ФГБОУ ВО
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА»

На правах рукописи

САДОВНИЧАЯ Инна Викторовна

ВОПРОСЫ РАВНОСХОДИМОСТИ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ И ДИРАКА

01.01.01 — вещественный, комплексный
и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико–математических наук

Москва, 2016

Работа выполнена в ФГБОУ ВО «МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В. ЛОМОНОСОВА».

Научный консультант:

ШКАЛИКОВ Андрей Андреевич
доктор физико–математических наук, профессор,
руководитель лаборатории операторных моделей
и спектрального анализа кафедры теории функций и
функционального анализа механико–математического
факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный
университет» имени М. В. Ломоносова.

Официальные оппоненты:

ГОЛЬДМАН Михаил Львович
доктор физико–математических наук, профессор кафедры
нелинейного анализа и оптимизации факультета
физико–математических и естественных наук ФГАОУ ВО
«Российский университет дружбы народов»
(специальность 01.01.01);

СУЛТАНАЕВ Яудат Талгатович
доктор физико–математических наук, профессор,
профессор кафедры математики и статистики
физико–математического факультета
ФГБОУ ВО «Башкирский государственный педагогический
университет имени М. Акмуллы» (специальность 01.01.02);

ЮРКО Вячеслав Анатольевич
доктор физико–математических наук, профессор,
заведующий кафедрой математической физики
и вычислительной математики
механико–математического факультета
ФГБОУ ВО «Саратовский государственный университет
имени Н. Г. Чернышевского» (специальность 01.01.01).

Ведущая организация:

ФГУ «Федеральный исследовательский центр
Институт прикладной математики
имени М. В. Келдыша Российской академии наук».

Защита диссертации состоится 22.12.2016 в 14:00 на заседании диссертационного совета Д 002.022.01 на базе Математического Института имени В. А. Стеклова РАН по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ул. Губкина, д.8, конференц-зал МИАН.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МИАН по адресу: Москва, ул.Губкина, д.8 и на сайте МИАН http://www.mi.ras.ru/dis/ref16/sadovnichaya/dis.pdf.

Автореферат разослан « » сентября 2016 года.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 002.022.01 на базе
Математического института имени В. А. Стеклова РАН
доктор физико–математических наук, профессор

В. А. Ватутин

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Теория обыкновенных дифференциальных операторов, порожденных выражением

$$\ell(y) = -y'' + q(x)y$$

на конечном или бесконечном интервале числовой оси, берет свое начало в середине XIX века с работ Ж. Ш. Ф. Штурма и Ж. Лиувилля. На протяжении полутора сотен лет она привлекает внимание многих исследователей. С одной стороны, операторы такого вида (а также операторы Дирака, впервые рассмотренные П. Дираком в 1928 году [1,2]) являются простейшими из содержательных моделей различных задач математической физики: например, задачи колебаний струны и движения заряженных частиц в электромагнитном поле. С другой стороны, эти операторы составляют базу для перенесения и обобщения результатов на обыкновенные дифференциальные операторы и системы высоких порядков, операторные пучки и т. п. Центральное место в теории операторов Штурма–Лиувилля и Дирака занимают вопросы сходимости спектральных разложений. В случае конечного отрезка эти разложения имеют вид

$$S_m(f) = \sum^{m}(f, z_n)y_n(x),$$

где $\{y_n\}$ — система собственных и присоединенных функций оператора, а $\{z_n\}$ — биортогональная к ней система. Если оператор задан на бесконечном интервале, то спектральное разложение имеет вид

$$S_\lambda(f) = \int\limits_{\mathbb{R}} \theta(x, y, \lambda)f(y)dy,$$

где $\theta(x, y, \lambda)$ — спектральная функция оператора.

Задачи сходимости спектральных разложений не только аккумулируют вопросы асимптотического поведения собственных значений, собственных функций, резольвенты и спектральной меры операторов, но также очень важны для построения соответствующих полугрупп и изучения их устойчивости, асимптотического поведения и т. д.

В работе В. А. Стеклова[3] 1909 года, по-видимому, впервые было отмечено, что изучение сходимости спектральных разложений для оператора на конечном интервале можно свести к изучению сходимости тригонометрических рядов при наличиии теорем равносходимости. А именно, статьях В. А. Стеклова, а также в работах его ученика Я. Д. Тамаркина[4,5] было показано, что $S_m(f, x) - S^0_m(f, x) \to 0$ при $m \to \infty$ поточечно, равномерно на произвольном компакте внутри интервала или равномерно на всем интервале (в зависимости от краевых условий и свойств функции f), где $S^0_m(f, x)$ — частичная сумма

[1] *P. A. M. Dirac* The quantum theory of the electron // Proc. Roy. Soc. (London). 1928. V.117. P. 610–624.

[2] *P. A. M. Dirac* The quantum theory of the electron II // Proc. Roy. Soc. (London). 1928. V.118. P. 351–361.

[3] *В. А. Стеклов* Sur les expressions asymptotiques de certaines fonctions, définies par les équations différentielles linéaires du second ordre, et leurs applications au problème du développement d'une fonction arbitraire en séries procédant suivant les-dites fonctions // Сообщ. Харьк. матем. об-ва. 1907–1909. Т.10 №2–6. С. 97–200.

[4] *Я. Д. Тамаркин* Application de la méthode des fonctions fondamentales *à* l'étude de l'équation différentielle des verges vibrantes élastiques // Сообщ. Харьков. матем. общ. Вторая сер. 1911. Т.12. С. 19–46.

[5] *Y. D. Tamarkin* Sur quelques points de la théorie des équations différentielles linéaires ordinaires et sur la généralisation de la série de Fourier // Rend. Circ. Mat. Palermo (2). 1912. V.34. №1. P. 345–382.

разложения функции f по подходящей тригонометрической системе. Параллельно те же вопросы изучались в работах А. Хаара[6] и Е. В. Хобсона[7]. Несколькими годами позже, в работах Я. Д. Тамаркина[8] и М. Стоуна[9] эти результаты были перенесены на случай систем обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка (а, таким образом, и на случай обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $n > 2$). При этом авторы рассматривали случай произвольных регулярных по Биркгофу краевых условий. Основным методом исследования были теоремы об асимптотическом поведении фундаментальной системы решений, полученные Г. Д. Биркгофом[10].

Еще раз отметим, что вначале рассматривались вопросы поточечной или равномерной равносходимости, а операторы были заданы на конечных интервалах. Случай бесконечного интервала имеет, конечно же, свою специфику. Здесь наличие равносходимости зависит и от гладкости потенциала $q(x)$, и от поведения потенциала на бесконечности. Исследования в этом направлении были начаты в знаменитых работах Г. Вейля[11,12] 1909–1910 годов.

В монографии Е. Титчмарша[13] 1945 года представлены основные классические результаты этой теории. В отечественной науке наиболее значимые результаты в этой области связаны, прежде всего, с работами Б. М. Левитана[14] и В. А. Марченко[15]. В частности, была доказана равномерная на любом компакте равносходимость спектральных разложений произвольной квадратично суммируемой функции для случая локально суммируемого вещественного потенциала.

Новый импульс тематика получила в 1960-х годах в связи с появлением в работах Н. Данфорда[16], В. П. Михайлова[17] и Г. М. Кесельмана[18] нового понятия — базисности Рисса (или безусловной базисности). Теперь кроме равномерной нормы стали рассматри-

---

[6] *A. Haar* Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme // Math. Ann. 1910. V.69 №3. P. 331—371; 1911. V.71 №1. P. 38—53.

[7] *E. W. Hobson* On a general convergence theorem, and the theory of the representation of a function by a series of normal functions // Proc. London Math. Soc. (3). 1908. V.6 ser.2. P. 349–395.

[8] *Y. D. Tamarkin* Some general problems of the theory of linear differential equations and expansions of an arbitrary functions in series of fundamental functions // Math. Zeitschrift. 1928. V.27 №1. P. 1–54.

[9] *M. H. Stone* A comparison of the series of Fourier and Birkhoff // Trans. Amer. Math. Soc. 1926. V.28 №4. P. 695—761.

[10] *G. D. Birkhoff* On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter // Trans. Amer. Math. Soc. 1908. V.9 №2. P. 219–231.

[11] *H. Weyl* Über gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit singulären Stellen und ihre Eigenfunktionen // Göttinger Nachrichten. 1909. P. 37–64.

[12] *H. Weyl* Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitänen und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen // Math. Ann. 1910. V. 68. P. 220–269.

[13] *E. C. Titchmarsh* Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations // Oxford Univ. Press, 1945.

[14] *Б. М. Левитан* Об асимптотическом поведении спектральной функции самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка и о разложении по собственным функциям I, II// Изв. АН СССР. Сер. матем. 1953. Т.17. С. 331–367; 1955. Т.19 вып. 1. С. 33–58.

[15] *В. А. Марченко* Теоремы тауберова типа в спектральном анализе дифференциальных операторов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1955. Т.19 вып.1. С. 381–422.

[16] *N. Dunford* A survey of the theory of spectral operators// Bull. Amer. Math. Soc. 1958. V.64. P. 217–274.

[17] *Михайлов В. П.* О базисности Рисса в $L_2(0,1)$ // ДАН СССР. 1962. Т.144. С. 981–984.

[18] *Г. М. Кесельман* О безусловной сходимости разложений по собственным функциям конкретных дифференциальных операторов// Изв. Высших Учеб. Завед., сер. Матем. 1964. Т.39 №2. С. 82–93.

вать норму пространства L_2, а кроме условной сходимости разложений — безусловную. Вообще, начиная с этого времени количество статей, посвященных теме равносходимости, столь велико, что даже их краткий обзор, потребовал бы нескольких десятков страниц, а потому ограничимся упоминанием только направлений исследований и отдельных наиболее знаковых работ. Так, довольно подробно изучались различия между равносходимостью на любом компакте отрезка и на всем отрезке. Здесь значительный вклад был сделан Саратовской математической школой, в частности, отметим работы А. П. Хромова[19,20] 1966 и 1975 года. Вопросы равносходимости на компактах внутри интервала подробно изучались также школой В. А. Ильина[21,22,23].

Изучались вопросы равносходимости для операторов с более общими, нежели регулярные по Биркгофу, условиями. Так, например, в работах А. П. Хромова[24] и Х. Бенцингера[25] для операторов высокого порядка был введен более широкий класс S-регулярных (регулярных по Стоуну) краевых условий. При отсутствии обычной суммируемости спектральных разложений Б. В. Лидским[26] был предложен метод, позволяющий проводить их суммирование методом Абеля подходящего порядка.

В работах А. А. Шкаликова[27,28] изучались вопросы безусловной базисности, а также безусловной базисности со скобками системы корневых векторов при регулярных, но не сильно регулярных краевых условиях. Этой проблеме — поиску условий на потенциал, гарантирующих базисность Рисса без скобок в случае регулярных, но не сильно регулярных краевых условий (в частности, периодических и антипериодических условий), посвящены многие работы. Отметим здесь недавние статьи А. С. Макина[29], П. Джакова и Б. С. Ми-

[19] *А. П. Хромов* Разложение по собственным функциям обыкновенных линейных дифференциальных операторов с нерегулярными распадающимися краевыми условиями // Матем. сб. 1966. Т.70. С. 310–329.

[20] *А. П. Хромов* О равносходимости разложений по собственным функциям дифференциальных операторов второго порядка II // Дифф. уравнения и вычислит. математика. Саратовский ун-т. 1975. Т.5. С. 3–20.

[21] *В. А. Ильин* Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений // I. Дифф. уравнения. 1980. Т.16 №5. С. 771–794; II. Дифф. уравнения. 1980. Т.16 №6. С. 980–1009.

[22] *В. А. Ильин* Равносходимость с тригонометрическим рядом разложений по корневым функциям одномерного оператора Шрёдингера с комплексным потенциалом класса L_1 // Дифф. уравнения. 1991. Т.27 №4. С. 577–597.

[23] *И. С. Ломов* О локальной сходимости биортогональных рядов, связанных с дифференциальными операторами с негладкими коэффициентами: I, II // Дифф. уравнения. 2001. Т. 37 №3. С. 328–342.

[24] *А. П. Хромов* Разложение по собственным функциям обыкновенных дифференциальных операторов на конечном интервале // ДАН СССР. 1962. Т.146 №6. С. 1294–1297.

[25] *H. E. Benzinger* Green's Function for Ordinary Differential Operators // J.Differential Equations. 1970. V.7 №3. P. 478–496.

[26] *Б. В. Лидский* О суммируемости рядов по главным векторам несамосопряженных операторов // Труды Моск. мат. об-ва. XI. 1962. С. 3–35.

[27] *А. А. Шкаликов* О базисности собственных функций обыкновенного дифференциального оператора // Успехи матем. наук. 1979. Т.34 №5(209). С. 235-–236.

[28] *А. А. Шкаликов* О базисности собственных векторов квадратичных операторных пучков // Матем. заметки. 1981. Т.30 №3. С. 371—385.

[29] *А. С. Макин* О сходимости разложений по корневым функциям периодической краевой задачи // Докл. Акад. Наук. 2006. Т.406 №4. С. 452–457.

тягина[30], А. А. Шкаликова и О. А. Велиева[31].

В работах В. С. Рыхлова[32] изучалась связь между классом гладкости потенциала q и классом гладкости раскладываемой функции f, гарантирующая наличие равномерной на компактах равносходимости (кроме того, были даны оценки скорости равносходимости). Вообще, вопросы скорости равносходимости в зависимости от номера частичной суммы изучались в статьях многих авторов.

Помимо возмущения потенциалом $q(x)$ оператора $-d^2/dx^2$, изучались более общие функционально–дифференциальные возмущения. Отметим здесь работы А. М. Гомилко и Г. В. Радзиевского[33,34]. В этих работах, а также в работе А. Г. Баскакова и Т. К. Кацаряна,[35] изучается безусловная равносходимость. Отдельной темой стало изучение задач с нелокальными краевыми условиями (отметим здесь только работы А. М. Седлецкого[36,37]).

Для случая всей оси В. А. Ильиным[38] и И. Антониу[39] рассматривались вопросы равносходимости на всей оси (в отличие от работ В. А. Марченко и Б. С. Левитана, где равносходимость изучалась на компактных подмножествах оси). Отметим, что в первой главе диссертации изучаются весьма близкие вопросы, хотя метод исследования сходен с методом В. А. Марченко. Обзор этих и других классических результатов по теме равносходимости можно найти в подробной работе А. М. Минкина[40] 1999 года.

Вопросы равносходимости для операторов Штурма–Лиувилля с потенциалами–распределениями начали изучаться в начале 2000-х годов. Такого типа операторы были введены А. М. Савчуком и А. А. Шкаликовым[41] в работе 1999 года. Они активно изучались затем в работах различных авторов. По–видимому, первой работой, в которой изучались вопросы равносходимости для таких операторов, стала статья В. А. Виноку-

[30] *P. Djakov, B. Mityagin* Criteria for existence of Riesz bases consisting of root functions of Hill and 1Dirac operators // J. of Funct. Analysis. 2012. V.263 P. 2300–2332.

[31] *О. А. Велиев, А. А. Шкаликов* О базисности Рисса собственных и присоединенных функций периодической и антипериодической задач Штурма–Лиувилля // Матем. заметки. 2009. Т.85 №5. С. 671–686.

[32] *В. С. Рыхлов* О скорости равносходимости для дифференциальных операторов с ненулевым коэффициентом при $(n-1)$-й производной //ДАН СССР. 1984. Т.279. №5. С. 1053–1056.

[33] *А. М. Гомилко, Г. В. Радзиевский* Равносходимость рядов по собственным функ- циям обыкновенных функционально-дифференциальных операторов // Докл. РАН. 1991. Т.316 №2. С. 265–270.

[34] *G. V. Radzievskii* Boundary value problems and related moduli of continuity // Functional Analysis and Its Applications. 1995. V.29 №3. P. 217–219.

[35] *А. Г. Баскаков, Т. К. Кацарян* Спектральный анализ интегро–дифференциальных операторов с нелокальными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. 1988 Т.24 №8. С. 1424–1433.

[36] *А. М. Седлецкий* Биортогональные разложения функций в ряды экспонент на интервалах вещественной оси // Успехи матем. наук. 1982. Т.37 №5 (227). С. 51–95.

[37] *А. М. Седлецкий* О равномерной сходимости негармонических рядов Фурье // Труды МИАН. 1991. Т.200. С. 299–309.

[38] *В. А. Ильин* Равномерная на всей прямой $\mathbb{R}$ равносходимость с интегралом Фурье спектрального разложения, отвечающего самосопряженному расширения оператора Шредингера с равномерно локально суммируемым потенциалом // Дифф. уравнения. 1995. Т.31 №12. С. 1957–1967.

[39] *В. А. Ильин, И. Антониу* О спектральных разложениях, соответствующих оператору Лиувилля, порожденному оператором Шредингера с равномерно локально суммируемым потенциалом // Дифф. уравнения. 1996. Т.32 №4. С. 435—440.

[40] *A. Minkin* Equiconvergence theorems for differential operators // J. Math. Sci. (New York). 1999. V.96. P. 3631–3715.

[41] *А. М. Савчук, А. А. Шкаликов* Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами // Матем. заметки. 1999. Т.66 №6. С. 897–912.

рова и В. А. Садовничего[42], в которой была доказана равномерная на всем отрезке $[0,\pi]$ равносходимость в случае

$$f \in L_1[0,\pi], \qquad q = u', \qquad u \in BV[0,\pi]$$

— функция ограниченной вариации, рассматривались краевые условия Дирихле. (Отметим, что для случая $q = u'$, $u \in BV[0,\pi]$ оператор Штурма–Лиувилля был определен ранее другими методами и детально изучен, см. монографию Ф. Аткинсона[43] и дополнение II М. Г. Крейна и И. С. Каца в ней, а также работу В. В. Жикова[44]). П. Джаков и Б. С. Митягин[45] установили равномерную равносходимость для такого вида операторов Штурма–Лиувилля с произвольными регулярными краевыми условиями, при этом раскладываемая функция f выбиралась квадратично суммируемой с дополнительными условиями на ее коэффициенты Фурье — суммируемость в квадрате с логарифмическим весом. Серия результатов о равносходимости для операторов с потенциалами — распределениями была получена автором. Эти результаты составляют вторую и третью главу диссертации.

Изучение равносходимости для системы Дирака

$$\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1(x) & p_2(x) \\ p_3(x) & p_4(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

шло параллельно с изучением оператора Штурма–Лиувилля. Не останавливаясь здесь на подробной истории вопроса, отметим только недавние работы. Периодическая и антипериодическая задачи Дирака с потенциалами $P \in L_2$ изучались в работах П. Джакова и Б. С. Митягина[46]. В частности, была доказана равномерная на всем отрезке равносходимость для случая квадратично суммируемых потенциала и раскладываемой функции при дополнительных условиях на коэффициенты Фурье одной из функций. Операторы Дирака с негладкими потенциалами рассматривались также в недавних работах М. Ш. Бурлуцкой, В. В. Корнева, В. П. Курдюмова и А. П. Хромова[47,48]. В недавней работе А. М. Савчука и А. А. Шкаликова[49] была доказана базисность Рисса системы собственных и присоединенных функций для системы Дирака с комплекснозначным суммируемым потенциалом и

[42] *В. А. Винокуров, В. А. Садовничий* Равномерная равносходимость ряда Фурье по собственным функциям первой краевой задачи и тригонометрического ряда Фурье // Докл. РАН. 2001. Т.380 №6. С. 731–735.

[43] *Ф. Аткинсон* Дискретные и непрерывные граничные задачи // М.: Мир, 1968.

[44] *В. В. Жиков* Об обратных задачах Штурма–Лиувилля на конечном отрезке // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1967. Т.31 вып.5. С. 965–976.

[45] *P. Djakov, B. Mityagin* Unconditional convergence of spectral decompositions of 1D Dirac operators with regular boundary conditions // Indiana Univ. Math. J. 2012. V.61 №1. P. 359–398.

[46] *P. Djakov, B. Mityagin* Riesz bases consisting of root functions of 1D Dirac operators // Proc. Amer. Math. Soc. 2013. V.141. P. 1361–1375.

[47] *М. Ш. Бурлуцкая, В. В. Корнев, А. П. Хромов* Система Дирака с недифференцируемым потенциалом и периодическими краевыми условиями // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 2012. Т.52 №9. С. 1621–1632.

[48] *М. Ш. Бурлуцкая, В. П. Курдюмов, А. П. Хромов* Уточненные асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций системы Дирака // Докл. Акад. Наук. 2012. Т.443 №4. С. 414–417.

[49] *A. M. Savchuk, A. A. Shkalikov* The Dirac Operator with Complex–Valued Summable Potential, Math. Notes. 2014. V.96 №5. P. 3–36.

сильно регулярными краевыми условиями. Случай регулярных, но не сильно регулярных условий (здесь имеет место базисность Рисса системы двумерных подпространств) был разобран в работе А. М. Савчука и автора. Вопросы базисности для оператора Дирака и более общих систем дифференциальных уравнений первого порядка активно изучаются в работах М. М. Маламуда[50,51] и его учеников. Результаты о равносходимости для системы Дирака, полученные автором, составляют четвертую главу диссертации.

Мы привели небольшой обзор известных результатов в области равносходимости. Кратко опишем применяемые на данный момент методы исследований. Со времен работ В. А. Стеклова и Я. Д. Тамаркина наиболее употребительным остается метод, основанный на результатах об асимптотике спектральных характеристик оператора. Это могут быть результаты об асимптотическом поведении собственных значений и собственных функций оператора (этот метод используется автором во второй и третьей главе диссертации), результаты об асимптотическом поведении резольвенты оператора (автор использует этот метод в четвертой главе диссертации). В случае бесконечного интервала используется асимптотическое поведение спектральной функции оператора (автор применяет этот метод в первой главе диссертации). Известны и неасимптотические методы — метод подобных операторов (он активно используется в работах А. Г. Баскакова[52] и его учеников), метод, основанный на формуле среднего значения, разработанный В. А. Ильиным и другие.

Таким образом, в настоящий момент вопросы сходимости спектральных разложений для обыкновенных дифференциальных операторов и неразрывно с ними связанные вопросы равносходимости являются темой исследований сразу нескольких авторских групп и отдельных ученых. После сравнения большого числа результатов в этой области автором было осознано — такая постановка впервые была предложена А. А. Шкаликовым — что задачи равносходимости уместно рассматривать в тройках пространств. А именно, нужно указывать пространство, по норме которого изучается сходимость ряда; пространство, которому принадлежит раскладываемая функция; и пространство, которому принадлежит потенциал. Кроме того, необходимо оговаривать способ суммирования ряда — здесь также могут быть различные постановки задач. Например, сходимость ряда может быть условной, безусловной, со скобками, могут применяться различные методы суммирования, ряд может сходится с той или иной скоростью, зависящей от его частичной суммы, наконец, сходимость может быть равномерной по тому или иному множеству потенциалов или раскладываемых функций. (Так, например, в недавней статье А. И. Назарова, Д. М. Столярова и П. Б. Затицкого[53] было получено обобщение классической теоремы Я. Д. Тамаркина — была доказана равномерная по шару $\|f\| \leqslant R$ равносходимость.) Такой общий взгляд на задачу равносходимости позволяет свести вместе и сравнить различные

---

[50] *A. A. Lunyov, M. M. Malamud* On the completeness of the root vectors for first order systems// Dokl. Math. 2013. V.88 №3. P. 678–683.

[51] *M. M. Malamud, L. L. Oridoroga* On the completeness of root subspaces of boundary value problems for first order systems of ordinary differential equations // J. Funct. Anal. 2012. V.263. P. 1939–1980.

[52] *А. Г. Баскаков, А. В. Дербушев, А. О. Щербаков* Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженных операторов Дирака с негладкими потенциалами // Изв. РАН. Сер. матем. 2011. Т.75 вып.3. С. 3–28.

[53] *A. I. Nazarov, D. M. Stolyarov, and P. B. Zatitskiy* Tamarkin equiconvergence theorem and trace formula revisited // J. of Spectral Th. 2014. V.4 №2. P. 365–389.

известные результаты, и выбрать направление для новых исследований.

Цель работы. Целью диссертационной работы является постановка новых современных задач и получение новых результатов в теории равносходимости спектральных разложений для операторов Штурма–Лиувилля и Дирака, а также обобщение классических теорем в этой области.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно. Основные из них состоят в следующем:

1. Для оператора Штурма–Лиувилля с равномерно суммируемым на всей оси потенциалом получена оценка разности спектральных функций возмущенного и невозмущенного операторов. Исходя из этой оценки, доказана теорема о равносходимости спектральных разложений по норме пространства $L_\infty(\mathbb{R})$ для случая, когда раскладываемая функция допускает представление $f = d\varphi + g$, где $g \in L_2(\mathbb{R})$, а $\varphi \in BV(\mathbb{R})$.

2. Для оператора Штурма–Лиувилля с равномерно суммируемым в степени $p > 1$ на всей оси потенциалом получена оценка скорости равносходимости по норме пространства $L_\infty(\mathbb{R})$ для случая, когда раскладываемая функция $f \in L_1(\mathbb{R})$.

3. Для оператора Штурма–Лиувилля с краевыми условиями Дирихле и с потенциалом $q = u'$, где $u \in L_2[0, \pi]$, доказана равносходимость по норме пространства $L_\nu[0, \pi]$, $\nu \in [2, \infty]$, в случае, когда раскладываемая функция $f \in L_\mu[0, \pi]$, $\mu \in [1, 2]$, где $1/\mu - 1/\nu \leqslant 1/2$ (в частности, для $\mu = 2$, $\nu = \infty$).

4. Для оператора Штурма–Лиувилля с краевыми условиями Дирихле и с потенциалом $q = u'$, где $u \in W_2^\theta[0, \pi]$, $0 < \theta < 1/2$, получена оценка скорости равносходимости по норме пространства $L_\infty[0, \pi]$ для случая, когда раскладываемая функция $f \in L_2[0, \pi]$.

5. Для оператора Штурма–Лиувилля с краевыми условиями Дирихле и с потенциалом $q = u'$, где $u \in L_\infty[0, \pi]$ и удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, доказана равносходимость по норме пространства $L_\infty[0, \pi]$ для случая, когда раскладываемая функция $f \in L_1[0, \pi]$. При суммировании ряда $S_m(f) - S_m^0(f)$ методом средних арифметических или методом Абеля равносходимость доказана для произвольной функции $u \in L_\infty[0, \pi]$.

6. Для оператора Штурма–Лиувилля с краевыми условиями Дирихле и с потенциалом $q = u'$, где $u \in W_2^\theta[0, \pi]$, $0 < \theta < 1/2$, получена оценка скорости равносходимости по норме пространства Соболева $W_2^\theta[0, \pi]$ для случая, когда раскладываемая функция $f \in L_2[0, \pi]$.

7. Для оператора Штурма–Лиувилля с краевыми условиями Дирихле и с потенциалом $q = u'$, где $u \in W_2^\theta[0, \pi]$, $0 < \theta < 1/2$, доказана равносходимость по норме пространства Гельдера $C^\theta[0, \pi]$ для случая, когда раскладываемая функция $f \in L_2[0, \pi]$.

8. Для оператора Дирака с произвольными регулярными по Биркгофу краевыми условиями и потенциалом $P \in L_\varkappa[0, \pi]$, $\varkappa \in (1, \infty]$, доказана равносходимость по норме пространства $L_\nu[0, \pi]$, $\nu \in [1, \infty]$, для случая, когда раскладываемая функция $f \in L_\mu[0, \pi]$, $\mu \in [1, \infty]$, если $1/\varkappa + 1/\mu - 1/\nu \leqslant 1$ (за исключением случая $\varkappa = \nu = \infty$, $\mu = 1$).

Методы исследования. В работе используются классические и современные методы функционального и комплексного анализа, в том числе, методы асимптотической теории обыкновенных дифференциальных операторов, теории рядов Фурье, теории сингулярных интегралов, теории интерполяции.

Достоверность результатов. Все результаты диссертационной работы получены с помощью строгих математических доказательств.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты диссертации носят теоретический характер. Они могут быть использованы в спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов и систем, в теории полугрупп, а также при построении математических моделей различных прикладных задач. Результаты диссертационной работы могут быть интересны специалистам, работающим в МГУ имени М. В. Ломоносова, Математическом институте имени В. А. Стеклова РАН, Институте прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН, СПбГУ и других высших учебных заведениях и научных центрах. Результаты диссертации могут составить содержание специальных курсов для магистров и аспирантов.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на научных семинарах механико–математического факультета МГУ: «Теория операторов» (руководитель — профессор А. Г. Костюченко); «Спектральная теория дифференциальных операторов» (руководитель — академик РАН В. А. Садовничий); научно–исследовательский семинар по теории функций (руководитель — академик РАН Б. С. Кашин); «Операторные модели в математической физике» (руководитель — профессор А. А. Шкаликов); научно–исследовательский семинар по тригонометрическим рядам (руководители — профессор А. М. Седлецкий и профессор В. В. Власов); на семинаре факультета ВМК МГУ «Спектральная теория дифференциальных операторов и актуальные вопросы математической физики» (руководитель — академик РАН В. А. Ильин); на семинаре по теории функций многих действительных переменных и ее приложениям к задачам математической физики Математического института им. В. А. Стеклова (руководитель — член–корреспондент РАН О. В. Бесов) и на семинаре по дифференциальным и функционально–дифференциальным уравнениям факультета физико–математических и естественных наук РУДН (руководитель — профессор А. Л. Скубачевский);

а также на следующих конференциях: Саратовская зимняя математическая школа «Современные проблемы теории функций и их приложения» (Саратов, 2002, 2008); Research Seminar «Spectral analysis of differential and difference operators» (Warsaw, Poland, 2002); Международная конференция по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям (Москва, 2002, 2005, 2008, 2011); Крымская осенняя математическая школа по спектральным и эволюционным задачам (Ласпи, Крым, 2002, 2005); Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения» (Воронеж, 2004, 2008); Международная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященная И. Г. Петровскому (Москва, 2004, 2007, 2011); Международная конференция «Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ», посвященная С. М. Никольскому (Москва, 2005, 2015); Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2006, 2008, 2010, 2012, 2014); Международные конференции «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования» (Москва, 2008, 2013); Международный симпозиум «Ряды Фурье и их приложения» (Ростов-на Дону, 2008); Международная конференция «Дифференциальные уравнения и топология», посвященная 100-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина (Москва, 2008); 8th Workshop on Operator Theory in Krein Spaces (Berlin, Germany, 2008); Международная конференция «Современные проблемы математики, механики и их приложений», посвященная 70-летию В. А. Садовничего (Москва, 2009); International Conference «Infinite-Dimensional Analysis and Topology» (Yaremche, Ukraine, 2009); International Workshop on Operator Theory and Applications (Berlin, Germany, 2010); на научных конференциях «Ломоносовские чтения» (Москва, 2011, 2016) и «Тихоновские чтения» (Москва, 2013, 2014, 2015, 2016).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах автора [1]–[13]. Из них [1]–[12] — статьи в журналах, рекомендованных ВАК. Все работы, кроме [10], выполнены без соавторов. В работе [10] (совместно с А. М. Савчуком) автору принадлежат результаты параграфов 1, 2 и 3; А. М. Савчуку — параграфов 4 и 5.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, каждая из которых разбита на несколько параграфов, заключения и списка литературы, включающего 107 наименований. Полный объем диссертации составляет 204 страницы.

Основное содержание работы. Во введении приведен краткий исторический обзор по тематике работы, обоснованы актуальность и научная новизна исследования, его теоретическая и практическая ценность, изложены методы исследования, даны сведения об апробации работы, изложено ее основное содержание.

Первая глава посвящена вопросу равносходимости с интегралом Фурье–Стилтьеса спектрального разложения, соответствующего оператору Штурма–Лиувилля на всей оси. Доказательство теоремы о равносходимости опирается на результаты об асимптотике спектральной функции оператора.

В пространстве $L_2(\mathbb{R})$ рассматривается самосопряженное расширение $\mathcal{L}$ оператора Штурма–Лиувилля, порожденного дифференциальным выражением

$$\ell(y) = -y'' + q(x)y,$$

потенциал q которого является равномерно на $\mathbb{R}$ локально суммируемым, т.е. удовлетворяет условию

$$\omega(h) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \int\limits_x^{x+h} |q(t)|dt < +\infty, \quad h > 0. \tag{1}$$

Пусть $\varphi(x,\lambda)$, $\psi(x,\lambda)$ – решения уравнения $\ell(y) = \lambda y$ с начальными условиями $\varphi(0,\lambda) = \psi'(0,\lambda) = 1$, $\varphi'(0,\lambda) = \psi(0,\lambda) = 0$. Тогда, как известно, существуют монотонные, ограниченные в каждом конечном интервале функции $\xi(\lambda)$ и $\zeta(\lambda)$ и функция с ограниченным в каждом конечном интервале изменением $\eta(\lambda)$ такие, что имеет место равенство Парсеваля

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_1(\lambda)G_1(\lambda)d\xi(\lambda)+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}(F_1(\lambda)G_2(\lambda)+F_2(\lambda)G_1(\lambda))d\eta(\lambda)+\int\limits_{-\infty}^{\infty}F_2(\lambda)G_2(\lambda)d\zeta(\lambda),$$

где f, g принадлежат $L_2(\mathbb{R})$;

$$F_1(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)\varphi(x,\lambda)dx,\quad F_2(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)\psi(x,\lambda)dx,$$

$$G_1(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(x)\varphi(x,\lambda)dx,\quad G_2(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(x)\psi(x,\lambda)dx$$

— их обобщенные преобразования Фурье.

Определение 1.1. *Функция*

$$\theta(x,y,\lambda)=\begin{cases}\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}\varphi(x,t)\varphi(y,t)d\xi(t)+(\varphi(x,t)\psi(y,t)+\\ +\varphi(y,t)\psi(x,t))d\eta(t)+\psi(x,t)\psi(y,t)d\zeta(t), & \lambda\geqslant\lambda_0,\\ 0, & \lambda<\lambda_0\end{cases}$$

называется спектральной функцией оператора $\mathcal{L}$ (здесь λ_0 – нижняя граница спектра).

Определение 1.2. *Обозначим через*

$$\theta_0(x,y,\lambda)=\frac{\sin(\sqrt{\lambda}(x-y))}{\pi(x-y)}$$

спектральную функцию оператора $\mathcal{L}_0$ с потенциалом $q(x)\equiv 0$.

Одной из целей первой главы является получение оценки модуля разности

$$|\theta(x,y,\lambda)-\theta_0(x,y,\lambda)|$$

при больших значениях спектрального параметра λ. Мы даем оценку этого выражения через равномерно локальную норму $\omega(1)$ потенциала q. А именно, основной результат **первого параграфа** заключается в следующем.

Определение 1.3. *Обозначим $M=\omega(1)=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\int\limits_{x}^{x+1}|q(t)|dt$.*

Теорема 1.2. *При $\lambda\geqslant e^{8M}$ имеют место оценки*

$$\sup\{|\theta(x,y,\lambda)-\theta_0(x,y,\lambda)|:x,y\in\mathbb{R},\quad |x-y|\leqslant 1\}\leqslant 3Me^{M/2}+95\frac{\sqrt{2M}}{\sqrt{\ln\lambda}},$$

$$\sup\{|\theta(x,y,\lambda)-\theta_0(x,y,\lambda)|:x,y\in\mathbb{R},\quad |x-y|>1\}\leqslant 95\frac{\sqrt{2M}}{\sqrt{\ln\lambda}}.$$

Во втором параграфе сформулированы различные достаточные условия, при которых разность спектральных функций возмущенного и невозмущенного операторов стремится к нулю при больших значениях спектрального параметра λ. В частности, вне «асимптотически малой» окрестности диагонали оценка вида $O(1)$ из теоремы 1.2 заменяется на $o(1)$ при $\lambda \to +\infty$.

Теорема 1.3. *Пусть потенциал q является равномерно локально суммируемым на всей оси, а число $\delta > 0$ произвольно. Тогда при любом $\lambda \geqslant e^{8M}$ справедливо неравенство*

$$\sup\left\{|\theta(x,y,\lambda) - \theta_0(x,y,\lambda)| : x,y \in \mathbb{R}, |x-y| > \delta\right\} \leqslant \frac{3Me^{M/2}}{2\delta\sqrt{\lambda}} + 95\frac{\sqrt{2M}}{\sqrt{\ln\lambda}}.$$

В частности, при $\lambda \to +\infty$ имеем

$$\sup\left\{|\theta(x,y,\lambda) - \theta_0(x,y,\lambda)| : x,y \in \mathbb{R}, \quad |x-y| > \sqrt{(\ln\lambda)/\lambda}\right\} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln\lambda}}\right).$$

Следствие 1. *Разность между спектральной функцией $\theta(x,y,\lambda)$ самосопряженного расширения оператора Штурма–Лиувилля с равномерно локально суммируемым на $\mathbb{R}$ потенциалом и функцией $\dfrac{\sin(\sqrt{\lambda}(x-y))}{\pi(x-y)}$ равномерно по $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ стремится к нулю при $\lambda \to +\infty$ вне полосы $|x-y| \leqslant \delta$ при любом $\delta > 0$ и является величиной порядка $O\left(\dfrac{1}{\sqrt{\ln\lambda}}\right)$.*

В случае некоторых дополнительных ограничений на потенциал оказалось возможным получить оценки вида

$$|\theta(x,y,\lambda) - \theta_0(x,y,\lambda)| = o(1), \qquad \lambda \to +\infty,$$

равномерные по $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Следствие 2. *Если функция $\omega(h)$, определенная в (1), удовлетворяет условию $\lim\limits_{h\to 0}\omega(h) = 0$, то*

$$\sup_{x,y\in\mathbb{R}} |\theta(x,y,\lambda) - \theta_0(x,y,\lambda)| \to 0, \quad \lambda \to +\infty.$$

Следствие 3. *Если $\theta(x,y,\lambda)$ – спектральная функция самосопряженного оператора Штурма–Лиувилля с потенциалом, равномерно локально суммируемым в степени $p > 1$, т.е. при $h > 0$ выполнено условие*

$$\omega_p(h) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \int\limits_x^{x+h} |q(t)|^p dt < +\infty, \quad p > 1,$$

то

$$\sup_{x,y\in\mathbb{R}} |\theta(x,y,\lambda) - \theta_0(x,y,\lambda)| = O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln\lambda}}\right), \quad \lambda \to +\infty.$$

В параграфе 3 доказывается теорема о равносходимости с интегралом Фурье–Стилтьеса спектрального разложения, отвечающего самосопряженному расширению $\mathcal{L}$ на всей оси.

Кроме того, получены результаты о скорости равносходимости с интегралом Фурье в случае, когда раскладываемая функция f принадлежит классу $L_1(\mathbb{R})$ и равномерно локально суммируема в некоторой степени $p > 1$ и в случае, когда $f \in L_1(\mathbb{R})$, а потенциал q равномерно локально суммируем в степени $p > 1$.

Определение 1.4. *Обозначим через $\sigma_\lambda(x, f)$ спектральное разложение функции f, отвечающее самосопряженному расширению $\mathcal{L}$ на прямой, т.е.*

$$\sigma_\lambda(x, f) = \int_{\mathbb{R}} \theta(x, y, \lambda) f(y) dy,$$

где $\theta(x, y, \lambda)$ — спектральная функция оператора $\mathcal{L}$. Через $S_\lambda(x, f)$ будем обозначать разложение той же функции f в интеграл Фурье:

$$S_\lambda(x, f) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(\sqrt{\lambda}(x - y))}{x - y} f(y) dy.$$

Определение 1.5. *Обозначим через $\mathbb{K}$ класс функций Φ, допускающих представление: $\Phi = \phi + f$, где $\phi \in BV(\mathbb{R})$, $f \in W_2^1(\mathbb{R})$.*

Теорема 1.4. *Пусть потенциал q является равномерно локально суммируемым на всей оси и удовлетворяет условию: $\omega(h) \to 0$ при $h \to 0$. Тогда для любой функции Φ из класса $\mathbb{K}$ имеет место равномерная равносходимость интеграла Фурье–Стилтьеса со спектральным разложением, соответствующим оператору $\mathcal{L}$*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\sigma_\lambda(x, d\Phi) - S_\lambda(x, d\Phi)| \to 0, \quad \lambda \to +\infty.$$

Следующие результаты посвящены оценке скорости сходимости с интегралом Фурье спектрального разложения функции $f \in L_1(\mathbb{R})$. Обозначим

$$\omega_f(h) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \int_x^{x+h} |f(t)| dt < +\infty, \quad h > 0.$$

Следствие 1. *Пусть потенциал q является равномерно локально суммируемым на всей оси, а функция f принадлежит классу $L_1(\mathbb{R})$. Тогда при $\lambda \geqslant e^{8M}$ справедлива оценка*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\sigma_\lambda(x, f) - S_\lambda(x, f)| \leqslant C_M \left(\frac{\|f\|_{L_1}}{\sqrt{\ln \lambda}} + \omega_f \left(2\sqrt{\frac{\ln \lambda}{\lambda}} \right) \right).$$

Пусть, кроме того, функция f равномерно локально суммируема в некоторой степени $p > 1$, то есть

$$\omega_f(p, h) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \int_x^{x+h} |f(t)|^p dt < +\infty, \qquad h > 0.$$

Тогда справедлива следующая оценка скорости равносходимости интеграла Фурье со спектральным разложением, соответствующим оператору $\mathcal{L}$:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\sigma_\lambda(x, f) - S_\lambda(x, f)| = O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln \lambda}} \right), \quad \lambda \to +\infty,$$

где постоянная в символе O зависит только от M, p и функции f.

Следствие 2. *Пусть потенциал q является равномерно локально суммируемым в некоторой степени $p > 1$. Тогда для любой функции $f \in L_1(\mathbb{R})$:*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\sigma_\lambda(x,f) - S_\lambda(x,f)| = O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln\lambda}}\right), \quad \lambda \to +\infty,$$

где постоянная в символе O зависит от M, p и функции f.

Вторая глава посвящена изучению спектральных свойств оператора Штурма–Лиувилля L, порожденного дифференциальным выражением

$$\ell(y) = -y'' + q(x)y,$$

в пространстве $L_2[0,\pi]$ и граничными условиями Дирихле $y(0) = y(\pi) = 0$.

Предполагается, что потенциал q является распределением, т.е.

$$q(x) = u'(x), \qquad u \in L_2[0,\pi].$$

В первом параграфе рассматривается вопрос о равномерной на всем отрезке $[0,\pi]$ равносходимости разложения некоторой функции $f \in L_2[0,\pi]$ в ряд по системе собственных и присоединенных функций оператора L с ее разложением в ряд Фурье по системе синусов (т.е. по системе собственных функций невозмущенного оператора).

В оценках скорости равносходимости важную роль играет числовая последовательность

$$v_u(k) = \left(\sum_{n\geqslant k} \|\psi_n\|^2_{L_2}\right)^{1/2} + \left(\sum_{n\geqslant k} \|\varphi_n\|^2_{L_2}\right)^{1/2}, \quad k \geqslant N,$$

где $N = N_u$ — натуральный номер, начиная с которого все собственные значения оператора просты, а φ_n и ψ_n — вторые члены в асимптотиках для систем $\{y_n\}$ и $\{w_n\}$ соответственно.

Основным результатом первого параграфа является следующая

Теорема 2.1. *Рассмотрим оператор L, действующий в пространстве $L_2[0,\pi]$, с граничными условиями Дирихле, потенциал которого удовлетворяет следующим условиям: $q(x) = u'(x)$, где комплекснозначная функция $u \in L_2[0,\pi]$. Пусть $\{y_n(x)\}_{n=1}^\infty$ – система собственных и присоединенных функций оператора L, $\{w_n(x)\}_{n=1}^\infty$ – биортогональная к ней система. Для произвольной функции $f \in L_2[0,\pi]$ обозначим*

$$c_n = (f(x), w_n(x)), \qquad c_{n,0} = \sqrt{2/\pi}(f(x), \sin nx).$$

Тогда имеет место равномерная на всем отрезке $[0,\pi]$ равносходимость разложения функции f в ряд по системе $\{y_n(x)\}_{n=1}^\infty$ и по системе синусов:

$$\lim_{m\to\infty} \left\| \sum_{n=1}^m c_n y_n(x) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^m c_{n,0} \sin nx \right\|_{C[0,\pi]} = 0.$$

Скорость равносходимости характеризуется следующей оценкой:

$$\left\| \sum_{n=1}^{m} c_n y_n(x) - \sum_{n=1}^{m} \sqrt{\frac{2}{\pi}} c_{n,0} \sin nx \right\|_C \leqslant$$

$$\leqslant C_u \left(\left(\sum_{n \geqslant m^{\frac{1}{2}-\varepsilon}} |c_{n,0}|^2 \right)^{1/2} + \|f\|_{L_2} \left(\upsilon_u([m^{\frac{1}{2}-\varepsilon}]) + m^{-\varepsilon} \right) \right),$$

в которой $\varepsilon \in (0, 1/2)$ *можно выбирать произвольно,* $m^{\frac{1}{2}-\varepsilon} > N_u$.

Из теоремы 2.1 и известных утверждений теории рядов Фурье вытекают

Следствие 1. *Пусть* $f \in L_2[0, \pi]$, *а* $\{y_n\}_1^\infty$ — *система собственных и присоединенных функций оператора* L *с потенциалом* $q = u'$, $u \in L_2[0, \pi]$. *Если ряд Фурье функции* f *по системе синусов*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \left(\int_0^\pi f(t) \sin(nt) dt \right) \sin nx \tag{2}$$

сходится в точке $x \in [0, \pi]$, *то и спектральное разложение*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^\pi f(t) \overline{w_n(t)} dt \right) y_n(x) \tag{3}$$

сходится в этой точке к тому же пределу (здесь w_n — *векторы биортогональной системы). В частности, для любых функций* f, $u \in L_2[0, \pi]$ *ряд* (3) *сходится к* $f(x)$ *почти всюду на* $[0, \pi]$.

Наоборот, расходимость в точке $x \in [0, \pi]$ *ряда* (2) *влечет расходимость ряда* (3). *В частности, существует непрерывная функция* f, *все разложения* (3) *(т.е. разложения, построенные по произвольному потенциалу* $u \in L_2[0, \pi]$*) которой расходятся на множестве* B *мощности континуум (здесь множество* B *не зависит от* u*).*

Если ряд (2) *сходится равномерно на некотором множестве* $A \subset [0, \pi]$, *то то же верно и для ряда* (3), *причем суммы рядов совпадают.*

В частности, для любой функции f *ограниченной вариации ряд* (3) *сходится в каждой точке* $x \in (0, \pi)$ *к величине* $\frac{1}{2}(f(x-0) + f(x+0))$. *Если* f *имеет ограниченную вариацию и непрерывна на некотором интервале* $(\alpha, \beta) \subset [0, \pi]$, *то ряд* (3) *сходится к* $f(x)$ *равномерно на каждом подотрезке* $[\alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$. *Если* f *имеет ограниченную вариацию, непрерывна на* $[0, \pi]$ *и равна нулю в концах отрезка, то ряд* (3) *сходится к* $f(x)$ *равномерно на всем* $[0, \pi]$.

Для любой непрерывной функции f, *равной нулю в концах отрезка, ряд* (3), *просуммированный методом средних арифметических, сходится равномерно на* $[0, \pi]$ *к* $f(x)$.

Следствие 2. *В условиях теоремы 2.1 для любой функции* $f \in L_\mu[0, \pi]$, $\mu \in [1, 2]$, *имеет место* L_ν*–равносходимость разложения функции* f *в ряд по системе* $\{y_n(x)\}_{n=1}^\infty$ *и по системе синусов:*

$$\lim_{m \to \infty} \left\| \sum_{n=1}^{m} c_n y_n(x) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{m} c_{n,0} \sin nx \right\|_{L_\nu[0,\pi]} = 0, \quad \text{где} \quad \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\nu} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Следствие 3. *Пусть $f \in L_p[0,\pi]$ для некоторого $p \in (1,\infty)$. Тогда ряд (3) сходится к $f(x)$ по норме пространства $L_p[0,\pi]$.*

Во втором параграфе изучается скорость равносходимости разложений по системам корневых функций возмущенного и невозмущенного операторов Штурма–Лиувилля на отрезке. При этом мы работаем в шкале соболевских пространств $W_2^\theta[0,\pi]$ с нецелым индексом гладкости $\theta \in [0,1]$.

Теорема 2.2. *Пусть $R > 0$. Рассмотрим оператор L, действующий в пространстве $L_2[0,\pi]$, с граничными условиями Дирихле, потенциал которого удовлетворяет следующим условиям: $q(x) = u'(x)$, где комплекснозначная функция $u \in W_2^\theta[0,\pi]$, $0 < \theta < 1/2$, причем $\|u\|_{W_2^\theta} \leqslant R$. Пусть $\{y_n(x)\}_{n=1}^\infty$ — система собственных и присоединенных функций оператора L, $\{w_n(x)\}_{n=1}^\infty$ — биортогональная к ней система. Для произвольной функции $f \in L_2[0,\pi]$ обозначим*

$$c_n = (f(x), w_n(x)), \qquad c_{n,0} = \sqrt{2/\pi}(f(x), \sin nx).$$

Тогда существует число $M = M_{\theta,R} \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $m \geqslant M$

$$\left\| \sum_{n=1}^m c_n y_n(x) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^m c_{n,0} \sin nx \right\|_C \leqslant C_{\theta,R} \left(\left(\sum_{n \geqslant \sqrt{m}} |c_{n,0}|^2 \right)^{1/2} + \frac{\|f\|_{L_2}}{m^{\theta/2}} \right).$$

Видно, что в оценку скорости равносходимости входит слагаемое $\sum\limits_{n \geqslant \sqrt{m}} |c_{n,0}|^2$, скорость убывания к нулю которого зависит только от функции f, но не от потенциала u. Квалифицированные оценки здесь можно получить, если потребовать от f большей гладкости.

Следствие 1. *Пусть в условиях теоремы 2.2 функция f принадлежит пространству $\dot{W}_2^\tau[0,\pi]$ для некоторого $\tau \in [0,1]$. Тогда*

$$\left\| \sum_{n=1}^m c_n y_n(x) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^m c_{n,0} \sin nx \right\|_C \leqslant \frac{C_{\theta,R} \|f\|_{W_2^\tau}}{m^{\min\{\theta,\tau\}/2}}.$$

Если функция f имеет ограниченную вариацию на отрезке $[0,\pi]$, то

$$\left\| \sum_{n=1}^m c_n y_n(x) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^m c_{n,0} \sin nx \right\|_C \leqslant \frac{C_{\theta,R} \|f\|_{BV}}{m^{\theta/2}}.$$

В качестве $\|f\|_{BV}$ здесь можно взять, например, $\|f\|_{BV} = \mathrm{Var}_{x\in[0,\pi]} f(x) + \sup_{x\in[0,\pi]} |f(x)|$.

В третьем параграфе изучается следующий вопрос: какому классу функций должен принадлежать потенциал, чтобы имела место равномерная равносходимость для любой функции f класса L_1? По-видимому, не существует «хорошего» функционального класса потенциалов, в точности дающего равносходимость для функций из L_1. В §3 изучаются различные достаточные условия, обеспечивающие такую равносходимость.

Теорема 2.3. *Пусть $Ly = -y'' + q(x)y$ – оператор Штурма–Лиувилля, действующий в пространстве $L_2[0,\pi]$, с граничными условиями Дирихле $y(0) = y(\pi) = 0$, где $q(x) = u'(x)$,* *а комплекснозначная функция $u \in L_\infty$, периодически продолженная за отрезок $[0,\pi]$, удовлетворяет условию:*

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant \pi}\left|\int_0^x u(t)\sin nt dt\right| \leqslant \frac{C_u}{n}, \quad \forall n\in\mathbb{N}. \tag{4}$$

Тогда для любой функции f из пространства $L_1[0,\pi]$ имеет место равномерная равносходимость

$$\lim_{m\to\infty}\left\|\sum_{n=1}^m c_n y_n(x) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=1}^m c_{n,0}\sin(nx)\right\|_{C[0,\pi]} = 0.$$

Недостаток условия (4) на функцию u состоит в том, что его нелегко проверить. Мы формулируем несколько достаточных условий, гарантирующих выполнение (4).

Определение 2.5. *Пусть функция $f \in L_p[0,\pi]$ периодически продолжена за отрезок. Ее интегральным модулем непрерывности степени $p\geqslant 1$ называют величину*

$$\omega_p(f,\delta) = \sup_{0\leqslant|h|\leqslant\delta}\left(\int_0^\pi |f(t+h)-f(t)|^p dt\right)^{1/p}.$$

Если периодически продолженная функция f непрерывна, то ее модулем непрерывности называется величина

$$\omega_\infty(f;\delta) = \sup_{t\in[0,\pi],\, 0\leqslant|h|\leqslant\delta}|f(t+h)-f(t)|.$$

Следствие 2. *Продолжим в условии теоремы 2.3 функцию u периодически за отрезок $[0,\pi]$. Пусть ее интегральный модуль непрерывности степени p для некоторого $p\in[1,\infty]$ допускает оценку*

$$\omega_p(u,\delta) \leqslant \begin{cases} C_u\delta^{1/p}, & \text{если } p<\infty; \\ C_u|\ln\delta|^{-1}, & \text{если } p=\infty \end{cases}.$$

Тогда имеет место равномерная на всем отрезке $[0,\pi]$ равносходимость разложения функции f в ряд по системе $\{y_n(x)\}_{n=1}^\infty$ собственных и присоединенных функций оператора и по системе синусов.

Следствие 3. *Пусть в условиях теоремы 2.3 функция $u\in BV[0,\pi]$. Тогда имеет место равномерная на всем отрезке $[0,\pi]$ равносходимость разложения функции f в ряд по системе $\{y_n(x)\}_{n=1}^\infty$ собственных и присоединенных функций оператора и по системе синусов.*

Если изменить способ суммирования рядов, то можно добиться того, что равносходимость будет иметь место без дополнительных условий на потенциал. А именно, справедливо

Следствие 5. *Пусть $Ly=-y''+q(x)y$ – оператор Штурма–Лиувилля, действующий в пространстве $L_2[0,\pi]$, с граничными условиями Дирихле $y(0)=y(\pi)=0$, где $q(x)=u'(x)$,* *а комплекснозначная функция $u \in L_\infty[0,\pi]$. Тогда для любой функции f из пространства $L_1[0,\pi]$ имеет место равномерная равносходимость*

$$\lim_{m\to\infty}\left\|(C,1)\sum_{n=1}^{m}\left(c_n y_n(x)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}c_{n,0}\sin(nx)\right)\right\|_{C[0,\pi]}=0.$$

Здесь символ $(C,1)$ перед знаком суммы означает суммирование ряда методом Чезаро средних арифметических. Утверждение сохраняется при замене метода суммирования на метод Абеля.

В третьей главе изучается равносходимость разложений по системам собственных и присоединенных функций операторов Штурма–Лиувилля на конечном отрезке с потенциалами — распределениями в пространствах Соболева и Гельдера.

В первом параграфе установлена равносходимость разложений по норме пространства Соболева $\|\cdot\|_{W_2^\theta}$ для случая, когда $u \in W_2^\theta[0,\pi]$, $0<\theta<1/2$, а раскладываемая функция $f \in L_2[0,\pi]$. Кроме того, получены оценки скорости этой равносходимости, равномерные по шару $u \in B_{\theta,R} = \{u : \|u\|_{W_2^\theta} \leqslant R\}$. Поскольку пространства $C[0,\pi]$ и $W_2^\theta[0,\pi]$ при $\theta \in (0,1/2)$ находятся в общем положении, то результаты этого параграфа находятся в общем положении с результатами теоремы 2.2 предыдущей главы. Интересно также то, что удается получить оценки скорости равносходимости, по порядку лучшие, чем в теореме 2.2.

Теорема 3.1. *Пусть $R>0$. Рассмотрим оператор L, действующий в пространстве $L_2[0,\pi]$, с граничными условиями Дирихле, потенциал которого удовлетворяет следующим условиям: $q(x)=u'(x)$, где комплекснозначная функция $u \in W_2^\theta[0,\pi]$, $0<\theta<1/2$, причем $\|u\|_{W_2^\theta} \leqslant R$. Пусть $\{y_n(x)\}_{n=1}^\infty$ — система собственных и присоединенных функций оператора L, $\{w_n(x)\}_{n=1}^\infty$ — биортогональная к ней система. Для произвольной функции $f \in L_2[0,\pi]$ обозначим*

$$c_n=\int_0^\pi f(x)\overline{w_n(x)}dx, \qquad c_{n,0}=\sqrt{2/\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx dx.$$

Тогда существует число $M=M_{\theta,R}\in\mathbb{N}$ такое, что для любого $m \geqslant M$

$$\left\|\sum_{n=1}^{m}c_n y_n(x)-\sum_{n=1}^{m}\sqrt{\frac{2}{\pi}}c_{n,0}\sin nx\right\|_{W_2^\theta}\leqslant C_{\theta,R}\left(\left(\sum_{n\geqslant m^{1-\theta}}|c_{n,0}|^2\right)^{1/2}+\frac{\|f\|_{L_2}}{m^{\theta(1-\theta)}}\right).$$

Следствие 1. *Пусть в условиях теоремы 3.1 функция f принадлежит пространству $\dot{W}{}_2^\tau[0,\pi]$ для некоторого $\tau\in[0,1]$. Тогда*

$$\left\|\sum_{n=1}^{m}c_n y_n(x)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=1}^{m}c_{n,0}\sin nx\right\|_{W_2^\theta}\leqslant\frac{C_{\theta,R}\|f\|_{W_2^\tau}}{m^{\min\{\theta,\tau\}(1-\theta)}}.$$

Если функция f имеет ограниченную вариацию на отрезке $[0,\pi]$, то

$$\left\|\sum_{n=1}^{m}c_n y_n(x)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=1}^{m}c_{n,0}\sin nx\right\|_{W_2^\theta}\leqslant\frac{C_{\theta,R}\|f\|_{BV}}{m^{\theta(1-\theta)}}.$$

Во втором параграфе изучается вопрос о равносходимости спектральных разложений по норме пространств Гельдера $C^\theta[0,\pi]$, $\theta \in (0, 1/2)$. Известно, что $C^\theta[0,\pi] \not\subseteq W_2^\theta[0,\pi]$ — эти пространства находятся в общем положении. Таким образом, результаты этого параграфа и утверждение теоремы 3.1 (равносходимость по норме $\|\cdot\|_{W_2^\theta}$) не сравнимы.

Теорема 3.2. *Рассмотрим оператор L, действующий в пространстве $L_2[0,\pi]$, с граничными условиями Дирихле, потенциал которого удовлетворяет следующим условиям: $q(x) = u'(x)$, где комплекснозначная функция $u \in W_2^\theta[0,\pi]$, $0 < \theta < 1/2$. Пусть $\{y_n(x)\}_{n=1}^\infty$ — система собственных и присоединенных функций оператора L, $\{w_n(x)\}_{n=1}^\infty$ — биортогональная к ней система. Для произвольной функции $f \in L_2[0,\pi]$ обозначим*

$$c_n = (f(x), w_n(x)), \qquad c_{n,0} = \sqrt{2/\pi}(f(x), \sin nx).$$

Тогда

$$\left\| \sum_{n=1}^m c_n y_n(x) - \sum_{n=1}^m \sqrt{\frac{2}{\pi}} c_{n,0} \sin nx \right\|_{C^\theta} \to 0, \quad m \to +\infty.$$

Данная теорема позволяет усилить утверждение классической теоремы о равномерной равносходимости разложений функций из $L_2[0,\pi]$ в ряды по системам корневых функций классических операторов Штурма–Лиувилля.

Следствие 1. *Пусть оператор Штурма–Лиувилля L порожден дифференциальным выражением $-y'' + q(x)y$, потенциал которого комплекснозначен и суммируем: $q \in L_1[0,\pi]$, и краевыми условиями Дирихле $y(0) = y(\pi) = 0$. Тогда в обозначениях теоремы 3.2 для всякой $f \in L_2[0,\pi]$*

$$\left\| \sum_{n=1}^m c_n y_n(x) - \sum_{n=1}^m \sqrt{\frac{2}{\pi}} c_{n,0} \sin nx \right\|_{C^\theta} \to 0, \quad m \to +\infty$$

для любого $\theta \in [0, 1/2)$. Утверждение сохраняется и для случая $q = u'$, где $u \in BV[0,\pi]$.

Следствие 3. *Пусть в условиях теоремы 3.2 функция f принадлежит пространству $\dot{W}{}_2^s[0,\pi]$ для некоторого $s > 1/2 + \theta$. Тогда разложение функции f по системе $\{y_n\}_1^\infty$*

$$f = \sum_{n=1}^\infty (f, w_n) y_n$$

сходится по норме $\|\cdot\|_{C^\theta}$. В частности, утверждение верно для любой функции $f \in \mathfrak{D}(L) \subset \dot{W}{}_2^1[0,\pi]$.

В четвертой главе изучается вопрос о равносходимости спектральных разложений, отвечающих системам корневых функций двух одномерных операторов Дирака $\mathcal{L}_{P,U}$ и $\mathcal{L}_{0,U}$ с суммируемым на конечном отрезке потенциалом P и регулярными по Биркгофу краевыми условиями. Рассматривается оператор Дирака, порожденный в пространстве $\mathbb{H} = L_2[0,\pi] \oplus L_2[0,\pi] \ni \mathbf{y}$ дифференциальным выражением

$$\ell_P(\mathbf{y}) = B\mathbf{y}' + P\mathbf{y}, \quad \text{где}$$

$$B = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \qquad P(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) & p_2(x) \\ p_3(x) & p_4(x) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Функции p_j, $j=1,2,3,4$, предполагаются суммируемыми на отрезке $[0,\pi]$ и комплекснозначными. Он имеет область определения

$$\mathfrak{D}(\mathcal{L}_{P,U})=\{\mathbf{y}\in W_1^1[0,\pi]:\ell_P(\mathbf{y})\in\mathbb{H},\ U(\mathbf{y})=0\},\quad\text{где}$$

$$U(\mathbf{y})=C\mathbf{y}(0)+D\mathbf{y}(\pi)=\begin{pmatrix}u_{11}&u_{12}\\u_{21}&u_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1(0)\\y_2(0)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u_{13}&u_{14}\\u_{23}&u_{24}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1(\pi)\\y_2(\pi)\end{pmatrix},$$

причем строки матрицы $\mathcal{U}:=(C,\,D)=\begin{pmatrix}u_{11}&u_{12}&u_{13}&u_{14}\\u_{21}&u_{22}&u_{23}&u_{24}\end{pmatrix}$ линейно независимы. Обозначим через $J_{\alpha\beta}$ определитель, составленный из α-го и β-го столбца матрицы $\mathcal{U}$.

Определение 4.1. *Краевые условия, определенные формой U, называются регулярными (по Биркгофу), если $J_{14}\cdot J_{23}\neq 0$. Оператор Дирака, порожденный регулярными краевыми условиями U, будем называть регулярным.*

Через $\mathbf{y}(x)=(y_1(x),y_2(x))^t$ будем обозначать вектор–функции на отрезке $[0,\pi]$, а через

$$\langle\mathbf{f},\,\mathbf{g}\rangle=\int_0^\pi(f_1(x)\overline{g_1}(x)+f_2(x)\overline{g_2}(x))\,dx$$

— скалярное произведение в пространстве $\mathbb{H}$. Это же обозначение мы будем использовать и в случае $\mathbf{f}\in(L_\alpha[0,\pi])^2$, $\mathbf{g}\in(L_{\alpha'}[0,\pi])^2$, $\alpha\in[1,\infty]$, $1/\alpha+1/\alpha'=1$. Для краткости будем писать $\mathbf{f}\in L_\alpha$, имея в виду, что $f_1\in L_\alpha[0,\pi]$ и $f_2\in L_\alpha[0,\pi]$, или $P\in L_\alpha$, имея в виду, что все компоненты матрицы лежат в $L_\alpha[0,\pi]$.

Можно показать, что случай потенциала произвольного вида можно свести к случаю $p_1=p_4=0$, то есть к потенциалу вида

$$P(x)=\begin{pmatrix}0&p_2(x)\\p_3(x)&0\end{pmatrix}.\tag{5}$$

Переход к подобным операторам не нарушает факта равносходимости. Однако, в случае потенциала общего вида потенциал невозмущенного оператора имеет вид $\begin{pmatrix}p_1(x)&0\\0&p_4(x)\end{pmatrix}$. Сформулируем основную теорему для оператора с потенциалом вида (5). Факт равносходимости для операторов общего установлен в качестве следствия.

Определение 4.2. *Регулярные краевые условия называются сильно регулярными, если*

$$(J_{12}+J_{34})^2\neq -4J_{23}\cdot J_{14}.$$

Обозначим

$$S_m(\mathbf{f})=\sum_{|n|\leqslant m}\Big[\langle\mathbf{f},\mathbf{z}_{2n}\rangle\mathbf{y}_{2n}+\langle\mathbf{f},\mathbf{z}_{2n+1}\rangle\mathbf{y}_{2n+1}\Big],\tag{6}$$

где $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — система собственных и присоединенных функций оператора $\mathcal{L}_{P,U}$, а $\{\mathbf{z}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — биортогональная к ней система. Положим также

$$S_m^0(\mathbf{f})=\sum_{|n|\leqslant m}\Big[\langle\mathbf{f},\mathbf{z}_{2n}^0\rangle\mathbf{y}_{2n}^0+\langle\mathbf{f},\mathbf{z}_{2n+1}^0\rangle\mathbf{y}_{2n+1}^0\Big],\quad m=0,1,\dots,\tag{7}$$

где $\{\mathbf{y}_n^0\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — система собственных и присоединенных функций оператора $\mathcal{L}_{0,U}$ с нулевым потенциалом, а $\{\mathbf{z}_n^0\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — биортогональная к ней система. Легко видеть, что $S_m(\mathbf{f})$ и $S_m^0(\mathbf{f})$ представляют собой частичные суммы разложений функции $\mathbf{f}$ по системам $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ и $\{\mathbf{y}_n^0\}_{n\in\mathbb{Z}}$ соответственно. Под равносходимостью этих разложений мы будем понимать утверждения вида $\|S_m(\mathbf{f}) - S_m^0(\mathbf{f})\| \to 0$ при $m \to \infty$. Такое определение равносходимости позволит нам вести рассуждения одновременно и в случае сильной регулярности, и в случае лишь обычной регулярности. Основным результатом **первого параграфа** является

Теорема 4.1. *Пусть $\mathcal{L}_{P,U}$ — регулярный оператор Дирака с потенциалом вида* (5) $P \in L_\varkappa[0,\pi]$, $\varkappa \in (1,\infty]$. *Пусть $\mathbf{f} \in L_\mu[0,\pi]$, где $\mu \in [1,\infty]$. Тогда*

$$\|S_m(\mathbf{f}) - S_m^0(\mathbf{f})\|_{L_\nu[0,\pi]} \longrightarrow 0 \quad \textit{при } m \to +\infty,$$

если индекс $\nu \in [1,\infty]$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{\varkappa} + \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\nu} \leqslant 1$$

за исключением случая $\varkappa = \nu = \infty$, $\mu = 1$.

Следствие 1. *В случае оператора Дирака с потенциалом P общего вида и регулярными условиями $\mathcal{U} = (C,\, D)$ утверждение теоремы сохраняется, с той лишь разницей, что в определении последовательности $\{S_m^0\}$ в качестве системы $\{\mathbf{y}_n^0\}$ следует взять систему собственных и присоединенных функций оператора $\mathcal{L}_{P_0,\widetilde{U}}$ с потенциалом*

$$P_0(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) & 0 \\ 0 & p_4(x) \end{pmatrix}$$

и краевыми условиями

$$\widetilde{\mathcal{U}} = (\widetilde{C},\, \widetilde{D}), \quad \widetilde{C} = C, \quad \widetilde{D} = \exp\left(\frac{i}{2}\int_0^\pi (p_4(t) - p_1(t))dt\right) D.$$

В теореме 4.1 слагаемые спектрального разложения сгруппированы парами, т.е. устанавливается факт равносходимости при стремлении номера частичной суммы к бесконечности по последовательности четных индексов. Это может быть существенно, если краевые условия регулярны, но не сильно регулярны. При условии сильной регулярности краевых условий имеет место обычная равносходимость.

Следствие 2. *Пусть в условиях теоремы 4.1 краевые условия сильно регулярны. Тогда*

$$\left\| \sum_{|n|\leqslant m} \langle \mathbf{f}, \mathbf{z}_n\rangle \mathbf{y}_n - \langle \mathbf{f}, \mathbf{z}_n^0\rangle \mathbf{y}_n^0 \right\|_{L_\nu[0,\pi]} \to 0 \quad \textit{при} \ \ m \to +\infty.$$

Следствие 3. *Пусть $\mathcal{L}_{P,U}$ — регулярный оператор Дирака с потенциалом вида* (5) $P \in L_\varkappa[0,\pi]$, $\varkappa \in (1,\infty]$. *Пусть $\mathbf{f} \in L_\mu[0,\pi]$, где $\mu \in (1,\infty]$, причем $1/\varkappa + 1/\mu \leqslant 1$.*

Если ряд (7) *сходится в некоторой точке x отрезка $[0,\pi]$, то сходится и ряд* (6), *причем к тому же пределу. Если ряд* (7) *сходится равномерно на интервале $(\alpha,\beta) \subset [0,\pi]$, то ряд* (6) *также сходится на этом интервале равномерно к тому же пределу.*

В частности, если функция $\mathbf{f} \in BV[0,\pi]$ *и удовлетворяет краевым условиям* $U(\mathbf{f}) = 0$, *а* $P \in L_\varkappa[0,\pi]$ *для некоторого* $\varkappa > 1$, *то ряд* (6) *сходится в каждой точке* $x \in (0,\pi)$ *к* $\frac{1}{2}(\mathbf{f}(x-0)+\mathbf{f}(x+0))$. *Если к тому же функция* $\mathbf{f}$ *непрерывна, то ряд* (6) *сходится к* $\mathbf{f}(x)$ *равномерно.*

В случае сильной регулярности краевых условий ряд (6) *в этих утверждениях можно заменить на ряд* $\sum_{|n|\leqslant m}\langle \mathbf{f}, \mathbf{z}_n\rangle \mathbf{y}_n$.

Во втором параграфе получены оценки скорости равносходимости для случая, когда раскладываемая функция $f \in L_2[0,\pi]$. Напомним, что для любого $P \in L_1$ система $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ образует базис Рисса со скобками в пространстве $\mathbb{H}$. Зафиксируем произвольный ортонормированный базис $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ в $\mathbb{H}$ и обозначим через T — изоморфизм $\mathbb{H}$, осуществляющий замену базиса. Далее, для произвольной функции $\mathbf{f} \in \mathbb{H}$ положим

$$\varepsilon_N(\mathbf{f}) = \left(\sum_{|n|>2N} |\langle \mathbf{f}, e_n\rangle|^2\right)^{1/2}$$

— наилучшее приближение функции $\mathbf{f}$ по системе $\{e_n\}_{|n|\leqslant 2N}$. Очевидно, что для любой функции $\mathbf{f} \in L_2$: $\varepsilon_N(\mathbf{f}) \to 0$ при $N \to +\infty$.

Теорема 4.2. *Пусть* $\mathcal{L}_{P,U}$ *— регулярный оператор Дирака с потенциалом* $P \in L_\varkappa$ *вида* (5). *Тогда для любой функции* $\mathbf{f} \in L_2$ *справедлива оценка скорости равносходимости*

$$\|S_m(\mathbf{f}) - S_m^0(\mathbf{f})\|_{L_\nu} \leqslant C(\varepsilon_N(T^{-1}\mathbf{f}) + m^{-1/2}N\|\mathbf{f}\|_{L_2}), \quad \frac{1}{\varkappa} - \frac{1}{\nu} = \frac{1}{2}.$$

Здесь $N > N_0$ *выбирается произвольным, число* $C = C(P,U,\nu)$ *и номер* $N_0 = N_0(P,U,\nu)$ *зависят только от потенциала* P, *краевых условий* U *и индекса* ν, *а индекс* $m \geqslant N$.

Следствие 1. *Для регулярного оператора Дирака* $\mathcal{L}_{P,U}$ *с потенциалом* $P \in L_\varkappa$ *общего вида имеет место оценка*

$$\|S_m(\mathbf{f}) - S_m^0(\mathbf{f})\|_{L_\nu} \leqslant C(\varepsilon_N(T^{-1}W\mathbf{f}) + m^{-1/2}N\|\mathbf{f}\|_{L_2}), \quad \frac{1}{\varkappa} - \frac{1}{\nu} = \frac{1}{2}, \quad \text{где}$$

$$W(x) = \begin{pmatrix} e^{i\varphi(x)} & 0 \\ 0 & e^{i\psi(x)} \end{pmatrix},$$

$$\varphi(x) = \gamma x - \int_0^x p_1(t)dt, \quad \psi(x) = \int_0^x p_4(t)dt - \gamma x, \quad \gamma = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (p_1(t) + p_4(t))dt.$$

Недостаток приведенных выше оценок состоит в том, что для произвольной функции $\mathbf{f} \in \mathbb{H}$ мы не можем оценить скорость стремления величин $\varepsilon_N(T^{-1}\mathbf{f})$ и $\varepsilon_N(T^{-1}W\mathbf{f})$ к нулю при $N \to \infty$. Однако, если функция $\mathbf{f} \in W_2^\theta$, $\theta > 0$, то можно получать квалифицированные оценки скорости сходимости. Приведем результат для случая $P \in L_2[0,\pi]$. Пусть форма U задает произвольные сильно регулярные по Биркгофу краевые условия. Обозначим $\mathbb{H}^\theta = \{\mathbf{f} \in (W_2^\theta[0,\pi])^2 | \, U(\mathbf{f}) = 0\}$ (отметим, что $\mathbb{H}^\theta = (W_2^\theta[0,\pi])^2$ при $0 \leqslant \theta < 1/2$).

Следствие 2. *Пусть* $\mathcal{L}_{P,U}$ *— регулярный оператор Дирака с потенциалом* $P \in L_2$ *вида* (5), *а функция* $\mathbf{f} \in \mathbb{H}^\theta$ *для некоторого* $\theta \in (0,1]$. *Тогда*

$$\|S_m(\mathbf{f}) - S_m^0(\mathbf{f})\|_C \leqslant Cm^{-\frac{\theta}{2(1+\theta)}}\|\mathbf{f}\|_{W_2^\theta}.$$

В заключении излагаются итоги проведенного исследования, даются рекомендации по использованию полученных результатов, отмечаются дальнейшие перспективы разработки данной темы.

Автор благодарен своему научному консультанту доктору физико–математических наук профессору Шкаликову Андрею Андреевичу за полезные обсуждения и поддержку.

Список литературы

[1] *И. В. Садовничая* О равносходимости разложений в ряды по тригонометрической системе и по собственным функциям оператора Штурма–Лиувилля с потенциалом — распределением // Докады Акад. Наук. 2003. Т.392 №2. С. 170–173.

[2] *И. В. Садовничая* Новая оценка спектральной функции самосопряженного расширения в $L_2(\mathbb{R})$ оператора Штурма–Лиувилля с равномерно локально суммируемым потенциалом // Доклады Акад. Наук. 2005. Т.405 №2. С. 173–175.

[3] *И. В. Садовничая* Новая оценка спектральной функции самосопряженного расширения в $L_2(\mathbb{R})$ оператора Штурма–Лиувилля с равномерно локально суммируемым потенциалом // Дифф. уравнения. 2006. Т.42 №2. С. 188-201.

[4] *И. В. Садовничая* О скорости равносходимости разложений в ряды по тригонометрической системе и по собственным функциям оператора Штурма–Лиувилля с потенциалом — распределением // Дифф. уравнения. 2008. Т.44 №5. С. 656–664.

[5] *И. В. Садовничая* Равносходимость тригонометрического ряда Фурье с разложением по собственным функциям оператора Штурма–Лиувилля с потенциалом — распределением // Труды МИАН. 2008. Т.261. С. 249–257.

[6] *И. В. Садовничая* О скорости равносходимости с интегралом Фурье спектрального разложения, отвечающего самосопряженному расширению оператора Штурма–Лиувилля с равномерно локально суммируемым потенциалом // Дифф. уравнения. 2009. Т.45 №4. С. 506–511.

[7] *И. В. Садовничая* О равносходимости разложений в ряды по собственным функциям операторов Штурма–Лиувилля с потенциалами — распределениями // Матем. сб. 2010. Т.201 №9. С. 61–76.

[8] *И. В. Садовничая* Равносходимость в пространствах Соболева и Гельдера разложений по собственным функциям операторов Штурма–Лиувилля с потенциалами — распределениями // Доклады Акад. Наук. 2011. Т.437 №2. С. 162–163.

[9] *И. В. Садовничая* Равносходимость в пространствах Гельдера разложений по собственным функциям операторов Штурма–Лиувилля с потенциалами — распределениями // Дифф. уравнения. 2012. Т.48 №5. С. 674–685.

[10] *А. М. Савчук, И. В. Садовничая* Базисность Рисса со скобками для системы Дирака с суммируемым потенциалом // Современная математика. Фундаментальные направления. 2015. Т.58. С. 128–152.

[11] *И. В. Садовничая* $L_\mu \to L_\nu$–равносходимость спектральных разложений для системы Дирака с $L_\varkappa$ потенциалом // Доклады Акад. Наук. 2016. Т.467 №6. С. 641–644.

[12] *И. В. Садовничая* Равносходимость спектральных разложений для системы Дирака с потенциалом из пространств Лебега // Труды МИАН. 2016. Т.293. С. 296–324.

[13] *I. V. Sadovnichaya* Equiconvergence theorems for Sturm–Lioville operators with singular potentials (rate of equiconvergence in W_2^θ-norm // Eurasian Math. J. 2010. V.1 №1. P. 137–146.

Подписано в печать 15.09.2016
Тираж 100 экз.

Отпечатано в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН
119991, Москва, ул. Губкина, д.8