_2(M)$, $u_i = \mathcal{G}_{\Omega_i} f$, $i = 1, 2$. *Тогда, для достаточно малого* $\varepsilon = e(\Omega_2 \Delta \Omega_1, \partial\Omega_1)$ *существует константа* $K(M_O, \mathcal{W}^\omega_{r,\vartheta}, \mathcal{A})$, *такая что*

$$\|u_1 - u_2\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(M_O)} \le K \cdot \phi(\varepsilon) \|f\|_{L_2(M_O)} \|f\|_{H^{-1}(M_O)}.$$

Если $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{W}^\omega_{r,\vartheta}$, $\vartheta \ge 1$, $r > 0$, $\omega(0) = 0$, $d_{\mathcal{HS}}(\Omega_1, \Omega_2)$ *мало, то*

$$\|u_1 - u_2\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(M_O)} \le K \cdot \phi(d_{\mathcal{HS}}(\Omega_1, \Omega_2)) \|f\|_{L_2(M_O)} \|f\|_{H^{-1}(M_O)}.$$

Схема доказательства опубликована в работе [39].

В **Главе 2** обобщаются оценки модуля резольвентной непрерывности, на случай, когда $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{b}, c \not\equiv 0$. Эти оценки применяются к вопросу о регулярности решений задачи (1).

В **параграфе 2.1** Определяются пространства Никольского–Бесова, приводятся связанные с ними свойства: теоремы вложения и продолжения, теоремы о взятии повторных норм и теоремы, связанные с конструкцией вещественной интерполяции.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — открытое множество, $\forall \delta > 0$ $\Omega^{-\delta} = \{x \in \Omega \,|\, \rho(x, \partial\Omega) > \delta\}$, $Z(\Omega^{-\delta})$ — некоторое полунормированное пространство функций, заданных на $\Omega^{-\delta}$, $1 \le \theta \le \infty$, $l \in \mathbb{R}_+$, $m, \sigma \in \mathbb{N}$.

Будем говорить, что $f \in d^{m,\sigma} B^l_\theta(Z(\Omega))$, если $f \in L_{1,loc}(\Omega)$ и

$$\begin{gathered} \|f\|_{d^{m,\sigma} B^l_\theta(Z(\Omega))} = \|f\|_{Z(\Omega)} + \sum \|f\|_{d^{m,\sigma} b^l_\theta(Z(\Omega))} < \infty, \\ \|f\|_{d^{m,\sigma} b^l_\theta(Z(\Omega))} = \left\| h^{-l-m} \|\Delta^{\sigma j}_{h,j} \partial^m_j f\|_{Z(\Omega^{-\sigma h})} \right\|_{L^*_\theta(0,H)}, \end{gathered} \tag{6}$$

и обозначим $n^l := b^l_\infty$, $N^l := B^l_\infty$. Здесь $\Delta^\sigma_{h,j}\varphi$ — разность по переменной x_j порядка σ с шагом h, $L^*_\theta(0, H)$ — пространство измеримых на $(0, H)$ функций g одной переменной, для которых при $1 \le \theta < \infty$

$$\|g\|_{L^*_\theta(0,H)} = \left(\int_0^H |g(h)|^\theta \frac{dh}{h} \right)^{1/\theta} < \infty, \quad (L^*_\infty(0, H) = L_\infty(0, H))$$

Будем считать, что набор l, σ, m допустимый, если $\sigma + m > l > m$.

Определение 3. *Пусть набор l, σ, m является допустимым, $l > 0$, $p \in [1, \infty]$, $\theta \in [1, \infty)$ пространствами Бесова и Никольского назовем соответственно*

$$d^{m,\sigma} B^l_{p,\theta}(\Omega) := d^{m,\sigma} B^l_\theta(L_p(\Omega)), \quad d^{m,\sigma} N^l_p(\Omega) := d^{m,\sigma} B^l_\infty(L_p(\Omega))$$

Если существует оператор продолжения $P : d^{m,\sigma} B^l_\theta(L_p(\Omega)) \to d^{m,\sigma} B^l_\theta(L_p(\mathbb{R}^d))$, то определение этих пространств не зависит от допустимого набора l, σ, m. В этом случае обозначим

$$B^s_{p,\theta}(\Omega) = d^{m,\sigma} B^s_{p,\theta}(\Omega), \quad N^s_p(\Omega) = d^{m,\sigma} N^s_p(\Omega).$$

Далее вводятся пространства $\tilde{B}^s_{p,\theta}(\Omega) = \{v \in B^s_{p,\theta}(\mathbb{R}^d) \,|\, \operatorname{supp} v \subset \overline{\Omega}\}$, $\tilde{N}^s_p(\Omega) = \{v \in N^s_p(\mathbb{R}^d) \,|\, \operatorname{supp} v \subset \overline{\Omega}\}$. Данное определения не зависит от атласа и разбиения единицы [26].

Определение 4. Для произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ скажем, что $f \in \mathring{N}^s_p(\mathbb{R}^d)$, $r + 1 \geq \lfloor s \rfloor > r$, $s > 0$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $p \in (1, \infty)$ если одновременно

$$\lim_{h \to 0} \max_j h^{-1} \|\Delta^2_{h,j} \partial^r_j f\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} = 0, \qquad \lim_{|h| \to \infty} \max_j h^{-1} \|\Delta^2_{h,j} \partial^r_j f\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

Для $q \in (1, \infty)$ обозначим $B^{-s}_{p',q'}(\Omega) = \left(\tilde{B}^s_{p,q}(\Omega)\right)'$, $B^{-s}_{p',1}(\Omega) = \left(\mathring{\tilde{N}}^s_p(\Omega)\right)'$, причем $1/p + 1/p' = 1$, $1/q + 1/q' = 1$.

В случае, если Ω — область в M введем пространства Никольского–Бесова следующим образом. Пусть $\{(U, \chi_U)\}$ — конечный атлас и $\{\psi_U\}$ — подчиненное гладкое разбиение единицы. Тогда скажем, что сечение $\boldsymbol{S} \in B^s_{p,q}(M)$, $s \in \mathbb{R}$, $p \in [1, \infty]$, $q \in [1, \infty]$ если $(\boldsymbol{S} \cdot \psi_U) \circ \chi_U^{-1} \in B^s_{p,q}(\chi_U(U))$.

Определение 5. *Пусть m, σ, l — допустимый набор, $\mathcal{U} = \{U, \kappa_U\}$ — атлас многообразия M и $\{\psi_U\}$ — подчиненное разбиение единицы, $\Omega \subset M$ — открытое множество, то $u \in d^{m,\sigma}_{\mathcal{U}} B^l_{p,q}(\Omega)$, если выполнено (6) для $\psi_U u$ в каждой карте U.*

[26] С. М. Никольский *Свойства некоторых классов функций многих переменных на дифференцируемых многообразиях* Матем. сб. 1953. **33** (75):2. 261–326.

Далее определяется понятие вещественной интерполяции.

Определение 6. *Пусть* $0 < s < 1$, *интерполяционные пространства вводятся при* $1 \leq \theta \leq \infty$ *как*

$$(A_0, A_1)_{s,\theta} = \left\{ a \;\middle|\; a \in A_0 + A_1, \|a\|_{(A_0,A_1)_{s,\theta}} = \left\| t^{-s} K(t,a) \right\|_{L^*_\theta(0,\infty)} \right\},$$

где $K(t,a) = K(t,a;A_0,A_1) = \inf_{a=a_0+a_1} (\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1})$, $a \in A_0 + A_1$.

Вещественная интерполяция позволяет получать непрерывность линейных ограниченных операторов в парах промежуточных пространств. Отметим, что пространства Бесова являются результатом интерполяции пространств Лебега и Соболева.

Параграф 2.2 посвящен обобщению теоремы 2. Потребуем, чтобы оператор $\mathcal{A}$ удовлетворял условиям ***D1*** и ***D3***, для $\gamma \in (0,1]$ и некоторого $\epsilon > 0$, $d^* = \max\{2+\epsilon, d\}$ регулярность коэффициентов определялась из таблицы

D2′

γ	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{\beta}$	$\boldsymbol{b}$	c
$(0,1)$	$C^{0,\gamma}(M_O)$	$\tilde{N}^{\gamma}_{d+\epsilon}(M_O)$	$L_{\frac{d+\epsilon}{1-\gamma}}(M_O)$	$B^{-1+\gamma}_{d+\epsilon,1}(M_O)$
1	$C^{0,1}(M_O)$	$\mathring{W}^1_{d^*}(M_O)$	$L_\infty(M_O)$	$L_{d^*}(M_O)$

Применяя интерполяционные теоремы[10] и свойства повторных норм в пространствах Бесова[27], следуя доказательству теоремы 2, получаем оценки модуля резольвентной непрерывности задачи (1) в пространстве $H^1(M)$ относительно возмущения границы области, локально представимой в виде графика непрерывной функции.

Теорема 3. *Пусть* $\partial\Omega_1 \in C^{0,\omega(\cdot)}$, Ω_2 *— открытое подмножество* M_O, *оператор* $\mathcal{A}$ *удовлетворяет условиям* ***D1***, ***D2′***, ***D3***. *Тогда при достаточно малом* $\varepsilon = e(\Omega_2 \Delta \Omega_1, \partial\Omega_1)$ *существует константа* $C(M_O, \mathcal{W}^\omega_{r,\vartheta}, \mathcal{A})$, *такая что*

$$\|\mathcal{G}_{\Omega_2} - \mathcal{G}_{\Omega_1}\|_{\mathcal{L}(B^{-1+\gamma/2}_{2,1}(M_O), \mathring{H}^1(M_O))} \leq C^{1/2} \phi(\varepsilon)^{\gamma/2}.$$

[27]В.И. Буренков *Теорема о повторных нормах для пространств Никольского–Бесова и ее применение* Тр. МИАН СССР. 1988. **181**. 27-39.

Если $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{W}^{\omega}_{r,\vartheta}$, $\vartheta \geq 1$, $r > 0$, *и* $d_{\mathcal{HS}}(\Omega_1, \Omega_2)$ *мало, то*

$$\|\mathcal{G}_{\Omega_2} - \mathcal{G}_{\Omega_1}\|_{\mathcal{L}(B^{-1+\gamma/2}_{2,1}(M_O), \overset{\circ}{H}{}^1(M_O))} \leq C^{1/2}\phi(d_{\mathcal{HS}}(\Omega_1, \Omega_2))^{\gamma/2}.$$

Параграф 2.3 посвящен приложению резольвентной непрерывности к задаче о регулярности решений.

Для операторов $\mathcal{A}_{(n)} = -\mathrm{div}(\boldsymbol{A}_{(n)}\nabla u + \boldsymbol{\beta}_{(n)}u) + \boldsymbol{b}_{(n)}\nabla u + c_{(n)}u$, $n = 1, 2$, удовлетворяющих условиям ***D1***, ***D2***, ***D3***, рассмотрим задачи Дирихле (1) в некоторой произвольной области $\Omega \Subset M_O$. Обозначим $\mathcal{R}^{(n)}_{\Omega} : H^{-1}(\Omega) \to \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ — оператор решающий задачу (1) для $\mathcal{A}_{(n)}$.

Предложение 2. *Пусть* $u_{(n)} = \mathcal{R}^{(n)}_{\Omega} f_{(n)}$, $f_{(n)} \in H^{-1}(\Omega)$, $n = 1, 2$. *Тогда для любого* $\epsilon > 0$, $d^* = \max\{d, 2+\epsilon\}$ *существует* $C = C(M, \epsilon) > 0$, *что*

$$\|u_{(1)} - u_{(2)}\|_{\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)} \leq C\left[\left(\|\boldsymbol{A}_{(1)} - \boldsymbol{A}_{(2)}\|_{L_\infty(\Omega)} + \left\|\boldsymbol{\beta}_{(1)} - \boldsymbol{\beta}_{(2)}\right\|_{L_{d^*}(\Omega)} + \left\|\boldsymbol{b}_{(1)} - \boldsymbol{b}_{(2)}\right\|_{L_{d^*}(\Omega)} + \left\|c_{(1)} - c_{(2)}\right\|_{W^{-1}_{d^*}(\Omega)}\right)\|f_{(2)}\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|f_{(1)} - f_{(2)}\|_{H^{-1}(\Omega)}\right].$$

Введем условие на коэффициенты $\mathcal{A}$

D2'' $\boldsymbol{A} \in C^{0,T}(M_O)$, $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{b} \in \tilde{N}^T_{d^*}(M_O)$, $c \in B^{-1+T}_{d^*,1}(M_O)$ некоторого $T \in (0,1)$.

Следующая теорема позволяет из резольвентной непрерывности задачи (1) извлечь свойства повышенной гладкости решений

Теорема 4. *Пусть* M_O — *диффеоморфно отображается на некоторую область в* $\mathbb{R}^d$, *оператор* $\mathcal{A}$ *удовлетворяет условиям* ***D1***, ***D2''***, ***D3***, $\Omega \Subset M_O$ — *фиксированная область, такая что для любой области* $\Omega^* \Subset M_O$, *и* $d^{\mathcal{HP}}(\Omega, \Omega^*)$ *достаточно мало, выполнено*

$$\|\mathcal{G}_{\Omega} - \mathcal{G}_{\Omega^*}\|_{\mathcal{L}(X, \overset{\circ}{H}{}^1(M_O))} \leq C\left(d^{\mathcal{HP}}(\Omega, \Omega^*)\right)^T$$

для $T \in (0, 1)$ *и некоторого банахова пространства* $X \hookrightarrow H^{-1}(M_O)$. *Тогда ограничен оператор*

$$\mathcal{G}_{\Omega} : X \cap B^{-1+T}_{2,1}(M_O) \to \tilde{N}^{1+T}_2(M_O).$$

В качестве следствия теорем 3 и 4 получена

Теорема 5. *Пусть M_O — диффеоморфно отображается на некоторую область в $\mathbb{R}^d$, оператор $\mathcal{A}$ удовлетворяет условиям **D1**, **D2′**, **D2″**, **D3**, $T = \gamma/2$, $\Omega \Subset M_O$ — фиксированная область с границей класса $C^{0,t}$, $t \in (0,1]$, тогда оператор*

$$\mathcal{G}_\Omega : B^{-1+\gamma/2}_{2,1}(M_O) \to \tilde{N}^{1+\gamma t/2}_2(M_O)$$

решающий задачу (1) ограничен. Более того, для $s \in (0, \gamma/2)$ для оператора $\mathcal{G}_\Omega$ также имеется ограниченность в парах

$$\mathcal{G}_\Omega : H^{-1+s}(M_O) \to \tilde{H}^{1+st}(M_O).$$

В завершение главы приведено доказательство утверждения, обобщающего классическую теорему G. Savaré [7]. Пусть $\mathcal{V}$ — атлас многообразия M, в каждой карте которого $\partial\Omega$ представима в виде графика липшицевой функции с носителем ортогональным направлению e_1. Запишем этот факт как $\partial\Omega \in C^{0,1}_{\mathcal{V}}$. Определим $C^{0,(t_1,\dots,t_d)}_{\mathcal{V}}(M)$ как пространство функций v, таких что $v \circ \kappa_V^{-1} \in C^{0,(t_1,\dots,t_d)}(\kappa_V(V))$ для любой $(V, \kappa_V) \in \mathcal{V}$.

Теорема 6. *Пусть $\Omega \Subset M_O \Subset \mathbb{R}^d$, $\partial\Omega \in C^{0,1}_{\mathcal{U}}$, $\boldsymbol{A} \in C^{0,(1,1/2,\dots,1/2)}_{\mathcal{U}}(M_O)$, $\mathcal{A}$ удовлетворяет условию **D1**, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{\beta} \equiv 0$, $c \equiv 0$, тогда для любого $s \in (0, 1/2)$ ограничен оператор $\mathcal{R}_\Omega : H^{-1+s}(\Omega) \to \tilde{H}^{1+s}(\Omega)$.*

Глава 3 посвящена изучению регулярности решений первой и второй краевых задач поставленных для эллиптических операторов порядка $2m$. Разработанная техника опирается на аппарат теории функций, и отличается от техники, представленной в первых двух главах диссертации. Данный подход удается применить для вариационных задач при весьма общих ограничения на минимизируемый функционал.

В параграфе 3.1 ставятся задачи, а также устанавливаются вспомогательные утверждения.

Для фиксированного натурального числа $N \geq 1$ обозначим через $(\mathcal{J}^{N,k}M, M, \mathbb{R}^N \times (T_xM)^N \times \cdots \times (T^k_xM)^N, \mathrm{pr})$ локально-тривиальное расслоение с базой M, слоем $\mathbb{R}^N \times (T_xM)^N \times \cdots \times (T^k_xM)^N$ и проекцией $\mathrm{pr} : \mathcal{J}^{N,k}M \to M$. Для области $\Omega \subset M$, $\partial\Omega \in C^{0,t}$, $t \in (0,1]$ рассмотрим функционал $J : \mathring{W}_p^m(\Omega, \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$,

$$J[u] = \int_\Omega F(x, u, \ldots, \nabla^m u) d\mu + \int_\Omega E(x, u, \ldots, \nabla^{m-1} u)\, d\mu$$

где E, F — измеримые функции на $\mathcal{J}^{N,m-1}M$ и $\mathcal{J}^{N,m}M$ соответственно, $m \in \mathbb{N}$, $p \in (1, \infty)$ фиксированы. Для $f \in W_q^{-m}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $1/p + 1/q = 1$, поставим задачу поиска элемента $u \in \mathring{W}_p^m(\Omega, \mathbb{R}^N)$ локально минимизирующего значение функционала $J_f[u] = J[u] - \tau(f, u)$.

Пусть $\mathcal{U} = \{(U, \chi_U)\}$ атлас локально тривиализующий $\mathcal{J}^{N,k}M$, $\chi_U : U \to \tilde{U} \times \mathbb{R}^N \times \cdots \times \mathbb{R}^{Nd^k}$. Потребуем, чтобы в каждой карте U были выполнены следующие условия:

F1. E и F дифференцируемы и непрерывны по каждой координате $(\xi^0, .., \xi^{m-1})$ и $(\xi^0, .., \xi^m)$ при почти любом $x \in \tilde{U} \cap \Omega$ и $x \in \tilde{U}$ соответственно, $E + F \geq 0$;

F2. Для любых $(x, \xi^0, \ldots, \xi^m) \in \tilde{U} \times \mathbb{R}^N \times \cdots \times \mathbb{R}^{Nd^m}$ выполнено

$$\begin{cases} |\nabla_{\xi^m} F| \leq C\left(1 + |\xi|^{p-1}\right) \\ |\nabla_{\xi^k} F| + |\nabla_{\xi^k} E| \leq C\left(1 + \psi_\gamma^k(|\xi|)\right), \quad k = \overline{0, .., m-1} \\ |E| + |F| \leq C\left(1 + |\xi|^p\right) \end{cases}$$

где $|\xi| = \sum_{l=0}^m |\xi^l|$, $\psi_\gamma^k(s)$ равно s^p, $s^{p-\epsilon}$, $s^{p-1+\frac{m-k-\gamma}{d/p} - \epsilon z_\gamma}$ при $m-k-\gamma > d/p$, $m - k - \gamma = d/p$, $m - k - \gamma < d/p$ соответственно, $z_\gamma = 0$, если $\gamma = 1$, и $z_\gamma = 1$, если $\gamma \in (0, 1)$;

F3. Функция F выпукла по ξ^m при почти всех $x \in \tilde{U}$ и любых $\xi^1, .., \xi^{m-1}$. Существует $\alpha > 0$ такая, что для $x \in \tilde{U}$, $\xi, \eta \in \prod_{k=0}^m \mathbb{R}^{Nd^k}$

$$\nabla_{\xi^m}\left[F(x, \ldots, \xi^{m-1}, \xi^m) - F(x, \ldots, \xi^{m-1}, \eta^m)\right] \cdot (\xi^m - \eta^m)$$

оценивается снизу как $\alpha|\xi^m - \eta^m|^p$ и $\alpha\frac{|\xi^m - \eta^m|^2}{(|\xi| + |\eta|)^{2-p}}$ для $p \in (2, \infty)$ и $p \in (1, 2)$ соответственно.

F4. Существуют такие постоянные $L > 0$, $\varkappa \in (0, 1]$, что для любого $\xi \in \prod_{k=0}^m \mathbb{R}^{d^k N}$ и любых $x, y \in \tilde{U}$ $|F(x, \xi) - F(y, \xi)| \leq L|x - y|^\varkappa (1 + |\xi|^p)$.

Показано, что задача минизации функционала J_f, удовлетворяющего условиям ***F1*** – ***F3*** разрешима.

Линейные задачи ставятся следующим образом. Рассмотрим дифференциальное выражение $\mathcal{A}'$:

$$\sum_{0\le l\le k\le m} (\nabla^*)^l \boldsymbol{A}_{k,l}\, (\nabla)^k u = (\nabla^*)^m \boldsymbol{A}_{m,m} (\nabla)^m u + \sum_{\substack{0\le l\le k\le m \\ l\ne m}} (\nabla^*)^l \boldsymbol{A}_{k,l} (\nabla)^k u,$$

здесь $\boldsymbol{A}_{k,l}$ — сечения расслоений $\otimes_{\mathbb{C}}^{k+l} TM$, $(\nabla^*)^l$ есть оператор формально сопряженный $(\nabla)^l$ по Лагранжу относительно скалярного произведения $(u,v)_{L_2(M)} = \int_M u\bar{v}d\mu$, $\boldsymbol{A}_{m,m}$ — эрмитово. Так, например

$$(\nabla^*)_i v^i = -\frac{1}{\sqrt{\det g}}\partial_i \left(\sqrt{\det g}\, v^i\right) = -\operatorname{div} v_i$$
$$(\nabla^*)^2_{ij} v^{ij} = \frac{1}{\sqrt{\det g}}\partial_i \partial_j \left[\sqrt{\det g}\cdot v^{ij}\right] + \frac{1}{\sqrt{\det g}}\partial_k \left[\Gamma^k_{ij}\sqrt{\det g}\cdot u\right]$$

где Γ^k_{ij} — символы Кристоффеля. Для $\epsilon > 0$ обозначим $\tilde{d} = \max\{2+\epsilon, d + (1-\gamma)\epsilon\}$. Потребуем чтобы выполнялись следующие условия

A1 $\exists \alpha > 0 : \forall x \in M\ \forall \xi \in \otimes^m_{\mathbb{C}} T^*_x M \Rightarrow \alpha\, \xi^{\sharp^m}\, \bar{\xi} \le \boldsymbol{A}_{m,m}(\xi \otimes \bar{\xi})$;

A2 $\boldsymbol{A}_{m,m} \in C^{0,\varkappa}(M)$, $\varkappa \in (0,1]$, сечения $\boldsymbol{A}_{m_1,m_2}$, $0 \le m_2 \le m_1 \le m$, $m_2 \ne m$, таковы, что для задач Дирихле и Неймана соответственно выполнено требование

d Для некоторого $\gamma \in (0,1]$ имеет место $\boldsymbol{A}_{m_1,m_2} \in W^{-m+m_1}_{p_{m_2,\gamma}}(\Omega)$, при $m_2 < m_1$ и $p_{m_2,\gamma} = \frac{\tilde{d}}{m-m_2-\gamma}$; При $k \le m-1$: $\boldsymbol{A}_{k,k} \in B^{-m+k+\gamma}_{q_k,1}(\Omega)$ и $\boldsymbol{A}_{k,k} \in W^{-m+k+\gamma}_{q_k}(\Omega)$ для $\gamma \in (0,1)$ и $\gamma = 1$. Где q_k равно 2, $d/(m-k)$ для $m-k \ge d/2$, $m-k < d/2$ соответственно.

n Пусть $\mu = \min\{m-k, m-l-1\}$, $\nu = \max\{m-k, m-l-1\}$ тогда $\boldsymbol{A}_{k,l} \in \tilde{W}^{-\mu}_{\frac{d}{(\lfloor t\nu\rfloor -1)_+}}(\Omega)$, если $\lfloor t\nu \rfloor < \frac{d}{2}$, и $\boldsymbol{A}_{k,l}$ принадлежит $\tilde{W}^{-\mu}_{2+\epsilon}(\Omega)$, $\tilde{W}^{-\mu}_2(\Omega)$ при $\lfloor t\nu\rfloor = \frac{d}{2}$, $\lfloor t\nu \rfloor \ge \frac{d}{2}$ соответственно. Здесь $\lfloor s\rfloor$ — максимальное целое число не превосходящее s, $(s)_+ = \max\{s, 0\}$, $\partial\Omega \in C^{0,t}$, $t \in (0,1]$.

A3 Младшие коэффициенты таковы, что форма порожденная оператором $\mathcal{A}$ секториальна с вершиной в правой полуплоскости.

Применяя лемму Лакса–Мильграма, можно корректно определить операторы $\mathcal{A}^D$, $\mathcal{A}^N$ для задачи Дирихле и Неймана соответственно, понимаемые в смысле форм. Ставятся задачи

$$\mathcal{A}'u = f, \quad \nabla^k u|_{\partial\Omega} = 0, \quad k = \overline{0,..,m-1}. \tag{7}$$

для $f \in H^{-m}(\Omega)$, если $\mathcal{A}^D u = f$, и

$$\mathcal{A}'u = f, \quad \sum_{n \le l \le k \le m} \langle \otimes^n \nu, (\nabla^*)^{l-n} \boldsymbol{A}_{k,l} \nabla^k u \rangle |_{\partial\Omega} = 0, \ \ l = \overline{1,..,m}. \qquad (8)$$

с правой частью $f \in \mathring{W}_2^{-m}(\Omega)$, если $\mathcal{A}^N u = f$. Обозначим $\mathcal{R}_\Omega^D$, $\mathcal{R}_\Omega^N$ операторы решающие задачи (7), (8).

В **Параграфе 3.2** доказывается следующее предложение (формулировку которого приведем для $p \ge 2$, $\gamma \in (0,1)$)

Предложение 3. *Пусть u — нестрогий минимум функционала J_f, $p \in [2,\infty)$, область $\Omega \subset M_O$ обладает гельдеровой границей с показателем $t \in (0,1]$, функционал J удовлетворяет условиям* ***F1*–*F4***. *Тогда если $f \in B_{p',1}^{-m+\gamma}(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, то $u \in \tilde{N}_p^{m+t\zeta_0/p}(\Omega)$, и справедлива оценка*

$$\|u\|^p_{\tilde{N}_p^{m+t\zeta_0/p}(\Omega)} \le C\left(1 + \|u\|^p_{\tilde{W}_p^m(\Omega)} + \|u\|_{\tilde{W}_p^m(\Omega)} \|f\|_{B_{p',1}^{-m+\gamma}(\Omega)}\right),$$

где $\zeta_0 = \min\{\varkappa, \gamma\}$. Если дополнительно известно, что u принадлежит $\tilde{N}_p^{m+s}(\Omega)$, $s \in (0,1/p)$, $f \in B_{p',1}^{-m+\gamma}(\Omega)$ то $u \in \tilde{N}_p^{m+t\zeta_s/p}(\Omega)$, причем $\|u\|^p_{\tilde{N}_p^{m+t\zeta_s/p}(\Omega)}$ можно оценить сверху как

$$C\left(1 + \|u\|^p_{\tilde{W}_p^m(\Omega)} + \left(1 + \|u\|^{p-1}_{\tilde{W}_p^m(\Omega)} + \|f\|_{B_{p',1}^{-m+\gamma}(\Omega)}\right) \|u\|_{\tilde{N}_p^{m+s}(\Omega)}\right),$$

где $\zeta_s = \min\{\varkappa, \gamma + s\}$.

Следующая теорема является следствием предложения 3 и теоремы Тартара о вещественной интерполяции нелинейных отображений[28].

Теорема 7. *Пусть $\Omega \subset M_O$ — область с гельдеровой границей класса $C^{0,t}$, $t \in (0,1]$, $1/p + 1/q = 1$, выполнены условия* ***F1*–*F4***, *$p > 1$, тогда определено многозначное отображение*

$$\mathcal{R}_\Omega^J : B_{q,1}^{-m+\lambda}(\Omega) \to \tilde{N}_p^{m+\frac{t}{\tilde{p}-t}\lambda}(\Omega), \quad \lambda \in [0, \varkappa/p] \cap [0, \tilde{\lambda}_{\tilde{p}}),$$

ставящее в соответствие f все точки (локального) минимума функционала $J_f[u]$, показатель $\tilde{\lambda}_{\tilde{p}}$ равен $\frac{\tilde{p}-t}{\tilde{p}t}\gamma$, $\tilde{p} = \max\{p, 2\}$. Более того,

$$\forall f \in W_q^{-m+\lambda}(M_O) \Rightarrow \mathcal{R}_\Omega^J f \subset \tilde{W}_p^{m+\frac{t}{\tilde{p}-t}\lambda}(\Omega), \quad \lambda \in \left[0, \min\{\tilde{\lambda}_p, \varkappa/p\}\right).$$

[28]L. Tartar *Interpolation non linéaire et régularité* J. Funct. Anal. 1972. **9**. 469–489.

Параграф 3.3 посвящен линейным краевым задачам. Показывается справедливость следующих теорем

Теорема 8. *Пусть $\partial\Omega \in C^{0,t}$, $t \in (0,1]$ выполнены условия **A1**–**A3**, тогда ограничен оператор*

$$\mathcal{R}_\Omega^D : B_{2,1}^{-m+\lambda}(\Omega) \to \tilde{N}_2^{m+\frac{t}{2-t}\lambda}(\Omega), \quad \lambda \in \left[0, \tilde{\lambda}_2\right) \cap [0, \varkappa/2],$$

решающий задачу (7), $\tilde{\lambda}_2 = \frac{2-t}{t}\gamma$.

Теорема 9. *Пусть $\Omega \subset M_O$ — область с гельдеровой границей класса $C^{0,t}$, $t \in (0,1]$, выполнены условия **A1**–**A3**, $\gamma = \varkappa$, тогда оператор $\mathcal{G}_\Omega^D : H^{-m+s}(M_O) \to \tilde{H}^{m+ts}(\Omega)$, $s \in [0, \gamma/2)$ непрерывен.*

Теорема 10. *Пусть $\partial\Omega \in C^{0,t}$, $t \in (0,1]$, выполнены условия **A1**–**A3**, $\gamma = \varkappa$, тогда для атласа $\mathcal{V}$, в котором $\partial\Omega$ представима в виде графика гельдеровой функции, оператор $\mathcal{R}_\Omega^N : \tilde{W}_2^{-m+1}(\Omega) \to d_\mathcal{V}^{m,1} N_2^{m+t\gamma}(\Omega)$, решающий задачу (8), непрерывен.*

Доказательства теорем 8, 9 изложены в работе [40]. Для доказательства теоремы 10 используется теорема продолжения [29]. При $m = 1$ теорема 9 дает более сильное утверждение, чем теорема 5, так как в этом случае условия ***A2*** и ***D2′*** совпадают. Вместе с тем, теорема 6 показывает, что результаты, предложенного в главе 2 подхода, не покрываются техникой главы 3.

В заключительном **параграфе 3.4** приводятся соображения, позволяющие перенести технику доказательства из параграфа 3.3 на случай негельдеровых границ. При этом подчеркивается необходимость использования анизотропных норм.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору А.М. Степину за постановку задач и постоянное внимание к работе.

[29] В.И. Буренков *Об одном способе продолжения дифференцируемых функций* Тр. МИАН СССР. 1976. **140**. 27–67.

Глава 1

Поведение оператора Лапласа–Бельтрами в областях на многообразии при возмущении границы.

1.1 Необходимые сведения, постановка задачи и вспомогательные утверждения

Пусть (M, g) — гладкое связное компактное риманово d-мерное многообразие без края, $M_O := M \backslash \bar{O}$, $O \subset M$ — фиксированное непустое открытое множество с гладкой границей, $\Omega \subset M_O$ — область, $\boldsymbol{A}$ — эрмитово сечение $T^2_{\mathbb{C}}M$ расслоения, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{b}$ — векторные поля на M, c — комплекснозначная функция на M. Для эллиптического оператора

$$\mathcal{A}u = -\mathrm{div}(\boldsymbol{A}\nabla u + \boldsymbol{\beta}u) + \boldsymbol{b}\nabla u + cu \tag{1.1.1}$$

поставим первую краевую задачу

$$\mathcal{A}u = f \;\text{ в } \Omega; \qquad u = 0 \;\text{ на } \partial\Omega, \tag{1.1.2}$$

и, в случае если $\boldsymbol{\beta} \equiv \overline{\boldsymbol{b}}$, $\mathrm{Im}\, c \equiv 0$ соответствующую спектральную задачу

$$\mathcal{A}u = \lambda u \;\text{ в } \Omega; \qquad u = 0 \;\text{ на } \partial\Omega. \tag{1.1.3}$$

Для открытого множества $A \subset M$ и чисел $k, l \in \mathbb{Z}_+$ введем пространство Лебега $L_p(A, \mathcal{T}^l_k)$, $p \in [1, \infty]$ как совокупность всех сечений X расслоения $\mathcal{T}_k^l M := \left(\otimes^k T^*_{\mathbb{C}} M\right) \otimes \left(\otimes^l T_{\mathbb{C}} M\right)$, для которых конечна норма $\|X\|_{L_p(A,\mathcal{T}_k^l)} := \left\| \left| X^{\sharp^l \flat^k}\, \overline{X} \right|^{1/2} \right\|_{L_p(A)}$, где $\sharp : T^*_{\mathbb{C}} M \to T_{\mathbb{C}} M$, $\flat : T_{\mathbb{C}} M \to T^*_{\mathbb{C}} M$ — музыкальные изоморфизмы[1]. Легко видеть, что пространство $L_2(A, \mathcal{T}_k^l)$ является гильбертовым со скалярным произведением $\tau(X,Y) := \int_A X^{\sharp^l \flat^k} \overline{Y}\, dVol$. Скажем, что сечение $X \in L_p(A, \mathcal{T}_k^l)$ принадлежит пространству Соболева $W_p^1(A, \mathcal{T}_k^l)$, $p \in [1, \infty]$, если $\nabla X \in L_p(A, \mathcal{T}_{k+1}^l)$, $\|u\|^p_{W_p^1(A,\mathcal{T}_k^l)} := \|u\|^p_{w_p^1(A,\mathcal{T}_k^l)} + \|u\|^p_{L_p(A,\mathcal{T}_k^l)}$, где $\|u\|_{w_p^1(A,\mathcal{T}_k^l)} := \|\nabla u\|_{L_p(A,\mathcal{T}_{k+1}^l)}$. Пространство $C_0^\infty(A)$–гладких сечений расслоения $\mathcal{T}_k^l M$ обозначим $\mathcal{D}(A, \mathcal{T}_k^l)$, и $\mathring{W}_p^1(A, \mathcal{T}_k^l)$ введем как пополнение[2] $\mathcal{D}(A, \mathcal{T}_k^l)$ по норме $W_p^1(M, \mathcal{T}_k^l)$. Если $A \subset M_O$, то снабдим $\mathring{W}_p^1(A, \mathcal{T}_k^l)$ эквивалентной нормой $\|u\|_{w_p^1(A,\mathcal{T}_k^l)}$. Тогда пространство $W_q^{-1}(A, \mathcal{T}_k^l)$, $q \in (1, \infty)$ вводится как двойственное к $\mathring{W}_p^1(A, \mathcal{T}_k^l)$, $1/p + 1/q = 1$, с нормой

$$\|f\|_{W_q^{-1}(A,\mathcal{T}_k^l)} := \sup_{\|u\|_{w_p^1(A,\mathcal{T}_k^l)}=1,\ u \in \mathcal{D}(A,\mathcal{T}_k^l)} |\tau(f,u)|,$$

где τ — форма на $\mathcal{D}'(A, \mathcal{T}_k^l) \times \mathcal{D}(A, \mathcal{T}_k^l)$, порожденная скалярным произведением в $L_2(A, \mathcal{T}_k^l)$. Везде ниже, если это не будет вызывать затруднений, будем опускать зависимость пространств Соболева и Лебега от $\mathcal{T}_k^l$. Дополнительно обозначим $H^1(M) = W_2^1(M)$, $\mathring{H}^1(A) = \mathring{W}_2^1(A)$, $H^{-1}(A) = W_2^{-1}(A)$, $\|u\|_{h^1(A)} = \|u\|_{w_2^1(A)}$. Потребуем выполнения следующих условий

D1 $\exists \alpha > 0 : \forall x \in M\ \forall \xi \in \mathbb{C} \otimes T_x^* M \Rightarrow \alpha\ \xi^\sharp\ \overline{\xi} \le \boldsymbol{A}(\xi \otimes \overline{\xi})$;
и для некоторого $\epsilon > 0$

D2 $\boldsymbol{A} \in L_\infty(M_O)$, $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{\beta} \in L_{d^*}(M_O)$, $c \in W_{d^*}^{-1}(M_O)$, $d^* = \max\{2+\epsilon, d\}$;

D3 $\|\mathrm{Re}\, \boldsymbol{b}\|_{L_{d^*}(M_O)} + \|\mathrm{Re}\, \boldsymbol{\beta}\|_{L_{d^*}(M_O)} + 2\|\mathrm{Re}\, c\|_{W_{d^*}^{-1}(M_O)} < \frac{\alpha - \alpha'}{C_{emb}}$, $\alpha' > 0$,

где C_{emb} — константа непрерывного вложения $\mathring{H}^1(M_O) \hookrightarrow L_{\frac{2d^*}{d^*-2}}(M_O)$.

Лемма 1.1.1. *Пусть $\Omega \Subset M_O$ — область, оператор $\mathcal{A}$ удовлетворяет условиям **D1** – **D3**, тогда для любой функции $f \in H^{-1}(\Omega)$ существует*

[1] То есть естественные изоморфизмы, порожденные метрикой g; термин см., например, [7]

[2] При этом элементы пространства $\mathcal{D}(A, \mathcal{T}_k^l)$ предполагаются продолженными нулем на $M \backslash A$.

единственное решение $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ задачи (1.1.2), понимаемое в следующем смысле

$$\forall v \in \mathring{H}^1(\Omega) \quad \Phi(u,v) = \tau(f,v), \tag{1.1.4}$$

$$\Phi(u,v) := \int_M \boldsymbol{A}\nabla u \otimes \overline{\nabla v}\, dVol + \int_M \boldsymbol{\beta} u \overline{\nabla v}\, dVol + \int_M \boldsymbol{b}\nabla u \overline{v}\, dVol + \int_M c u\overline{v}\, dVol$$

и значит, определен ограниченный линейный оператор $\mathcal{R}_\Omega : H^{-1}(\Omega) \to \mathring{H}^1(\Omega)$, $\mathcal{R}_\Omega : f \mapsto u$, решающий задачу (1.1.4); оператор $\mathcal{A}$ вводится как обратный к $\mathcal{R}_\Omega$.

Доказательство. Заметим, что форма Φ ограничена на прямом произведении $\mathring{H}^1(\Omega) \times \mathring{H}^1(\Omega)$. Действительно, в силу вложения $\mathring{H}^1(M_O) \hookrightarrow L_{\frac{2d^*}{d^*-2}}(M_O)$ имеет место неравенство $\|v\nabla u\|_{L_{\frac{d^*}{d^*-1}}(\Omega)} \le \|v\|_{L_{\frac{2d^*}{d^*-2}}(\Omega)}\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)} \le C_{emb}\|v\|_{\mathring{H}^1(\Omega)}\|u\|_{\mathring{H}^1(\Omega)}$. Следовательно

$$\left|\int_\Omega \boldsymbol{A}\nabla u \otimes \overline{\nabla v}\, dVol\right| \le \|\boldsymbol{A}\|_{L_\infty(\Omega)}\|u\|_{\mathring{H}^1(\Omega)}\|v\|_{\mathring{H}^1(\Omega)}, \qquad \left|\int_\Omega c u\overline{v}\, dVol\right| \le$$

$$\le \|c\|_{W^{-1}_{d^*}(\Omega)}\|uv\|_{w^1_{\frac{d^*}{d^*-1}}(\Omega)} \le \|c\|_{W^{-1}_{d^*}(\Omega)}\left(\|v\nabla u\|_{L_{\frac{d^*}{d^*-1}}(\Omega)} + \|u\nabla v\|_{L_{\frac{d^*}{d^*-1}}(\Omega)}\right),$$

оценки для частей формы Φ содержащих $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{\beta}$ получаются аналогично. С другой стороны, в силу условий ***D1*** и ***D3***, и оценок выше, $\operatorname{Re}\Phi(u,u) \ge \alpha'\|u\|^2_{H^1(M)}$, следовательно применима

Теорема 1.1.1 (Babuška–Lax–Milgram, [4])**.** *Пусть U, V — гильбертовы пространства, $B : U \times V \to \mathbb{C}$ является непрерывной полуторалинейной функцией. Также предположим, что B слабо коэрцитивна, то есть существует такая константа $c > 0$, что*

$$\inf_{\|u\|_U=1}\sup_{\|v\|_V=1}|B(u,v)| \ge c$$

и для любого $0 \ne v \in V$ выполнено $\sup_{\|u\|_U=1}|B(u,v)| > 0$. Тогда, для любого $f \in V^*$ существует единственное решение $u = u_f \in U$ следующей слабой задачи $B(u_f,v) = \langle f,v\rangle\ \forall v \in V$. Более того, решение непрерывно зависит от начальных условий

$$\|u_f\|_U \le \frac{1}{c}\|f\|_{V^*} \tag{1.1.5}$$

Лемма доказана $\square$

Если $\boldsymbol{\beta} \equiv \overline{\boldsymbol{b}}$, $\operatorname{Im} c \equiv 0$, то оператор $\mathcal{A} : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ является самосопряженным с компактной резольвентой. Следовательно, с учетом требований ***D1*** и ***D3***, спектр $\mathcal{A}$ состоит из положительных собственных значений[3] $\lambda_k(\Omega)$ с точкой накопления в бесконечности. В этом случае задача (1.1.3) разрешима для $\lambda = \lambda_k(\Omega)$, и решения u_k понимаются как

$$\forall v \in \mathring{H}^1(\Omega) \quad \Phi(u_k, v) = \lambda_k(\Omega)\ \tau(u_k, v),$$

более того, имеет место принцип Куранта–Фишера–Вейля

$$\lambda_k(\Omega) = \sup_{L_k \subset \mathring{H}^1(\Omega),\ \dim L_k^{\perp} = k-1} \ \inf_{u \in L_k} \frac{\Phi(u,u)}{\tau(u,u)}.$$

Лемма 1.1.1 ставит в соответствие каждой области Ω оператор $\mathcal{R}_\Omega$ решающий задачу (1.1.2) с правыми частями из $H^{-1}(\Omega)$. Изменим постановку задачи: будем решать (1.1.2) с правыми частями из $H^{-1}(M_O)$, а соответствующий решающий оператор обозначим $\mathcal{G}_\Omega$. Так как $\mathcal{G}_\Omega$ имеют общую область определения, то можно задаться вопросом: насколько будут близки операторы $\mathcal{G}_\Omega$ при возмущении области Ω. А именно, пусть $\{\Omega_\epsilon\}$ — последовательность областей из M_O и $\Omega \subset M_O$ область, такая что относительно некоторой метрики $d(\Omega_\varepsilon, \Omega) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Какие условия необходимо наложить на области $\{\Omega_\varepsilon\}$, Ω, чтобы

$$\|\mathcal{G}_\Omega - \mathcal{G}_{\Omega_\varepsilon}\|_{\mathcal{L}(B_1,B_2)} \to 0, \quad \text{при} \ \ \varepsilon \to 0, \tag{1.1.6}$$

где B_1, B_2 — некоторые банаховы пространства, $\mathcal{L}(B_1, B_2)$ — пространство линейных ограниченных операторов из B_1 в B_2. Если (1.1.6) выполнено, то будем говорить, что для оператора $\mathcal{A}$ имеет место резольвентная непрерывность при возмущении $\{\Omega_\varepsilon\}$ области Ω в паре пространств (B_1, B_2), или более коротко, имеет место резольвентная непрерывность в пространстве B_2. Функцию $\|\mathcal{G}_\Omega - \mathcal{G}_{\Omega_\varepsilon}\|_{\mathcal{L}(B_1,B_2)}$ будем называть модулем резольвентной непрерывности.

[3]Собственные значения нумируются с учетом кратности

Для того чтобы получить количественную оценку сходимости в неравенстве (1.1.6) необходимо определить расстояние между областями многообразия M.

Пусть X, Y – произвольные подмножества связного метрического компакта (M, δ). Обозначим $\delta(x, Y) = \inf_{y\in Y} \delta(x, y)$, и рассмотрим функцию $e(X, Y) = \sup_{x\in X} \delta(x, Y)$. Если $X\backslash Y \neq \varnothing$, то

$$e(X, Y) = \sup_{x\in X\backslash Y} \delta(x, \partial Y) = e(X\backslash Y, \partial Y).$$

Введем $\check{e}(X, Y) = e(M\backslash Y, M\backslash X)$. Так как $(M\backslash Y)\backslash(M\backslash X) = X\backslash Y$, то при условии $X, Y \subsetneq M$, выполнено $\partial(M\backslash X) = \partial X$, следовательно

$$\check{e}(X, Y) = \sup_{y\in M\backslash Y} \delta(y, M\backslash X) = \sup_{x\in X\backslash Y} \delta(x, \partial X) = e(X\backslash Y, \partial X).$$

Теперь, если для $\varepsilon > 0$ определить

$$\mathcal{O}_\varepsilon(X) = \{x \in M \mid \delta(x, X) < \varepsilon\}\,, \tag{1.1.7}$$

$$\mathcal{O}_{-\varepsilon}(X) = \{x \in X \mid \forall z \in M\colon\ \delta(x, z) < \varepsilon \Rightarrow z \in X\}\,, \tag{1.1.8}$$

то $\mathcal{O}_{-\varepsilon}(X) = M \setminus \mathcal{O}_\varepsilon(M\backslash X)$ и

$$e(X, Y) = \inf\{\varepsilon > 0 \,|X \subset \mathcal{O}_\varepsilon(Y)\}\,, \quad \check{e}(X, Y) = \inf\{\varepsilon > 0 \,|\mathcal{O}_{-\varepsilon}(X) \subset Y\}\,.$$

Таким образом, расстояния по Хаусдорфу можно ввести как

$$d_{\mathcal{H}}(X, Y) = \max\{e(X, Y), e(Y, X)\}\,; \tag{1.1.9}$$

$$d^{\mathcal{H}}(X, Y) = \max\{\check{e}(X, Y), \check{e}(Y, X)\}\,. \tag{1.1.10}$$

Функции (1.1.9), (1.1.10) являются метриками на замкнутых и открытых множествах соответственно. Полезно рассмотреть более сильный вариант метрики Хаусдорфа, верхнее расстояние Хаусдорфа–Помпейю

$$d^{\mathcal{HP}}(X, Y) = \max\left\{d_{\mathcal{H}}(X, Y), d^{\mathcal{H}}(X, Y)\right\}. \tag{1.1.11}$$

Можно ввести (1.1.11) минуя (1.1.9), (1.1.10). Для этого заметим:

$$\max\{e(X, Y), \check{e}(Y, X)\} = e(X\Delta Y, \partial Y),$$

следовательно $d^{\mathcal{HP}}(X,Y)=\max\{e(X\Delta Y,\partial Y),e(X\Delta Y,\partial X)\}$.

Заметим принципиальное отличие между (1.1.11) и (1.1.10). Если рассмотреть все открытые подмножества любого фиксированного метрического компакта K, то относительно метрики (1.1.10) полученное пространство будет компактом (по теореме Бляшке, см [23]), а в случае (1.1.11) свойство полноты останется, а вот компактности уже не будет. Достаточно взять подграфики функций $(2+\sin nx)$ на отрезке $[0,\pi]$.

Также для наших целей удобно ввести минимум по всем расстояниям типа Хаусдорфа:

$$d_{\mathcal{HS}}(X,Y)=\min\left\{e(X\Delta Y,\partial Y),e(X\Delta Y,\partial X),d_{\mathcal{H}}(X,Y),d^{\mathcal{H}}(X,Y)\right\}$$

Величины $e(X,Y)$, $\check{e}(X,Y)$ позволяют измерять расстояние четырьмя неэквивалентными способами: $e(X\Delta Y,\partial Y)$, $e(X\Delta Y,\partial X)$, $d_{\mathcal{H}}(X,Y)$, $d^{\mathcal{H}}(X,Y)$, поэтому $d_{\mathcal{HS}}$ является самой слабой величиной, определяющей сходимость множеств, из всех, какие могут быть построены с помощью $e(X,Y)$, $\check{e}(X,Y)$, $e(Y,X)$, $\check{e}(Y,X)$.

В тексте диссертации рассматриваются области $\Omega\subset M$ с границами представимыми в виде графиков непрерывных функций с предписанными модулями непрерывности. Однако, для получения оценок (1.1.6) потребуется более тонкая классификация. Такая классификация строится как обобщение класса $\Pi(\theta,h,r)$ из [15] параметризующего области, удовлетворяющие равномерному условию конуса.

Для функции $\omega:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ такой, что разность $(\omega(r)-\omega(0))$ является неотрицательной и полуаддитивной, положим

$$\psi(r)=\sqrt{r^2+\omega(r)^2},\qquad \phi(r)=r+\omega(r). \tag{1.1.12}$$

Пусть $B_\rho(x)$ — шар в $\mathbb{R}^d$ с центром в точке x радиуса ρ по метрике, соответствующей $|\cdot|$.

Определение 1.1.1. *Скажем, что открытое множество Ω удовлетворяет равномерному условию ω-каспа в точке x с параметром r, если существует единичный вектор $\xi_x\in\mathbb{R}^d$ такой, что*

W1 $\left[\left(B_{3\psi(r)}(x)\cap\Omega\right)-\mathcal{C}_{\omega,r}(\xi_x)\right]\cap B_{2\psi(r)}\subset\Omega$;

где $\mathcal{C}_{\omega,r}(\xi_x)$ *получается из* $\mathcal{C}_{\omega,r}(e_d)\overset{\text{def}}{=}\mathcal{S}_{\omega,r}(e_d)\cup\mathcal{F}_{\omega,r}(e_d)$ *поворотом, так чтобы* e_d *и* ξ_x *совместились и* $\tilde{z}=(z^1,\dots,z^{d-1})$,

$$\mathcal{F}_{\omega,r}(e_d)=\left\{z=(\tilde{z},z^d)\in\mathbb{R}^d:\ |z|<\psi(r),\ \ z^d\geq\omega(r)\right\},$$
$$\mathcal{S}_{\omega,r}(e_d)=\left\{(\tilde{z},z^d)\in\mathbb{R}^d:\omega(|\tilde{z}|)<z^d<\omega(r),\ \ |\tilde{z}|<r\right\}.$$

Заметим, что условие ***W1*** эквивалентно требованию

W2 $\left[\left(B_{3\psi(r)}(x)\backslash\Omega\right)+\mathcal{C}_{\omega,r}(\xi_x)\right]\cap\left(B_{2\psi(r)}\cap\Omega\right)=\varnothing$.

Действительно, в силу симметричности условий ***W1*** и ***W2*** относительно замены Ω на $M\backslash\Omega$ достаточно проверить следствие ***W1*** $\Rightarrow$ ***W2***. От противного, пусть нет, тогда

$$\exists y\in\left(B_{3\psi(r)}(x)\cap\Omega\right):\ B_{2\psi(r)}\cap(y-\mathcal{C}_{\omega,r}(\xi_x))\not\subset\Omega$$

следовательно существует $z\in\partial\Omega\cap(y-\mathcal{C}_{\omega,r}(\xi_x))$, что означает

$$z+\mathcal{C}_{\omega,r}(\xi_x)\ni y,\ \ z\in\partial\Omega,$$

но из условия ***W2*** получаем, что $y\in M\backslash\Omega$, противоречие.

Замечание 1.1.1. *В определении не требуется предположения* $\omega(0)=0$. *Все утверждения главы 1, если не оговаривается обратное, выполнены без этого условия.*

Для произвольной матрицы $A\in C^{0,1}(\bar{\Omega})$, $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ определим норму:

$$\|A\|_{C^{0,1}(\bar{\Omega})}\overset{\text{def}}{=}\||A|_2\|_{L_\infty(\Omega)}+\left\|\max_j|\partial_jA|_2\right\|_{L_\infty(\Omega)},\ |A|_2\overset{\text{def}}{=}\sqrt{\tilde{r}(A^tA)},$$

где $\tilde{r}$ — спектральный радиус.

Скажем, что атлас $\mathfrak{W}=\{(W_y,\chi_y)\}_{y\in M}$ является (ρ,ϑ)–техническим, $\rho>0$, $\vartheta\geq1$, если

W3 $\forall y\in M\Rightarrow\mathcal{B}_{3\rho}(y)\overset{\text{def}}{=}\chi_y^{-1}(B_{3\rho}(\chi_y(y)))\subset W_y$,

W4 Для любой карты $(W,\chi)\in\mathfrak{W}$, $C^{0,1}$-норма $\mathbf{G}\circ\chi$ и $(\mathbf{G}\circ\chi)^{-1}$ не превосходит ϑ.

W5 Для любых двух карт $W_1, W_2 \in \mathfrak{W}$ $C^{0,1}$-норма матрицы Якоби $J = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right)$ не превосходит ϑ.

Определение 1.1.2. *Скажем, что открытое множество $\Omega \subset M$ удовлетворяет равномерному условию ω-каспа с параметрами (r, ϑ), $r > 0$, $\vartheta \geq 1$ если существует $(\psi(r), \vartheta)$–технический атлас такой, что для любого $y \in M$ открытое множество $\chi_y(\Omega \cap \mathcal{B}_{3\psi(r)}(y))$ удовлетворяет равномерному условию ω-каспа с параметром r в точке $\chi_y(y)$. Данный класс будем обозначать $\mathcal{W}^{\omega}_{r,\vartheta}$.*

Определение 1.1.3. *Непустое открытое подмножество $\Omega \subseteq M$ имеет границу класса C^{0,ω_Ω}, если существует атлас $\{(V, \kappa_V)\}_{V \in \mathcal{V}}$, для которого пересечение Ω с любой картой V либо пусто, либо (в соответствующих локальных координатах) представимо в виде подграфика функции $g_V : \mathbb{R}^{d-1} = \xi_V^{\perp} \to \mathbb{R}$ с модулем непрерывности не превосходящим $C_{\Omega,V}\omega_\Omega(\cdot)$, $C_{\Omega,V} \equiv \mathrm{const}$, где $\xi_V \in \mathbb{R}^d$ – фиксированный для каждой карты V вектор единичной длины, и ортогональное дополнение берется относительно скалярного произведения соответствующего норме $|\cdot|$.*

Аналогично определяется класс областей с границей C-класса. Если многообразие M компактно, то применима теорема Кантора, а значит, для любой области Ω с границей C-класса найдется функция ω_Ω, такая что $\partial\Omega \in C^{0,\omega_\Omega}$.

Предложение 1.1.1. *Если $\omega_\Omega(0) = 0$, то для любой области Ω с границей класса C^{0,ω_Ω} существует содержащий ее класс $\mathcal{W}^{C\omega_\Omega}_{r,\vartheta}$, $r > 0$, $\vartheta \geq 1$, где $C \equiv \mathrm{const} > 0$.*

Доказательство. В силу компактности M, можно считать, что для фиксированной области Ω с границей класса C^{0,ω_Ω}, атлас $\mathcal{V}$ конечен, множества $\kappa_V(V) \subset \mathbb{R}^d$ ограничены, отображения κ_V определены на $\tilde{V} \supset \overline{V}$. Выделим новый атлас $\mathcal{V}' = \{(V', \kappa_V)\}$ с тем свойством, что $V' \Subset V$. Введем обозначение $r = \psi^{-1}\left[\frac{1}{100}\min_V \mathrm{dist}(\partial\kappa_V V, \kappa_V V')\right]$, где

$$\mathrm{dist}(A, B) = \inf_{a \in A,\ b \in B} |a - b|.$$

Для каждой точки $y \in M$ выберем $V' \in \mathcal{V}'$, такую что $y \in V'$, и положим $(W_y, \chi_y) = (V', \kappa_V)$. Тогда сущесвует такое число $\vartheta \geq 1$, что $\mathfrak{W} = \cup_{y \in M}\{(W_y, \chi_y)\}$ является $(\psi(r), \vartheta)$-техническим атласом. Действительно, условие ***W3*** есть в силу построения, а ***W4***, ***W5*** вследствие того, что все отображения χ_y получены сужением конечного числа координатных диффеоморфизмов.

Свойство ***W2*** имеет место для $\omega = C\omega_\Omega$, $C = \max_{\mathcal{V}} C_V$, так как образ Ω при координатных диффеоморфизмах χ_y содержится по одну сторону от графика функции g_V. □

Аналогичное утверждение в случае липшицевой границы см. в [15]. Заметим, что если $\omega_\Omega(h)/h \to 0$ при $h \to 0$, то обязательно $\omega_\Omega \equiv 0$. Однако, в случае многообразия класс $C^{0,0(\cdot)}$ может быть непуст (например, полусфера на S^d).

Докажем некоторые свойства таких областей. Для простоты, положим, что многообразие M есть плоский тор размерности d, M_O покрывается одной картой, поэтому можно считать, что Ω — области в $\mathbb{R}^d$ (подробнее данную конструкцию см. [34], с. 333). Аналоги в случае неплоской метрики см. следствия 1.3.2 и 1.3.3. До конца данного параграфа введем обозначения[4] более удобные для евклидового случая

$$B_\varepsilon(x) = \mathcal{O}_\varepsilon(x), \qquad \Omega^\varepsilon := B_\varepsilon(\Omega) = \mathcal{O}_\varepsilon(\Omega); \tag{1.1.13}$$

в качестве метрики $\delta(x,y)$, $x, y \in M$, примем $|x-y| = \sqrt{\sum_i (x^i - y^i)^2}$.

Лемма 1.1.2. *Пусть Ω удовлетворяет равномерному условию ω-каспа с параметром $r > 0$ в точке x, $\omega(0) = 0$, тогда для любого $0 < \varepsilon \leq \rho = \psi(r)$ множество Ω^ε удовлетворяет равномерному условию ω-каспа с параметром $r_2 = \psi^{-1}(\psi(r)/2)$ в точке x.*

Доказательство. Зафиксируем $h \in \mathcal{C}_{\omega,r}(\xi_x)$, $y \in B_{3\rho/2}(x)$. Если $y \in \mathcal{O}_\varepsilon(\Omega)$ то существует $z \in \Omega$, что $|z - y| < \varepsilon \leq \rho$. Так как $|z - x| <$

[4] Определение $\mathcal{O}_\varepsilon(\Omega)$ см. (1.1.7)

$\rho + \frac{3}{2}\rho < 3\rho$, то из локального определения 1.1.1 получаем

$$z - h \in \Omega, \;\; \mathrm{dist}(y - h, \Omega) \le |y - h - (z - h)| = |y - z| < \varepsilon,$$

следовательно $y - h \in \Omega^\varepsilon$. $\square$

Замечание 1.1.2. *Из простых геометрических соображений, ясно что*

$$0 \le \varepsilon \le \phi^{-1}\left(\frac{\psi(r)}{2}\right) \Rightarrow B_\varepsilon\left(\phi(\varepsilon)\xi\right) \subset \mathcal{C}_{\omega,r}(\xi).$$

Действительно, имеет место включение $B_\varepsilon\left((\omega(\varepsilon)+\varepsilon)\xi\right) \subset \mathcal{S}_{\omega,r}(\xi) \cup \mathcal{F}_{\omega,r}(\xi)$ для любого $\varepsilon > 0$, удовлетворяющего условию

$$2\varepsilon + \omega(\varepsilon) < \psi(r).$$

Так как $2\varepsilon + \omega(\varepsilon) < 2\phi(\varepsilon)$, то достаточно потребовать, чтобы $2\phi(\varepsilon) < \psi(r)$.

Лемма 1.1.3. *Если Ω удовлетворяет равномерному условию ω-каспа с параметром r в точке y, $\rho = \psi(r)$, $\omega(0) = 0$, и*

$$-\phi^{-1}\left(\frac{\psi(r)}{2}\right) \le \eta \le 0 \le \varepsilon \le \phi^{-1}\left(\frac{\psi(r)}{2}\right),$$

то

$$x \in B_{2\rho}(y)\backslash\Omega^\eta \;\Rightarrow\; x_{\varepsilon-\eta} = x + \left[\phi(\varepsilon) + \phi(-\eta)\right]\xi \notin \Omega^\varepsilon. \tag{1.1.14}$$

Доказательство. 1) Пусть $\eta = 0$, тогда (1.1.14) примет вид

$$x \in B_{3\rho}(y)\backslash\Omega \;\Rightarrow\; x_\varepsilon = x + \phi(\varepsilon)\xi_y \notin \Omega^\varepsilon. \tag{1.1.15}$$

В силу определения 1.1.1, конус $x + \mathcal{C}_{\omega,r}(\xi_y)$ содержится в дополнении Ω, следовательно, из замечания 1.1.2,

$$B_\varepsilon(x_\varepsilon) = B_\varepsilon\left(x + \phi(\varepsilon)\xi_y\right) \subset x + \mathbb{R}^d\backslash\Omega,$$

то есть, $\mathrm{dist}(x_\varepsilon, \Omega) \ge \varepsilon$.

2) В случае $\varepsilon = 0$, будем действовать от противного. Пусть $x_{-\eta} \in \Omega$, так как $x_{-\eta} \in B_{3\rho}(y)$, то, из замечания 1.1.2, получаем

$$B_{|\eta|}(x) = B_\eta\left(x_\eta - \phi(|\eta|)\xi_y\right) \subset x_{-\eta} - \mathcal{C}_{\omega,r}(\xi_y) \subset \Omega.$$

то есть $x \in \Omega^\eta$. Формула (1.1.14) для произвольного ε следует из применения (1.1.15) и леммы 1.1.2. $\square$

Лемма 1.1.4. *Если* Ω_1, Ω_2 *— два открытых множества* $\mathbb{R}^d$*,* $\Omega_1 \in \mathcal{W}^{\omega}_{r,\vartheta}$*,* $r > 0$*,* $\vartheta \geq 1$*,* $\rho = \psi(r)$*,* $\omega(0) = 0$*,* $e(\Omega_2, \Omega_1) \leq \phi^{-1}\left(\frac{\psi(r)}{2}\right)$*, то* $\breve{e}(\Omega_2, \Omega_1) \leq \phi(e(\Omega_2, \Omega_1))$*. В частности, если дополнительно одновременно* $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{W}^{\omega}_{r,\vartheta}$*,* $d_{\mathcal{HS}}(\Omega_1, \Omega_2) \leq \phi^{-1}\left(\frac{\psi(r)}{2}\right)$*, то*

$$d^{\mathcal{HP}}(\Omega_1, \Omega_2) \leq \phi(d_{\mathcal{HS}}(\Omega_1, \Omega_2)).$$

Ясно, что достаточно доказать первое утверждение, второе следует из определения $\breve{e}(X, Y)$ и того факта, что локально $M \backslash \bar{\Omega}$ удовлетворяет условию ω-каспа, если этому условию удовлетворяет Ω.

Пусть $\lambda = e(\Omega_1, \Omega_2)$, тогда $\Omega_2 \subset \Omega_1^{\lambda}$, и пусть $y \in \Omega_2 \backslash \Omega_1$. Так как $\lambda \leq \phi^{-1}\left(\frac{\psi(r)}{2}\right)$, то из леммы 1.1.3 $y + \phi(\lambda)\xi_y \in \mathbb{R}^d \backslash \Omega_1^{\lambda} \subset \mathbb{R}^d \backslash \Omega_2$.

Значит $\operatorname{dist}(y, \mathbb{R}^d \backslash \Omega_2) \leq \phi(\lambda)$, а так как y произвольный, то

$$\breve{e}(\Omega_2, \Omega_1) = \sup_{y \in \Omega_2 \backslash \Omega_1} d(y, \mathbb{R}^d \backslash \Omega_2) \leq \phi(\lambda).$$

1.2 Резольвентная непрерывность в $H^{1-s}(M)$, сходимость Mosco и спектральная устойчивость.

Пусть (H, h) — гильбертово пространство, а H_l — его подмножества. Следуя [27], введем понятия сильного нижнего и слабого верхнего пределов последовательности H_l:

$$\text{s-}\operatorname{Lim\,inf} H_l = \{v \in H | \forall S(v)\ \exists L > 0 : \forall l \geq L\ H_l \cap S(v) \neq \varnothing\}, \quad (1.2.1)$$

$$\text{w-}\operatorname{Lim\,sup} H_l = \{v \in H | \forall W(v)\ \forall l_0 > 0\ \exists l \geq l_0,\ H_l \cap W(v) \neq \varnothing\}, \quad (1.2.2)$$

где $S(v)$ и $W(v)$ — слабая и сильная окрестности точки v соответственно. Скажем, что последовательность H_l сходится в смысле Mosco к H_0, если предельные множества (1.2.1) и (1.2.2) совпадают с H_0. Заметим, что выполнено следующее

Предложение 1.2.1. *Если* $\{v_l\}$ *сильно сходится к ненулевому элементу* $v_0 \in H$*, то*

$$\text{s-Lim inf}\, H_l \ominus \langle v_0 \rangle = \text{s-Lim inf}\left(H_l \ominus \langle v_l \rangle\right).$$

$$\text{w-Lim sup}\, H_l \ominus \langle v_0 \rangle = \text{w-Lim sup}\left(H_l \ominus \langle v_l \rangle\right).$$

Дополнительно рассмотрим гильбертово пространство (L, l) и последовательность $\{L_k\}$ его подпространств с тем свойством, что существует линейный ограниченный оператор id : $H \to L$ реализующий компактные вложения $H \overset{\text{comp}}{\hookrightarrow} L$, $H_k \overset{\text{comp}}{\hookrightarrow} L_k$. Абстрактным функционалом Рэлея назовем

$$\mathfrak{J}(v) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \frac{h(v,v)}{l(v,v)}, & v \neq 0; \\ +\infty, & v = 0. \end{cases}$$

Так как функционал Рэлея на $H_l \subset H$ принимает то же множество значений, что и на конической оболочке H_l, то можно предполагать, что H_l — конусы.

Предложение 1.2.2. *Если H_l — конусы в H, то*

$$\inf_{v \in \text{s-Lim}\inf H_l} \mathfrak{J}(v) \geq \limsup_{l\to\infty} \inf_{v\in H_l} \mathfrak{J}(v), \tag{1.2.3}$$

$$\inf_{v \in \text{w-Lim}\sup H_l} \mathfrak{J}(v) \leq \liminf_{l\to\infty} \inf_{v\in H_l} \mathfrak{J}(v). \tag{1.2.4}$$

Кроме того, если в (1.2.4) выполнено равенство, то нормированная в H последовательность, минимизирующая правую часть (1.2.4), сильно предкомпактна в H.

Доказательство. Проведем рассуждения для обоснования (1.2.3). Сразу будем считать s-Lim inf $H_l \supsetneq \{0\}$. Рассмотрим минимизирующую нормированную в H последовательность $\{v_m\} \subset$ s-Lim inf H_l. Тогда для каждого элемента v_m найдется нормированная в H последовательность элементов $\{v_{l,m}\} \subset H_l$, которая сильно сходится к v_m. Строим диагональную последовательность:

$$\begin{array}{ccccccccc}
H_1 & \cdots & H_{l_1} & H_{l_1+1} & \cdots & H_{l_m} & \cdots & & \text{s-Lim}\inf H_l \\
v_{1,1} & \cdots & v_{l_1,1} & v_{l_1+1,1} & \cdots & v_{l_m,1} & \cdots & \to & v_1 \\
v_{1,2} & \cdots & v_{l_1,2} & v_{l_1+1,2} & \cdots & v_{l_m,2} & \cdots & \to & v_2 \\
\vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
v_{1,m} & \cdots & v_{l_1,m} & v_{l_1+1,m} & \cdots & v_{l_m,m} & \cdots & \to & v_m \\
v_{1,m+1} & \cdots & v_{l_1,m+1} & v_{l_1+1,m+1} & \cdots & v_{l_m,m+1} & \cdots & \to & v_{m+1} \\
\vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
\hline
v_{1,1} & \cdots & v_{l_1,1} & v_{l_1+1,2} & \cdots & v_{l_m,m} & \cdots & &
\end{array}$$

где l_m выбираются по следующей схеме. Фиксируем m и рассмотрим v_{m+1}, тогда найдется такое число L_m, что для любого числа l большего L_m выполнено $\|v_m - v_{l,m}\|_H \le \frac{1}{2^{m+1}}$. Строим последовательность чисел $l_k = \max_{m\le k} L_m$. Тогда для любого l из отрезка $[l_{m-1}+1, l_m]$ имеет место неравенство:

$$\|v_m - v_{l,m}\|_H \le \frac{1}{2^m}.$$

Оценим $\mathfrak{J}(v_{l,m})$:

$$\mathfrak{J}(v_{l,m}) = \frac{h(v_m,v_m) + 2h(v_m, v_{l,m}-v_m) + h(v_{l,m}-v_m, v_{l,m}-v_m)}{l(v_m,v_m) + 2l(v_m, v_{l,m}-v_m) + l(v_{l,m}-v_m, v_{l,m}-v_m)}.$$

Пусть $\varepsilon_{l,m} = \|v_m - v_{l,m}\|_H$ достаточно мало. Обозначим $C = \|\mathrm{id}\|_{\mathcal{L}(H,L)}$, тогда

$$\frac{\|v_m\|_H^2 - 2\|v_m\|_H\varepsilon_{l,m}}{\|v_m\|_L^2 + 2C\|v_m\|_L\varepsilon_{l,m} + C^2\varepsilon_{l,m}^2} \le \mathfrak{J}(v_{l,m}) \le \frac{\|v_m\|_H^2 + 2\|v_m\|_H\varepsilon_{l,m} + \varepsilon_{l,m}^2}{\|v_m\|_L^2 - 2C\|v_m\|_L\varepsilon_{l,m}}.$$

Таким образом,

$$|\mathfrak{J}(v_m) - \mathfrak{J}(v_{l,m})| \le \frac{2\|v_m\|_H\|v_m\|_L^2 + 2C\|v_m\|_L\|v_m\|_H}{\|v_m\|_L^4}\varepsilon_{l,m} + o(\varepsilon_{l,m}) \le$$
$$\le \left(2\mathfrak{J}(v_m) + 2C^2\mathfrak{J}(v_m)^2\right)\varepsilon_{l,m} + o(\varepsilon_{l,m}) = 2\mathfrak{J}\left(1 + C^2\mathfrak{J}\right)\varepsilon_{l,m} + o(\varepsilon_{l,m}),$$

где $\mathfrak{J} = \inf_{v\in \text{s-Lim}\inf H_l}\mathfrak{J}(v)$. Следовательно,

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}(v_{l,m}) + o(1) \ge \inf_{v\in H_l}\mathfrak{J}(v) + o(1).$$

Переходя к верхнему пределу по построенной диагональной последовательности, получим (1.2.1).

Проверим неравенство (1.2.2). Пусть $\{v_l\}$ — нормированная в H последовательность, на которой достигается значение правой части (1.2.2), причем $v_l \in H_l$. Тогда можно, переходя к подпоследовательности, считать, что существует функция $v \in H$, для которой $v_l \xrightarrow{L} v$, $v_l \xrightarrow{H} v$. Следовательно,

$$\lim_{l\to\infty}\mathfrak{J}(v_l) = \frac{\lim_{l\to\infty}\|v_l\|_H^2}{\lim_{l\to\infty}\|v_l\|_L^2} = \frac{1}{\|v\|_L^2} = \frac{\mathfrak{J}(v)}{\|v\|_H^2} \ge \mathfrak{J}(v) \ge \inf_{v\in \text{w-Lim}\sup H_l}\mathfrak{J}(v).$$

В случае, если в неравенстве (1.2.2) выполнено равенство, получаем что $\lim_{l\to\infty}\|v_l\|_H = \|v\|_H$, а значит v_l сходится к v сильно в H. □

Следствие 1.2.1. *Пусть $\lambda_k(\Omega)$ — k–ое собственное значение задачи (1.1.3), оператор $\mathcal{A}$ удовлетворяет условиям **D1**–**D3**, $\boldsymbol{\beta} \equiv \overline{\boldsymbol{b}}$, $\operatorname{Im} c \equiv 0$, $\{\Omega_l\}$ — последовательность областей M_O. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$*

1. *Если $\mathring{H}^1(\Omega) \supset \text{s-}\operatorname{Lim\,inf} \mathring{H}^1(\Omega_l)$, то $\limsup_{l\to\infty} \lambda_k(\Omega_l) \leq \lambda_k(\Omega)$;*

2. *Если $\mathring{H}^1(\Omega) \subset \text{w-}\operatorname{Lim\,sup} \mathring{H}^1(\Omega_l)$, то $\liminf_{l\to\infty} \lambda_k(\Omega_l) \geq \lambda_k(\Omega)$.*

В самом деле, пусть $u_1(\Omega), \ldots, u_{k-1}(\Omega)$ — собственные функции, соответствующие $\lambda_1(\Omega), \ldots, \lambda_{k-1}(\Omega)$, $E_k(\Omega) = \operatorname{span}\{u_1(\Omega), \ldots, u_{k-1}(\Omega)\}$. Тогда, положив в предложении 1.2.2, что $(H, h) = (\mathring{H}^1(M_O), \Phi)$, $(L, l) = (L_2(M_O), \tau)$, $H_l = \mathring{H}^1(\Omega_l) \ominus E_k(\Omega_l)$, где ортогональные дополнения берутся относительно Φ, и в силу предложения 1.2.1 получаем утверждение следствия.

Чтобы сформулировать следующий результат, следуя монографии [2], определим пространства бесселевых потенциалов $H^s(M)$. Пусть $\{O_k\}_1^K$ — покрытие многообразия M координатными окрестностями и $\{\psi_k\}_1^K$ — система функций со свойствами $\psi_k \in C^\infty(M)$, $\psi_k(x) \geq 0$, $\operatorname{supp}\psi_k \subset O_k$, $\sum \psi_k(x) > 0$ на M. Для произвольного $s \in \mathbb{R}$ и функции $u \in C^\infty(M)$ полагаем $\|u\|^2_{H^s(M)} = \sum \|u\psi_k\|^2_{H^s(\mathbb{R}^d)}$, $\|u\|^2_{H^s(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} \big(1 + |\xi|^2\big)^s |F(u)(\xi)|^2 d\xi$, F — преобразование Фурье, где подразумевается, что функция $u\psi_k$ продолжена нулем на все $\mathbb{R}^d$.

Для пространств $H^s(M)$ выполнены равенства $H^s(M)|_{s=1} = H^1(M)$, $H^s(M)|_{s=0} = L_2(M)$. Более того, для любых $0 < s < t < \infty$ имеет место компактное вложение $H^t(M) \hookrightarrow H^s(M)$. Тогда верно следующее предложение, которое является обобщением предложения 4.5.3 из [11]

Предложение 1.2.3. *Пусть $\{\Omega_l\}$, Ω — области в M_O, $\mathring{H}^1(\Omega_l)$ сходится к $\mathring{H}^1(\Omega)$ в смысле Mosco. Тогда для оператора $\mathcal{G}_\Omega$ решающего задачу (1.1.2) с условиями **D1**–**D3**, $\boldsymbol{\beta} \equiv \overline{\boldsymbol{b}}$, $\operatorname{Im} c \equiv 0$, имеет место резольвентная непрерывность*

$$\|\mathcal{G}_\Omega - \mathcal{G}_{\Omega_l}\|_{\mathcal{L}(H^{-1}(M_O), H^{1-s}(M))} \to 0, \quad \text{при} \quad l \to \infty.$$

Доказательство. 1) Из равенства $\mathring{H}^1(\Omega) = \text{s-Lim}\inf \mathring{H}^1(\Omega_l)$ следует, что для любой функции $\varphi \in \mathring{H}^1(\Omega)$ существует последовательность $\{\varphi_l\}$, $\varphi_l \in \mathring{H}^1(\Omega_l)$ такая, что $\varphi_l \to \varphi$ сильно в $\mathring{H}^1(M_O)$. Так как $\mathring{H}^1(\Omega) = \text{w-Lim}\sup \mathring{H}^1(\Omega_l)$, то из $f_l \rightharpoonup f$ в $\mathring{H}^1(M_O)$ следует, что $\{\mathcal{G}_{\Omega_l} f_l\}$ — ограниченная последовательность в $\mathring{H}^1(M_O)$. А значит существует последовательность $\{l_k\}$ и функция $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$, для которых $\mathcal{G}_{\Omega_{l_k}} f_{l_k} \rightharpoonup u$, и имеет место тождество

$$\Phi(u, \varphi) = \lim_{k\to\infty} \tau(f_{l_k}, \varphi_{l_k}) = \tau(f, \varphi) \ \ \forall \varphi \in \mathring{H}^1(\Omega),$$

значит $\mathcal{G}_{\Omega_{l_k}} f_{l_k} \rightharpoonup \mathcal{G}_\Omega f$ в $\mathring{H}^1(M_O)$.

2) Пусть резольвентная непрерывность отсутствует, тогда

$$\|\mathcal{G}_{\Omega_l} - \mathcal{G}_\Omega\|_{\mathcal{L}(H^{-1}(M_O), H^{1-s}(M))} = \sup_{\|f\|_{H^{-1}(M_O)} \le 1} \|\mathcal{G}_{\Omega_l} f - \mathcal{G}_\Omega f\|_{H^{1-s}(M)} \ge c > 0.$$

Предположим, что $\{f_l\}$, $\|f_l\|_{H^{-1}(M_O)} \le 1$, последовательность функций из $H^{-1}(M_O)$, для которых $\liminf_{l\to\infty} \|\mathcal{G}_{\Omega_l} f - \mathcal{G}_\Omega f\|_{H^{1-s}(M)} \ge c$. Тогда, переходя к подпоследовательности, существует элемент $f \in H^{-1}(M_O)$ такой, что $f_{l_k} \rightharpoonup f$ в $H^{-1}(M_O)$. Следовательно, в силу компактности вложения $\mathring{H}^1(M_O) \hookrightarrow H^{1-s}(M)$, получаем $\mathcal{G}_\Omega f_{l_k} \to \mathcal{G}_\Omega f$ сильно в $H^{1-s}(M)$. Теперь объединим следствия пункта 1 и 2 доказательства

$$\begin{aligned}
&\liminf_{l\to\infty} \|\mathcal{G}_{\Omega_l} f - \mathcal{G}_\Omega f\|_{H^{1-s}(M)} \le \\
&\lim_{k\to\infty} \|\mathcal{G}_{\Omega_{l_k}} f_{l_k} - \mathcal{G}_\Omega f\|_{H^{1-s}(M)} + \lim_{k\to\infty} \|\mathcal{G}_\Omega f_{l_k} - \mathcal{G}_\Omega f\|_{H^{1-s}(M)} = 0.
\end{aligned}$$

Противоречие. □

Для формулировки достаточных условий, гарантирующих сходимость Mosco введем пространство $\tilde{W}^1_p(\Omega) = \{u \in W^1_p(M) \,|\, \text{supp} u \subset \overline{\Omega}\}$. Тогда имеет место следующее утверждение

Предложение 1.2.4 ([21])**.** *Пусть область Ω такова, что $\partial\Omega$ локально представима в виде графика непрерывной функции. Тогда*

$$\tilde{W}^1_p(\Omega) = \mathring{W}^1_p(\Omega), \quad p \in [1, \infty).$$

Пусть μ мера на M ассоциирована с римановой структурой. Тогда верна следующая

Теорема 1.2.1. *Пусть* $\{\Omega_l\}$, Ω *— области* M_O, $\mathcal{G}_\Omega$ *— оператор решающий задачу (1.1.2), оператор* $\mathcal{A}$ *удовлетворяет условиям* ***D1–D3***, $\boldsymbol{\beta} \equiv \overline{\boldsymbol{b}}$, $\operatorname{Im} c \equiv 0$, $\lambda_k(\Omega)$ *— k–ое собственное значение в области* Ω, *тогда*

1. *Если* $\check{e}(\Omega, \Omega_l) \to 0$, *то* $\limsup_{l\to\infty} \lambda_k(\Omega_l) \le \lambda_k(\Omega)$ *для любого* $k \in \mathbb{N}$.
2. *Если* $\mu(\Omega_l \backslash \Omega) \to 0$ *и* $\partial\Omega$ *локально представима в виде графика непрерывной функции, то* $\liminf_{l\to\infty} \lambda_k(\Omega_l) \ge \lambda_k(\Omega)$ *для* $k \in \mathbb{N}$.
3. *Если одновременно выполнены условия 1 и 2, то для любого* $s > 0$

$$\|\mathcal{G}_\Omega - \mathcal{G}_{\Omega_l}\|_{\mathcal{L}(H^{-1}(M_O), H^{1-s}(M))} \to 0, \quad \textit{при} \quad l \to \infty.$$

Доказательство. Применим предложение 1.2.3 и следствие 1.2.1. Будем действовать в два этапа. А) Проверим, что $\mathring{H}^1(\Omega) \subset \text{s-}\operatorname{Lim\,inf} \mathring{H}^1(\Omega_l)$:

$$\forall v \in \mathring{H}^1(\Omega)\ \exists \{v_l\} : v_l \in \mathring{H}^1(\Omega_l) \Rightarrow v_l \overset{\mathring{H}^1(M_O)}{\longrightarrow} v, \text{ при } l \to \infty.$$

Для произвольной функции $v \in \mathring{H}^1(\Omega)$ найдется последовательность $\{v_l\} \subset C_0^\infty(\Omega)$, которая сильно сходится к v в топологии $\mathring{H}^1(\Omega)$. Без уменьшения общности предположим, что $d_l = \inf_{x\in\partial\Omega,\ y\in \operatorname{supp} v_l} |x-y| \searrow 0$. Так как $\omega_l = \check{e}(\Omega, \Omega_l) \to 0$, то можно составить последовательность

$$\tilde{d}_l = \min_{d_l > \omega_l} d_l. \tag{1.2.5}$$

По $\{\tilde{d}_l\}$ строим последовательность с повторениями $\{\tilde{v}_l\}$, в которой на m-м месте стоит функция из $\{v_l\}$ с номером, на котором реализуется минимум в равенстве (1.2.5), когда l равно m. Тогда $\tilde{v}_l \in C_0^\infty(\Omega_l) \subset \mathring{H}^1(\Omega_l)$, и $\tilde{v}_l \to v$ в норме $\mathring{H}^1(M_O)$.

В) Включение $\mathring{H}^1(\Omega) \supset \text{w-}\operatorname{Lim\,sup} \mathring{H}^1(\Omega_l)$ означает, что для произвольной последовательности $\{v_l\}, v_l \in \mathring{H}^1(\Omega_l)$, предел любой ее слабосходящейся подпоследовательности является элементом $\mathring{H}^1(\Omega)$. Заметим, что если $\mu(\Omega_l \backslash \Omega) \to 0$, и $v_l \rightharpoonup v$ в пространстве $\mathring{H}^1(M_O)$, то обязательно $v \in \tilde{H}^1(\Omega)$. Теперь применим предложение 1.2.4, теорема доказана.

$\square$

1.3 Оценки модуля резольвентной непрерывности в $H^1(M)$.

Пусть задано произвольное гильбертово пространство H и H_1, H_2 два его замкнутых подпространства. Рассмотрим задачи

$$u_i \in H_i, \quad \Phi(u_i, v_i) = \tau(f, v_i) \quad \forall v_i \in H_i,$$

где $f \in H^*$, τ — форма, спаривающая H и H^*, Φ есть полуторалинейная непрерывная функция на $H \times H$, для которой существуют такие положительные α', C_Φ, что

$$\alpha' \|u\|_H^2 \le \operatorname{Re} \Phi(u, u), \quad |\Phi(u, v)| \le C_\Phi \|u\|_H \|v\|_H \quad \forall u, v \in H.$$

По теореме 1.1.1 решение $u_i = \mathcal{G}(f; H_i)$ существует и единственно. Для $v \in H$, $H_1 \subset H$ обозначим $d_H(v, H_1) = \inf_{a \in H_1} \|v - a\|_H$. Обобщим утверждения из пункта 4 работы [32] на комплексный случай.

Лемма 1.3.1. *Пусть $u_i = \mathcal{G}(f; H_i)$, $i = 1, 2$, $f \in H^*$ и $H_1 \subset H_2$. Тогда*

$$\|u_1 - u_2\|_H \le \sigma d_H(u_2, H_1), \quad \sigma = C_\Phi / \alpha'.$$

Доказательство. Воспользуемся "Cea's lemma trick" (см. Теорема 2.4.1 из [16]). Так как u_i удовлетворяют тождествам

$$\Phi(u_1, v) = \tau(f, v), \ \ \forall v \in H_1; \qquad \Phi(u_2, w) = \tau(f, w), \ \ \forall w \in H_2,$$

и $H_1 \subset H_2$, то $\operatorname{Re} \Phi(u_1 - u_2, v) = 0$ для любого элемента $v \in H_1$. Таким образом $\alpha' \|u_2 - u_1\|_H^2$ не превосходит

$$\operatorname{Re} \Phi(u_2 - u_1, u_2 - u_1) = \operatorname{Re} \Phi(u_2 - u_1, u_2 - v_1) \le C_\Phi \|u_2 - u_1\|_H \|u_2 - v_1\|_H,$$

сократив на $\|u_2 - u_1\|_H$, получаем требуемое. □

В качестве простых следствий получаем следующие утверждения.

Лемма 1.3.2. *Для решений $u_i = \mathcal{G}(f; H_i)$, $i = 1, 2$ выполнено*

$$\|u_1 - u_2\|_H \le \sigma \left(d_H(u_1, H_1 \cap H_2) + d_H(u_2, H_1 \cap H_2) \right). \tag{1.3.1}$$

Сверх того, если $H^{1,2}$ замкнутое подпространство H такое, что $H_1 \cup H_2 \subset H^{1,2} \subset H$, тогда для $u^{1,2} = \mathcal{G}(f; H^{1,2})$ выполнено неравенство

$$\|u_1 - u_2\|_H \leq \sigma(d_H(u^{1,2}, H_1) + d_H(u^{1,2}, H_2)). \tag{1.3.2}$$

Следствие 1.3.1. *Пусть $H^{1,2}$, $H^{2,1}$ — замкнутые подпространства H, такие что $H_1 \cap H_2 \subset H^{1,2} \subset H$, $H_1 \cap H_2 \subset H^{2,1} \subset H$, и пусть $u^{1,2} = \mathcal{G}(f; H^{1,2})$, $u^{2,1} = \mathcal{G}(f; H^{2,1})$. Тогда выполнена оценка*

$$\|u_1 - u_2\|_H \leq \sigma^2(d_H(u^{1,2}, H_1) + d_H(u^{2,1}, H_2)), \quad u_i = \mathcal{G}(f; H_i).$$

Пусть оператор $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, заданный выражением (1.1.1), удовлетворяет условию ***D1***, $\boldsymbol{A} \in C^{0,1}(M)$, $\boldsymbol{\beta} \equiv \boldsymbol{b} \equiv 0$, $c \equiv 0$. Для того чтобы применить абстрактные оценки из утверждений 1.3.2, 1.3.1 необходимо уметь определять расстояние от решений задачи (1.1.2) с фиксированной правой частью из $H^{-1}(M_O)$ в области Ω_1 до пространства $\mathring{H}^1(\Omega_2)$.

Лемма 1.3.3 (см. [17] с. 24, [3] с. 49)**.** *Пусть (M, δ) – метрический компакт*[5]*, $\mathcal{F}$ – произвольное семейство замкнутых шаров, такое что $\inf_{B\in\mathcal{F}} \mathrm{diam} B > 0$ и A – множество центров шаров из $\mathcal{F}$, то существует подсемейство шаров $\{B_{r_j}(a_j)\}_{j=1}^J$, $J \in \mathbb{N}$, что $A \subset \cup_{j=1}^J B_{r_j}(a_j)$, причем $\{B_{r_j/3}(a_j)\}_{j=1}^J$ не пересекаются.*

На протяжении параграфа (и далее, диссертации) будем обозначать все константы буквой C, иногда нумеруя их по ходу доказательств и указывая от каких параметров происходит зависимость.

Предложение 1.3.1. *Пусть $X, Y \subset M_O$ два открытых подмножества, атлас $\mathfrak{W}$ является (ρ, ϑ)–техническим, $v \in \mathring{H}^1(Y)$. Обозначим $\Lambda = Y \backslash X$ и предположим, что для любой точки $y \in \Lambda$ существует вектор $\nu(y)$, такой что*[6]

$$\forall x \in \chi_y(\mathcal{B}_\rho(y) \backslash X) \Rightarrow (x + \nu(y)) \notin \chi_y\left(Y \cap \mathcal{B}_{3\rho}(y)\right),$$

[5] В цитируемых работах это утверждение доказано в случае если M подмножество $\mathbb{R}^d$. Однако рассуждения без труда переносятся на случай, если M — компактное многообразие.

[6] Обозначения $\mathcal{B}_\rho(y)$, χ_y см. условие ***W3*** из Главы 1, Параграфа 1

и для некоторой константы E справедливо:

$$\|v^y_{\nu(y)} - v\|^2_{h^1(\mathcal{B}_\rho(y))} \le E, \quad \|v^y_{\nu(y)} - v\|^2_{L_2(\mathcal{B}_\rho(y))} \le E,$$

для любой точки $y \in \Lambda^{3\rho} = \cup_{y\in\Lambda}\mathcal{B}_{3\rho}(y)$, где $v^y_h = v \circ \chi_y^{-1} \circ (x+h) \circ \chi_y$. Тогда можно построить функцию $w \in \mathring{H}^1(X)$ (независящую от выбора E), такую что

$$\|w - v\|^2_{\mathring{H}^1(M_O)} \le CE,$$

где $C = C(M_O, \vartheta, \rho) \equiv \mathrm{const}$.

Доказательство. Воспользуемся леммой 1.3.3, в которой положим $A = \Lambda$, $\mathcal{F} = \{\mathcal{O}_{\frac{\rho}{2\vartheta}}(y)\}_{y\in\Lambda}$. Тогда существует конечное семейство точек $\{x_j\}$, такое что

$$\forall i,j \in \mathbb{N}\cap[1,J], \quad i \ne j \quad \Rightarrow \quad \mathcal{O}_{\frac{\rho}{6\vartheta}}(x_j) \cap \mathcal{O}_{\frac{\rho}{6\vartheta}}(x_i) = \varnothing,$$
$$\Lambda \subset \cup_{j=1}^J \mathcal{O}_{\frac{\rho}{2\vartheta}}(x_j) \subset \cup_{j=1}^J \mathcal{B}_{\frac{\rho}{2}}(x_j), \qquad \mathcal{B}_{\frac{\rho}{6\vartheta^2}}(x_i) \cap \mathcal{B}_{\frac{\rho}{6\vartheta^2}}(x_j) = \varnothing.$$

Таким образом:

$$J \le \frac{\mu(M)}{\min_j \mu(\mathcal{O}_{\frac{\rho}{6\vartheta}}(x_j))} \le \frac{\mu(M)}{\inf_{z\in M} \mu(\mathcal{O}_{\frac{\rho}{6\vartheta}}(z))}, \tag{1.3.3}$$

где мера μ порождена формой риманова объема. Так как M компактно и мера μ абсолютно непрерывна, то существует точка $z \in M$, на которой достигается значение нижней грани в знаменателе дроби в правой части (1.3.3), и это значение положительно. Следовательно, J не превосходит некоторой константы $C_1(M_O, \vartheta, \rho)$.

Построим разбиение единицы $\{\varkappa_j\}_{j=0}^J$, положив $\varkappa_j = \frac{\varphi_j}{\sum_{k=0}^J \varphi_k}$, где

$$\varphi_j(x) = \min\left\{1, \left(\frac{3 - 3\delta(x_j, x)}{\rho}\right)^+\right\}, \quad \varphi_0(x) = \min\left\{1, 6\,\frac{\delta(x,\Lambda)}{\rho}\right\}.$$

В силу липшицевости расстояния $\delta(x,y)$ по каждой переменной, существует такая положительная константа $C_2(M_O, \vartheta, \rho)$, что

$$\sum_{j=0}^J \varkappa_j \equiv 1, \quad 0 \le \varkappa_j \le 1, \quad (\nabla\varkappa_j)^\sharp \, \nabla\varkappa_j \le C_2^2(M_O, \vartheta, \rho).$$

Положим $w = \sum_{j=0}^{J} \varkappa_j v^{x_j}_{\nu(x_j)}$, тогда $\|v-w\|_{\overset{\circ}{H}{}^1(M_O)}$ не превосходит

$$\sum_{j=1}^{J} \|\varkappa_j (v^{x_j}_{\nu(x_j)} - v)\|_{\overset{\circ}{H}{}^1(M_O)} \le \sum_{j=1}^{J} \Big[\|\varkappa_j\|_{L_\infty(M_O)} \|v^{x_j}_{\nu(x_j)} - v\|_{h^1(\mathcal{B}_\rho(x_j))} +$$
$$\|\varkappa_j\|_{w^1_\infty(M_O)} \|v^{x_j}_{\nu(x_j)} - v\|_{L_2(\mathcal{B}_\rho(x_j))} \Big] \le C_1(M_O,\vartheta,\rho) C_2(M_O,\vartheta,\rho) E.$$

□

Следующие утверждения позволяют найти константу E из условий предложения 1.3.1.

Лемма 1.3.4 (см [10])**.** *Если* $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$, *тогда для любого* $h \in \mathbb{R}^d$, $|h| < \rho$,

$$\int_{B_{2\rho}(x_0)} |v(x+h) - v(x)|^2 dx \le |h|^2 \int_{B_{3\rho}(x_0)} |\nabla v(x)|^2 dx$$

Теорема 1.3.1. *Пусть* $Z \subset M$, $Z \in \mathcal{W}^{\omega}_{r,\vartheta}$, $\vartheta \ge 1$, $r > 0$, *оператор* $\mathcal{A}$ *удовлетворяет условию* ***D1***, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{\beta} \equiv 0$, $c \equiv 0$, $f \in L_2(M)$, $u = \mathcal{G}_Z f$, $y \in M$, $h = |h|\xi_y$, $\omega(0) < |h| < \psi(r)$, *тогда для любого положительного* $\rho < \psi(r)$ *существует такое число* $\tilde{C} = \tilde{C}(\mathcal{A}, M_O, \vartheta, \rho)$, *что*

$$\|u - u^y_h\|^2_{h^1(\mathcal{B}_\rho(y))} \le \tilde{C}|h| \|u\|_{h^1(\mathcal{B}_{3\rho}(y))} \left[\|u\|_{h^1(\mathcal{B}_{3\rho}(y))} + \|f\|_{L_2(\mathcal{B}_{2\rho}(y))} \right].$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varkappa_y$ со свойствами

$$0 \le \varkappa_y \le 1,\ (\nabla \varkappa_y)^\sharp \nabla \varkappa_y \le C_2^2(M_O,\vartheta,\rho),\ \varkappa_y|_{\mathcal{B}_\rho(y)} \equiv 1,\ \operatorname{supp} \varkappa_y \subset \mathcal{B}_{2\rho}(y).$$

Следуя работе [32], определим для каждой функции v локализованный оператор сдвига

$$\mathcal{T}_{y,h} v = (1 - \varkappa_y) v + \varkappa_y v^y_h, \tag{1.3.4}$$

заметим, что $\mathcal{T}_{y,h} v - v = \varkappa_y (v^y_h - v)$. Так как $Z \in \mathcal{W}^{\omega}_{r,\vartheta}$, то для

$$v \in \overset{\circ}{H}{}^1(Z) \Rightarrow \mathcal{T}_{y,h} v \in \overset{\circ}{H}{}^1(Z), \quad \text{значит} \tag{1.3.5}$$

$$\begin{gathered} \frac{1}{\alpha} \|u^y_h - u\|^2_{h^1(\mathcal{B}_{\psi(r)}(y))} = \frac{1}{\alpha} \|\mathcal{T}_{y,h} u - u\|^2_{h^1(\mathcal{B}_{\psi(r)}(y))} \le \\ \Phi(\mathcal{T}_{y,h} u, \mathcal{T}_{y,h} u) - \Phi(u,u) + 2\operatorname{Re} \tau(f, u - \mathcal{T}_{y,h} u). \end{gathered} \tag{1.3.6}$$

Последнее слагаемое можно оценить по лемме 1.3.4, обозначая $\tilde{C}_1 = \tilde{C}_1(M_O)$, получаем $2\mathrm{Re}\,\tau(f, u - \mathcal{T}_{y,h}u) \le \tilde{C}_1\,|h|\,\|u\|_{h^1(\mathcal{B}_{2\rho})}\|f\|_{L_2(\mathcal{B}_{2\rho}(y))}$.

Займемся оценкой оставшихся членов выражения (1.3.6). Так как градиент $\mathcal{T}_{y,h}v$ имеет вид

$$\nabla(\mathcal{T}_{y,h}v) = \varkappa_y\nabla(v_h^y) + (1-\varkappa_y)\nabla v + \nabla\varkappa_y(v_h^y - v) = \mathcal{T}_{y,h}\nabla v + \nabla\varkappa_y(v_h^y - v),$$

то по свойству (1.3.5) разность $\Phi(\mathcal{T}_{y,h}u, \mathcal{T}_{y,h}u) - \Phi(u,u)$ можно оценить сверху как

$$\int_Z \mathfrak{a}(y, \mathcal{T}_{y,h}\nabla u + \nabla\varkappa_y(u_h^y - u))d\mu - \int_Z \mathfrak{a}(y, \mathcal{T}_{y,h}\nabla u)d\mu + \tag{1.3.7}$$

$$\int_Z \mathfrak{a}(y, \mathcal{T}_{y,h}\nabla u)d\mu - \int_Z \mathfrak{a}(y, \nabla u)d\mu, \tag{1.3.8}$$

где $\mathfrak{a}(x,\xi) := \boldsymbol{A}_{(x)}\,\xi \otimes \bar{\xi}$. Так как для любых $\xi, \eta \in \otimes_{\mathbb{C}}T_xM$ имеет место неравенство $\mathfrak{a}(x, \xi+\eta) - \mathfrak{a}(x,\xi) \le (\mathfrak{a}(x,\eta)\mathfrak{a}(x, 2\xi+\eta))^{1/2} \le \mathfrak{a}(x,\eta)^{1/2}(2\mathfrak{a}(x,\xi)^{1/2} + \mathfrak{a}(x,\eta)^{1/2})$, то, с помощью некоторый константы $\tilde{C}_2 = \tilde{C}_2(M_O, \mathcal{A}, \vartheta, r)$, первый интеграл (1.3.7) можно оценить как

$$\int_Z \mathfrak{a}(y, \mathcal{T}_{y,h}\nabla u + \nabla\varkappa_y(u_h^y - u))d\mu - \int_Z \mathfrak{a}(y, \mathcal{T}_{y,h}\nabla u)d\mu \le$$

$$\int_Z \mathfrak{a}(y, \mathcal{T}_{y,h}\nabla u + \nabla\varkappa_y(u_h^y - u))d\mu - \int_{Z\cap\mathcal{B}_{2\rho}(y)} \mathfrak{a}(y, \mathcal{T}_{y,h}\nabla u)d\mu \le$$

$$\tilde{C}_2\|u - u_h^y\|_{L_2(\mathcal{B}_{2\rho}(y))}\left(\tilde{C}_2\|u - u_h^y\|_{L_2(\mathcal{B}_{2\rho}(y))} + 2\|\mathfrak{a}(x, \mathcal{T}_{y,h}\nabla u)\|_{L_2(\mathcal{B}_{2\rho}(y))}\right).$$

В силу определения $\mathcal{T}_{y,h}$

$$\|\mathfrak{a}(x, \mathcal{T}_{y,h}\nabla u)\|_{L_2(\mathcal{B}_{2\rho}(y))} \le 2\tilde{C}_2(M_O, \mathcal{A}, \rho)\|u\|_{h^1(\mathcal{B}_{3\rho}(y))}.$$

Поэтому, применяя лемму 1.3.4, получаем

$$\int_Z \mathfrak{a}(y, \mathcal{T}_{y,h}\nabla u + \nabla\varkappa_y(u_h^y - u))d\mu - \int_Z \mathfrak{a}(y, \mathcal{T}_{y,h}\nabla u)d\mu \le$$

$$2\tilde{C}_2\left(\tilde{C}_2 + \tilde{C}_3\right)\|u\|^2_{h^1(\mathcal{B}_{3\rho}(y))}|h| = \tilde{C}_4(M_O, \mathcal{A}, \vartheta, \rho)\|u\|^2_{h^1(\mathcal{B}_{3\rho}(y))}|h|.$$

Второй интеграл в (1.3.8) можно оценить пользуясь выпуклостью $\mathfrak{a}$:

$$\mathfrak{a}(x, \mathcal{T}_{y,h}\nabla v) - \mathfrak{a}(x, \nabla v) \le$$

$$(1-\varkappa_y)\mathfrak{a}(x,\nabla v) + \varkappa_y\mathfrak{a}(x,\nabla(v_h^y)) - \mathfrak{a}(x,\nabla v) = \varkappa_y\left[\mathfrak{a}(x, \nabla v_h^y) - \mathfrak{a}(x, \nabla v)\right],$$

где $x \in \operatorname{supp}\varkappa_y$. Следовательно, получаем

$$\int_Z \mathfrak{a}(y, \mathcal{T}_{y,h}\nabla u)d\mu - \int_Z \mathfrak{a}(y,\nabla u)d\mu \le \int_Z \varkappa_y \left[\mathfrak{a}(x,\nabla(v_h^y)) - \mathfrak{a}(x,\nabla v)\right]d\mu =$$

$$\int_Z (\varkappa_y)_{-h}^y \mathfrak{a}(x-h,\nabla v)d(\mu_{-h}^y) - \int_Z \varkappa_y \mathfrak{a}(x,\nabla v)d\mu \le$$

$$\int_Z (\varkappa_y)_{-h}^y (\mathfrak{a}(x-h,\nabla v) - \varkappa_y \mathfrak{a}(x-h,\nabla v))d(\mu_{-h}^y) +$$

$$+\int_Z \varkappa_y \mathfrak{a}(x-h,\nabla v))(d(\mu_{-h}^y - d\mu) + \int_Z \varkappa_y(\mathfrak{a}(x-h,\nabla v) - \mathfrak{a}(x,\nabla v))d\mu \le$$

$$\tilde{C}_5(\mathcal{A},\vartheta,M_O,\rho)|h| \cdot \|u\|_{h^1(\mathcal{B}_{3\rho}(y))}.$$

$\square$

Прежде чем применить абстрактные оценки, нам потребуется обобщить леммы 1.1.2 и 1.1.3, описывающие свойства классов $\mathcal{W}_{r,\vartheta}^{\omega}$. Определения функций ϕ, ψ см. (1.1.12), множества Y^{ε} см. (1.1.13).

Следствие 1.3.2. *Пусть* $\Omega \in \mathcal{W}_{r,\vartheta}^{\omega}$, $\omega(0) = 0$, *тогда для любого положительного* ε *не превосходящего* $\min\left\{\phi^{-1}\left(\frac{\psi(r)-\omega(r)}{2(\vartheta+1)}\right), \frac{\psi(r)}{\vartheta}\right\}$ *следует*

$$\mathcal{O}_{\varepsilon}(\Omega) \in \mathcal{W}_{r_2,\vartheta}^{\omega+(\vartheta+1)\phi(\varepsilon)}, \quad r_2 = \psi^{-1}\left(\frac{\psi(r)}{2\vartheta}\right).$$

Доказательство. Фиксируем $y \in M$ и положим $Y = \chi_y\left(\Omega \cap \mathcal{B}_{3\psi(r)}(y)\right)$. Так как Y удовлетворяет равномерному условию ω-каспа с параметром r в точке $\chi_y(y)$, то следуя лемме 1.1.2 получим, что для любого положительного $\varepsilon \le \psi(r)\vartheta$ множество $B_{\varepsilon/\vartheta}(Y)$ также удовлетворяет равномерному условию ω-каспа в точке $\chi_y(y)$ с параметром $r_2 = \psi^{-1}(\psi(r)/2)$. Положив $Z = Y^{\varepsilon/\vartheta}$, $R = r_2$, $\rho = \psi(R) = \psi(r)/2$ из леммы 1.1.3 получим

$$x \in B_{2\rho}(y)\backslash Z \;\Rightarrow\; x + \phi\left(\left(\vartheta - \frac{1}{\vartheta}\right)\varepsilon\right)\xi_y \notin Z^{\left(\vartheta-\frac{1}{\vartheta}\right)\varepsilon} =$$

$$= \left(Y^{\varepsilon/\vartheta}\right)^{\left(\vartheta-\frac{1}{\vartheta}\right)\varepsilon} = Y^{\frac{\varepsilon}{\vartheta}+\left(\vartheta-\frac{1}{\vartheta}\right)\varepsilon} = Y^{\vartheta\varepsilon}.$$

В силу леммы 1.1.2 для любого положительного $\varepsilon < \psi(r)/\vartheta$ множество $Y^{\vartheta\varepsilon}$ удовлетворяет равномерному условию ω-каспа в точке $\chi_y(y)$ с параметром $r_2 = \psi^{-1}(\psi(r)/2)$. Значит для $\varepsilon \le \phi^{-1}\left(\frac{\psi(r)-\omega(r)}{2(\vartheta+1)}\right)$ выполнено

$$\begin{aligned} x \in \chi_y\left[\mathcal{B}_{\psi(r)}(y)\backslash\mathcal{O}_\varepsilon(\Omega)\right] \subset B_{2\rho}(y)\backslash Z \Rightarrow x + \phi\left((\vartheta - 1/\vartheta)\varepsilon\right)\xi_y \notin Y^{\vartheta\varepsilon} \Rightarrow \\ x + \phi\left((\vartheta - 1/\vartheta)\varepsilon\right)\xi_y + \mathcal{C}_{\omega,r}(\xi_y) \subset \mathbb{R}^d\backslash Y^{\vartheta\varepsilon} \Rightarrow \\ x + (2\vartheta+1)\phi\left(\varepsilon\right)\xi_y + \mathcal{C}_{\omega,r}(\xi_y) \subset \mathbb{R}^d\backslash Y^{\vartheta\varepsilon} \Rightarrow \\ x + \mathcal{C}_{\omega+(2\vartheta+1)\phi(\varepsilon),r/2}(\xi_y) \subset \mathbb{R}^d\backslash Y^{\vartheta\varepsilon} \Rightarrow \\ x + \mathcal{C}_{\omega+(2\vartheta+1)\phi(\varepsilon),r/2}(\xi_y) \subset \chi_y\left(\mathcal{B}_{3\psi(r)}(y)\backslash\mathcal{O}_\varepsilon(\Omega)\right). \end{aligned}$$

□

Напомним, что для отрицательного η множества $\mathcal{O}_\eta(\Omega)$ вводятся как $\{y \in \Omega \,|\, \mathcal{O}_{|\eta|}(y) \cap \partial\Omega = \varnothing\}$.

Следствие 1.3.3. *Пусть $\omega(0) = 0$ и $0 < -\eta, \varepsilon < \phi^{-1}\left(\frac{\psi(R)}{4(\vartheta+1)}\right)$, тогда*

$$\begin{gathered} x \in \chi_y\left(\mathcal{B}_{2\psi(r)}(y)\backslash\mathcal{O}_\eta(\Omega)\right) \Rightarrow \\ x + (\vartheta+1)(\phi(\varepsilon)+\phi(-\eta))\xi_y \notin \chi_y\left(\mathcal{O}_\varepsilon(\Omega) \cap \mathcal{B}_{3\psi(r)}(y)\right). \end{gathered}$$

Положив $Z = \chi_y\left(\Omega \cap \mathcal{B}_{3\psi(r)}(y)\right)$, $R = r$, $\rho = \psi(r)$, применяем лемму 1.1.3 и получим $x \in \chi_y\left(\mathcal{O}_\eta(\Omega) \cap \mathcal{B}_{2\psi(r)}(y)\right) \subset B_{2\psi(r)}(y)\backslash Y^{\vartheta\eta}$ и следовательно $x + \left[\phi(-\vartheta\eta) + \phi(\vartheta\varepsilon)\right]\xi_y \notin Y^{\vartheta\varepsilon}$, остается заметить, что $Y^{\vartheta\varepsilon} \subset \chi_y\left(\mathcal{O}_\varepsilon(\Omega) \cap \mathcal{B}_{3\psi(r)}(y)\right)$.

Лемма 1.3.5. *Пусть $\Omega \in \mathcal{W}^\omega_{r,\vartheta}$, $\vartheta \ge 1$, $r > 0$, $\omega(0) = 0$, $0 < -\eta, \varepsilon < \phi^{-1}\left(\frac{\psi(R)}{4(\vartheta+1)}\right)$, $\varepsilon \le \operatorname{dist}(\Omega, \partial O)$, оператор $\mathcal{A}$ удовлетворяет условию **D1**, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{\beta} \equiv 0$, $c \equiv 0$. Тогда для любой $f \in L_2(M)$ и $\Lambda = \mathcal{O}_\varepsilon(\Omega)\backslash\mathcal{O}_\eta(\Omega)$ существуют $w_\eta \in \mathring{H}^1(\mathcal{O}_\eta(\Omega))$ и $\bar{C} = \bar{C}(M_O, \mathcal{A}, \vartheta, r)$, такие что*

$$\|u_\varepsilon - w_\eta\|^2_{\mathring{H}^1(M_O)} \le \bar{C}\cdot(\phi(\varepsilon)+\phi(-\eta))\cdot\|u_\varepsilon\|_{\mathring{H}^1(M_O)}\left(\|u_\varepsilon\|_{\mathring{H}^1(M_O)} + \|f\|_{L_2(M_O)}\right),$$

где $u_\varepsilon = \mathcal{G}_{\mathcal{O}_\varepsilon(\Omega)}f$.

Доказательство. Так как область Ω из класса $\mathcal{W}^\omega_{r,\vartheta}$, то из следствия 1.3.2 получаем, что $\mathcal{O}_\varepsilon(\Omega) \in \mathcal{W}^{\omega+(\vartheta+1)\phi(\varepsilon)}_{r_2,\vartheta}$, $r_2 = \psi^{-1}\left(\frac{\psi(r)}{2}\right)$. В силу теоремы 1.3.1 для $Z = \mathcal{O}_\varepsilon(\Omega)$ найдется такая константа $\tilde{C} = \tilde{C}(M_O, r, \vartheta, \mathcal{A})$, что для $h = |h|\xi_y$, $|h| \geq (\vartheta+1)(\phi(\varepsilon)+\phi(-\eta))$, выражение $\|v - v_h^y\|^2_{h^1(\mathcal{B}_\rho(y))}$ не превосходит

$$\tilde{C}\|v\|_{h^1(\mathcal{B}_{3\rho}(y))}\left[\|v\|_{h^1(\mathcal{B}_{3\rho}(y))} + \|f\|_{L_2(Z\cap\mathcal{B}_{2\rho}(y))}\right]|h|.$$

Значит, применяя следствие 1.3.3 и предложение 1.3.1 для

$$Y = \mathcal{O}_\varepsilon(\Omega), \quad X = \mathcal{O}_\eta(\Omega), \quad v = u_\varepsilon, \quad \nu(y) = (\vartheta+1)(\phi(\varepsilon)+\phi(-\eta))\xi_y$$
$$E = \tilde{C}\|v\|_{h^1(\mathcal{B}_{3\rho}(y))}\left[\|v\|_{h^1(\mathcal{B}_{3\rho}(y))} + \|f\|_{L_2(Z\cap\mathcal{B}_{2\rho}(y))}\right](\vartheta+1)(\phi(\varepsilon)+\phi(-\eta))\xi_y,$$

получаем, что существует искомая функция $w_\eta \in \mathring{H}^1(\mathcal{O}_\eta(\Omega))$. □

Установим следующую резольвентную непрерывность относительно возмущения границы области.

Теорема 1.3.2. *Пусть $\Omega_1 \in \mathcal{W}^\omega_{r,\vartheta}$, $\vartheta \geq 1$, $r > 0$, $\omega(0) = 0$, оператор $\mathcal{A}$ удовлетворяет условию **D1**, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{\beta} \equiv 0$, $c \equiv 0$, $f \in L_2(M)$, $u_i = \mathcal{G}_{\Omega_i} f$, $i = 1, 2$. Тогда для достаточно малого $\varepsilon = e(\Omega_2\Delta\Omega_1, \partial\Omega_1)$ существует константа $K(M_O, \mathcal{W}^\omega_{r,\vartheta}, \mathcal{A})$, такая что*

$$\|u_1 - u_2\|^2_{\mathring{H}^1(M_O)} \leq K\cdot\phi(\varepsilon)\|f\|_{L_2(M_O)}\|f\|_{H^{-1}(M_O)}. \tag{1.3.9}$$

Если сверх этого $\Omega_2 \in \mathcal{W}^\omega_{r,\vartheta}$, $d_{\mathcal{HS}}(\Omega_1, \Omega_2)$ мало, то

$$\|u_1 - u_2\|^2_{\mathring{H}^1(M_O)} \leq K\cdot\phi(d_{\mathcal{HS}}(\Omega_1, \Omega_2))\|f\|_{L_2(M_O)}\|f\|_{H^{-1}(M_O)}. \tag{1.3.10}$$

Доказательство. Обозначим

$$\varepsilon = e(\Omega_2, \Omega_1), \quad \check{\varepsilon} = \check{e}(\Omega_2, \Omega_1), \quad \eta = e(\Omega_1, \Omega_2), \quad \check{\eta} = \check{e}(\Omega_1, \Omega_2).$$

Для доказательства (1.3.9) воспользуемся неравенством (1.3.2) леммы 1.3.2, где $H_1 = \mathring{H}^1(\Omega_1)$, $H_2 = \mathring{H}^1(\Omega_2)$, $H^{1,2} = \mathring{H}^1(\mathcal{O}_\varepsilon(\Omega_1))$. Так как $\mathring{H}^1(\mathcal{O}_{-\check{\eta}}(\Omega_1)) \subset H_1 \cap H_2$ и $d_H(u^{1,2}, H_2) \leq d_H(u^{1,2}, \mathring{H}^1(\mathcal{O}_{-\check{\eta}}(\Omega_1)))$ получим, что для $\sigma = \frac{\|\boldsymbol{A}\|_{L_\infty(M)}}{\alpha}$ выполнено

$$\|u_1 - u_2\|_H \leq \sigma\left(d_H(u^{1,2}, H_1) + d_H(u^{1,2}, H_2)\right) \leq 2\sigma d_H\left(u^{1,2}, \mathring{H}^1(\mathcal{O}_{-\check{\eta}}(\Omega_1))\right).$$

Теперь для получения неравенства (1.3.9) достаточно воспользоваться леммой 1.3.5 и неравенством (1.1.5).

Если дополнительно $\Omega_2 \in \mathcal{W}^{\omega}_{r,\vartheta}$ тогда, заменяя в предыдущих рассуждениях Ω_1 на Ω_2, получаем, что $\|u_1 - u_2\|_{\overset{\circ}{H}{}^1(M_O)}$ не превосходит

$$K \cdot \phi\left(\min\{e(\Omega_1 \Delta \Omega_2, \partial\Omega_1), e(\Omega_1 \Delta \Omega_2, \partial\Omega_2)\}\right) \|f\|_{L_2(M_O)} \|f\|_{H^{-1}(M_O)}.$$

Попутно заметим, что лемма 1.1.4 позволяет переписать ограничение на $d^{\mathcal{HP}}(\Omega_1, \Omega_2)$ как ограничение на $d_{\mathcal{HS}}(\Omega_1, \Omega_2)$. Таким образом, достаточно доказать, что

$$\|u_1 - u_2\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(M_O)} \leq K \cdot \phi\left(d^{\mathcal{H}}(\Omega_1, \Omega_2)\right) \|f\|_{L_2(M_O)} \|f\|_{H^{-1}(M_O)}, \qquad (1.3.11)$$

$$\|u_1 - u_2\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(M_O)} \leq K \cdot \phi\left(d_{\mathcal{H}}(\Omega_1, \Omega_2)\right) \|f\|_{L_2(M_O)} \|f\|_{H^{-1}(M_O)}. \qquad (1.3.12)$$

Неравенство (1.3.11) следует из леммы 1.3.5, неравенства (1.1.5) и оценки (1.3.1) леммы 1.3.2, так как $\overset{\circ}{H}{}^1(\mathcal{O}_{-\check{\eta}}(\Omega_1)) \subset H_1 \cap H_2$, $\overset{\circ}{H}{}^1(\mathcal{O}_{-\check{\varepsilon}}(\Omega_2)) \subset H_1 \cap H_2$, то

$$d_H(u_1, H_1 \cap H_2)^2 \leq d_H(u_1, \overset{\circ}{H}{}^1(\mathcal{O}_{-\check{\eta}}(\Omega_1)))^2 \leq K \cdot \phi\left(\check{\eta}\right) \|f\|_{L_2(M_O)} \|f\|_{H^{-1}(M_O)},$$

$$d_H(u_2, H_1 \cap H_2)^2 \leq d_H(u_2, \overset{\circ}{H}{}^1(\mathcal{O}_{-\check{\varepsilon}}(\Omega_2)))^2 \leq K \cdot \phi\left(\check{\varepsilon}\right) \|f\|_{L_2(M_O)} \|f\|_{H^{-1}(M_O)}.$$

Оценка (1.3.12) получается из леммы 1.3.5, неравенства (1.1.5) и следствия 1.3.1, где $H^{1,2} = \overset{\circ}{H}{}^1(\mathcal{O}_{\varepsilon}(\Omega_1))$, $H^{2,1} = \overset{\circ}{H}{}^1(\mathcal{O}_{\eta}(\Omega_2))$. $\square$

Глава 2

Дифференциальные операторы ассоциированные с секториальными формами в случае областей с произвольной границей.

2.1 Пространства Никольского–Бесова.

Чтобы обобщить и применить оценки предыдущей главы, воспользуемся вещественной интерполяцией и свойствами связанных с ней пространств Никольского–Бесова. Сначала определим пространства Соболева для целого порядка гладкости.

Определение 2.1.1. *Скажем, что для произвольного открытого множества $\Omega \subset M$, сечение $\boldsymbol{S}$ принадлежит пространству $W_p^m(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$ если $\boldsymbol{S} \in L_p(\Omega)$ и существует обобщенный градиент $\nabla^m \boldsymbol{S}$*

$$\|\boldsymbol{S}\|_{w_p^m(\Omega)} := \|\nabla^m \boldsymbol{S}\|_{L_p(\Omega)} < \infty.$$

В качестве нормы примем $\|\boldsymbol{S}\|^p_{W_p^m(\Omega)} := \|\boldsymbol{S}\|^p_{L_p(\Omega)} + \|\boldsymbol{S}\|^p_{w_p^m(\Omega)}$.

В тех же предположениях, что и в определении 2.1.1, скажем, что $\boldsymbol{S} \in V_p^m(\Omega)$, если, дополнительно, конечна норма $\|u\|^p_{V_p^m(\Omega)} := \|u\|^p_{L_p(\Omega)} + \sum_{k=1}^m \|u\|^p_{w_p^k(\Omega)}$.

Предложение 2.1.1 (см. [12]). *Если Ω — ограниченная область с границей C–класса, то $V_p^m(\Omega)$ совпадает с $W_p^m(\Omega)$ для любых $p \in [1, \infty]$.*

В силу предложения 2.1.1, не будем употреблять обозначение $V_p^m(\Omega)$ на протяжении диссертации. Заметим также, что вследствие неравенства Фридрихса в пространстве $\tilde{W}_p^m(\Omega) = \{v \in W_p^m(M_O) \,|\, \operatorname{supp} v \subset \bar{\Omega}\}$, $\Omega \Subset M_O$ полунорму $w_p^m(\Omega)$ можно принять за норму, что и будет предполагаться.

Теорема 2.1.1 (см. [13]). *Пусть*[1] $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $\partial\Omega \in C^{0,\gamma_\Omega}$, $\gamma_\Omega \in (0,1]$, $p \in [1,\infty]$. *Тогда существует оператор продолжения*

$$S : W_p^l(\Omega) \to W_p^{\lfloor \gamma_\Omega l \rfloor}(\mathbb{R}^d)$$

где $\lfloor s \rfloor$ *— максимальное целое число не превосходящее* s*; причем норма* $\|S\|$ *ограничена постоянной, не зависящей от* p.

Если область Ω обладает липшицевой границей (либо границы нет), то вместо $W_2^m(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$, будем писать $H^m(\Omega)$. Так же для $p \in (1,\infty)$, $m \in \mathbb{N}$, $1/p + 1/q = 1$ введем обозначения:

$$W_q^{-m}(\Omega) = (\tilde{W}_p^m(\Omega))^*, \quad \tilde{W}_q^{-m}(\Omega) = (W_p^m(\Omega))^*. \tag{2.1.1}$$

В силу теоремы 1.2.4, если $\partial\Omega \in C$, то имеет место вложение $W_q^{-m}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$, которое при этом инъективно.

Теорема 2.1.2 (см. [1] теорема 4.12, [20], теорема 1.4.4.1). *Пусть* Ω *— область в* M_O, $\partial\Omega \in C^{0,1}$, $j \in \mathbb{N}_+$, $m \in \mathbb{N}_+$, $p \in [1,\infty)$.

1. *Если либо* $mp > d$ *либо* $m = d$ *и* $p = 1$, *то* $W_p^m(\Omega) \hookrightarrow C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$, *где* $k < m - \frac{d}{p} < k+1$, $\alpha = m - k - \frac{d}{p}$.
2. *Если* $mp < d$, *тогда* $W_p^{j+m}(\Omega) \hookrightarrow W_q^j(\Omega)$, *где* $p \le q \le p^* = \frac{dp}{d-mp}$.

Напомним следующее

Определение 2.1.2. *Пусть* $s \in \mathbb{R}^+$, *пространством Соболева–Слободецкого* $W_p^s(\Omega)$, $p \in (1,\infty)$ *называется пространство* $\mathcal{T}_l^k$ *сечений* $\boldsymbol{S} \in L_p(\Omega)$, *которое, в случае целого* s *совпадает с пространством Соболева,*

[1] Будем обозначать через $C^{0,\gamma}$, $\gamma \in (0,1]$ пространство $C^{0,(\cdot)^\gamma}$.

а в случае, если $s \notin \mathbb{N}$ состоит из $\boldsymbol{S} \in W_p^{\lfloor s \rfloor}(\Omega)$ (если $s < 1$, то $v \in L_p(\Omega)$) для которых конечна полунорма:

$$[\boldsymbol{S}]^p_{w_p^s(\Omega)} = \int_\Omega \int_\Omega \frac{\delta_{l,k+\lfloor s \rfloor}\left(\underset{x}{\nabla^{\lfloor s \rfloor} u(x)}, \underset{y}{\nabla^{\lfloor s \rfloor} u(y)}\right)^p}{\delta(x,y)^{d+(s-\lfloor s \rfloor)p}} \, d\mu_x \, d\mu_y,$$

где $\delta_{n,m}$ — метрика в расслоении $\mathcal{T}^n_m M$, порожденная римановой структурой.

Теорема 2.1.3 (см. [20], теорема 1.4.4.1)**.** *Имеет место следующее вложение $W^s_p(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow W^t_q(\mathbb{R}^d)$ для $t \leq s$ и $p \leq q < \infty$, таких что $s - \frac{d}{p} = t - \frac{d}{q}$.*

Пространства $W^s_p(\Omega)$ для отрицательного s определим аналогично формуле (2.1.1). Введем пространства Никольского–Бесова в случае областей $\mathbb{R}^d$. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — открытое множество, для $\delta > 0$ рассмотрим $\Omega^{-\delta} = \{x \in \Omega \,|\, \rho(x, \partial\Omega) > \delta\}$, $Z(\Omega^{-\delta})$ — полунормированное пространство функций, заданных на $\Omega^{-\delta}$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $l \in \mathbb{R}_+$, $m, \sigma \in \mathbb{N}$. Будем говорить, что $f \in d^{m,\sigma}B^l_\theta(Z(\Omega))$, если $f \in L_{1,loc}(\Omega)$ и

$$\|f\|_{d^{m,\sigma}B^l_\theta(Z(\Omega))} = \|f\|_{Z(\Omega)} + \sum_j \|f\|_{d^{m,\sigma}b^l_\theta(Z(\Omega))} < \infty, \qquad (2.1.2)$$

$$\|f\|_{d^{m,\sigma}b^l_\theta(Z(\Omega))} = \left\| h^{-l-m} \|\Delta^\sigma_{h,j} \partial^m_j f\|_{Z(\Omega^{-\sigma h})} \right\|_{L^*_\theta(0,H)},$$

и обозначим $n^l := b^l_\infty$, $N^l := B^l_\infty$. Здесь $\Delta^\sigma_{h,j}\varphi$ — разность по переменной x_j порядка σ с шагом h, $L^*_\theta(0,H)$ — пространство измеримых на $(0,H)$ функций g одной переменной, для которых при $1 \leq \theta < \infty$

$$\|g\|_{L^*_\theta(0,H)} = \left(\int_0^H |g(h)|^\theta \frac{dh}{h} \right)^{1/\theta} < \infty, \quad (L^*_\infty(0,H) = L_\infty(0,H))$$

Будем считать, что набор l, σ, m является допустимым, если

$$\sigma + m > l > m.$$

Определение 2.1.3. *Пусть набор l, σ, m является допустимым, $l > 0$, $p \in [1, \infty]$, $\theta \in [1, \infty)$ пространствами Бесова и Никольского назовем соответственно $d^{m,\sigma}B^l_{p,\theta}(\Omega) := d^{m,\sigma}B^l_\theta(L_p(\Omega))$, $d^{m,\sigma}N^l_p(\Omega) := d^{m,\sigma}B^l_\infty(L_p(\Omega))$.*

Предложение 2.1.2 (см. [8]). *Определение пространств Бесова и Никольского не зависит от допустимого набора l, σ, m, в случае если $\Omega = \mathbb{R}^d$. Более того, если существует оператор продолжения $P : d^{m,\sigma}B^l_\theta(L_p(\Omega)) \to d^{m,\sigma}B^l_\theta(L_p(\mathbb{R}^d))$, то пространства $d^{m,\sigma}B^l_\theta(L_p(\Omega))$ также не зависят от допустимого набора.*

Таким образом, следуя предложению 2.1.2 в случаях если $\Omega = \mathbb{R}^d$ или существует оператор продолжения[2] P будем писать

$$B^s_{p,\theta}(\Omega) = d^{m,\sigma}B^s_{p,\theta}(\Omega), \qquad N^s_p(\Omega) = d^{m,\sigma}N^s_p(\Omega).$$

Заметим дополнительно, что из предложения 2.1.2 следует, что пространства $\tilde{B}^s_{p,\theta}(\Omega) = \{v \in B^s_{p,\theta}(\mathbb{R}^d) \,|\, \operatorname{supp} v \subset \overline{\Omega}\}$, $\tilde{N}^s_p(\Omega) = \{v \in N^s_p(\mathbb{R}^d) \,|\, \operatorname{supp} v \subset \overline{\Omega}\}$ также не зависят от допустимого набора вне зависимости от открытого множества Ω.

Теорема 2.1.4 (см. [14], Теорема 1). *Пусть $1 \le p, \theta \le \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $0 < H \le \infty$; наборы l_1, σ_1, m_1, ..., l_k, σ_k, m_k и $l_1 + \dots + l_k$, σ_{k+1}, m_{k+1} являются допустимыми. Тогда*

1) для любого открытого множества Ω

$$d^{m_k,\sigma_k}B^{l_k}_\theta(\dots(d^{m_1,\sigma_1}B^{l_1}_\theta(L_p(\Omega)))\dots) \hookrightarrow d^{m_{k+1},\sigma_{k+1}}B^{l_1+l_2+\dots+l_k}_{p,\theta}(\Omega)$$
$$d^{m_k,\sigma_k}N^{l_k}(\dots(d^{m_1,\sigma_1}N^{l_1}(L_p(\Omega)))\dots) \hookrightarrow d^{m_{k+1},\sigma_{k+1}}N^{l_1+l_2+\dots+l_k}_p(\Omega).$$

2) при дополнительном предположении о том, что для открытого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ существует ограниченный оператор продолжения $P : B^{l_1+\dots+l_k}_{p,\theta}(\Omega) \to B^{l_1+\dots+l_k}_{p,\theta}(\mathbb{R}^d)$ имеют место равенства

$$d^{m_k,\sigma_k}B^{l_k}_\theta(\dots(d^{m_1,\sigma_1}B^{l_1}_\theta(L_p(\Omega)))\dots) = d^{m_{k+1},\sigma_{k+1}}B^{l_1+l_2+\dots+l_k}_{p,\theta}(\Omega)$$
$$d^{m_k,\sigma_k}N^{l_k}(\dots(d^{m_1,\sigma_1}N^{l_1}(L_p(\Omega)))\dots) = d^{m_{k+1},\sigma_{k+1}}N^{l_1+l_2+\dots+l_k}_p(\Omega).$$

Введем пространства Бесова отрицательной гладкости.

Определение 2.1.4. *Для произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, скажем, что $f \in \mathring{N}^s_p(\mathbb{R}^d)$, $r+1 \ge \lfloor s \rfloor > r$, $s > 0$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $p \in (1, \infty)$ если одновременно*

$$\lim_{h\to 0}\max_j h^{-1}\|\Delta^2_{h,j}\partial^r_j f\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} = 0, \qquad \lim_{|h|\to\infty}\max_j h^{-1}\|\Delta^2_{h,j}\partial^r_j f\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

[2] Оператор P существует для любой фиксированной области с липшицевой границей (см. [30])

Для $q \in (1,\infty)$ *обозначим*

$$B^{-s}_{p',q'}(\Omega) = \left(\tilde{B}^s_{p,q}(\Omega)\right)^*, \quad B^{-s}_{p',1}(\Omega) = \left(\mathring{\tilde{N}}^s_p(\Omega)\right)^*$$

причем $1/p + 1/p' = 1$, $1/q + 1/q' = 1$.

Заметим, что определения 2.1.3 и 2.1.4 не покрывают случай так называемых пространств Бесова "нулевой гладкости" , когда $s = 0$, которые подробно рассмотрены в работе [9].

В случае, если Ω — область в M введем пространства Никольского–Бесова следующим образом. Пусть $\{(U,\chi_U)\}$ — конечный атлас и $\{\psi_U\}$ — подчиненное гладкое разбиение единицы. Тогда скажем, что сечение $\boldsymbol{S} \in B^s_{p,q}(M)$, $s \in \mathbb{R}$, $p \in [1,\infty]$, $q \in [1,\infty]$ если $(\boldsymbol{S}\cdot\psi_U)\circ\chi_U^{-1} \in B^s_{p,q}(\chi_U(U))$.

Как показано в работе [29], лемма 2.4, с. 277, для $s \in \mathbb{R}_+$, $p \in [1,\infty]$ пространства $N^s_p(M)$ не зависят от атласа и разбиения единицы[3]. Однако для пространств общего вида (см. определение 2.1.3) необходимо указывать, для каких карт проверяется (2.1.2).

Определение 2.1.5. *Пусть* m,σ,l *— допустимый набор,* $\mathcal{U} = \{U,\kappa_U\}$ *— атлас многообразия* M *и* $\{\psi_U\}$ *— подчиненное разбиение единицы,* $\Omega \subset M$ *— открытое множество, то* $u \in d^{m,\sigma}_{\mathcal{U}} B^l_{p,q}(\Omega)$*, если выполнено (2.1.2) для* $\psi_U u$ *в каждой карте* U.

Введем обозначения: F — преобразование Фурье функций на $\mathbb{R}^d$, $M_0 = \{\xi \in \mathbb{R}^d \mid |\xi| \le 2\}$, и $M_j = \{\xi \in \mathbb{R}^d \mid 2^{j-1} \le |\xi| \le 2^{j+1}\}$ для $j \in \mathbb{N}$.

Определение 2.1.6. *Для* $s \in \mathbb{R}$, $p \in (1,\infty)$, $q \in [1,\infty)$ *положим:*

$$iB^s_{p,q}(\mathbb{R}^d) = \Bigg\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \mid f \overset{\mathcal{S}'}{=} \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x);\ \mathrm{supp} F a_j \subset M_j;$$
$$\|\{a_j\}\|_{l^s_q(L_p)} = \left[\sum_{j=0}^{\infty} (2^{sj}\|a_j\|_{L_p(\mathbb{R}^d)})^q\right]^{1/q} < \infty \Bigg\},$$

[3]Пространства $B^s_{p,q}(M)$ так же не зависят от разбиения единицы и атласа, вследствие интерполяционной природы (см. Предложение 2.1.3)

и в случае $q = \infty$

$$iB^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^d) = \Bigg\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \mid f \overset{\mathcal{S}'}{=} \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x);\ \mathrm{supp} F a_j \subset M_j;$$

$$\|\{a_j\}\|_{l^s_\infty(L_p)} = \sup_{j\in\mathbb{Z}_+} 2^{sj}\|a_j\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} < \infty \Bigg\},$$

где $\mathcal{S}'$ *— пространство функций медленного роста, и норма в* $iB^s_{p,q}(\mathbb{R}^d)$ *определяется равенством* $\|f\|_{iB^s_{p,q}(\mathbb{R}^d)} = \inf_{f \overset{\mathcal{S}'}{=} \sum_{j=0}^{\infty} a_j} \|\{a_j\}\|_{l^s_q(L_p)}$.

Обозначим $iB^s_{p,q}(\Omega)$ множество всех функций из $iB^s_{p,q}(M)$, полученных сужением на Ω; норма $v \in iB^s_{p,q}(\Omega)$ вводится как нижняя грань всех $\|u\|_{iB^s_{p,q}(M)}$ по таким функциям $u \in iB^s_{p,q}(M)$, что $u|_\Omega = v$.

Для $s \in \mathbb{R}_+$, и областей $\Omega \subset M$, $\partial\Omega \in C^{0,1}$, пространства Никольского, Бесова и Соболева–Слободецкого являются частными случаями пространств $iB^s_{p,q}$:

$$\begin{aligned} &\tilde{N}^s_p(\Omega) = i\tilde{B}^s_{p,\infty}(\Omega), \quad \tilde{B}^s_{p,q}(\Omega) = i\tilde{B}^s_{p,q}(\Omega), \quad \tilde{W}^s_p(\Omega) = i\tilde{B}^s_{p,p}(\Omega), \\ &N^s_p(\Omega) = iB^s_{p,\infty}(\Omega), \quad B^s_{p,q}(\Omega) = iB^s_{p,q}(\Omega), \quad W^s_p(\Omega) = iB^s_{p,p}(\Omega), \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

и для любых $p \in (1,\infty)$, $q \in [1,\infty]$, $s \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, имеют место цепочки вложений:

$$\begin{aligned} &i\tilde{B}^{s+\varepsilon}_{p,\infty}(\Omega) \hookrightarrow i\tilde{B}^s_{p,1}(\Omega) \hookrightarrow i\tilde{B}^s_{p,q}(\Omega) \hookrightarrow i\tilde{B}^s_{p,\infty}(\Omega) \hookrightarrow i\tilde{B}^{s-\varepsilon}_{p,1}(\Omega). \\ &iB^{s+\varepsilon}_{p,\infty}(\Omega) \hookrightarrow iB^s_{p,1}(\Omega) \hookrightarrow iB^s_{p,q}(\Omega) \hookrightarrow iB^s_{p,\infty}(\Omega) \hookrightarrow iB^{s-\varepsilon}_{p,1}(\Omega). \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

Напомним конструкцию вещественной интерполяции банаховых пространств (будем следовать книге [35]). Пусть A_0 и A_1 — два комплексных банаховых пространства, линейно и непрерывно вложенных в комплексное топологическое линейное пространство A. Определим пространство $A_0 + A_1 = \{a \,|\, a \in A, a = a_0 + a_1,$ где $a_j \in A_j,\ j = 0,1\}$, $\|a\|_{A_0+A_1} = \inf_{a=a_0+a_1,\, a_j=A_j}(\|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_1})$. Для всякого t, $0 < t < \infty$, рассмотрим функционал $K(t,a) = K(t,a;A_0,A_1) = \inf_{a=a_0+a_1}(\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1})$.

Определение 2.1.7. *Пусть* $0 < s < 1$, *интерполяционные пространства вводятся при* $1 \le \theta < \infty$ *как*

$$(A_0,A_1)_{s,\theta} = \left\{ a \,\middle|\, a \in A_0 + A_1, \|a\|_{(A_0,A_1)_{s,\theta}} = \left(\int_0^\infty \left[t^{-s}K(t,a)\right]^\theta \frac{dt}{t} \right)^{1/\theta} \right\},$$

а при $\theta = \infty$ *как*

$$(A_0, A_1)_{s,\theta} = \left\{ a \,\middle|\, a \in A_0 + A_1,\ \|a\|_{(A_0,A_1)_{s,\infty}} = \sup_{0<t<\infty} t^{-s} K(t,a) \right\},$$

Теорема 2.1.5 (см. Теорема 13.3.1 [2]). *Пусть* T *— ограниченный линейный оператор из* $X_0 + X_1$ *в* $Y_0 + Y_1$, $T_j = T|_{\mathcal{L}(X_j,Y_j)}$, $j = 0,1$, $T_{s,\theta}$ *— обозначение оператора* T *как оператора из* $X_{s,\theta}$ *в* $Y_{s,\theta}$, $X_{s,\theta} = (X_0, X_1)_{s,\theta}$, $Y_{s,\theta} = (Y_0, Y_1)_{s,\theta}$, $s \in (0,1)$, $\theta \in [1,\infty]$, *и* $\|T_j\| = M_j$ $(j = 0,1)$. *Тогда* $T_{s,\theta}$ *— ограниченный оператор из* $X_{s,\theta}$ *в* $Y_{s,\theta}$ *с нормой* $M_{s,\theta}$ *удовлетворяющей неравенству* $M_{s,\theta} \le M_0^{1-s} M_1^s$.

Предложение 2.1.3 (см. [35], [30]). *Для* $s \in (0,1)$, $p \in [1,\infty]$, $q \in [1,\infty]$, $k \in \mathbb{N}$ *области* $\Omega' \subseteq M$ *с липшицевой границей, пространства* $iB^s_{p,q}(\Omega')$ *являются результатом вещественной интерполяции:*

$$i\tilde{B}^s_{p,q}(\Omega') = (L_p(\Omega'), \tilde{W}^1_p(\Omega'))_{s,q}, \ \ i\tilde{B}^{k+s}_{p,q}(\Omega') = (\tilde{W}^k_p(\Omega'), \tilde{W}^{k+1}_p(\Omega'))_{s,q},$$
$$iB^{-s}_{p,q}(\Omega') = (L_p(\Omega'), W^{-1}_p(\Omega'))_{s,q}; \quad iB^{-k-s}_{p,q}(\Omega') = (W^{-k}_p(\Omega'), W^{-k-1}_p(\Omega'))_{s,q};$$

Предложение 2.1.4 (см. [35], [30]). *Для* $t, s \in (0,1)$, $0 < s_1 < s_2 < 1$, $q \in [1,\infty]$, $p \in (1,\infty)$, $k \in \mathbb{N}$, *области* $\Omega' \subseteq M$, $\partial\Omega' \in C^{0,1}$, *выполнено:*

$$(\tilde{W}^k_p(\Omega'), i\tilde{B}^{k+s}_{2,q}(\Omega'))_{t,p} = \tilde{W}^{k+ts}_p(\Omega'),\ (W^{-k}_p(\Omega'), iB^{-k+s}_{p,q}(\Omega'))_{t,p} = W^{-k+ts}_p(\Omega'),$$
$$(iB^{-k-s_1}_{p,q}(\Omega'), iB^{-k-s_2}_{p,q}(\Omega'))_{t,p} = W^{-k-(1-t)s_1-ts_2}_p(\Omega');$$

Следуя определению 2.1.4 введем пространства $iB^s_{p,\infty-}$ как

$$u \in iB^s_{p,\infty}(\mathbb{R}^d) : \lim_{|h|\to 0} \frac{\|\Delta^2_h u\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}}{|h|^s} = 0, \quad \lim_{|h|\to\infty} \frac{\|\Delta^2_h u\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}}{|h|^s} = 0.$$

Предложение 2.1.5 (см. [28], Theorem 4). *Пусть* $s \in \mathbb{R}$, $p \in (1,\infty)$, $q \in [1,\infty-]$, $\Omega \subseteq M$ *— область с липшицевой границей, тогда:*

$$\left(iB^s_{p,q}(\Omega)\right)^* = i\tilde{B}^{-s}_{p',q'}(\Omega), \quad 1/p + 1/p' = 1, \quad 1/q + 1/q' = 1,$$
$$\left(i\tilde{B}^s_{p,q}(\Omega)\right)^* = iB^{-s}_{p',q'}(\Omega), \quad 1/p + 1/p' = 1, \quad 1/q + 1/q' = 1.$$

причем $1' = \infty$.

Предложение 2.1.6 (см. [31]). *Пусть $E_1 \hookrightarrow E_0$ пара банаховых пространств, вложение непрерывно, задан линейный ограниченный оператор $\mathcal{T} : E_1 \to F$, F — банахово, причем существует $L > 0$ и $s \in (0,1)$ такие, что*

$$\|\mathcal{T}e\|_F \leq L\|e\|_{E_0}^{1-s}\|e\|_{E_1}^s, \quad \forall e \in E_1.$$

Тогда $\mathcal{T}$ может быть продолжен непрерывным образом как ограниченный оператор из $(E_0, E_1)_{s,1}$ в F, и для некоторой константы c_s

$$\|\mathcal{T}\|_{(E_0,E_1)_{s,1}\to F} \leq c_s L.$$

Теорема 2.1.6 (см. [35], Теорема 2.8.1). *Имеют место следующие утверждения*

- *a Пусть $1 < p \leq q < \infty$, $1 \leq r \leq \infty$ и $-\infty < t \leq s < \infty$ таковы, что $s - \frac{d}{p} = t - \frac{d}{q}$. Тогда $B^s_{p,r}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow B^t_{q,r}(\mathbb{R}^d)$*
- *b Пусть $p \in (1,\infty)$, $t \in \mathbb{R}_+ \backslash \mathbb{N}$, $1 \leq r \leq \infty$. Тогда $B^{\frac{d}{p}+t}_{p,r}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow C^t(\mathbb{R}^d)$.*
- *c Пусть $1 < p \leq q < \infty$, $1 \leq r \leq \infty$ таковы, что $s - \frac{d}{p} > -\frac{d}{q}$. Тогда*

$$B^s_{p,r}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L_q(\mathbb{R}^d).$$

Проверив критерий теоремы 1 из [19] можно убедиться, что не имеет место вложение $N^s_p(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L_q(\mathbb{R}^d)$ для $s - \frac{d}{p} = -\frac{d}{q}$.

Теорема 2.1.6 безусловно усиляет теорему 2.1.3 для нецелой гладкости (см. (2.1.3) и (2.1.4)). В целочисленном случае заметим справделивость следующей теоремы.

Теорема 2.1.7. *Для любого $\varepsilon > 0$, имеет место следующее вложение $W^m_p(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow B^t_{q,p+\varepsilon}(\mathbb{R}^d)$ для $m \in \mathbb{N}$, $t \leq m$ и $p \leq q < \infty$, таких что $m - \frac{d}{p} = t - \frac{d}{q}$.*

Доказательство. В самом деле, из теоремы 2.1.3 и равенств (2.1.3) следует, что для $\epsilon = \frac{\varepsilon}{dp(p+\varepsilon)}$ имеет место вложение

$$W^m_p(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow W^{m-\epsilon}_{p+\varepsilon}(\mathbb{R}^d) = B^{m-\epsilon}_{p+\varepsilon,p+\varepsilon}(\mathbb{R}^d)$$

Теперь воспользуемся теоремой 2.1.6, получим

$$B^{m-\epsilon}_{p+\varepsilon,p+\varepsilon}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow B^t_{q,p+\varepsilon}(\mathbb{R}^d),$$

где

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p+\varepsilon} = \frac{\epsilon}{d}, \qquad \frac{1}{p+\varepsilon} - \frac{1}{q} = \frac{m-t-\epsilon}{d}.$$

Теорема доказана. □

2.2 Распространение оценок модуля резольвентной непрерывности на случай операторов второго порядка.

Как и прежде будем считать, что для оператора $\mathcal{A}$, заданного выражением (1.1.1), поставлена первая краевая задача (1.1.2). Потребуем, чтобы коэффициенты $\mathcal{A}$ удовлетворяли условиям ***D1*** и ***D3***, в свою очередь условие ***D2*** заменим на более сильное. Потребуем, чтобы для $\gamma \in (0,1]$ и некоторого положительного ϵ, $d^* = \max\{2+\epsilon, d\}$

D2' (a) $\boldsymbol{A} \in C^{0,\gamma}(M_O)$;

(b) $\boldsymbol{\beta} \in \tilde{N}^{\gamma}_{d+\epsilon}(M_O)$ при $\gamma \in (0,1)$, $\boldsymbol{\beta} \in \mathring{W}^1_{d^*}(M_O)$ при $\gamma = 1$;

(c) $\boldsymbol{b} \in L_{\frac{d+\epsilon}{1-\gamma}}(M_O)$ при $\gamma \in (0,1)$, $\boldsymbol{b} \in L_\infty(M_O)$ при $\gamma = 1$;

(d) $c \in B^{-1+\gamma}_{d+\epsilon,1}(M_O)$ при $\gamma \in (0,1)$, $c \in L_{d^*}(M_O)$ при $\gamma = 1$.

Обобщим теорему 1.3.2, для этого предварительно перенесем теорему 1.3.1 и лемму 1.3.5. Для $p \in (1,\infty)$, $m \in \mathbb{N}$, $s \in (0,1]$, обозначим

(2.2.1)

	$m-s \notin \mathbb{Z}_+$	$m-s \in \mathbb{N}$	$m-s=0$
$K^{-m+s}_q(\Omega)$	$B^{-m+s}_{q,1}(\Omega)$	$W^{-m+s}_q(\Omega)$	$L_q(\Omega)$
$K^{m-s}_p(\Omega)$	$\tilde{N}^{m-s}_p(\Omega)$	$\tilde{W}^{m-s}_p(\Omega)$	$L_p(\Omega)$

причем, в силу (2.1.1) и определения 2.1.4 имеет место двойственность $\big(K^{-m+s}_q(\Omega)\big)^* = K^{m-s}_p(\Omega)$. Аналогично, для произвольного открытого множества введем полунорму $k^{m-s}_p(A)$, которая равна $n^{m-s}_p(A)$, $w^{m-s}_p(A)$ и $L_p(A)$ для $m-s \notin \mathbb{Z}_+$, $m-s \in \mathbb{N}$ и $m-s=0$ соответственно.

Так как норма в K_p^s вводится неинвариантным образом, то необходимо сделать следующее замечание. Обратимся к разбиению единицы, которое строится в доказательстве предложения 1.3.1. Вообще говоря, оно не единственно, поэтому предположим, что $\{\varkappa_j\}_{j=0}^J$ и $\{\tilde{\varkappa}_i\}_{i=0}^I$ два таких разибения. Для открытого множества $A \subset M$, $t \in (0,1]$, $p \in (1,\infty)$ на пространстве $\tilde{K}_p^t(A)$ определим следующие нормы

$$\|\boldsymbol{S}\|_{k_p^t(A),\{\varkappa_j\}} := \sum_{j=0}^J \|\,(\varkappa_j \boldsymbol{S}) \circ \chi_{y_j}^{-1}\|_{k_p^t(B_{3\rho}(\chi_{y_j}(y_j)))},$$

$$\|\boldsymbol{S}\|_{k_p^t(A),\{\tilde{\varkappa}_i\}} := \sum_{i=0}^I \|\,(\tilde{\varkappa}_i \boldsymbol{S}) \circ \chi_{y_i}^{-1}\|_{k_p^t(B_{3\rho}(\chi_{y_i}(y_i)))}$$

$S \in \tilde{K}_p^t(A)$. Как уже отмечалось ранее, данные нормы эквивалентны. Покажем, что существует такая константа $c = c(\rho, \vartheta, M) \geq 1$, что

$$c^{-1}\|\boldsymbol{S}\|_{k_p^t(A),\{\tilde{\varkappa}_i\}} \leq \|\boldsymbol{S}\|_{k_p^t(A),\{\varkappa_j\}} \leq c\|\boldsymbol{S}\|_{k_p^t(A),\{\tilde{\varkappa}_i\}} \quad \forall \boldsymbol{S} \in \tilde{K}_p^t(A).$$

Действительно, в силу условий ***W4***, ***W5*** получаем, что

$$\sum_{j=0}^J \|\,(\varkappa_j \boldsymbol{S}) \circ \chi_{y_j}^{-1}\|_{k_p^t(B_{3\rho}(\chi_{y_j}(y_j)))} = \sum_{j=0}^J \|\sum_{i=1}^I (\tilde{\varkappa}_i \varkappa_j \boldsymbol{S}) \circ \chi_{y_j}^{-1}\|_{k_p^t(\mathbb{R}^d)} \leq$$

$$\sum_{j=0}^J \sum_{i=1}^I \|(\tilde{\varkappa}_i \varkappa_j \boldsymbol{S}) \circ \chi_{y_i}^{-1} \circ \Big(\chi_{y_i} \circ \chi_{y_j}^{-1}\Big)\|_{k_p^t(\mathbb{R}^d)} \leq \vartheta \sum_{j=0}^J \sum_{i=1}^I \|(\tilde{\varkappa}_i \varkappa_j \boldsymbol{S}) \circ \chi_{y_i}^{-1}\|_{k_p^t(\mathbb{R}^d)} \leq$$

$$J\vartheta \max_j \|\varkappa_j\|_{C^{0,1}(M)} \sum_{j=0}^J \|\,(\tilde{\varkappa}_i \boldsymbol{S}) \circ \chi_{y_i}^{-1}\|_{k_p^t(B_{3\rho}(\chi_{y_i}(y_i)))},$$

осталось заметить, что J и $\|\varkappa_j\|_{C^{0,1}(M)}$ оцениваются с помощью константы, зависящей только от ϑ, ρ и M.

Теорема 2.2.1. *Пусть Z — открытое подмножество M_O, $Z \in \mathcal{W}_{r,\vartheta}^{\omega}$, $\vartheta \geq 1$, $r > 0$, оператор $\mathcal{A}$ удовлетворяет условиям **D1**, **D2'**, **D3**, $f \in K_2^{-1+\gamma}(M_O)$, $u = \mathcal{G}_Z f$, $y \in M$, $h = |h|\xi_y$, $\omega(0) < |h| < \psi(r)$, тогда для любого положительного $\rho < \psi(r)$ существует такое число $\tilde{C} = \tilde{C}(\mathcal{A}, M_O, \vartheta, \rho, \gamma)$, что*

$$\|u - u_h^y\|_{h^1(\mathcal{B}_\rho(y))}^2 \leq \tilde{C}|h|^\gamma \|u\|_{h^1(M_O)} \left[\|u\|_{h^1(M_O)} + \|f\|_{k_2^{-1+\gamma}(M_O)}\right]$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varkappa_y$ из доказательства теоремы 1.3.1, и для нее вновь, с помощью формулы (1.3.4), определим оператор локализованного сдвига $\mathcal{T}_{y,h}$. Рассмотрим следующую декомпозицию формы Φ

$$\Phi(u,v) = \Phi_0(u,v) + \Phi_r(u,v), \quad \Phi_0(u,v) := \int_M \boldsymbol{A}\,\nabla u \otimes \overline{\nabla v} d\mu.$$

В силу условия ***D1*** получим

$$\frac{1}{\alpha}\|u_h^y - u\|^2_{h^1(\mathcal{B}_{\psi(r)}(y))} \leq \Phi_0(\mathcal{T}_{y,h}u, \mathcal{T}_{y,h}u) - \Phi_0(u,u) + 2\mathrm{Re}\Phi_0(u, u - \mathcal{T}_{y,h}u).$$

Действуя аналогично доказательству теоремы 1.3.1, оценим сверху выражение $\Phi_0(\mathcal{T}_{y,h}u, \mathcal{T}_{y,h}u) - \Phi_0(u,u)$ как $C|h|^\gamma \|u\|^2_{h^1(M_O)}$. Вновь, замечая, что $u - \mathcal{T}_{y,h}u$ принадлежит $\mathring{H}^1(\Omega)$, принимая во внимание, что u является решением задачи (1.1.2), получаем, что $\Phi_0(u, u - \mathcal{T}_{y,h}u) = \tau(f, u - \mathcal{T}_{y,h}u) - \Phi_r(u, u - \mathcal{T}_{y,h}u)$. Оценим сверху $|\tau(f, u - \mathcal{T}_{y,h}u)|$, так как $f \in K_2^{-1+\gamma}(M_O)$, то, в силу предложения 2.1.5

$$|\tau(f, u - \mathcal{T}_{y,h}u)| \leq \|f\|_{K_2^{-1+\gamma}(M_O)} \|u - \mathcal{T}_{y,h}u\|_{\tilde{K}_2^{1-\gamma}(M_O)}.$$

Далее, $\|u - \mathcal{T}_{y,h}u\|_{\tilde{K}_2^{1-\gamma}(M_O)} \leq \|\varkappa_y\|_{C^{0,1}} \|u - u_h^y\|_{k_2^{1-\gamma}(\mathcal{B}_{2\rho}(y))}$. Пусть $\gamma \in (0,1)$, тогда в силу теоремы 2.1.4 существует константа c, не зависящая от функции u, такая что $\|u - u_h^y\|_{k_2^{1-\gamma}(\mathcal{B}_{2\rho}(y))} = \|u - u_h^y\|_{n_2^{1-\gamma}(\mathcal{B}_{2\rho}(y))} \leq \|u\|_{n^\gamma(n_2^{1-\gamma}(\mathcal{B}_{3\rho}(y)))} |h|^\gamma \leq c\|u\|_{n_2^1(\mathcal{B}_{3\rho}(y))}|h|^\gamma$. Так как, в силу леммы 1.3.4, имеет место вложение $H^1(\mathcal{B}_{3\rho}(y)) \hookrightarrow N^1(\mathcal{B}_{3\rho}(y))$, поэтому $\|u - \mathcal{T}_{y,h}u\|_{\tilde{K}_2^{1-\gamma}(M_O)} \leq c_1|h|^\gamma \|u\|_{h^1(M_O)}$. В случае $\gamma = 1$, воспользуемся леммой 1.3.4 и сразу получим $\|u - \mathcal{T}_{y,h}u\|_{\tilde{K}_2^0(M_O)} \leq c_1|h|\|u\|_{h^1(M_O)}$.

Займемся оценкой $|\Phi_r(u, u - \mathcal{T}_{y,h}u)|$. В силу обобщенного неравенства Гельдера[4], имеет место неравенство

$$\int_{M_O} \boldsymbol{b}\,\nabla u\,\overline{v} d\mu \leq C(M)\|\boldsymbol{b}\|_{L_{p_1}(M_O)} \|u\|_{w^1_{p_2}(M_O)} \|v\|_{L_{p_3}(M_O)},$$

где $p_i \in [1,\infty]$, $i = 1,2,3$, $p_1^{-1} + p_2^{-1} + p_3^{-1} = 1$. Найдем такие p_i, чтобы неравенство выполнялось для всех $u \in \mathring{H}^1(M_O)$, $v \in \tilde{K}_2^{1-\gamma}(M_O)$. Так как

[4]Если $u_i \in L_{p_i}(\mathbb{R}^d)$, то $\left|\int_{\mathbb{R}^d} u_1 \cdots u_n dx\right| \leq \|u_1\|_{L_{p_1}(\mathbb{R}^d)} \cdots \|u_n\|_{L_{p_n}(\mathbb{R}^d)}$, если $p_1^{-1} + \cdots + p_n^{-1} = 1$. Константа $C(M)$ возникает из-за того, что в определении L_p–нормы сечения $\boldsymbol{b}$ участвует метрический тензор, которого нет в "плоском" варианте неравенства.

$u \in \tilde{H}^1(M_O)$, то выберем $p_2 = 2$. Для того, чтобы выбрать p_3 воспользуемся теоремой 2.1.2 при $\gamma = 1$, и теоремой 2.1.6 при $\gamma \in (0,1)$. Получим, что $\tilde{K}_2^{-1+\gamma}(M_O) \hookrightarrow L_{p_3}(M_O)$, где $p_3 = 2$ если $\gamma = 1$, и $p_3 = \frac{2(d+\epsilon)}{d+\epsilon-2(1-\gamma)}$ для любого положительного ϵ. Таким образом, если $\gamma \in (0,1)$, то $p_1 = \frac{d+\epsilon}{1-\gamma}$, и если $\gamma = 1$, то $p_1 = \infty$. Значит

$$\int_{M_O} \boldsymbol{b}\,\nabla u\,\overline{v} d\mu \le \tilde{C}(M)\|\boldsymbol{b}\|_{L_{p_1}(M_O)}\|u\|_{h^1(M_O)}\|v\|_{k_2^{1-\gamma}(M_O)}. \tag{2.2.2}$$

Чтобы получить неравенство подобное (2.2.2) для функции c, будем действовать иначе. Найдем такое $q \in [1,\infty]$, что каковы бы ни были функции $u \in \mathring{H}^1(M_O)$, $v \in \tilde{K}_2^{1-\gamma}(M_O)$ их произведение $u \cdot v$ принадлежит пространству $\tilde{K}_q^{1-\gamma}(M_O)$. Для этого заметим, что если $\{(U,\chi_U)\}$ — конечный атлас многообразия M, то с помощью разбиения единицы любую функцию из $\mathring{H}^1(M_O)$ или $\tilde{K}_2^{1-\gamma}(M_O)$ можно представить в виде суммы функций с носителями из U. Поэтому достаточно доказать, что для шара $B_R(0) \subset \mathbb{R}^d$ произведение $uv \in \tilde{K}_q^{1-\gamma}(B_R(0))$ каковы бы ни были $u \in \mathring{H}^1(B_R(0))$, $v \in \tilde{K}_2^{1-\gamma}(B_R(0))$. В силу обобщенного неравенства Гельдера для $q_1, q_2, q_3, q_4 \in (1,\infty)$ таких, что $q^{-1} \ge q_1^{-1} + q_2^{-1}$, $q^{-1} \ge q_3^{-1} + q_4^{-1}$ выполнено[5] для некоторой $C = C(q_1, q_2, q_3, q_4, R)$

$$\begin{gathered}\|uv - u_h v_h\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} \le \|uv - uv_h\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} + \|uv_h - u_h v_h\|_{L_q(\mathbb{R}^d)} \le \\ C\left(\|u\|_{L_{q_1}(\mathbb{R}^d)}\|v - v_h\|_{L_{q_2}(\mathbb{R}^d)} + \|v_h\|_{L_{q_3}(\mathbb{R}^d)}\|u - u_h\|_{L_{q_4}(\mathbb{R}^d)}\right).\end{gathered} \tag{2.2.3}$$

Будем искать такие q_i, чтобы после деления на $h^{1-\gamma}$ и взятия супремума по h в (2.2.3) правая часть была конечна. Так как $v \in \tilde{K}_2^{1-\gamma}(B_R(0))$, то предположим $q_2 = 2$. Воспользуемся теоремой 2.1.2, тогда в силу вложения $\mathring{H}^1(B_R(0)) \hookrightarrow L_{q_1}(\Omega)$, где $q_1 = \frac{2d}{d-2}$ если $d = 2$, и $q_1 = \frac{2(\epsilon+d)}{\epsilon+d-2}$ при $d = 2$ и любом положительном ϵ. Получаем оценку для $q \le \frac{d}{d-1}$ при $d > 2$ и $q \le \frac{d+\epsilon}{d+\epsilon-1}$ для $d = 2$. Оценим q_3, q_4, для этого рассмотрим отдельно два случая. Пусть $\gamma \in (0,1)$, тогда в силу теоремы 2.1.6 $\tilde{K}_2^{1-\gamma}(B_R(0)) \hookrightarrow L_{q_3}(B_R(0))$, где $q_3 = \frac{2d(d+\epsilon)}{(d+2\gamma)(d+\epsilon)-2d}$ для произ-

[5] В данном случае имеется ввиду последовательное применение неравенства $\|uv\|_{L_q(B_R(0))} \le \|u\|_{L_{\tilde{q}_1}(B_R(0))}\|v\|_{L_{\tilde{q}_2}(B_R(0))}$ для $\tilde{q}_1^{-1} + \tilde{q}_2^{-1} = q^{-1}$ и того факта, что для шара $B_R(0)$ имеют место вложения $L_{\tilde{q}_i}(B_R(0)) \hookrightarrow L_{q_i}(B_R(0))$, при $q_i \le \tilde{q}_i$, $i = 1,2$ с константой вложения, зависящей от q_i.

вольного положительного ϵ; с другой стороны, в силу теоремы 2.1.7, $\mathring{H}^1(B_R(0)) \hookrightarrow K_{q_4}^{-1+\gamma}(B_R(0))$, где $q_4 = \frac{2d}{d-2\gamma}$, и значит $q \le \frac{d+\epsilon}{d+\epsilon-1}$. Если $\gamma = 1$, то для $u \in \mathring{H}^1(B_R(0))$ и $v \in L_2(B_R(0))$ необходимо проверить $uv \in L_q(\Omega)$, в данном случае, из теоремы 2.1.2 легко следует, что $q = \frac{d+\epsilon}{d+\epsilon-1}$ для $d = 2$, и $q = \frac{d}{d-1}$ для $d > 2$. Применяя оценку (2.2.3), получаем для $q_0^{-1} + q^{-1} = 1$

$$\int_{M_O} c\, u\, \overline{v} d\mu \le \|c\|_{K_{q_0}^{-1+\gamma}(M_O)} \|uv\|_{\tilde{K}_q^{1-\gamma}(M_O)} \le C(M,\epsilon)\|u\|_{h^1(M_O)}\|v\|_{k_2^{1-\gamma}(M_O)}.$$

Перейдем к оставшемуся слагаемому в форме Φ_r. Следуя рассуждениям выше, без уменьшения общности для достаточно малых h положим $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}_h \in \tilde{K}_t^{\gamma}(B_R(0))$, тогда

$$\left|\int_{B_R(0)} \boldsymbol{\beta} u \left(\nabla v - \nabla v_h\right) \sqrt{g}\, dx\right| = \left|\int_{B_R(0)} \left(\boldsymbol{\beta} u \sqrt{g} - \boldsymbol{\beta}_{-h} u_{-h} \sqrt{g_{-h}}\right) \nabla v dx\right| \le$$
$$|h| \|\sqrt{g}\|_{C^{0,1}(B_R(0))} \|v\|_{h^1(B_R(0))} \|u\|_{h^1(B_R(0))} \|\boldsymbol{\beta}\|_{L_{\max\{2+\epsilon,d\}}} +$$
$$\|\sqrt{g}\|_{C(B_R(0))} \|v\|_{h^1(B_R(0))} \|\boldsymbol{\beta} u - \boldsymbol{\beta}_{-h} u_{-h}\|_{L_2(B_R(0))}.$$

Для того, чтобы найти условие на t, при котором $\boldsymbol{\beta} u \in \tilde{K}_2^{\gamma}(B_R(0))$ достаточно действовать аналогично рассуждениям выше. Таким образом, выражение $|\Phi_r(u, u - \mathcal{T}_{y,h} u)|$ можно оценить сверху как

$$C(\mathcal{A}, M, \rho, \vartheta)\|u\|_{h_2^1(M_O)} \left(\|u - \mathcal{T}_{y,h}\|_{k_2^{1-\gamma}(M_O)} + |h|^{\gamma}\|u\|_{h_2^1(M_O)}\right),$$

вновь применяя теорему 2.1.4, получаем требуемое. □

Следствие 2.2.1. *Пусть*[6] $\Omega \in \mathcal{W}_{r,\vartheta}^{\omega}$, $\omega(0) = 0$, $\vartheta \ge 1$, $r > 0$, $0 < -\eta, \varepsilon < \phi^{-1}\left(\frac{\psi(R)}{4(\vartheta+1)}\right)$, $\varepsilon < \operatorname{dist}(\Omega, \partial O)$, *оператор* $\mathcal{A}$ *удовлетворяет условиям* ***D1***, ***D2'***, ***D3***. *Тогда для любой функции* $f \in K_2^{-1+\gamma}(M_O)$ *существуют* $w_\eta \in \mathring{H}^1(\mathcal{O}_\eta(\Omega))$ *и* $\bar{C} = \bar{C}(M_O, \mathcal{A}, \vartheta, r)$, *такие что*

$$\|u_\varepsilon - w_\eta\|^2_{\mathring{H}^1(M_O)} \le \bar{C} \cdot (\phi(\varepsilon) + \phi(-\eta))^{\gamma} \cdot$$
$$\cdot \|u_\varepsilon\|_{h^1(M_O)} \left(\|u_\varepsilon\|_{h^1(M_O)} + \|f\|_{k_2^{-1+\gamma}(M_O)}\right),$$

где $u_\varepsilon = \mathcal{G}_{\mathcal{O}_\varepsilon(\Omega)} f$.

[6] Определения функций ϕ, ψ см. формулу (1.1.12)

Следствие 2.2.1 доказывается подобно лемме 1.3.5.

Теорема 2.2.2. *Пусть* $\Omega_1 \in C^{0,\omega(\cdot)}$, $\omega(0) = 0$, Ω_2 *— открытое подмножество* M_O, *оператор* $\mathcal{A}$ *удовлетворяет условиям* ***D1***, ***D2'***, ***D3***. *Тогда при достаточно малом* $\varepsilon = e(\Omega_2 \Delta \Omega_1, \partial\Omega_1)$ *существует константа* $C(M_O, \mathcal{W}^{\omega}_{r,\vartheta}, \mathcal{A})$, *такая что*

$$\|\mathcal{G}_{\Omega_2} - \mathcal{G}_{\Omega_1}\|_{\mathcal{L}(B^{-1+\gamma/2}_{2,1}(M_O), \mathring{H}^1(M_O))} \leq C^{1/2}\phi(\varepsilon)^{\gamma/2}.$$

Если $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{W}^{\omega}_{r,\vartheta}$, $\vartheta \geq 1$, $r > 0$, $d_{\mathcal{HS}}(\Omega_1, \Omega_2)$ *мало, то*

$$\|\mathcal{G}_{\Omega_2} - \mathcal{G}_{\Omega_1}\|_{\mathcal{L}(B^{-1+\gamma/2}_{2,1}(M_O), \mathring{H}^1(M_O))} \leq C^{1/2}\phi(d_{\mathcal{HS}}(\Omega_1, \Omega_2))^{\gamma/2}.$$

Доказательство. В силу предложения 1.1.1, для Ω найдется содержащий ее класс $\mathcal{W}^{\omega}_{r,\theta}$. Действуя аналогично доказательству теоремы 1.3.2, применяя следствие 2.2.1 получаем, что для $\Omega_1 \in \mathcal{W}^{\omega}_{r,\vartheta}$, $f \in K^{-1+\gamma}_2(M_O)$ имеет место неравенство

$$\|\mathcal{G}_{\Omega_2} f - \mathcal{G}_{\Omega_1} f\|^2_{\mathring{H}^1(M_O)} \leq K\phi(\varepsilon)^{\gamma}\|f\|_{H^{-1}(M_O)}\|f\|_{K^{-1+\gamma}_2(M_O)},$$

если дополнительно $\Omega_2 \in \mathcal{W}^{\omega}_{r,\vartheta}$, то

$$\|\mathcal{G}_{\Omega_2} f - \mathcal{G}_{\Omega_1} f\|^2_{\mathring{H}^1(M_O)} \leq K\phi(d_{\mathcal{HS}}(\Omega_1, \Omega_2))^{\gamma}\|f\|_{H^{-1}(M_O)}\|f\|_{K^{-1+\gamma}_2(M_O)}.$$

Таким образом, применимо предложение 2.1.6, из предложения 2.1.3 (для $\gamma = 1$) и предложения 2.1.4 (для $\gamma \in (0,1)$) лего видеть, что $(H^{-1}(M_O), K^{-1+\gamma}_2(M_O))_{1/2,1} = B^{-1+\gamma/2}_{2,1}(M_O)$. Теорема доказана. □

Следствие 2.2.2. $\Omega_1 \in \mathcal{W}^{\omega}_{r,\vartheta}$, $\omega(0) = 0$, $\vartheta \geq 1$, $r > 0$, Ω_2 *— открытое подмножество* M_O, *оператор* $\mathcal{A}$ *удовлетворяет условиям* ***D1***, ***D2'***, ***D3***, $e(\Omega_2 \Delta \Omega_1, \partial\Omega_1)$ *мало, тогда для некоторой константы* $\tilde{C}$

$$\|\mathcal{G}_{\Omega_2} - \mathcal{G}_{\Omega_1}\|_{\mathcal{L}(H^{-1+s}(M_O), \mathring{H}^1(M_O))} \leq \tilde{C}\phi(e(\Omega_2 \Delta \Omega_1, \partial\Omega_1))^{s}, \quad s \in (0, \gamma/2),$$

более того, если $\Omega_2 \in \mathcal{W}^{\omega}_{r,\vartheta}$ *и* $d_{\mathcal{HS}}(\Omega_1, \Omega_2)$ *мало, то*

$$\|\mathcal{G}_{\Omega_2} - \mathcal{G}_{\Omega_1}\|_{\mathcal{L}(H^{-1+s}(M_O), \mathring{H}^1(M_O))} \leq \tilde{C}\phi(d_{\mathcal{HS}}(\Omega_1, \Omega_2))^{s}, \quad s \in (0, \gamma/2),$$

Доказательство. Заметим, что по теореме 1.1.1, выражение $\|\mathcal{G}_{\Omega_2} - \mathcal{G}_{\Omega_1}\|_{\mathcal{L}(H^{-1}(M_O),\overset{\circ}{H}{}^1(M_O))} \le \|\mathcal{G}_{\Omega_2}\|_{\mathcal{L}(H^{-1}(M_O),\overset{\circ}{H}{}^1(M_O))} + \|\mathcal{G}_{\Omega_1}\|_{\mathcal{L}(H^{-1}(M_O),\overset{\circ}{H}{}^1(M_O))} \le \frac{2}{\alpha'}$. Таким образом, применяя теорему 2.1.5, получаем для $t \in (0,1)$

$$\|\mathcal{G}_{\Omega_2} - \mathcal{G}_{\Omega_1}\|_{\mathcal{L}((H^{-1}(M_O),B_{2,1}^{-1+\gamma/2}(M_O))_{t,2},\overset{\circ}{H}{}^1(M_O))} \le \left(\frac{2}{\alpha'}\right)^{1-t} \left(C^{1/2}\phi(\delta)^{\gamma/2}\right)^t,$$

где δ равно $e(\Omega_2\Delta\Omega_1, \partial\Omega_1)$ и $d_{\mathcal{HS}}(\Omega_1,\Omega_2)$ для первого и второго случая соответственно. Остается воспользоваться предложением 2.1.4, из которого следует, что $(H^{-1}(M_O), B_{2,1}^{-1+\gamma/2}(M_O))_{t,2} = H^{-1+t\gamma/2}(M_O)$ и обозначить $\tilde{C} = 2C^{1/2}/\alpha'$, $s = t\gamma/2$. □

2.3 Применение оценок. Степень регулярности решений первой краевой задачи в случае областей с гельдеровой границей.

Для применения оценок модуля резольвентной непрерывности при деформации области, нам понадобиться получить оценки резольвентной непрерывности при вариации коэффициентов.

Пусть $\mathcal{A}_{(n)}$, $n = 1,2$ операторы вида

$$-\mathrm{div}(\boldsymbol{A}_{(n)}\nabla u + \boldsymbol{\beta}_{(n)}u) + \boldsymbol{b}_{(n)}\nabla u + c_{(n)}u,$$

удовлетворяющие условиям ***D1***, ***D2***, ***D3***. Поставим для $\mathcal{A}_{(n)}$ задачу Дирихле (1.1.2) в некоторй произвольной области $\Omega \Subset M_O$. Обозначим $\mathcal{R}_\Omega^{(n)} : H^{-1}(\Omega) \to \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ — оператор решающий задачу (1.1.2) для оператора $\mathcal{A}_{(n)}$.

Теорема 2.3.1. *Пусть $u_{(n)} = \mathcal{R}_\Omega^{(n)} f_{(n)}$, $f_{(n)} \in H^{-1}(\Omega)$. Тогда для любого положительного ϵ существует такая константа $C = C(M,\epsilon)$, что*

$$\|u_{(1)} - u_{(2)}\|_{\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)} \le C \Big[\Big(\|\boldsymbol{A}_{(1)} - \boldsymbol{A}_{(2)}\|_{L_\infty(\Omega)} + \left\|\boldsymbol{\beta}_{(1)} - \boldsymbol{\beta}_{(2)}\right\|_{L_{d^*}(\Omega)} +$$
$$\left\|\boldsymbol{b}_{(1)} - \boldsymbol{b}_{(2)}\right\|_{L_{d^*}(\Omega)} + \left\|c_{(1)} - c_{(2)}\right\|_{W_{d^*}^{-1}(\Omega)} \Big) \|f_{(2)}\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|f_{(1)} - f_{(2)}\|_{H^{-1}(\Omega)} \Big],$$

где $d^* = \max\{d, 2+\epsilon\}$.

Доказательство. Так как $u_{(n)}$ является решением задачи (1.1.2) для оператора $\mathcal{A}_{(n)}$, и более того $u_{(n)} \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, то из вариационной постановки (1.1.4), выбирая тестовую функцию $v = u_{(1)} - u_{(2)}$, следует

$$\int_\Omega \boldsymbol{A}_{(n)} \nabla u_{(n)} \otimes \overline{\nabla(u_{(1)} - u_{(2)})}\, d\mu + \int_\Omega \boldsymbol{\beta}_{(n)} u_{(n)} \overline{\nabla(u_{(1)} - u_{(2)})}\, d\mu +$$

$$\int_\Omega \boldsymbol{b}_{(n)} \nabla u_{(n)} \overline{(u_{(1)} - u_{(2)})}\, d\mu + \int_\Omega c_{(n)} u_{(n)} \overline{(u_{(1)} - u_{(2)})}\, d\mu = \tau(f_{(n)}, u_{(1)} - u_{(2)}),$$

для $n = 1, 2$. Теперь возьмем вещественную часть от разности, получим

$$\int_\Omega \mathrm{Re}\left(\boldsymbol{A}_{(1)} \nabla u_{(1)} - \boldsymbol{A}_{(2)} \nabla u_{(2)}\right) \otimes \overline{\nabla(u_{(1)} - u_{(2)})}\, d\mu +$$

$$\int_\Omega \mathrm{Re}\left(\boldsymbol{\beta}_{(1)} u_{(1)} - \boldsymbol{\beta}_{(2)} u_{(2)}\right) \overline{\nabla(u_{(1)} - u_{(2)})}\, d\mu +$$

$$\int_\Omega \mathrm{Re}\left(\boldsymbol{b}_{(1)} \nabla u_{(1)} - \boldsymbol{b}_{(2)} \nabla u_{(2)}\right) \overline{(u_{(1)} - u_{(2)})}\, d\mu +$$

$$\int_\Omega \mathrm{Re}\left(c_{(1)} u_{(1)} - c_{(2)} u_{(2)}\right) \overline{(u_{(1)} - u_{(2)})}\, d\mu = \mathrm{Re}\, \tau(f_{(1)} - f_{(2)}, u_{(1)} - u_{(2)}).$$

Обозначим $\Phi_1(u, v)$ форму ассоциированную с оператором $\mathcal{A}_{(1)}$, тогда $\mathrm{Re}\Phi_1(u_{(1)} - u_{(2)}, u_{(1)} - u_{(2)})$ в точности равно

$$\mathrm{Re}\tau(f_{(1)} - f_{(2)}, u_{(1)} - u_{(2)}) - \mathrm{Re} \int_\Omega \left(c_{(1)} - c_{(2)}\right) u_{(2)} \overline{(u_{(1)} - u_{(2)})}\, d\mu$$

$$- \mathrm{Re} \int_\Omega \left(\boldsymbol{A}_{(1)} - \boldsymbol{A}_{(2)}\right) \nabla u_{(2)} \otimes \overline{\nabla(u_{(1)} - u_{(2)})}\, d\mu$$

$$- \mathrm{Re} \int_\Omega \left(\boldsymbol{\beta}_{(1)} - \boldsymbol{\beta}_{(2)}\right) u_{(2)} \overline{\nabla(u_{(1)} - u_{(2)})}\, d\mu$$

$$- \mathrm{Re} \int_\Omega \left(\boldsymbol{b}_{(1)} - \boldsymbol{b}_{(2)}\right) \nabla u_{(2)} \overline{(u_{(1)} - u_{(2)})}\, d\mu.$$

В силу условия ***D3***

$$\alpha' \|u_{(1)} - u_{(2)}\|^2_{\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)} \le \mathrm{Re}\Phi_1(u_{(1)} - u_{(2)}, u_{(1)} - u_{(2)})$$

с другой стороны, в силу теорем вложения, существует такая $\tilde{C}(M, \varepsilon)$, что $\mathrm{Re}\Phi_1(u_{(1)} - u_{(2)}, u_{(1)} - u_{(2)})$ можно сверху оценить как

$$\tilde{C} \Big[\Big(\|\boldsymbol{A}_{(1)} - \boldsymbol{A}_{(2)}\|_{L_\infty(\Omega)} + \left\|\boldsymbol{\beta}_{(1)} - \boldsymbol{\beta}_{(2)}\right\|_{L_{d^*}(\Omega)} + \left\|\boldsymbol{b}_{(1)} - \boldsymbol{b}_{(2)}\right\|_{L_{d^*}(\Omega)} +$$

$$\left\|c_{(1)} - c_{(2)}\right\|_{W^{-1}_{d^*}(\Omega)} \Big) \|u_{(2)}\|_{\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)} + \|f_{(1)} - f_{(2)}\|_{H^{-1}(\Omega)} \Big] \|u_{(1)} - u_{(2)}\|_{\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)},$$

обозначая $C = \tilde{C}/(\alpha')^2$ и применяя теорему 1.1.1, получаем требуемое. $\square$

Наложим следующее условие на многообразие M, будем считать, что M_O можно диффеоморфно отобразить на область в $\mathbb{R}^d$. Так как M_O покрывается одной картой, то будем обозначать образ как M_O, или более полно (M_O, g). Пусть $\mathcal{A}$ — оператор, заданный выражением (1.1.1) на области $\Omega \Subset M_O$ удовлетворяет условиям ***D1***, ***D2***, ***D3***, $\mathcal{R}^g_\Omega : H^{-1}(\Omega) \to \mathring{H}^1(\Omega)$ — оператор решающий задачу (1.1.2) на многообразии (M_O, g). Тогда верна

Теорема 2.3.2. *Пусть $f \in H^{-1}(\Omega)$, $g, \tilde{g}$ — римановы метрики на M_O, $u_{(g)} = \mathcal{R}^g_\Omega f$, $u_{(\tilde{g})} = \mathcal{R}^{\tilde{g}}_\Omega f$, тогда существует такая константа $C(M_O, g, \mathcal{A})$, что $\|u_{(g)} - u_{(\tilde{g})}\|_{\mathring{H}^1(\Omega)} \leq C \left\|\sqrt{g} - \sqrt{\tilde{g}}\right\|_{L_\infty(\Omega)} \|u_{(\tilde{g})}\|_{\mathring{H}^1(\Omega)}$.*

Доказательство. Будем действовать аналогично доказательству теоремы 2.3.1. Пусть a^{ij}, β^i, b^i — покоординатная запись тензорных полей $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{b}$. Из вариационной постановки (1.1.4) для тестовой функции $v = u_{(g)} - u_{(\tilde{g})}$, имеем для $\mathcal{R}^{(g)}_\Omega$ и для $\mathcal{R}^{(\tilde{g})}_\Omega$ соответственно

$$\int_\Omega a^{ij}\nabla_i u_{(g)} \overline{\nabla_j(u_{(g)} - u_{(\tilde{g})})}\sqrt{g}dx + \int_\Omega \beta^j u_{(g)} \overline{\nabla_j(u_{(g)} - u_{(\tilde{g})})}\sqrt{g}dx +$$
$$\int_\Omega b^i \nabla_i u_{(g)} \overline{u_{(g)} - u_{(\tilde{g})}}\sqrt{g}dx + \int_\Omega c u_{(g)} \overline{u_{(g)} - u_{(\tilde{g})}}\sqrt{g}dx = \int_\Omega f\, \overline{u_{(g)} - u_{(\tilde{g})}}\sqrt{g}dx$$

$$\int_\Omega a^{ij}\nabla_i u_{(\tilde{g})} \overline{\nabla_j(u_{(g)} - u_{(\tilde{g})})}\sqrt{\tilde{g}}dx + \int_\Omega \beta^j u_{(\tilde{g})} \overline{\nabla_j(u_{(g)} - u_{(\tilde{g})})}\sqrt{\tilde{g}}dx +$$
$$\int_\Omega b^i \nabla_i u_{(\tilde{g})} \overline{u_{(g)} - u_{(\tilde{g})}}\sqrt{\tilde{g}}dx + \int_\Omega c u_{(\tilde{g})} \overline{u_{(g)} - u_{(\tilde{g})}}\sqrt{\tilde{g}}dx = \int_\Omega f\, \overline{u_{(g)} - u_{(\tilde{g})}}\sqrt{\tilde{g}}dx$$

Пусть $\Phi(u, v)$ — форма ассоциированная с оператором $\mathcal{A}$ с метрикой g, тогда $\mathrm{Re}\Phi(u_{(g)} - u_{(\tilde{g})}, u_{(g)} - u_{(\tilde{g})})$ равно

$$\mathrm{Re}\int_\Omega f\, \overline{u_{(g)} - u_{(\tilde{g})}} \left(\sqrt{g} - \sqrt{\tilde{g}}\right) dx - \mathrm{Re}\int_\Omega c u_{(\tilde{g})} \overline{(u_{(g)} - u_{(\tilde{g})})} \left(\sqrt{g} - \sqrt{\tilde{g}}\right) dx$$
$$-\mathrm{Re}\int_\Omega a^{ij}\nabla_i u_{(\tilde{g})} \overline{\nabla_j(u_{(g)} - u_{(\tilde{g})})} \left(\sqrt{g} - \sqrt{\tilde{g}}\right) dx$$
$$-\mathrm{Re}\int_\Omega \left(\beta^j u_{(\tilde{g})} \overline{\nabla_j(u_{(g)} - u_{(\tilde{g})})} - b^i \nabla_i u_{(\tilde{g})} \overline{(u_{(g)} - u_{(\tilde{g})})}\right) \left(\sqrt{g} - \sqrt{\tilde{g}}\right) dx.$$

Далее, подобно доказательству теоремы 2.3.1, пользуясь условиями ***D1***, ***D2***, ***D3*** выписываем двусторонние оценки для $\mathrm{Re}\Phi(u_{(g)}-u_{(\tilde g)}, u_{(g)}-u_{(\tilde g)})$, получаем требуемое. $\square$

Вернемся к задаче 1.1.2. Потребуем, чтобы оператор $\mathcal{A}$ удовлетворял условиям ***D1***, ***D3*** и для некоторого положительного ϵ, $d^* = \max\{d, 2+\epsilon\}$, $T \in (0,1)$ выполнено

D2'' $\boldsymbol{A} \in C^{0,T}(M_O)$, $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{b} \in \tilde N^T_{d^*}(M_O)$, $c \in B^{-1+T}_{d^*,1}(M_O)$.

Теорема 2.3.3. *Пусть M_O — диффеоморфно отображается на некоторую область в $\mathbb{R}^d$, оператор $\mathcal{A}$ удовлетворяет условиям **D1**, **D2''**, **D3**, $\Omega \Subset M_O$ — фиксированная область, такая что для любой области $\Omega^* \Subset M_O$, такой что $d^{\mathcal{HP}}(\Omega,\Omega^*)$ достаточно мало, выполнено*

$$\|\mathcal{G}_\Omega - \mathcal{G}_{\Omega^*}\|_{\mathcal{L}(X, \mathring{H}^1(M_O))} \le C\left(d^{\mathcal{HP}}(\Omega,\Omega^*)\right)^T. \tag{2.3.1}$$

для числа $T \in (0,1)$ и некоторого банахового пространства $X \hookrightarrow H^{-1}(M_O)$. Тогда ограничен оператор $\mathcal{G}_\Omega : X \cap B^{-1+T}_{2,1}(M_O) \to \tilde N^{1+T}_2(M_O)$.

Доказательство. Пусть $f \in X \cap B^{-1+T}_{2,1}(M_O)$, $u = \mathcal{G}_\Omega f$, $\Omega^* = \Omega_{-h}$, $h \in \mathbb{R}^d$ достаточно мало, $\tilde g = g_h$, оператор $\mathcal{A}^{(2)}$ задается выражением $-\mathrm{div}(\boldsymbol{A}_h \nabla u + \boldsymbol{\beta}_h u) + \boldsymbol{b}_h \nabla u + c_h u$ и определен на многообразии $(M_O, \tilde g)$.

Тогда $u_h(x) = u(x+h)$ есть решение уравнения $\mathcal{A}^{(2)} u = f_h$ в области Ω^* на многообразии $(M_O, \tilde g)$. Обозначим $\mathcal{G}_{\Omega^*}$ оператор решающий задачу Дирихле (1.1.2) для оператора $\mathcal{A}$ в области Ω^*, $\mathcal{G}^{(g_h)}_{\Omega^*}$ оператор решающий (1.1.2) для $\mathcal{A}$ в области Ω^* с метрикой g_h, $\mathcal{G}^{(g_h),(2)}_{\Omega^*}$ решающий (1.1.2) для $\mathcal{A}^{(2)}$ в Ω^* с метрикой g_h, тогда

$$\begin{gathered}\|u-u_h\|_{\mathring{H}^1(M_O)} = \|\mathcal{G}_\Omega f - \mathcal{G}^{(g_h),(2)}_{\Omega^*} f_h\|_{\mathring{H}^1(M_O)} \le \|\mathcal{G}_\Omega f - \mathcal{G}_{\Omega^*} f\|_{\mathring{H}^1(M_O)} + \\ \|\mathcal{G}_{\Omega^*} f - \mathcal{G}^{(g_h)}_{\Omega^*} f\|_{\mathring{H}^1(M_O)} + \|\mathcal{G}^{(g_h)}_{\Omega^*} f - \mathcal{G}^{(g_h),(2)}_{\Omega^*} f_h\|_{\mathring{H}^1(M_O)}\end{gathered} \tag{2.3.2}$$

Первое слагаемое в правой части неравенства (2.3.2) оценим благодаря условию (2.3.1), второе с помощью теоремы 2.3.2. Из теоремы 2.3.1 следует, что последнее слагаемое в (2.3.2) можно оценить как

$$C\left[\Big(\|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}_h\|_{L_\infty(M_O)}+\|\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}_h\|_{L_{d^*}(M_O)}+\|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}_h\|_{L_{d^*}(M_O)}+\right.$$
$$\left.\|c-c_h\|_{W_{d^*}^{-1}(M_O)}\Big)\,\|f_h\|_{H^{-1}(M_O)}+\|f-f_h\|_{H^{-1}(M_O)}\right]$$

По определению пространств Никольского и Гельдера, получаем, что $\|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}_h\|_{L_\infty(M_O)} \leq \|\boldsymbol{A}\|_{C^{0,T}}|h|^T$, $\|\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}_h\|_{L_{d^*}(M_O)} \leq \|\boldsymbol{\beta}\|_{\tilde{N}_{d^*}^T(M_O)}|h|^T$ и $\|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}_h\|_{L_{d^*}(M_O)} \leq \|\boldsymbol{b}\|_{\tilde{N}_{d^*}^T(M_O)}|h|^T$. Докажем, что для некоторой C_1

$$\|c-c_h\|_{W_{d^*}^{-1}(M_O)} \leq C_1\|c\|_{B_{d^*,1}^{-1+T}(M_O)},\quad \|f-f_h\|_{H^{-1}(M_O)} \leq C_1\|c\|_{B_{2,1}^{-1+T}(M_O)}.$$

Эти неравенства являются следствием следующей леммы.

Лемма 2.3.1. *Пусть $\Omega \Subset M_O$ $\partial\Omega \in C^{0,1}$, $T \in (0,1)$, $q \in (1,\infty)$. Тогда*

$$B_{q,1}^{-1+T}(\Omega) \hookrightarrow N^T(W_q^{-1}(\Omega)).$$

В самом деле, если $v \in B_{q,1}^{-1+T}(\Omega)$, $p \in (1,\infty)$, $p^{-1}+q^{-1}=1$, то в силу теоремы 1.2.4

$$\|v-v_h\|_{W_q^{-1}(M_O)} = \sup_{u\neq 0}\frac{\int_{M_O}(v-v_h)\bar{u}\sqrt{g}dx}{\|u\|_{w_p^1(\Omega)}} \leq$$
$$\sup_{u\neq 0}\frac{\int_{M_O} v\,\overline{u-u_{-h}}\sqrt{g}dx}{\|u\|_{w_p^1(\Omega)}}+\sup_{u\neq 0}\frac{\int_{M_O} v\overline{u_{-h}}\left(\sqrt{g}-\sqrt{g_{-h}}\right)dx}{\|u\|_{w_p^1(\Omega)}} \leq$$
$$\sup_{u\neq 0}\frac{\|v\|_{B_{q,1}^{-1+T}(\Omega)}\|u-u_{-h}\|_{\tilde{N}_p^{1-T}(M_O)}}{\|u\|_{w_p^1(\Omega)}}+C(M_O,g)\|v\|_{W_p^{-1}(M_O)}|h|.$$

Теперь воспользуемся теоремой 2.1.4, и получим, что $\|u-u_{-h}\|_{\tilde{N}_p^{1-T}(M_O)} \leq C\|u\|_{w_p^1(\Omega)}|h|^T$, что и завершает доказательства леммы и попутно теоремы 2.3.3. □

Объединим условия ***D2'*** и ***D2''***, положив $T=\gamma/2$.

D2''' (a) $\boldsymbol{A} \in C^{0,\gamma}(M_O)$;

(b) $\boldsymbol{\beta} \in \tilde{N}_{d+\epsilon}^{\gamma}(M_O)$ при $\gamma \in (0,1)$, $\boldsymbol{\beta} \in \mathring{W}_{d^*}^1(M_O)$ при $\gamma = 1$;

(c) $\boldsymbol{b} \in L_{\frac{d+\epsilon}{1-\gamma}}(M_O) \cap \tilde{N}_{d^*}^{\gamma/2}(M_O)$ при $\gamma \in (0,1)$, $\boldsymbol{b} \in L_\infty(M_O) \cap N_{d^*}^{1/2}(M_O)$ при $\gamma = 1$;

(d) $c \in B^{-1+\gamma}_{d+\epsilon,1}(M_O)$ при $\gamma \in (0,1)$, $c \in L_{d^*}(M_O)$ при $\gamma = 1$.

В качестве следствия теорем 2.2.2, 2.3.3 и следствия 2.2.2 получаем

Теорема 2.3.4. *Пусть M_O — диффеоморфно отображается на некоторую область в $\mathbb{R}^d$, оператор $\mathcal{A}$ удовлетворяет условиям **D1**, **D2'''**, **D3**, $\Omega \Subset M_O$ — фиксированная область с границей класса $C^{0,t}$, $t \in (0,1]$, тогда оператор*

$$\mathcal{G}_\Omega : B^{-1+\gamma/2}_{2,1}(M_O) \to \tilde{N}^{1+\gamma t/2}_2(M_O)$$

решающий задачу 1.1.2 ограничен. Более того, для $s \in (0, \gamma/2)$ для оператора $\mathcal{G}_\Omega$ также имеется ограниченность в парах $\mathcal{G}_\Omega : H^{-1+s}(M_O) \to \tilde{H}^{1+st}(M_O)$.

Заметим, что если $\partial\Omega \in C^{0,1}$, то существует оператор продолжения В. Рычкова [30], поэтому теоремы 2.3.3, 2.3.4 останутся верными если заменить $\mathcal{G}_\Omega$ на $\mathcal{R}_\Omega$. В 1998 году в работе [31] G. Savaré установил для оператора $\mathcal{A}_0 u = -\mathrm{div}(\mathbf{A}\nabla u)$, что если $\Omega \Subset \mathbb{R}^d$, $\partial\Omega \in C^{0,1}$, $s \in (0,1/2)$, то оператор $\mathcal{R}_\Omega : H^{-1+s}(\Omega) \to \tilde{H}^{1+s}(\Omega)$ ограничен. Покажем, что техника, описанная в этой главе, дает ослабить условия на коэффициенты оператора $\mathcal{A}_0$ даже в этом модельном случае. Пусть $\mathcal{V}$ — атлас многообразия M из определения 1.1.3[7], положим, $e_1 = \xi_V$. Определим $C^{0,(t_1,\dots,t_d)}_{\mathcal{V}}(M)$ как пространство функций v, таких что $v \circ \kappa_V^{-1} \in C^{0,(t_1,\dots,t_d)}(\kappa_V(V))$ для любой $(V, \kappa_V) \in \mathcal{V}$, то есть имеет место гельдеровская анизотропия своя в каждой карте $\mathcal{V}$.

Теорема 2.3.5. *Пусть $\Omega \Subset M_O \Subset \mathbb{R}^d$, $\partial\Omega \in C^{0,1}_{\mathcal{U}}$, $\boldsymbol{A} \in C^{0,(1,1/2,\dots,1/2)}_{\mathcal{U}}(M_O)$, $\mathcal{A}$ удовлетворяет условию **D1**, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{\beta} \equiv 0$, $c \equiv 0$, тогда для любого $s \in (0,1/2)$ ограничен оператор $\mathcal{R}_\Omega : H^{-1+s}(\Omega) \to \tilde{H}^{1+s}(\Omega)$.*

Заметим, что в доказательстве теоремы 2.2.1 используется только тот факт, что $\boldsymbol{A} \in C^{0,(1,0,\dots,0)}_{\mathcal{U}}(M_O)$, таким образом, теорема 2.2.2 верна и при этом, более слабом условии. Остается заметить, что условие **D2''** переписывается как $\boldsymbol{A} \in C^{0,1/2}(M_O)$. Теорема доказана.

[7] В каждой карте которого $\partial\Omega$ представима в виде графика липшицевой функции

Глава 3

Вариационные и краевые задачи в случае областей с гельдеровой границей.

3.1 Постановка задач и вспомогательные утверждения.

Для фиксированного натурального числа $N \geq 1$ обозначим через $(\mathcal{J}^{N,k}M, M, \mathbb{R}^N \times (T_xM)^N \times \cdots \times (T_x^kM)^N, \mathrm{pr})$ локально-тривиальное расслоение с базой M, слоем $\mathbb{R}^N \times (T_xM)^N \times \cdots \times (T_x^kM)^N$ и проекцией $\mathrm{pr} : \mathcal{J}^{N,k}M \to M$. Для области $\Omega \subset M$, $\partial\Omega \in C^{0,t}$, $t \in (0,1]$ рассмотрим функционал $J : \mathring{W}_p^m(\Omega, \mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$,

$$J[u] = \int_\Omega F(x, u, \dots, \nabla^m u) d\mu + \int_\Omega E(x, u, \dots, \nabla^{m-1}u)\, d\mu \qquad (3.1.1)$$

где E, F — измеримые функции на $\mathcal{J}^{N,m-1}M$ и $\mathcal{J}^{N,m}M$ соответственно, $m \in \mathbb{N}$, $p \in (1, \infty)$ фиксированы. Для $f \in W_q^{-m}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $1/p + 1/q = 1$, поставим задачу поиска элемента $u \in \mathring{W}_p^m(\Omega, \mathbb{R}^N)$ локально минимизирующего значение функционала:

$$J_f[u] = J[u] - \tau(f, u), \quad \tau(f, u) = \int_\Omega fu d\mu \qquad (3.1.2)$$

Пусть $\mathcal{U} = \{(U, \chi_U)\}$ атлас локально тривиализующий[1] $\mathcal{J}^{N,k}M$, χ_U :

[1] т.е. атлас, состоящий из таких пар $\{(U, \chi_U)\}$, что $\tilde{U} = \mathrm{pr}U$, $U = \mathrm{pr}^{-1}\tilde{U}$, $\chi_U : U \to \tilde{U} \times \mathbb{R}^N \times \cdots \times \mathbb{R}^{Nd^k}$ – диффеоморфизм.

$U \to \tilde{U} \times \mathbb{R}^N \times \dots \times \mathbb{R}^{Nd^k}$. Потребуем, чтобы в каждой карте U были выполнены следующие условия:

F1. E и F дифференцируемы и непрерывны по каждой координате $(\xi^0, \xi^1, \dots, \xi^{m-1})$ и $(\xi^0, \xi^1, \dots, \xi^m)$ при почти любом $x \in \tilde{U} \cap \Omega$ и $x \in \tilde{U}$ соответственно, $E + F \geq 0$;

F2. Для любых $(x, \xi^0, \dots, \xi^m) \in \tilde{U} \times \mathbb{R}^N \times \dots \times \mathbb{R}^{Nd^m}$ и некоторых $\gamma \in (0,1]$, $\epsilon > 0$ имеют место неравенства

$$\begin{cases} |\nabla_{\xi^m} F| \leq C\left(1 + |\xi|^{p-1}\right) \\ |\nabla_{\xi^k} F| + |\nabla_{\xi^k} E| \leq C\left(1 + \psi_\gamma^k(|\xi|)\right), \quad k = \overline{0,..,m-1} \\ |E| + |F| \leq C\left(1 + |\xi|^p\right) \end{cases}$$

где $|\xi| = \sum_{l=0}^m |\xi^l|$, $\psi_\gamma^k(s)$ равно s^p, $s^{p-\epsilon}$, $s^{p-1+\frac{m-k-\gamma}{d/p}-\epsilon z_\gamma}$ при $m-k-\gamma > d/p$, $m-k-\gamma = d/p$, $m-k-\gamma < d/p$ соответственно, $z_\gamma = 0$, если $\gamma = 1$, и $z_\gamma = 1$, если $\gamma \in (0,1)$;

F3. Функция F выпукла по ξ^m при почти всех $x \in \tilde{U}$ и любых $\xi^1, \dots, \xi^{m-1}$. Потребуем чтобы существовала положительная константа α такая, что для любых $x \in \tilde{U}$, $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N \times \dots \times \mathbb{R}^{d^m N}$ выполнено

$$\nabla_{\xi^m}\left[F(x, \dots, \xi^{m-1}, \xi^m) - F(x, \dots, \xi^{m-1}, \eta^m)\right] \cdot (\xi^m - \eta^m) \geq \alpha |\xi^m - \eta^m|^p$$

если $p \in [2, \infty)$, и

$$\nabla_{\xi^m}\left[F(x, \dots, \xi^{m-1}, \xi^m) - F(x, \dots, \xi^{m-1}, \eta^m)\right] \cdot (\xi^m - \eta^m) \geq \alpha \frac{|\xi^m - \eta^m|^2}{(|\xi| + |\eta|)^{2-p}}$$

для $p \in (1,2)$.

F4. Существуют такие постоянные $L > 0$, $\varkappa \in (0,1]$, что для любого $\xi \in \prod_{k=0}^m \mathbb{R}^{d^k N}$ и любых $x, y \in \tilde{U}$

$$|F(x,\xi) - F(y,\xi)| \leq L|x-y|^\varkappa (1 + |\xi|^p).$$

Замечание 3.1.1. *Для $p \in (1,2)$, интеграл $\alpha^{p/2}\int_\Omega |\xi^m - \eta^m|^p d\mu$ не превосходит*

$$\int_\Omega (\nabla_{\xi^m}[F(x,..,\xi^m) - \nabla_{\xi^m} F(x,..,\eta^m)])^{p/2} (|\xi| + |\eta|)^{\frac{p(2-p)}{2}} d\mu \leq \Bigg(\int_U (|\xi| + |\eta|)^p d\mu\Bigg)^{\frac{(2-p)}{2}} \cdot \left(\int_\Omega \nabla_{\xi^m}[F(x,..,\xi^m) - F(x,..,\eta^m)] \cdot (\xi^m - \eta^m) d\mu\right)^{p/2}.$$

Существование решения задачи (3.1.2), для функционала J, удовлетворяющего условиям ***F1*** – ***F3*** гарантирует следующая

Теорема 3.1.1 ([18], теорема 2.6)**.** *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *— ограниченная область, функция* $F(x, \xi^0, \dots, \xi^m) \geq 0$

- *измерима по* x *при любых* $(\xi^0, \dots, \xi^m)$*;*

- *непрерывна по* $(\xi^0, \dots, \xi^{m-1})$ *при почти любом* x *и любом* ξ^m*;*

- *выпукла по* ξ^m *при почти любом* x *и любых* $(\xi^0, \dots, \xi^{m-1})$.

Тогда функционал $\int_\Omega F(x, u, \nabla u, \dots, \nabla^m u) d\mu$ *является секвенциально полунепрерывным снизу в* $W_p^m(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $p \in [1, \infty)$ *относительно слабой топологии.*

В самом деле, так как $\mathring{W}_p^m(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $p \in (1, \infty)$ является сильно замкнутым линейным подпространством в $W_p^m(\Omega, \mathbb{R}^N)$, компактным относительно слабой топологии, а J_f секвенциально непрерывен в $W_p^m(\Omega, \mathbb{R}^N)$, то имеет место разрешимость задачи (3.1.2) для любой правой части $f \in W_{p'}^{-m}(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $1/p + 1/p' = 1$. Отметим, что для единственности решений задачи (3.1.2) достаточно потребовать, чтобы J был строго выпуклым функионалом (см. [36], теорема 38.C).

Поставим линейные задачи. Рассмотрим дифференциальное выражение $\mathcal{A}'$:

$$\sum_{0 \leq l \leq k \leq m} (\nabla^*)^l \boldsymbol{A}_{k,l} \, (\nabla)^k u = (\nabla^*)^m \boldsymbol{A}_{m,m} (\nabla)^m u + \sum_{\substack{0 \leq l \leq k \leq m \\ l \neq m}} (\nabla^*)^l \boldsymbol{A}_{k,l} (\nabla)^k u, \tag{3.1.3}$$

здесь $\boldsymbol{A}_{k,l}$ — сечения расслоений $\otimes_{\mathbb{C}}^{k+l} TM$, $(\nabla^*)^l$ есть оператор формально сопряженный $(\nabla)^l$ по Лагранжу относительно скалярного произведения $(u, v)_{L_2(M)} = \int_M u \bar{v} d\mu$, $\boldsymbol{A}_{m,m}$ — эрмитово. Так, например, в локальных координатах

$$(\nabla^*)_i v^i = -\frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_i \left(\sqrt{\det g} \, v^i \right) = -\operatorname{div} v_i$$

$$(\nabla^*)^2_{ij} v^{ij} = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_i \partial_j \left[\sqrt{\det g} \cdot v^{ij} \right] + \frac{1}{\sqrt{\det g}} \partial_k \left[\Gamma^k_{ij} \sqrt{\det g} \cdot u \right]$$

где Γ_{ij}^k — символы Кристоффеля. Для $\epsilon > 0$ обозначим $\tilde{d} = \max\{2 + \epsilon, d + (1-\gamma)\epsilon\}$. Потребуем чтобы выполнялись следующие условия[2]

A1 $\exists \alpha > 0 : \forall x \in M \ \forall \xi \in \otimes_{\mathbb{C}}^m T_x^* M \Rightarrow \alpha\, \xi^{\sharp^m}\, \bar{\xi} \le \boldsymbol{A}_{m,m}(\xi \otimes \bar{\xi})$;

A2 $\boldsymbol{A}_{m,m} \in C^{0,\varkappa}(M)$, $\varkappa \in (0,1]$, сечения $\boldsymbol{A}_{m_1,m_2}$, $0 \le m_2 \le m_1 \le m$, $m_2 \ne m$, таковы, что для задач Дирихле и Неймана соответственно выполнено требование

- ***d*** Для некоторого $\gamma \in (0,1]$ имеет место $\boldsymbol{A}_{m_1,m_2} \in W_{p_{m_2,\gamma}}^{-m+m_1}(\Omega)$, при $m_2 < m_1$ и $p_{m_2,\gamma} = \frac{\tilde{d}}{m-m_2-\gamma}$; При $k \le m-1$: $\boldsymbol{A}_{k,k} \in B_{q_k,1}^{-m+k+\gamma}(\Omega)$ и $\boldsymbol{A}_{k,k} \in W_{q_k}^{-m+k+\gamma}(\Omega)$ для $\gamma \in (0,1)$ и $\gamma = 1$. Где q_k равно 2, $d/(m-k)$ для $m-k \ge d/2$, $m-k < d/2$ соответственно.

- ***n*** Пусть $\mu = \min\{m-k, m-l-1\}$, $\nu = \max\{m-k, m-l-1\}$ тогда $\boldsymbol{A}_{k,l} \in \tilde{W}^{-\mu}_{\frac{d}{(\lfloor t\nu \rfloor -1)_+}}(\Omega)$, если $\lfloor t\nu \rfloor < \frac{d}{2}$, и $\boldsymbol{A}_{k,l}$ принадлежит $\tilde{W}_{2+\epsilon}^{-\mu}(\Omega)$, $\tilde{W}_2^{-\mu}(\Omega)$ при $\lfloor t\nu \rfloor = \frac{d}{2}$, $\lfloor t\nu \rfloor \ge \frac{d}{2}$ соответственно. Здесь $\lfloor s \rfloor$ — максимальное целое число не превосходящее s, $(s)_+ = \max\{s, 0\}$.

A3 Младшие коэффициенты таковы, что форма порожденная оператором $\mathcal{A}$ секториальна с вершиной в правой полуплоскости.

Рассмотрим представления

$$\Phi^D(u,v) = \Phi_0^D(u,v) + \Phi_r^D(u,v), \quad \Phi^N(u,v) = \Phi_0^N(u,v) + \Phi_r^N(u,v),$$

где формы $\Phi_0^D(u,v)$ и $\Phi_0^N(u,v)$ задаются выражением $\int_M \boldsymbol{A}_{m,m} \nabla^m u \otimes \overline{\nabla^m v}\, d\mu$, в свою очередь $\Phi_r^D(u,v)$ и $\Phi_r^N(u,v)$ имеют вид

$$\sum_{\substack{m \ge m_1 \ge m_2,\\ m_2 \ne m}} \int_\Omega \boldsymbol{A}_{m_1,m_2} \nabla^{m_1} u \otimes \overline{\nabla^{m_2} v}\, d\mu.$$

По формам Φ^D и Φ^N с помощью теоремы 1.1.1 единственным образом строятся операторы $\mathcal{A}^D$ и $\mathcal{A}^N$. Скажем, что функция $u \in \mathring{H}^m(\Omega)$ является решением (в слабом вариационном смысле) задачи Дирихле

$$\mathcal{A}' u = f, \quad \nabla^k u|_{\partial\Omega} = 0, \quad k = \overline{0,..,m-1}. \tag{3.1.4}$$

[2]Определение $\sharp$ см. сноску 1 главы 1

для $f \in H^{-m}(\Omega)$, если $\mathcal{A}^D u = f$, или эквивалентно, для любой функции $v \in \mathring{H}^m(\Omega)$ выполнено $\Phi_0^D(u,v) + \Phi_r^D(u,v) = \tau(f,v)$. Аналогично, скажем, что $u \in W_2^m(\Omega)$ есть решение задачи Неймана

$$\mathcal{A}' u = f, \quad \sum_{n \le l \le k \le m} \langle \otimes^n \nu, (\nabla^*)^{l-n} \boldsymbol{A}_{k,l} \nabla^k u \rangle|_{\partial\Omega} = 0, \;\; l = \overline{1,..,m}. \qquad (3.1.5)$$

с правой частью $f \in \mathring{W}_2^{-m}(\Omega)$, если $\mathcal{A}^N u = f$, то есть $\Phi_0^N(u,v) + \Phi_r^N(u,v) = \tau(f,v)$ для любой $v \in W_2^m(\Omega)$.

Для установления эффекта повышения гладкости, нам понадобится установить дифференцируемость по Гато функционала J. Следуя [24], определим понятие дифференциала и производной по Гато. Пусть X, Y — банаховы пространства, J есть отображение, действующее из X в Y. Слабым дифференциалом или дифференциалом Гато отображения J в точке x (при приращении h) называется предел

$$DJ(x,h) = \frac{d}{dt} J(x+th)|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{J(x+th) - J(x)}{t},$$

где сходимость понимается в сильном смысле. Если при этом дифференциал $DJ(x,h)$ линеен по h

$$DJ(x,h) = J'(x)h,$$

где $J'(x)$ — ограниченный линейный оператор, то этот оператор называется слабой производной (или производной Гато). Для удобства формулировки утверждений, будем опускать зависимость функциональных пространств от области значений функций.

Теорема 3.1.2. *Пусть функционал J представим в виде (3.1.1) и выполнены условия **F1**, **F2**. Тогда для любого $u \in \mathring{W}_p^m(\Omega)$ существует производная Гато $\tau(\mathcal{A}^{F+E}u, v) = \tau(\mathcal{A}_0^F u, v) + \tau(\mathcal{A}_r^F u, v) + \tau(\mathcal{A}_r^E u, v)$*

$$\tau(\mathcal{A}_0^F u, v) = \int_\Omega \nabla_{\nabla^m u^i} F(x, u, \nabla u, .., \nabla^m u) \nabla^m v^i d\mu$$

$$\tau(\mathcal{A}_r^F u, v) = \int_\Omega \nabla_{u^i} F(x, .., \nabla^m u) v^i + \cdots + \nabla_{\nabla^{m-1} u^i} F(x, .., \nabla^m u) \nabla^{m-1} v^i d\mu$$

$$\tau(\mathcal{A}_r^E u, v) = \int_\Omega \nabla_{u^i} E(x, .., \nabla^m u) v^i + \cdots + \nabla_{\nabla^{m-1} u^i} E(x, .., \nabla^m u) \nabla^{m-1} v^i d\mu$$

причем для $\mathcal{A}_r^F$, $\mathcal{A}_r^E$ *существует такая константа* $C_0 \in \mathbb{R}_+$, *что для любых* $u, v \in \mathring{W}_p^m(\Omega)$ *имеет место оценка*[3]

$$\left|\tau(\mathcal{A}_r^F u, v)\right| + \left|\tau(\mathcal{A}_r^E u, v)\right| \leq C_0 \left(1 + \|u\|_{w_p^m(\Omega)}^{p-1}\right) \|v\|_{k_p^{m-\gamma}(\Omega)}$$

Доказательство. Будем действовать в русле доказательства Теоремы 5.1 Главы 1 из [18]. Сразу заметим, что если получено доказательство для F удовлетворяющей условиям теоремы 3.1.2 и $E \equiv 0$, то теорема доказана полностью. Пусть $v \in \mathring{W}_p^m(\Omega)$ — вариация, причем, без уменьшения общности, можно сразу предположить, что ее носитель принадлежит некоторой карте U, в которой расслоение $\mathcal{J}^{N,m}M$ распадается в прямое произведение $\tilde{U} \times \mathbb{R}^{Nd} \times \cdots \times \mathbb{R}^{Nd^m}$. Так как функция F — непрерывна и дифференцируема по $(\xi^0, \xi^1, \ldots, \xi^m)$ при почти любом $x \in M$, то применяя формулу Ньютона–Лейбница и теорему Фубини, для $\lambda \in (0,1)$ и фиксированной функции $u \in \mathring{W}_p^m(\Omega, \mathbb{R}^N)$ получим, что отношение $\frac{J[u+\lambda v]-J[u]}{\lambda}$ равно

$$\int_{\tilde{U}\cap\Omega} d\mu \int_0^1 \Big(\nabla_{u^i} F(x, u + t\lambda v, \nabla u + t\lambda \nabla v, \ldots, \nabla^m u + t\lambda \nabla^m v) v^i +$$
$$\nabla_{\nabla u^i} F(x, u + t\lambda v, \nabla u + t\lambda \nabla v, \ldots, \nabla^m u + t\lambda \nabla^m v) \nabla v^i + \cdots +$$
$$\nabla_{\nabla^m u^i} F(x, u + t\lambda v, \nabla u + t\lambda \nabla v, \ldots, \nabla^m u + t\lambda \nabla^m v) \nabla^m \Big) v^i dt$$

Таким образом, обозначая $\psi_\gamma^m(t) = |t|^{p-1}$, $Du = (u, \nabla u, \ldots, \nabla^m u)$, в силу условия ***F2*** получим оценку

$$\left|\int_0^1 F_{\lambda,u,v,k} d\mu\right| := \left|\int_0^1 \nabla_{\nabla^k u^i} F(x, u + t\lambda v, \ldots, \nabla^m u + t\lambda \nabla^m v) \nabla^k v^i dt\right| \leq$$
$$\sup_{t\in[0,1]} C(1 + \psi_\gamma^k(|Du + t\lambda Dv|)) \cdot |\nabla^k v|, \quad k = \overline{0, \ldots, m}.$$

Тогда последовательность $\{F_{\lambda,u,v,k}\}_{\lambda\in(0,1]}$ является равномерно суммируемой[4]. В самом деле, пусть $V \subset U$ измеримое множество достаточно малой меры, тогда $\int_V |F_{\lambda,u,v,k}| d\mu \leq C \int_V \left(1 + \psi_\gamma^k(2|Du|) + \psi_\gamma^k(2\lambda|Dv|)\right) \cdot$

---

[3]Определение пространств K_p^s и полунормы k_p^s см. таблицу 2.2.1

[4]Последовательность $\{f_h\}$ называется равномерно суммируемой, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall V \subset M, V$ — измеримо, $\mu(V) < \delta \Rightarrow \sup_h \int_V |f_h| d\mu < \varepsilon$

$|\nabla^k v| d\mu$. Заметим, что $\nabla^k v \in \overset{\circ}{W}{}_p^{m-k}(\Omega) \hookrightarrow \tilde{K}_p^{m-k-\gamma}(\Omega)$ для $k \in \{0,\ldots,m\}$, и вследствие теорем 2.1.2, 2.1.6 имеют место теоремы вложения $\tilde{K}_p^{m-k-\gamma}(\Omega) \hookrightarrow L_{p_k}(\Omega)$ для некоторого p_k. Таким образом, интеграл $\int_V |F_{\lambda,u,v,k}| d\mu$ не превосходит

$$C\left\|1+\psi_\gamma^k(2\lambda|Dv|)+\psi_\gamma^k(2|Du|)\right\|_{L_{p_k'}(V)}\|\nabla^k v\|_{L_{p_k}(V)} \le$$
$$C_2\left(1+2\lambda\|v\|_{w_p^m(V)}^{p-1}+\|u\|_{w_p^m(V)}^{p-1}\right)\|v\|_{k_p^{m-\gamma}(\Omega)},$$

где $p_m = p$, $\frac{1}{p_k}+\frac{1}{p_k'}=1$, p_k определяются из уравнений

$$1/p - 1/p_k = \frac{m-k-\gamma}{d}, \quad \gamma = 1, \quad m-k-\gamma < \frac{d}{p}$$
$$1/p - 1/p_k = \frac{m-k-\gamma-\epsilon}{d}, \quad \gamma \in (0,1), \quad m-k-\gamma \le \frac{d}{p}$$
$$p_k = 1/\epsilon, \quad \gamma = 1, \; m-k-\gamma = \frac{d}{p}; \; p_k = \infty, \; \gamma \in (0,1], \; m-k-\gamma > \frac{d}{p}.$$

Последовательность $\{F_{\lambda,u,v,k}\}_\lambda$ равномерно суммируема для любого $k = \overline{0,..,m}$ и любых фиксированных $u, v \in \tilde{W}_p^m(\Omega)$. Следовательно, можно перейти к пределу по $\lambda \to 0$, тем самым получив утверждение теоремы.

□

Предложение 3.1.1. *Пусть Ω — подобласть M_O, коэффициенты оператора $\mathcal{A}^D$ удовлетворяют условию **A2**, $\gamma \in (0,1]$, тогда для $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}_+$ таких, что $0 \le m_2 \le m_1 \le m$, $l \ne m$, имеет место неравенство*

$$\left|\int_\Omega \boldsymbol{A}_{m_1,m_2}\nabla^{m_1}u\overline{\nabla^{m_2}v}\,d\mu\right| \le \|A_{m_1,m_2}\|\|u\|_{\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)}\|v\|_{\tilde{K}_2^{m-\gamma}(\Omega)}, \forall u,v \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega).$$

Доказательство. Наложим более слабые условия, будем считать, что $u \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)$, $v \in \overset{\circ}{H}{}^{m-1}(\Omega)$ для $\gamma = 1$, и $v \in \overset{\circ}{\tilde{N}}{}_2^{m-\gamma}(\Omega)$ для[5] $\gamma \in (0,1)$. Определим $z = \nabla^k u$, $w = \overline{\nabla^l v}$, $k = m - m_1$, $l = m - m_2$, и рассмотрим два случая.

1) Если $k \le l - \gamma$, то $z \otimes w \in \tilde{W}_p^k(\Omega)$ с некоторым $p \in [1,\infty)$. Найдем p, для которого $\nabla^k(z \otimes w) = \sum_{j=0}^k C_k^j \nabla^{k-j} z \otimes \nabla^j w \in L_p(\Omega)$. В силу теоремы 2.1.2, $\overset{\circ}{H}{}^j(\Omega) \hookrightarrow L_{q(j)}(\Omega)$, для $\frac{1}{2} - \frac{1}{q(j)} = \frac{j}{d}$ при $j < d/2$, для

[5]Определение пространства $\overset{\circ}{\tilde{N}}{}_2^{m-\gamma}(\Omega)$ см. определение 2.1.4.

любого положительного ε, $\frac{1}{q(j)} = \varepsilon$ при $j = d/2$, и $\frac{1}{q(j)} = 0$ для $j > d/2$. С другой стороны, в силу теорем 2.1.2 и 2.1.6, $\tilde{K}_2^{l-\gamma-j}(\Omega) \hookrightarrow L_{q^*(j)}(\Omega)$, в случае $l-\gamma-j < d/2$, для $\frac{1}{2} - \frac{1}{q^*(j)} = \frac{l-\gamma-j-z_\gamma\varepsilon}{d}$, $z_\gamma = 1$ если $\gamma \in (0,1)$, и $z_\gamma = 0$ если $\gamma = 1$, в случае $l-\gamma-j = d/2$, для $\frac{1}{q^*(j)} = \varepsilon$, и в случае $l-\gamma-j > d/2$, $\frac{1}{q_j} = 0$. Таким образом, сумма $\frac{1}{q_j} + \frac{1}{q_j^*}$ равна

$\frac{1}{q(j)} + \frac{1}{q^*(j)}$	$l-j-\gamma < \frac{d}{2}$	$l-j-\gamma = \frac{d}{2}$	$l-j-\gamma > \frac{d}{2}$
$j < \frac{d}{2}$	$1 - \frac{l-\gamma-z_\gamma\varepsilon}{d}$	$\frac{1}{2} - \frac{j-\varepsilon}{d}$	$\frac{1}{2} - \frac{j}{d}$
$j = \frac{d}{2}$	$\frac{1}{2} - \frac{l-\gamma-j-\varepsilon}{d}$	2ε	ε
$j > \frac{d}{2}$	$\frac{1}{2} - \frac{l-\gamma-j-z_\gamma\varepsilon}{d}$	ε	0

Так как $1/p = \max_j \left\{\frac{1}{q(j)} + \frac{1}{q^*(j)}\right\}$, то для $l-\gamma > d/2$, то $p = 2$, если $l-\gamma = d/2$, то $p = 2-\varepsilon$, и $l-\gamma < d/2$, то $1/p = 1 - \frac{l-\gamma-z_\gamma\varepsilon}{d}$. Сопоставляя с условием $\boldsymbol{A2}$, получаем требуемое.

2) Если $k \geq l-\gamma$ и $\gamma = 1$, то случай сводится к предыдущему, поэтому будем считать $\gamma \in (0,1)$. Без уменьшения общности положим, что носители z и w лежат в одной карте, поэтому корректно определен оператор сдвига аргумента. Для удобства переобозначим $l-1 = n$, $1-\gamma = \zeta$. Легко видеть, что $\|\nabla^n(z \otimes w - z_h \otimes w_h)\|_{L_p(\Omega)}$ не превосходит

$$\sum_{j=0}^{n} \Big(\|\nabla^j z\|_{L_{q(j)}(\Omega)} \|\nabla^{n-j}(w - w_h)\|_{L_{q^*(j)}(\Omega)} +$$
$$+ \|\nabla^j (z - z_h)\|_{L_{r(j)}(\Omega)} \|\nabla^{n-j} w_h\|_{L_{r^*(j)}(\Omega)} \Big)$$

Из предыдущих рассуждений ясно, что сумма $1/q^*(j) + 1/q(j)$ будет максимальна, если $j = 0$, в этом случае $q^*(0) = 2$ и $q(j)$ определяется с помощью теоремы 2.1.2, как порядок суммируемости во вложении $\mathring{H}^k(\Omega) \hookrightarrow L_{q(0)}(\Omega)$. Аналогично, сумма $1/r^*(j) + 1/r(j)$ будет максимальна, если $j = 0$. Показатель $r(0)$ определим из теоремы 2.1.7 как порядок суммируемости во вложении $\mathring{H}^k(\Omega) \hookrightarrow \tilde{K}_2^\zeta(\Omega)$, в свою очередь показатель $r^*(0)$ определяется из теоремы 2.1.6 из вложения $\tilde{K}_2^\zeta(\Omega) \hookrightarrow L_{r^*(0)}(\Omega)$. Сравниваем с условием $\boldsymbol{A2}$, предложение доказано. $\square$

Предложение 3.1.2. *Пусть Ω — подобласть M_O, $\partial\Omega \in C^{0,t}$, $t \in (0,1]$, коэффициенты оператора $\mathcal{A}^N$ удовлетворяют условию **A2**, тогда для $k, l \in \mathbb{Z}_+$ таких, что $0 \le l \le k \le m$, $l \ne m$, имеет место неравенство*

$$\left| \int_\Omega \boldsymbol{A}_{k,l} \nabla^k u \overline{\nabla^l v}\, d\mu \right| \le \|\boldsymbol{A}_{k,l}\| \|u\|_{W_2^m(\Omega)} \|v\|_{W_2^{m-1}(\Omega)}.$$

Доказательство. Действительно, пусть $u \in W_2^{m-k}(\Omega)$, $v \in W_2^{m-l-1}(\Omega)$, тогда ясно, что в силу вложений

$$W_2^{m-k}(\Omega) \hookrightarrow W_2^{m-k-i}(\Omega), \qquad i \in \{0, \dots, m-k\},$$
$$W_2^{m-l-1}(\Omega) \hookrightarrow W_2^{m-l-1-j}(\Omega), \quad j \in \{0, \dots, m-l-1\},$$

произведение uv принадлежит $W_p^{m-\max\{k,l-1\}}(\Omega)$, $p \ge 1$. Следуя теореме 2.1.1 имеют место вложения

$$W_2^{m-k-j}(\Omega) \hookrightarrow W_2^{\lfloor (m-k-j)t \rfloor}(M) \hookrightarrow W_2^{\lfloor (m-k)t \rfloor - \lceil jt \rceil}(M),$$
$$W_2^j(\Omega) \hookrightarrow W_2^{\lfloor jt \rfloor}(M), \quad j \in \{0, \dots, m-k\}.$$

где $\lceil jt \rceil$ — минимальное целое число не меньшее данного; для того, чтобы произведение принадлежало $W_p^\mu(\Omega)$ достаточно, чтобы $p = \max\{p_j\}$, где для $j \in \{0, \dots, \nu\}$, числа p_j определяются уравнениями

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{\lfloor t\nu \rfloor - \lceil tj \rceil}{d}\right)_+ + \varepsilon \mathbf{1}_{\lfloor t\nu \rfloor - \lceil tj \rceil = \frac{d}{2}} = \frac{1}{s_j}$$
$$\left(\frac{1}{2} - \frac{\lfloor tj \rfloor}{d}\right)_+ + \varepsilon \mathbf{1}_{\lfloor tj \rfloor = \frac{d}{2}} = \frac{1}{r_j}, \qquad \frac{1}{r_j} + \frac{1}{s_j} + \frac{1}{p_j} = 1$$

Ясно, что сумма $\frac{1}{s_j} + \frac{1}{r_j}$ будет наибольшей, когда $j = 0$; рассматривая три случая, получаем требуемое. □

3.2 Вариационные задачи.

Теорема 3.2.1. *Пусть u — нестрогий минимум функционала J_f задачи (3.1.2), $p \in [2, \infty)$, область $\Omega \subset M_O$ обладает гельдеровой границей с показателем $t \in (0,1]$, функционал J удовлетворяет условиям **F1**–**F4**. Тогда если $f \in K_{p'}^{-m+\gamma}(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, то $u \in \tilde{N}_p^{m+t\zeta_0/p}(\Omega)$, причем*

$$\|u\|^p_{\tilde{N}_p^{m+t\zeta_0/p}(\Omega)} \le C\left(1 + \|u\|^p_{\tilde{W}_p^m(\Omega} + \|u\|_{\tilde{W}_p^m(\Omega)} \|f\|_{K_{p'}^{-m+\gamma}(\Omega)}\right), \qquad (3.2.1)$$

где $\zeta_0 = \min\{\varkappa, \gamma\}$. *Если дополнительно известно, что и принадлежит* $\tilde{N}_p^{m+s}(\Omega)$, $s \in (0, 1/p)$, $f \in K_{p'}^{-m+\gamma}(\Omega)$ *то* $u \in \tilde{N}_p^{m+t\zeta_s/p}(\Omega)$, *причем* $\|u\|^p_{\tilde{N}_p^{m+t\zeta_s/p}(\Omega)}$ *можно оценить сверху как*

$$C\left(1 + \|u\|^p_{\tilde{W}_p^m(\Omega)} + \left(1 + \|u\|^{p-1}_{\tilde{W}_p^m(\Omega)} + \|f\|_{K_{p'}^{-m+\gamma}(\Omega)}\right)\|u\|_{\tilde{K}_p^{m+s}(\Omega)}\right), \quad (3.2.2)$$

где $t_s = \min\{\varkappa, \gamma + s\}$.

Доказательство. Так как, с точностью до эквивалентности, норма в $\tilde{N}_p^s(\Omega, \mathbb{R}^N)$ не зависит от атласа в ее определении, то будем использовать $\mathcal{V}$ — атлас из определения 1.1.3 регулярности границы области Ω. Пусть $\{\psi_V\}_{V\in\mathcal{V}}$ — разбиение единицы подчиненное $\mathcal{V}$, причем $\mathrm{supp}\psi_V \subset V$. Для $h \in \mathbb{R}^d$ рассмотрим функцию $\phi(h) = |h| + C_\Omega|h|^t$, тогда для $|h| < \phi^{-1}\left[\mathrm{dist}(\mathrm{supp}\psi_V, \partial V)/20\right]$ корректно определены $(\psi_V)_{h\pm\phi(h)\xi_V}$, где сдвиг аргумента происходит в карте (V, κ_V), ξ_V из определения 1.1.3.

Для доказательства теоремы достаточно получить оценку (3.2.1) для $\psi_V u$, $V \in \mathcal{V}$, поэтому будем считать, что карта V фиксирована, и для удобства опускать обозначение зависимости от V в ψ_V и ξ_V, а также отождествим V с образом $\kappa_V(V)$. Тогда

$$\|\psi \cdot (u - u_h)\|_{\tilde{W}_p^m(V)} \le \|\psi(u - u_l)\|_{\tilde{W}_p^m(V)} + \|\psi(u_l - u_h)\|_{\tilde{W}_p^m(V)}, \quad (3.2.3)$$

где $l = -\phi(h)\xi$. Заметим, что слагаемые в правой части (3.2.3) можно записать в виде $\|\psi(u_l - v)\|_{\tilde{W}_p^m(V)}$, где v равно u и u_h для первого и второго слагаемых соответственно. Выражение $2^{-p+1}\|\psi(u_l - v)\|^p_{\tilde{W}_p^m(V)}$ оценим

$$\int_V \mathfrak{g}_m^N(x, \nabla^m\left[\psi_{-l}(u - v_{-l})\right])^{p/2} d\mu + \quad (3.2.4)$$

$$2^{-p+1}\int_V \Big\{ \mathfrak{g}_m^N(x - l, (\nabla^m\left[\psi(u_l - v)\right])_{-l})^{p/2} - 2^{p-1}\mathfrak{g}_m^N(x - l, \nabla^m\left[\psi_{-l}(u - v_{-l})\right])^{p/2} \Big\} d\mu_{-l} + \quad (3.2.5)$$

$$\int_V \mathfrak{g}_m^N(x - l, \nabla^m\left[\psi_{-l}(u - v_{-l})\right])^{p/2}\,(d\mu_{-l} - d\mu) + \quad (3.2.6)$$

$$\int_V \Big\{ \mathfrak{g}_m^N(x - l, \nabla^m[\psi_{-l}(u - v_{-l})])^{p/2} - \mathfrak{g}_m^N(x, \nabla^m[\psi_{-l}(u - v_{-l})])^{p/2} \Big\} d\mu \quad (3.2.7)$$

где $\mathfrak{g}_m^N(x,\xi) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \left((\xi^i)^{\sharp^m}\ \xi^i\right)$, $\xi \in (\otimes^m T_x^* M)^N$. Оценим (3.2.5), пусть η_1, η_2 — есть произвольные L_p–сечения расслоения $\otimes^m (T^*M)^N$, тогда $\|\eta_1 + \eta_2\|_p \le \|\eta_1\|_p + \|\eta_2\|_p$, $\|\eta\|_p := \left(\int_M \mathfrak{g}_m^N(x-l,\eta)^{p/2} d\mu_{-l}\right)^{1/p}$. Из неравенства Гельдера получаем оценку $\|\eta_1 + \eta_2\|_p^p \le (\|\eta_1\|_p + \|\eta_2\|_p)^p \le 2^{p-1}(\|\eta_1\|_p^p + \|\eta_2\|_p^p)$. Обозначим оператор сдвига на h аргумента функции через $\varkappa_h$, тогда в любой подобласти карты V для достаточно малых h корректно определен оператор $\delta_{k,[h]} = [\varkappa_h, \nabla^{k+1}] = \varkappa_h \circ \nabla^{k+1} - \nabla^{k+1} \circ \varkappa_h$, $\ k \in \{1, \dots, m-1\}$. Заметим, что $\nabla^{k+1}_{i_1,\dots,i_{k+1}} u = \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_{k+1}} u + \Gamma^k_{i_1,\dots,i_{k+1}}(x)u$, где $\Gamma^k_{i_1,\dots,i_{k+1}}$ — линейный дифференциальный оператор порядка k с коэффициентами из $C^{m-k,1}(V)$; поэтому подставляя $\eta_1 = \nabla^m\left[\psi_{-l}(u - v_{-l})\right]$, $\eta_2 = \delta_{m-1,[\phi(h)\xi]}\left[\psi(u_l - v)\right]$, для $V_1 \Subset V$ и достаточно малого h получаем, что (3.2.5) можно оценить сверху

$$2^{p-1}\int_V \mathfrak{g}_m^N(x-l, \delta_{m-1,[\phi(h)\xi]}\left[\psi(u_l - v)\right])^{p/2} d\mu_{-l} =$$

$$2^{p-1}\int_V \mathfrak{g}_m^N\left(x-l, \left(\Gamma^{m-1}(x+\phi(h)\xi) - \Gamma^{m-1}(x)\right)\left[\psi(u_l - v)\right]\right)^{p/2} d\mu_{-l} \le$$

$$C_1 \int_V \mathfrak{g}_m^N\left(x-l, \left[\psi(u_l - v)\right]\right)^{p/2} d\mu_{-l} \le C_2 \sum_{k=0}^{m-1} \|u_l - v\|^p_{w_p^k(V_1)},$$

и в силу леммы 1.3.4 не превосходит $C_3|h|^t\|u\|_{\tilde{W}_p^m(\Omega)}$.

Оценка сверху для (3.2.6) тривиальным образом следует из гладкости многообразия, таким образом $\int_V \mathfrak{g}_m^N(x-l, \nabla^m\left[\psi_{-l}(u-v_{-l})\right])^{p/2}(d\mu_{-l} - d\mu)$ не превосходит $C(M,\Omega)\|\psi\|_{C^{0,1}(M)}\|u\|^p_{\tilde{W}_p^m(\Omega,\mathbb{R}^N)}|h|^t$.

Пусть $\mathcal{L}_X$ — производная Ли вдоль векторного поля X, само поле X генерируется локальной однопараметрической группой диффеоморфизмов $\varkappa_{l\xi}$. Для того, чтобы оценить сверху (3.2.7), воспользуемся формулой Тейлора с дополнительным членом в форме Лагранжа, тогда (3.2.7) оценивается сверху как

$$C'''|\phi(h)|\int_V \max_{\theta\in[0,1]} \mathcal{L}_X \mathfrak{g}_m^N(x+\theta\phi(h)\xi, \nabla^m\left[\psi_{-l}(u-v_{-l})\right])\cdot$$

$$\cdot\mathfrak{g}_m^N(x+\theta\phi(h)\xi, \nabla^m\left[\psi_{-l}(u-v_{-l})\right])^{p/2-1} d\mu \le C''''\|u\|^p_{\tilde{W}_p^m(V)}|h|^t.$$

Следовательно, для (3.2.4) получаем

$$\|\psi(u_l-u)\|^p_{\tilde W^m_p(V)} \le 2^{p-1}\|\psi(u-u_{-l})\|^p_{\tilde W^m_p(V)} + C_{M,\Omega,\psi}\|u\|^p_{\tilde W^m_p(V)}|h|^t_;$$
$$\|\psi(u_l-u_h)\|^p_{\tilde W^m_p(V)} \le 2^{p-1}\|\psi(u-(u_h)_{-l})\|^p_{\tilde W^m_p(V)} + C_{M,\Omega,\psi}\|u\|^p_{\tilde W^m_p(V)}|h|^t_.$$

Подобно (1.3.4) введем оператор

$$T^\psi_h u = \psi u_h + (1-\psi)u,$$

и рассмотрим $\varphi_1(h) = \phi(h)\xi$, $\varphi_2(h) = h + \varphi_1(h)$. Так как $\mathrm{supp}(u - T^\psi_{\varphi_i(h)}u) \subset \bar\Omega$, получим, что $(u - T^\psi_{\varphi_i(h)}u) \in \tilde W^m_p(\Omega)$. Из условия ***F3*** следует, что

$$\alpha\|u - T^\psi_{\varphi_i(h)}u\|^p_{\tilde W^m_p(\Omega)} \le \int_\Omega \nabla_{\nabla^m u}\Big[F(x,u,\dots,\nabla^{m-1}u,\nabla^m u) - \nabla_{\nabla^m u}F(x,u,\dots,\nabla^{m-1}u,\nabla^m T^\psi_{\varphi_i(h)}u)\Big]\cdot\nabla^m(u - T^\psi_{\varphi_i(h)}u)d\mu \tag{3.2.8}$$

Пусть v — произвольный элемент из $\tilde W^m_p(\Omega)$. "Заморозим" в подынтегральном выражении J_f (см. (3.1.2)) все производные по u кроме старшей, а именно, рассмотрим функционал $J^u[v]$ равный

$$\int_\Omega F(x,u,\nabla u,\dots,\nabla^{m-1}u,\nabla^m v)\,d\mu + \int_\Omega E(x,u,\nabla u,\dots,\nabla^{m-1}u) + \tau(f,u),$$

тогда, в силу условия ***F3*** $J^u[v]$ будет выпуклым. В силу теоремы 3.1.2, для $J^u[v]$ существует производная Гато $\mathcal{A}^{F,u}$, причем

$$\mathcal{A}^{F,u}(v) = \int_\Omega \nabla_{\nabla^m u}F(x,u,\dots,\nabla^{m-1}u,\nabla^m u)\,d\mu, \quad \mathcal{A}^{F,u}(u) = \mathcal{A}^F_0(u) \tag{3.2.9}$$

где $\mathcal{A}^{F,u}$ по свойству ***F3*** есть коэрцитивный оператор. Следуя [31], на $\lambda \in [0,1]$ определим функцию $s(\lambda) = J^u[u + \lambda(v-u)]$, она выпуклая вещественнозначная класса C^1 (см. [25], Ch. 2, Prop. 1.1), причем $s'(\lambda) = \tau(\mathcal{A}^{F,u}(u+\lambda(v-u)), v-u)$. Следовательно

$$J^u[v] - J^u[u] - \tau(\mathcal{A}^{F,u}u, v-u) = s(1) - s(0) - s'(0) = \int_0^1 (s'(\lambda) - s'(0))d\lambda =$$
$$\int_0^1 \tau(\mathcal{A}^{F,u}(u+\lambda(v-u)) - \mathcal{A}^{F,u}(u), \lambda(v-u))\frac{d\lambda}{\lambda}.$$

Таким образом, из неравенства (3.2.8) следует

$$J^u[T^{\psi}_{\varphi_i(h)}u] - J^u[u] - \tau(\mathcal{A}^{F,u}u, T^{\psi}_{\varphi_i(h)}u - u) \geq \frac{\alpha}{p}\|u - T^{\psi}_{\varphi_i(h)}u\|^p_{\tilde{W}^m_p(\Omega)} \quad (3.2.10)$$

Так как u — нестрогий минимум функционала $J_f[v]$, то производная Гато вдоль любого направления должна быть неотрицательной:

$$\tau((\mathcal{A}^F_0 + \mathcal{A}^F_r + \mathcal{A}^E_r)(u), v - u) - \tau(f, v - u) \geq 0 \;\; \forall v \in \tilde{W}^m_p(\Omega),$$

следовательно

$$-\tau(\mathcal{A}^F_0(u), v - u) \leq \tau((\mathcal{A}^F_r + \mathcal{A}^E_r)(u), v - u) - \tau(f, v - u) \;\; \forall v \in \tilde{W}^m_p(\Omega).$$

Сопоставляя (3.2.10) и (3.2.9), приходим к неравенству

$$\begin{aligned} J^u[T^{\psi}_{\varphi_i(h)}u] - J^u[u] - &\tau((\mathcal{A}^F_r + \mathcal{A}^E_r)(u), T^{\psi}_{\varphi_i(h)}u - u) - \\ &\tau(f, T^{\psi}_{\varphi_i(h)}u - u) \geq \frac{\alpha}{p}\|u - T^{\psi}_{\varphi_i(h)}u\|^p_{\tilde{W}^m_p(\Omega)} \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

Вновь, из теоремы 3.1.2 получаем оценку

$$\begin{aligned} |\tau((\mathcal{A}^F_r + \mathcal{A}^E_r)(u), T^{\psi}_{\varphi_i(h)}u - u)| \leq C_0\|u\|^{p-1}_{\tilde{W}^m_p(\Omega)}\cdot \\ \cdot\|T^{\psi}_{\varphi_i(h)}u - u\|_{\tilde{K}^{m-\gamma}_p(\Omega)} \leq C\|T^{\psi}_{\varphi_i(h)}u - u\|_{\tilde{K}^{m-\gamma}_p(\Omega)}\|u\|^{p-1}_{\tilde{W}^m_p(\Omega)} \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

с некоторой константой C. По лемме 1.3.4 и теореме 2.1.4 имеет место вложение $N^{\gamma}_p\left(\tilde{K}^{m-\gamma}_p(\Omega)\right) \hookleftarrow \tilde{W}^m_p(\Omega)$, следовательно для некоторой константы C' выполнена оценка

$$\|T^{\psi}_{\varphi_i(h)}u - u\|_{\tilde{K}^{m-\gamma}_p(\Omega)} = \|\psi(u_{\varphi_i(h)} - u)\|_{\tilde{K}^{m-\gamma}_p(\Omega)} \leq C'\|u\|_{\tilde{W}^m_p(\Omega,\mathbb{R}^N)}|h|^{\gamma t},$$

Аналогично, для $f \in K^{-m+\gamma}_{p'}(\Omega)$, вновь следуя 2.1.4, имеем для некоторой другой константы C, что $|\tau(f, T^{\psi}_{\varphi_i(h)}u - u)|$ не превосходит

$$\|f\|_{K^{-m+\gamma}_{p'}(\Omega)}\|T^{\psi}_{\varphi_i(h)}u - u\|_{\tilde{K}^{m-\gamma}_p(\Omega)} \leq C\|f\|_{\tilde{K}^{-m+\gamma}_{p'}(\Omega)}\|u\|_{\tilde{W}^m_p(\Omega)}|h|^{\gamma t}. \quad (3.2.13)$$

Выражение $J^u[T^{\psi}_{\varphi_i(h)}u] - J^u[u]$ равно

$$\int_{\Omega} F(x, \dots, \nabla^{m-1}u, \nabla^m T^{\psi}_{\varphi_i(h)}u)\, d\mu - \int_{\Omega} F(x, \dots, \nabla^{m-1}u, T^{\psi}_{\varphi_i(h)}\nabla^m u)\, d\mu \quad (3.2.14)$$

$$+ \int_{\Omega} F(x, \dots, \nabla^{m-1}u, T^{\psi}_{\varphi_i(h)}\nabla^m u)\, d\mu - \int_{\Omega} F(x, \dots, \nabla^{m-1}u, \nabla^m u)\, d\mu. \quad (3.2.15)$$

Заметим, что (3.2.14) можно переписать в виде

$$S^u[\nabla^m T^{\psi}_{\varphi_i(h)} u] - S^u[T^{\psi}_{\varphi_i(h)} \nabla^m u],$$

где $S^u : L_p(\Omega, \mathbb{R}^{Nd^m}) \to \mathbb{R}$, $S^u : w \mapsto \int_\Omega F(x, u, \dots, \nabla^{m-1}u, w) d\mu$. С другой стороны, коммутатор $\left[\nabla^m, T^{\psi}_{\varphi_i(h)}\right] = \nabla^m \circ T^{\psi}_{\varphi_i(h)} - T^{\psi}_{\varphi_i(h)} \circ \nabla^m$ является линейным дифференциальным оператором от $u_{\varphi_i(h)}$ порядка $(m-1)$ с липшицевыми коэффициентами, а значит, в силу теоремы 3.1.2 S^u дифференцируем, причем (3.2.14) равно

$$\tau\left(\partial S^u[T^{\psi}_{\varphi_i(h)} \nabla^m u], \left[\nabla^m, T^{\psi}_{\varphi_i(h)}\right] u\right) \cdot (1 + \varepsilon_1(h)),$$

где $\partial S^u[v]$ производная Гато в точке v, и $\varepsilon_1(h)$ стремится к 0 при $\left\|\left[\nabla^m, T^{\psi}_{\varphi_i(h)}\right] u\right\|_{L_p(M)} \to 0$. Однако, так как коммутатор является оператором порядка $m-1$, то из леммы 1.3.4 следует, что $\left\|\left[\nabla^m, T^{\psi}_{\varphi_i(h)}\right] u\right\|_{L_p(M)}$ стремится к нулю, если $h \to 0$, таким образом, $\varepsilon_1(h) \to 0$, если $h \to 0$, более того, (3.2.14) не превосходит $C_1 \|u\|^p_{\tilde{W}^m_p(\Omega)} |h|^t$ для некоторой константы C_1.

Для доказательства (3.2.1) осталось оценить сверху (3.2.15). В силу свойства ***F3*** имеет место выпуклость F по последнему аргументу, то есть

$$\begin{aligned} F(x, .., \nabla^{m-1}u, T^{\psi}_{\varphi_i(h)} \nabla^m u) - F(x, .., \nabla^{m-1}u, \nabla^m u) = \\ F(x, .., \nabla^{m-1}u, \psi \cdot (\nabla^m u)_{\varphi_i(h)} + (1-\psi)\nabla^m u) - F(x, .., \nabla^{m-1}u, \nabla^m u) \le \\ \psi \cdot F(x, .., \nabla^{m-1}u, (\nabla^m u)_{\varphi_i(h)}) + (1-\psi) \cdot F(x, .., \nabla^m u) - F(x, .., \nabla^m u) = \\ \psi \cdot \big(F(x, .., \nabla^{m-1}u, (\nabla^m u)_{\varphi_i(h)}) - F(x, .., \nabla^{m-1}u, \nabla^m u)\big). \end{aligned}$$

Таким образом, (3.2.15) не превосходит выражения

$$\int_M \psi(x) \cdot (F(x, \dots, \nabla^{m-1}u, (\nabla^m u)_{\varphi_i(h)}) - F(x, \dots, \nabla^m u))\, d\mu = \tag{3.2.16}$$

$$\int_M (\psi(x - \varphi_i(h)) - \psi(x)) \cdot (F(x, u, \dots, \nabla^{m-1}u, (\nabla^m u)_{\varphi_i(h)}) + \tag{3.2.17}$$

$$\int_M \psi(x) \cdot F(x - \varphi_i(h), u_{-\varphi_i(h)}, \dots, (\nabla^{m-1}u)_{-\varphi_i(h)}, \nabla^m u)\, (d\mu_{-\varphi_i(h)} - d\mu) + \tag{3.2.18}$$

$$
\begin{aligned}
\int_M \psi(x)\cdot F(x-\varphi_i(h), u_{-\varphi_i(h)}, \dots, (\nabla^{m-1}u)_{-\varphi_i(h)}, \nabla^m u)\, d\mu-&\\
\int_M \psi(x)\cdot F(x, u_{-\varphi_i(h)}, \dots, (\nabla^{m-1}u)_{-\varphi_i(h)}, \nabla^m u)\, d\mu+&
\end{aligned}
\tag{3.2.19}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_M \psi(x)\cdot F(x, u_{-\varphi_i(h)}, \dots, (\nabla^{m-1}u)_{-\varphi_i(h)}, \nabla^m u)\, d\mu-&\\
\int_M \psi(x)\cdot F(x, u, \dots, \nabla^{m-1}u, \nabla^m u)\, d\mu&
\end{aligned}
\tag{3.2.20}
$$

Сумму (3.2.17)–(3.2.19) можно оценить так:

$$
\hat{C}\left(\|u\|^p_{\tilde{W}^m_p(\Omega)}|h|^t + \|u\|^p_{\tilde{W}^m_p(\Omega)}|h|^t + \|u\|^p_{\tilde{W}^m_p(\Omega)}|h|^{t\varkappa}\right)
$$

Действительно, разность (3.2.17) оценивается по модулю благодаря липшицевости ψ, разность (3.2.18) аналогично (3.2.6), для разности (3.2.19) оценка получается в силу условия $\boldsymbol{F4}$, поэтому займемся (3.2.20). Пусть $\tilde{\psi} \in C_0^\infty(V)$ такая, что $\tilde{\psi} \equiv 1$ для любой точки $x \in \mathrm{supp}\psi$; ясно, что (3.2.20) равно

$$
\begin{aligned}
\int_M \psi\cdot F(x, \tilde{\psi}u_{-\varphi_i(h)}, \dots, \tilde{\psi}(\nabla^{m-1}u)_{-\varphi_i(h)}, \nabla^m u)\, d\mu-&\\
\int_M \psi(x)\cdot F(x, \tilde{\psi}u, \dots, \tilde{\psi}\nabla^{m-1}u, \nabla^m u)\, d\mu&
\end{aligned}
$$

Таким образом (3.2.20) перепишется в виде $R^u[\mathbf{w}+\mathbf{v}] - R^u[\mathbf{w}]$, где

$$
\begin{aligned}
R^u : \mathbf{w} = (w^0, \dots, w^{m-1}) &\mapsto \int_\Omega \psi(x) F(x, w^0, \dots, w^{m-1}, \nabla^m u) d\mu,\\
\mathbf{w} &= \left(\tilde{\psi}u, \tilde{\psi}\nabla u, \dots, \tilde{\psi}\nabla^{m-1}u\right),\\
\mathbf{v} &= \left(\tilde{\psi}\left(u_{-\varphi_i(h)} - u\right), \dots, \tilde{\psi}\left(\left(\nabla^{m-1}u\right)_{-\varphi_i(h)} - \nabla^{m-1}u\right)\right)
\end{aligned}
$$

и благодаря теореме 3.1.2 выражение выше равно

$$
\tau(\partial R^u[\mathbf{w}], \mathbf{v})(1+\varepsilon_2(h)), \quad \left(\varepsilon_2(h) \to 0 \ \Leftarrow \ \|\mathbf{v}\|_{\prod_{j=0}^{m-1} \tilde{W}_p^{m-j}(\Omega)} \to 0\right)
$$

причем j-ую компоненту, $j > 1$, $\mathbf{v}$ можно переписать в виде $\tilde{\psi}\nabla^j(u_{-\varphi_i(h)} - u) + \tilde{\psi}\delta_{j-1,[-\varphi_i(h)]}u$. Вспомним, что $\delta_{j-1,[-\varphi_i(h)]} = \Gamma^{j-1}(x-\varphi_i(h)) - \Gamma^{j-1}(x)$, где $\Gamma^k_{i_1,\dots,i_{k+1}}$ — линейный дифференциальный оператор порядка k с коэффициентами из $C^{m-k,1}(V)$. В свою очередь разность $\|\tilde{\psi}\cdot(u_{-\varphi_i(h)} - u)\|_{w^m_p(\Omega)}$

стремится к нулю, так как $u \in \tilde{W}^m_p(\Omega)$ и следовательно является непрерывной в целом. Таким образом, $\varepsilon_2(h) \to 0$ если $h \to 0$. Снова из теоремы 3.1.2, следует, что для $k = -\varphi_i(h)$ разность (3.2.20) можно оценить как

$$C_2(R)\|\mathbf{w}\|_{\prod_{j=0}^{m-1}\tilde{W}_p^{m-j}(\Omega)}\sum_{j=0}^{m-1}\left(\|\tilde{\psi}\nabla^j(u_k-u)\|_{K_p^{m-j-\gamma}(\Omega)}+\|\tilde{\psi}\delta_{j-1,[k]}u\|_{K_p^{m-j-\gamma}(\Omega)}\right), \tag{3.2.21}$$

где формально $\delta_{-1,[-\varphi_i(h)]} \equiv \delta_{0,[-\varphi_i(h)]} \equiv 0$. Теперь, из леммы 1.3.4 и теоремы 2.1.4 вытекает, что (3.2.21) можно оценить сверху как

$$\hat{C}'\left(\|u\|^p_{\tilde{W}_p^m(\Omega,\mathbb{R}^N)}|h|^{t\gamma}+\|u\|^p_{\tilde{W}_p^m(\Omega,\mathbb{R}^N)}|h|^t\right)$$

для некоторой константы $\hat{C}'$.

Для получения оценки (3.2.2) достаточно применить теорему 1 из [14] к неравенствам (3.2.12), (3.2.13), (3.2.21), предполагая, что $u \in \tilde{N}_p^{m+s}(\Omega,\mathbb{R}^N)$. Откуда получаем, что для $\zeta_s = \min\{\varkappa, s+\gamma\}$ решение u задачи (3.1.2) принадлежит пространству $\tilde{N}_p^{1+t\zeta_s/p}(\Omega,\mathbb{R}^N)$. □

Теорема 3.2.2. *Пусть u — нестрогий минимум функционала J_f задачи (3.1.2), $p \in (1,2)$, область $\Omega \subset M_O$ обладает гельдеровой границей с показателем $t \in (0,1]$, функционал J удовлетворяет условиям **F1–F4**. Тогда если $f \in K_{p'}^{-m+\gamma}(\Omega)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, то $u \in \tilde{N}_p^{m+t\zeta_0/p}(\Omega)$, и справедлива оценка*

$$C\left(1+\|u\|^{2-p}_{\tilde{W}_p^m(\Omega)}\right)\left(1+\|u\|^2_{\tilde{W}_p^m(\Omega)}+\|u\|_{\tilde{W}_p^m(\Omega)}\|f\|_{K_{p'}^{-m+\gamma}(\Omega)}\right),$$

где $\zeta_0 = \min\{\varkappa,\gamma\}$. Если дополнительно известно, что u принадлежит $\tilde{N}_p^{m+s}(\Omega)$, $s \in (0,1/p)$, $f \in K_{p'}^{-m+\gamma}(\Omega)$ то $u \in \tilde{N}_p^{m+t\zeta_s/p}(\Omega)$, причем $\|u\|^p_{\tilde{N}_p^{m+t\zeta_s/p}(\Omega)}$ можно оценить сверху как

$$C\left(1+\|u\|^{2-p}_{\tilde{W}_p^m(\Omega)}\right)\left(1+\left(1+\|u\|_{\tilde{W}_p^m(\Omega)}+\|f\|_{K_{p'}^{-m+\gamma}(\Omega)}\right)\|u\|_{\tilde{K}_p^{m+s}(\Omega)}\right),$$

где $\zeta_s = \min\{\varkappa,\gamma+s\}$.

Все совершенно аналогично доказательству теоремы 3.2.1, с той поправкой, что следуя замечанию 3.1.1 неравенство (3.2.8) перепишется в виде

$$\alpha\|u - T^{\psi}_{\varphi_i(h)}u\|^p_{\tilde{W}^m_p(V)} \le \Bigg(\int_\Omega \nabla_{\nabla^m u}\left[F(x,u,\dots,\nabla^{m-1}u,\nabla^m u) - \right.$$
$$\left.\nabla_{\nabla^m u}F(x,u,\dots,\nabla^{m-1}u,\nabla^m T^{\psi}_{\varphi_i(h)}u)\right]\cdot\nabla^m(u-T_h u)d\mu\Bigg)^{p/2}\cdot$$
$$\left(\int_\Omega\left(|\nabla^m u| + |\nabla^m T^{\psi}_{\varphi_i(h)}u|\right)^p d\mu\right)^{\frac{2-p}{2}}$$

Прежде чем применить теорему 3.2.1, приведем следующее

Предложение 3.2.1 (см. [33]). *Пусть есть две пары банаховых пространств, $E_0 \hookrightarrow E_1$, $F_0 \hookrightarrow F_1$, вложения непрерывны, и открытое множество U в E_1. Пусть $\mathcal{T} : U \to F_1$ — оператор отображающий $E_0 \cap U$ в F_0, и пусть существует $p \in [2,\infty)$ и положительные константы c_0, c_1 такие, что*

$$u \in U \cap E_0 \Rightarrow \|\mathcal{T}u\|^p_{F_0} \le c_0\left(1 + \|u\|^{p'}_{E_0}\right)$$
$$u, v \in U \Rightarrow \|\mathcal{T}u - \mathcal{T}v\|^p_{F_1} \le c_1\|u - v\|^{p'}_{E_0};$$

тогда, для любого $\sigma \in (0,1)$

$$\mathcal{T} : U \cap (E_0, E_1)_{\sigma,p'} \to (F_0, F_1)_{\sigma,p}.$$

Теорема 3.2.3. *Пусть $\Omega \subset M_O$ — область с гельдеровой границей класса $C^{0,t}$, $t \in (0,1]$, выполнены условия **F1**–**F4**, $p > 1$, тогда определено отображение*

$$\mathcal{R}^J : B^{-m+\lambda}_{q,1}(\Omega) \to \tilde{N}^{m+\frac{t}{\tilde{p}-t}\lambda}_p(\Omega), \quad \lambda \in [0, \varkappa/p] \cap [0, \tilde{\lambda}_{\tilde{p}}), \tag{3.2.22}$$

ставящее в соответствие f все точки (локального) минимума функционала $J_f[u]$, показатель $\tilde{\lambda}_{\tilde{p}}$ равен $\frac{\tilde{p}-t}{\tilde{p}t}\gamma$, $\tilde{p} = \max\{p, 2\}$. Более того

$$\forall f \in W^{-m+\lambda}_q(M) \Rightarrow \mathcal{R}_J f \subset \tilde{W}^{m+\frac{t}{\tilde{p}-t}\lambda}_p(\Omega), \quad \lambda \in \left[0, \min\{\tilde{\lambda}_p, \varkappa/p\}\right). \tag{3.2.23}$$

Доказательство. Предположим, что $p \ge 2$, так как случай $p < 2$ не представляет собой ничего нового. Из неравенства (3.2.1) следует, что для $f \in K_{p'}^{-m+\gamma}(\Omega)$ соответствующее решение задачи минимизации принадлежит пространству $\tilde{N}_p^{m+a/p}(\Omega)$, где $a = \min\{\gamma, \varkappa\}$. Причем из неравенства (3.2.19) видно, что в случае $a = \varkappa$, применив неравенство (3.2.2), предполагая $u \in \tilde{N}_p^{m+\varkappa/p}(\Omega)$, мы не получим новой информации о гладкости решения. Предположим теперь, что γ достаточно мало, тогда можно воспользоваться неравенством (3.2.2) и для некоторого числа C получить оценку

$$\|u\|_{\tilde{N}_p^{m+\gamma(t/p+t^2/p^2)}(\Omega)} \leq C\left(\|u\|_{\tilde{W}_p^m(\Omega)}, \|f\|_{K_{p'}^{-m+\gamma}(\Omega)}\right).$$

Следующая итерация применения неравенства (3.2.2) увеличит гладкость решения на $\frac{t^3}{p^3}\gamma$ и так далее. Таким образом, для некоторого $C_\lambda \in \mathbb{R}_+$ имеет место оценка:

$$\|u\|_{\tilde{N}_p^{m+\lambda t/(p-t)}(\Omega)} \leq C_\lambda\left(\|u\|_{\tilde{W}_p^m(\Omega)}, \|f\|_{K_{p'}^{-m+\gamma}(\Omega)}\right), \quad \lambda \in (0, \gamma).$$

С помощью (3.2.11) получим новую оценку, а именно, в неравенствах (3.2.12), (3.2.13), (3.2.21) положим, что $u \in \tilde{N}_p^{m+\lambda\frac{t}{p-t}}(\Omega)$, только теперь в (3.2.13) будем действовать иначе:

$$\begin{aligned}\left|\tau(f, T^{\psi}_{\varphi_i(h)}u - u)\right| \leq & \|f\|_{B_{q,1}^{-m+b}(\Omega)}\|T^{\psi}_{\varphi_i(h)}u - u\|_{\tilde{N}_p^{m-b}(\Omega)} \leq \\ & C|h|^{t\left(b+\lambda\frac{t}{p-t}\right)}\|u\|_{\tilde{N}_p^{m+\lambda\frac{t}{p-t}}(\Omega)}\|f\|_{B_{q,1}^{-m+b}(\Omega)},\end{aligned}$$

здесь C — некоторая константа и мы применили теорему 2.1.4. Если теперь положить

$$\frac{t}{p}\left(b + \lambda\frac{t}{p-t}\right) = \lambda\frac{t}{p-t},$$

то устремляя h к нулю, из (3.2.11) получим

$$\|u\|^p_{\tilde{N}_p^{m+\lambda\frac{t}{p-t}}(\Omega)} \leq \hat{C}_\lambda\left(\|u\|_{\tilde{W}_p^m(\Omega)}, \|f\|_{K_{p'}^{-m+\lambda}(\Omega)}\right) \cdot \|u\|_{\tilde{N}_p^{m+\lambda\frac{t}{p-t}}(\Omega)}.$$

Сокращая левую и правую части на множитель $\|u\|_{\tilde{N}_p^{m+\lambda\frac{t}{p-t}}(\Omega)}$, убеждаемся в справедливости соотношения (3.2.22).

Соотношение (3.2.23) следует из предложения 3.2.1 и предложений 2.1.3, 2.1.4.

$\square$

3.3 Краевые задачи.

Теорема 3.3.1. *Пусть u — решение уравнения (3.1.4), $\Omega \subset M_O$ — область, $\partial\Omega \in C^{0,t}$, $t \in (0,1]$, оператор $\mathcal{A}^D$ удовлетворяет условиям **A1**–**A3**, правая часть $f \in K_2^{-m+\gamma}(\Omega)$. Тогда $\|u\|^2_{\tilde{N}_2^{m+t\zeta_0/2}(\Omega)} \leq C\|u\|_{\tilde{H}^m(\Omega)}\|f\|_{K_2^{-m+\gamma}(\Omega)}$, где $\zeta_0 = \min\{\varkappa, \gamma\}$. Если дополнительно известно, что $u \in \tilde{N}_2^{m+s}(\Omega)$, $s \in (0, 1/2)$, то*

$$\|u\|^2_{\tilde{N}_2^{m+t\zeta_s/2}(\Omega)} \leq C_s\|u\|_{\tilde{N}_2^{m+s}(\Omega)}\|f\|_{K_2^{-m+\gamma}(\Omega)}, \quad \zeta_s = \min\{\varkappa, \gamma + s\}. \quad (3.3.1)$$

Доказательство. Будем использовать обозначения из доказательства теоремы 3.2.1. Итак, $(u - T^{\psi}_{\varphi_i(h)}u) \in \tilde{H}^m(\Omega)$. Из условия ***A1*** следует:

$$\|\psi(u - u_{-t})\|^2_{\tilde{H}^m(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha}\Phi_0^D\left(T^{\psi}_{\varphi_1(h)}u - u, T^{\psi}_{\varphi_1(h)}u - u\right),$$
$$\|\psi(u - (u_h)_{-t})\|^2_{\tilde{H}^m(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha}\Phi_0^D\left(T^{\psi}_{\varphi_2(h)}u - u, T^{\psi}_{\varphi_2(h)}u - u\right),$$

$$\Phi_0^D\left(T^{\psi}_{\varphi_i(h)}u - u, T^{\psi}_{\varphi_i(h)}u - u\right) =$$
$$\Phi_0^D(T^{\psi}_{\varphi_i(h)}u, T^{\psi}_{\varphi_i(h)}u) - \Phi_0^D(u,u) + 2\mathrm{Re}\Phi_0^D(u, T^{\psi}_{\varphi_i(h)}u - u), \quad (3.3.2)$$
$$\Phi_0^D(u, T^{\psi}_{\varphi_i(h)}u - u) = \tau(u, T^{\psi}_{\varphi_i(h)}u - u) - \Phi_r^D(u, T^{\psi}_{\varphi_i(h)}u - u)$$

Так как $f \in K_2^{-m+\gamma}(\Omega)$, то $|\tau(f, \psi(u - u_{\varphi_i(h)}))|$ не превосходит

$$\|f\|_{K_2^{-m+\gamma}(\Omega)}\|\psi(u - u_{\varphi_i(h)})\|_{K_2^{m-\gamma}(\Omega)} \leq C'\|\psi\|_{C^{m-1,1}(M)}\|f\|_{K_2^{-m+\gamma}(\Omega)}\cdot$$
$$\cdot\|\Delta_{\varphi_i(h)}u\|_{K_2^{m-\gamma}(\Omega)} \leq C'\|\psi\|_{C^{m-1,1}(M)}\|f\|_{K_2^{-m+\gamma}(\Omega)}\|u\|_{N^{\gamma}(\tilde{K}_2^{m-\gamma}(\Omega))}|h|^{t\gamma},$$

из леммы 1.3.4 и теоремы 2.1.4 следует $N^{\gamma}(\tilde{K}_2^{m-\gamma}(\Omega)) \hookleftarrow \tilde{H}^m(\Omega)$. Значит из условия ***A2*** и предложения 3.1.1 следуют неравенства

$$|\tau(f, \psi(u - u_{\varphi_i(h)}))| \leq C''\|f\|_{K_2^{-m+\gamma}(\Omega)}\|u\|_{\tilde{H}^m(\Omega)}|h|^{t\gamma},$$
$$|\Phi_r(u, \psi(u - u_{\varphi_i(h)}))| \leq C'''\|u\|_{\tilde{H}^m(\Omega)}|h|^{t\gamma}.$$

В формуле (3.3.2) осталось оценить величины $\Phi_0(T^{\psi}_{\varphi_i(h)}u, T^{\psi}_{\varphi_i(h)}u) - \Phi_0(u,u)$. Полагая $\mathfrak{a}(x,\eta) = \boldsymbol{A}_{m,m,(x)}(\eta \otimes \bar{\eta})$, получаем, что

$$\Phi_0(T^{\psi}_{\varphi_i(h)}u, T^{\psi}_{\varphi_i(h)}u) - \Phi_0(u,u) \leq$$

$$\int_M \mathfrak{a}(x, \nabla^m T^{\psi}_{\varphi_i(h)} u) d\mu - \int_M \mathfrak{a}(x, T^{\psi}_{\varphi_i(h)} \nabla^m u) d\mu + \tag{3.3.3}$$

$$\int_M \mathfrak{a}(x, T^{\psi}_{\varphi_i(h)} \nabla u) d\mu - \int_M \mathfrak{a}(x, \nabla u) d\mu. \tag{3.3.4}$$

В силу условия $\boldsymbol{A2}$ разность $\mathfrak{a}(x, \xi + \eta) - \mathfrak{a}(x, \xi)$ можно оценить сверху как $\left(\mathfrak{a}(x, \eta)\mathfrak{a}(x, 2\xi + \eta)\right)^{1/2} \leq \|\boldsymbol{A}\|_{L_\infty(M)} \mathfrak{g}(x, \eta)^{1/2} \left(2\mathfrak{g}(x, \xi)^{1/2} + \mathfrak{g}(x, \eta)^{1/2}\right)$, для суммы слагаемых (3.3.3) выполнена оценка

$$\int_M \mathfrak{a}(x, \nabla^m T^{\psi}_{\varphi_i(h)} u) d\mu - \int_M \mathfrak{a}(x, T^{\psi}_{\varphi_i(h)} \nabla^m u) d\mu \leq C_V \|\boldsymbol{A}_{m,m}\|_{C(M)} \cdot$$
$$\cdot \left\| [\nabla^m, T^{\psi}_{\varphi_i(h)}] u \right\|_{L_2(V)} \left(\left\| [\nabla^m, T^{\psi}_{\varphi_i(h)}] u \right\|_{L_2(V)} + 2 \|T^{\psi}_{\varphi_i(h)} \nabla^m u\|_{L_2(V)} \right),$$

Аналогично доказательству теоремы 3.2.1, из леммы 1.3.4 следует оценка $\left\| [\nabla^m, T^{\psi}_{\varphi_i(h)}] u \right\|_{L_2(V)} \leq C \cdot |h|^t \|u\|_{\tilde{H}^m(\Omega)}$, откуда разность (3.3.3) можно оценить сверху величиной $C'|h|^t \|u\|^2_{\tilde{H}^m(\Omega)}$. В силу выпуклости $\mathfrak{a}$, для суммы (3.3.4) выполнено неравенство

$$\mathfrak{a}(x, T^{\psi}_{\varphi_i(h)} \nabla^m u) - \mathfrak{a}(x, \nabla^m u) \leq \left[T^{\psi}_{\varphi_i(h)} \mathfrak{a}(x, \nabla^m u) \right] - \mathfrak{a}(x, \nabla^m u) =$$
$$\psi \left[\mathfrak{a}(x, \nabla^m u_{\varphi_i(h)}) - \mathfrak{a}(x, \nabla^m u) \right];$$

таким образом, $\int_M \mathfrak{a}(x, T^{\psi}_{\varphi_i(h)} \nabla^m u) - \mathfrak{a}(x, \nabla^m u) d\mu \leq \int_M \psi[\mathfrak{a}(x, \nabla^m u_{\varphi_i(h)}) - \mathfrak{a}(x, \nabla^m u)] d\mu$, а значит, благодаря $\boldsymbol{A2}$, можно оценить разность (3.3.4) сверху как

$$\int_M \psi \left[\mathfrak{a}(x, \nabla^m u_{\varphi_i(h)}) - \mathfrak{a}(x, \nabla^m u) \right] d\mu =$$
$$\int_M \psi_{-\varphi_i(h)} \mathfrak{a}(x - \varphi_i(h), \nabla^m u) d\mu_{-\varphi_i(h)} - \int_M \psi \cdot \mathfrak{a}(x, \nabla^m u) d\mu \leq$$
$$\int_M (\psi_{-\varphi_i(h)} - \psi) \mathfrak{a}(x - \varphi_i(h), \nabla^m u) d\mu_{-\varphi_i(h)} +$$
$$\int_M \psi \cdot (\mathfrak{a}(x - \varphi_i(h), \nabla^m u) - \mathfrak{a}(x, \nabla^m u)) d\mu +$$
$$\int_M \psi \cdot \mathfrak{a}(x - \varphi_i(h), \nabla^m u)(d\mu_{-\varphi_i(h)} - d\mu) \leq \|\boldsymbol{A}_{m,m}\|_{C^{0,\varkappa}(M)} \hat{C} |h|^{t\varkappa} \|u\|^2_{\tilde{H}^m(\Omega)}.$$

Неравенство (3.3.1) получается аналогично неравенству (3.2.2) теоремы 3.2.1. $\square$

Таким образом, легко заметить, что справедлива

Теорема 3.3.2. *Пусть $\partial\Omega \in C^{0,t}$, $t \in (0,1]$ выполнены условия **A1**–**A3**, тогда ограничен оператор*

$$\mathcal{R}_\Omega^D : B_{2,1}^{-m+\lambda}(\Omega) \to \tilde{N}_2^{m+\frac{t}{2-t}\lambda}(\Omega), \quad \lambda \in \left[0, \tilde{\lambda}_2\right) \cap [0, \varkappa/2],$$

решающий задачу (3.1.4), $\tilde{\lambda}_2 = \frac{2-t}{t}\gamma$.

Теорема 3.3.3. *Пусть $\Omega \subset M_O$, $\partial\Omega \in C^{0,t}$, $t \in (0,1]$ выполнены условия **A1**–**A3**, $\gamma \in (0, \varkappa]$, тогда оператор $\mathcal{G}_\Omega^D$ решающий задачу (3.1.4) с правыми частями f, определенных на всем M_O ограничен в парах пространств*

$$H^{-m+\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}\gamma+\frac{1}{2^n}\gamma s}(M_O) \to \tilde{H}^{m+\frac{t}{2-t}\frac{2^{n-1}-t^{n-1}}{2^{n-1}}\gamma+\left(\frac{t}{2}\right)^n\gamma s}(\Omega), \;\; s \in (0,1) \tag{3.3.5}$$

$$B_{2,1}^{-m+\frac{2^n-1}{2^n}\gamma}(M_O) \to \tilde{N}_2^{m+\frac{t}{2-t}\frac{2^n-t^n}{2^n}\gamma}(\Omega), \tag{3.3.6}$$

причем, $n \in \mathbb{N}$, если $\gamma \le \varkappa(1-t/2)$.

Доказательство. Ясно, что интерполируя (3.3.6) получим (3.3.5), поэтому докажем только (3.3.6). Итак, $\mathcal{G}_\Omega^D$ действует из $B_{2,1}^{-m+\gamma/2}(M_O)$ в $\tilde{N}_2^{m+t\gamma/2}(\Omega)$ непрерывно. Значит, дополнительно известно, что решение принадлежит $\tilde{N}_2^{m+t\gamma/2}(\Omega)$, и более того

$$\|u\|_{\tilde{N}_2^{m+t\gamma/2}(\Omega)} \le C_1\|f\|_{B_{2,1}^{-m+\gamma/2}(M_O)};$$

таким образом, можно вновь применить теорему 3.3.1. Для $f \in B_{2,1}^{-m+\gamma}(M_O)$ норму $\|u\|^2_{\tilde{N}_2^{m+\gamma\left(\frac{t}{2}+\left(\frac{t}{2}\right)^2\right)}(\Omega)}$ можно оценить как

$$c\left(\|u\|_{\tilde{N}_2^{m+t\gamma/2}(\Omega)}\|f\|_{B_{2,1}^{-m+\gamma}(M_O)} + \|u\|_{\tilde{H}^m(\Omega)}\|u\|_{\tilde{N}_2^{m+t\gamma/2}(\Omega)}\right) \le \tilde{C}\|f\|_{B_{2,1}^{-m+\gamma/2}(M_O)}\|f\|_{B_{2,1}^{-m+\gamma}(M_O)}.$$

В силу предложения 2.1.6, $\mathcal{G}_\Omega^D$ можно продолжить как линейный ограниченный оператор из $(B_{2,1}^{-m+\gamma/2}(M_O), B_{2,1}^{-m+\gamma}(M_O))_{1/2,1} = B_{2,1}^{-m+3\gamma/4}(M_O)$ в $\tilde{N}_2^{m+\gamma\left(\frac{t}{2}+\left(\frac{t}{2}\right)^2\right)}(\Omega)$. Значит,

$$\|u\|^2_{\tilde{N}_2^{m+\gamma\left(\frac{t}{2}+\cdots+\left(\frac{t}{2}\right)^n\right)}(\Omega)} \le \hat{C}_n\|f\|^2_{B_{2,1}^{-m+\left(\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)\gamma}(M_O)},$$

то есть доказана ограниченность $\mathcal{G}^D$ в парах (3.3.6). $\square$

Из теоремы 3.3.3 очевидным образом следует

Теорема 3.3.4. *Пусть $\Omega \subset M_O$ — область с гельдеровой границей класса $C^{0,t}$, $t \in (0,1]$, выполнены условия **A1**–**A3**, $\gamma = \varkappa$, тогда оператор $\mathcal{G}_\Omega^D : H^{-m+s}(M_O) \to \tilde{H}^{m+ts}(\Omega)$, $s \in [0, \gamma/2)$ непрерывен.*

Перейдем к задаче Неймана и ее обобщению.

Теорема 3.3.5. *Пусть u — решение уравнения (3.1.5), область $\Omega \subset M_O$ обладает гельдеровой границей с показателем $t \in (0,1]$, оператор $\mathcal{A}^N$ удовлетворяет условиям **A1**–**A3**, $\varkappa = \gamma$, $f \in \tilde{W}_2^{-m+1}(\Omega)$ ($W_2^0(\Omega) = L_2(\Omega)$). Тогда*

$$\|u\|^2_{d_{\mathcal{V}}^{m,1}\tilde{N}_2^{m+t\gamma/2}(\Omega)} \leq C\|u\|_{W_2^m(\Omega)}\|f\|_{\tilde{W}_2^{-m+1}(\Omega)}.$$

Доказательство. Вновь будем действовать в русле доказательства теоремы 3.2.1. Итак, пусть $\{\psi_V\}_{V\in\mathcal{V}}$ — разбиение единицы подчиненное $\mathcal{V}$, причем $\mathrm{supp}\psi_V \subset V$. Для $h \in \mathbb{R}^d$ вновь рассмотрим функцию $\phi(h) = |h| + C_\Omega|h|^t$, с условием $|h| < \phi^{-1}\left[\frac{\mathrm{dist}(\mathrm{supp}\psi_V, \partial V)}{20}\right]$, ξ_V из определения 1.1.3. Будем считать, что карта V фиксирована, и опускать зависимость от V в ψ_V и ξ_V. Обозначим $W = \kappa_V(\Omega \cap V)$, и оценим сверху $\|\psi\cdot(u-u_h)\|_{w_2^m(W^{-|h|})}$ как

$$\|\psi(u-u_l)\|_{w_2^m(W^{-|h|})} + \|\psi(u_l-u_h)\|_{w_2^m(W^{-|h|})} \leq$$
$$\|\psi(u-u_l)\|_{w_2^m(\kappa_V(V\cap\Omega))} + \|\psi(u_l-u_h)\|_{w_2^m(\kappa_V(V\cap(\Omega-h)))}$$

где $u_{\pm l} = u_{\mp\phi(h)\xi}$. Подробнее рассмотрим второе слагаемое, $\|\psi(u_l - u_h)\|^2_{w_2^m(\kappa_V(V\cap(\Omega-h)))}$ равно

$$\int_{\kappa_V(V\cap(\Omega-h))} \mathfrak{g}_m(x, \nabla^m[\psi(u_l-v)])d\mu = 2\int_\Omega \mathfrak{g}_m(x, \nabla^m[\psi_{-h}(u_{l-h}-u))])d\mu \quad (3.3.7)$$

$$\int_\Omega \Big\{ \mathfrak{g}_m(x-h, (\nabla^m[\psi(u_l-u_h))_{-h}]) - 2\mathfrak{g}_m(x-h, \nabla^m[\psi_{-h}(u_{t-h}-u))]) \Big\} d\mu_{-h} + \quad (3.3.8)$$

$$2\int_\Omega \mathfrak{g}_m(x-h, \nabla^m[\psi_{-h}(u_{l-h}-u))])\,(d\mu_{-h} - d\mu) + \quad (3.3.9)$$

$$2\int_\Omega \mathfrak{g}_m(x-h,\nabla^m[\psi_{-h}(u_{l-h}-u))])d\mu - 2\int_\Omega \mathfrak{g}_m(x,\nabla^m[\psi_{-h}(u_{l-h}-u))])d\mu. \tag{3.3.10}$$

Выражения (3.3.8)–(3.3.10) можно оценить сверху из тех же соображений, что (3.2.5)–(3.2.7) в доказательстве теоремы 3.2.1. Следовательно, для (3.3.7) получаем $\|\psi(u_l-u_h)\|^2_{w_2^m(\kappa_V(V\cap(\Omega-h)))} \le 2\|\psi(u_{h-l}-u)\|^2_{w_2^m(V\cap\Omega)} + C\|u\|^2_{W_2^m(\Omega)}|h|^t$.

Обозначим $\varphi_1(h)=l$, $\varphi_2(h)=l-h$. Далее будем следовать доказательству теоремы 3.3.1. Так как граница Ω является гельдеровой порядка t, то $\left(u-T^\psi_{\varphi_i(h)}u\right)\Big|_\Omega \in W_2^m(\Omega)$. Из условия ***A1*** следует:

$$\left\|u-T^\psi_{\varphi_i(h)}u\right\|^2_{w_2^m(\Omega)} \le \frac{1}{\alpha}\Phi_0^N\left(T^\psi_{\varphi_1(h)}u-u, T^\psi_{\varphi_1(h)}u-u\right).$$

Кроме того

$$\begin{gathered}\Phi_0^N\left(T^\psi_{\varphi_i(h)}u-u, T^\psi_{\varphi_i(h)}u-u\right) = \\ \Phi_0^N(T^\psi_{\varphi_i(h)}u, T^\psi_{\varphi_i(h)}u) - \Phi_0^N(u,u) + 2\mathrm{Re}\Phi_0^N(u, T^\psi_{\varphi_i(h)}u-u), \\ \Phi_0^N(u, T^\psi_{\varphi_i(h)}u-u) = \tau(u, T^\psi_{\varphi_i(h)}u-u) - \Phi_r^N(u, T^\psi_{\varphi_i(h)}u-u)\end{gathered} \tag{3.3.11}$$

Так как $f\in \tilde W_2^{-m+1}(\Omega)$, то из леммы 1.3.4

$$|\tau(f,\psi(u-u_{\varphi_i(h)}))| \le \|f\|_{\tilde W_2^{-m+1}(\Omega)}\|\psi(u-u_{\varphi_i(h)})\|_{W_2^{m-1}(\Omega)} \le \\ C'|h|^t\|u\|_{W_2^m(\Omega)}\|f\|_{\tilde W_2^{-m+1}(\Omega)}.$$

Аналогично, из условия ***A2*** и предложения 3.1.2,

$$|\Phi_r(u,\psi(u-u_{\varphi_i(h)}))| \le C'''\|u\|_{W_2^m(\Omega)}|h|^t.$$

В формуле (3.3.11) величины $\Phi_0(T^\psi_{\varphi_i(h)}u, T^\psi_{\varphi_i(h)}u) - \Phi_0(u,u)$ оцениваются сверху таким же образом, что и (3.3.3)–(3.3.4) теоремы 3.3.1. □

Прямым следствием теоремы 3.3.5 является

Теорема 3.3.6. *Пусть Ω — область с гельдеровой границей класса $C^{0,t}$, $t\in(0,1]$, выполнены условия **A1**–**A3**, $\gamma=\varkappa$, тогда для атласа $\mathcal{V}$ из определения 1.1.3 оператор $\mathcal{R}^N_\Omega \tilde W_2^{-m+1}(\Omega)\to d^{m,1}_{\mathcal{V}}N_2^{m+t\gamma}(\Omega)$, решающий задачу (3.1.5), непрерывен.*

3.4 Заключение. Случай областей с негельдеровой границей.

В заключение затроним вопрос регулярности решений решений первой краевой задачи для эллиптических дифференциальных операторов порядка $2m$, в случае областей на многообразии с непрерывной, негельдеровой границей. Для этого придется немного уточнить уже имеющиеся определения. Зафиксировав атлас $\mathcal{V} = \{(V, \kappa_V)\}$, скажем, что открытое множество $\Omega \subset M$ имеет границу класса $C^{0,\overline{\omega}}_{\mathcal{V}}$, $\overline{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_{d-1})$, если непустое пересечение $V \cap \partial\Omega$ представимо в виде графика функции $g_V : \mathbb{R}^{d-1} = e_d^{\perp} \to \mathbb{R}$, $g_V \in C^{0,\overline{\omega}}(\mathbb{R}^{d-1})$, предполагается, что $\Omega \cap V$ лежит по одну сторону от границы. Функции ω_k есть модули непрерывности, то есть $\omega_k(0) = 0$, $\omega_k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ и при этом полуаддитивны.

Введем обозначения; пусть E — банахово пространство функций, определенных на $\mathbb{R}^d$, и $\mathcal{V} = \{(V, \kappa_V)\}$ — атлас многообразия M. Скажем, что функция (или тензорное поле) f принадлежит пространству $E_{\mathcal{V}}(M)$, если существует такое подчиненное $\mathcal{V}$ разбиение единицы $\{\psi_V\}$, что для любой карты $V \in \mathcal{V}$ выполнено: $\left(\psi_V \circ \kappa_V^{-1}\right) \cdot \left(f \circ \kappa_V^{-1}\right) \in E$. Во всех пространствах ниже, где применена эта конструкция, пространства $E_{\mathcal{V}}(M)$ не зависят от выбранного разбиения единицы $\{\psi_V\}$. Пусть $F(L)$ — банахово пространство функций с носителями из (не обязательно компактного) многообразия L, тогда $\tilde{F}(\Omega)$ состоит из всех функций $f \in F(L)$ таких, что $\mathrm{supp} f \subset \bar{\Omega}$. В свою очередь, замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ будем обозначать $\overset{\circ}{F}(\Omega)$. Скажем, что функция $u \in W_p^k(\mathbb{R}^d)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, принадлежит пространству Никольского $N_2^{m,\overline{s}}(\mathbb{R}^d)$, s есть вектор размерности d состоящий из модулей непрерывности, если конечна полунорма $\|u\|_{N_2^{m,\overline{s}}(\mathbb{R}^d)} = \max_{k=\overline{1,\ldots d}} \sup_{h\neq 0} \frac{\|\Delta^2_{he_k} u\|_{W_2^m(\mathbb{R}^d)}}{s_k(|h|)}$, $\Delta_h^2 u = \Delta_h(\Delta_h u)$, $\Delta_h u = u_h - u$, $u_h(x) = u(x+h)$. Пространства Бесова отрицательной гладкости введем как $\left(B_{2,1}^{-k,\overline{s}}\right)_{\mathcal{V}}(\Omega) = \left[\left(\overset{\circ}{\tilde{N}}{}_2^{k-1,\frac{|\cdot|}{\overline{s}}}\right)_{\mathcal{V}}(\Omega)\right]^*$, где $\frac{|\cdot|}{\overline{s}} \overset{def}{=} \left(\frac{|\cdot|}{s_1(\cdot)}, \ldots, \frac{|\cdot|}{s_d(\cdot)}\right)$. Дополнительно введем вспомогательное пространство $K_2^{m,\overline{s}}(\mathbb{R}^d)$, которое получается из $N_2^{m,\overline{s}}(\mathbb{R}^d)$ заменой в определении нормы второй разности на первую, аналогично $\left(K_{2,1}^{-k,\bar{s}}\right)_{\mathcal{V}}(\Omega) = \left[\left(\overset{\circ}{\tilde{K}}{}_2^{k-1,\frac{|\cdot|}{\bar{s}}}\right)_{\mathcal{V}}(\Omega)\right]^*$. Для банаховых пространств X, Y, таких что $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow X$, $\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow Y$ причем вложения плотны, определим пространство мультипликаторов негативной гладкости $M(X \to Y^*) = M(Y \to X^*)$, как множество таких функций v, что $\sup_{x,y\in\mathcal{D}(\Omega)} \frac{\tau(v,xy)}{\|x\|_X\|y\|_Y} = C_v < \infty$, за норму v в $M(X \to Y^*)$ примем[6] C_v.

Рассмотрим дифференциальное выражение $\mathcal{A}'$, заданное через (3.1.3), $\boldsymbol{A}_{m,m}$ — эрмитово. Предположим, что $\partial\Omega \in C_{\mathcal{V}}^{0,\overline{\omega}}$ и потребуем выполнение следующих условий:

G1 $\exists\alpha > 0 : \forall x \in M\ \forall\xi \in \otimes_{\mathbb{C}}^m T_x^* M \Rightarrow \alpha\, \xi^{\sharp^m}\, \bar{\xi} \le \boldsymbol{A}_{m,m}(\xi \otimes \bar{\xi})$;

G2 $\boldsymbol{A}_{m,m} \in C_{\mathcal{V}}^{0,\overline{\varkappa}}(M)$, $\boldsymbol{A}_{m_1,m_2} \in M\left(\tilde{H}^{m-m_1}(\Omega) \to \left(K_2^{-m+m_2,\overline{\gamma}}\right)_{\mathcal{V}}(\Omega)\right)$, $0 \le m_2 \le m_1 \le m$, $m_2 \ne m$, $\gamma_i, \varkappa_i$ — модули непрерывности.

G3 $\sum_{0\le m_2\le m_1\le m, m_2\ne m} \|\mathrm{Re}\boldsymbol{A}_{m_1,m_2}\|_{M(\tilde{H}^{m-m_1}(\Omega)\to H^{-m+m_2}(\Omega))} \le \alpha - \alpha'$, $\alpha' > 0$.

Рассмотрим первую краевую задачу для оператора $\mathcal{A}'$

$$\mathcal{A}'u = f, \quad \nabla^k u|_{\partial\Omega} = 0, \quad k = \overline{0,..,m-1}. \tag{2}$$

Решения этой задачи будем понимать в слабом (вариационном) смысле, то есть функция $u \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)$ является решением для $f \in H^{-m}(\Omega)$, если для любой функции $v \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)$ выполнено $\Phi(u, v) = \tau(f, v)$.

Введем отношение порядка на модулях непрерывности. Будем писать $\omega_1 \preceq \omega_2$, если существует такая константа C, что $\omega_2(x) \le C\omega_1(x)$ для любых $x \in [0, 1]$; например $h^{\gamma_1} \preceq h^{\gamma_2}$ если $\gamma_1 \le \gamma_2$.

Теорема 3.4.1. *Пусть $\partial\Omega \in C_{\mathcal{V}}^{0,\overline{\omega}}$ выполнены условия **G1**–**G3**, тогда оператор $\mathcal{R}$ решающий задачу (2) ограничен*

$$\mathcal{R} : \left(B_{2,1}^{-m,\bar{\epsilon}}\right)_{\mathcal{V}}(\Omega) \to \left(\tilde{N}_2^{m,\bar{\epsilon}}\right)_{\mathcal{V}}(\Omega), \quad \bar{\epsilon} = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_d)$$

здесь $\epsilon_i \preceq \sqrt{\varkappa_i}$, $\exists c \in (0, 1) : \epsilon_i \preceq \gamma_i^c$, $i = \overline{1, \ldots, d}$, и $\epsilon_j = \epsilon_d \circ \omega_j$, $j = \overline{1, \ldots, d-1}$.

[6]определение и свойства пространств поточечных мультипликаторов см. [5], [26], [6]

Следствие 3.4.1. *Пусть* Ω — *область с гельдеровой границей класса* $C^{0,t}$, $t \in (0,1]$, *для оператора* $\mathcal{A}$ *выполнены условия* ***A1***–***A3***. *Тогда операторы* $\mathcal{G}_\Omega^D : H^{-m+s}(M_O) \to \tilde{H}^{m+ts}(\Omega)$, $s \in [0, \varkappa/2) \cap [0,\gamma)$, $\mathcal{R}_\Omega^D : B_{2,1}^{-m+\lambda}(M_O) \to \tilde{N}_2^{m+t\lambda}(\Omega)$, $\lambda \in [0,\varkappa/2] \cap [0,\gamma)$, *непрерывны.*

Замечание 3.4.1. *Опираясь на результаты работы [19], можно привести достаточные условия на функцию, чтобы она принадлежала пространству мультипликаторов из условия* ***G2***. *Так например,* $L_q(\Omega) \hookrightarrow M(L_2(\Omega) \to K_2^{-1,\overline{\gamma}}(\Omega))$, *если*

$$\left\| \frac{\inf_{t_1 \cdots t_d = t} \max_{1 \le j \le d} \frac{t_j}{\gamma_j(t_j)}}{\sqrt{t}} \right\|_{L_r[0,1]} < \infty, \quad 1/q + 1/r = 1/2$$

В свою очередь $K_{s_1}^{-1,\overline{\gamma}}(\Omega) \hookrightarrow M(\tilde{H}^1(\Omega) \to K_2^{-1,\overline{\gamma}}(\Omega))$ *для* $1/s_1 + 1/s_2 + 1/s_3 = 1$,

$$\left\| \frac{\inf_{t_1 \cdots t_d = t} \max_{1 \le j \le d} \frac{t_j}{\gamma_j(t_j)}}{\sqrt{t}} \right\|_{L_{s_2}[0,1]} + \left\| \frac{\inf_{t_1 \cdots t_d = t} \max_{1 \le j \le d} \gamma_j(t_j)}{\sqrt{t}} \right\|_{L_{s_3}[0,1]} < \infty.$$

Литература

[1] *R. Adams, J. Fournier* Sobolev spaces, NY: Academic press, 2003.

[2] *М.С. Агранович* Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей, М.: МЦНМО, 2013

[3] *L. Ambrosio, N. Fusco, D. Pallara* Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems. Oxford: Oxford Math. Monographs, Clarendon Press, 2000.

[4] I. Babuška *Error-bounds for finite element method.* Numerische Mathematik, 1971, V16, 4, 322-333

[5] J.-G. Bak, A.A. Shkalikov Multipliers in dual Sobolev spaces and Schrödinger operators with distribution potentials. Math. Notes. 2002. **71** (5) 587–594

[6] *A.A. Belyaev* Characterization of spaces of multipliers for Bessel Potential Spaces Math. Notes. 2014. **96** (5) 634–646.

[7] *M. Berger* A Panoramic View of Riemannian Geometry. Berlin, Heidelberg, NewYork: Springer, 2007

[8] *О.В. Бесов, В.П. Ильин, С.М. Никольский* Интегральные представления функций и теоремы вложения, М.: Наука, Физматлит, 1996.

[9] О.В. Бесов *Некоторые пространства функций нулевой гладкости* Докл. РАН. 2012. **445**:1, 5–8

[10] *H. Brezis* Analyse fonctionnelle – Théorie et applications, P.: Masson, 1983.

[11] *D. Bucur, G. Buttazzo* Variational methods in shape optimization problems. Vol. 65. Basel; Boston: Birkhäuser, 2005.

[12] *V.I. Burenkov* Sobolev Spaces on Domains, Leipzig: B.G. Teubner Stuttgart. 1998.

[13] В.И. Буренков *Об одном способе продолжения дифференцируемых функций* Тр. МИАН СССР. 1976. **140**. 27–67.

[14] В.И. Буренков *Теорема о повторных нормах для пространств Никольского–Бесова и ее применение* Тр. МИАН СССР. 1988. **181**. 27–39.

[15] D. Chenais *On the Existence of a Solution in a Domain Identification Problem* J. Math. Anal. Appl. 1975. **52**. 189–219.

[16] *P.G. Ciarlet* The Finite Element Method for Elliptic Problems, in: Stud. Math. Appl., Vol. 4, North-Holland, Amsterdam, 1978.

[17] *L.C. Evans, R.F. Gariepy* Measure Theory and Fine Properties of Functions. CRC Press. 1991.

[18] *M. Giaquinta* Multiple Integrals in the Calculus of Variations and Nonlinear Elliptic Systems. Annals of Mathematical Studies, No. 105. Princeton: Princeton Univ. Press, 1983.

[19] М.Л. Гольдман *Теоремы вложения для анизотропных пространств Никольского–Бесова с модулями непрерывности общего вида* Тр. МИАН СССР. 1984. **170**. 86–104.

[20] *P. Grisvard* Elliptic Problems in Nonsmooth Domains, L.: Pitman, 1985.

[21] Г.Г. Казарян *О плотности гладких финитных функций в* $\mathring{W}_p^r(\Omega)$ Матем. заметки, 1967, 2, 1, С. 45-53.

[22] *T. Kato* Perturbation Theory for linear operators. N.Y.: Springer Verlag, 1966.

[23] *P.J. Kelly, M.L. Weiss* Geometry and Convexity: A Study in Mathematical Methods. Wiley. 1979.

[24] А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. 7-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

[25] *J. L. Lions* Quelques Méthodes de résolution des problèmes aux limites non lineáires. P.: Dunod/Gauthier Villars. 1969.

[26] V. Maz'ya, T. Shaposhnikova Theory of Sobolev Multipliers. Berlin: Springer, 2009.

[27] U. Mosco *Approximation of the solutions of some variational inequalities* Ann. Scuola Normale Sup. (Pisa). 1967. **21**. 373-394.

[28] T. Muramatu *On the dual of Besov spaces* Publ. Res. Inst. Math. Kyoto Univ. 1976. **12**. 123–140.

[29] С. М. Никольский *Свойства некоторых классов функций многих переменных на дифференцируемых многообразиях* Матем. сб. 1953. **33** (75):2. 261–326.

[30] V.S. Rychkov *On restrictions and extensions of the Besov and Triebel–Lizorkin spaces with respect to Lipschitz domains* J. London Math. Soc. 1999. **60**. 237–257.

[31] G. Savaré *Regularity and perturbation results for elliptic equations on Lipschitz domains.* J. Funct. Anal. 1998. **152**. 176–201.

[32] G. Savaré, G. Schimperna *Domain perturbations estimates for the solutions of second order elliptic equations* J. Math. Pures Appl. 2002. **81**(11). 1071–1112.

[33] L. Tartar *Interpolation non linéaire et régularité* J. Funct. Anal. 1972. **9**. 469–489.

[34] *M. Taylor* Partial Differential Equations I. N.Y.: Springer. 2011.

[35] *Х. Трибель* Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.

[36] *E. Zeidler* Nonlinear Functional Analysis and Its Applications III. Variational Methods and Optimization. NY: Springer–Verlag, 1985.

Работы автора по теме диссертации:

[37] И.В. Цылин, Разрешимость задачи минимизации первого собственного значения оператора Лапласа с условиями Дирихле, как функции двумерной области, Сборник трудов Международной миниконференции "Качественная теория дифференциальных уравнений и приложения" , 2013, Т. 55, С. 75–91.

[38] И.В. Цылин, О непрерывности собственных значений оператора Лапласа в зависимости от области, Вестн. Моск. Ун-та, 2015, №3, С. 35–39.

[39] А.М. Степин, И.В. Цылин, О краевых задачах для эллиптических операторов в случае областей на многообразиях, Докл. РАН, 2015, Т. 463, №2, С. 144–148.

[40] I. V. Tsylin, On the smoothness of solutions to elliptic equations in domains with Hölder boundary, Eurasian Math. J., 2015, **6**:3, P. 76–92.