Отзыв научного руководителя
на кандидатскую диссертацию Н. М. Курносова

«Числа Бетти и трианалитические подмногообразия гиперкэлеровых многообразий»

представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 - геометрия и топология

Гиперкэлерова геометрия, она же голоморфно симплектическая геометрия - раздел алгебраической геометрии, изучающий комплексные многообразия с голоморфной симплектической формой. Изучение гиперкэлеровых многообразий началось в 1970-х с революционных работ Богомолова, доказавшего теорему о разложении гиперкэлеровых многообразий (после конечного накрытия) в произведение элементарных гиперкэлеровых многообразий (известных как многообразия с максимальной голономией) и торов. Также Богомолов доказал локальную теорему Торелли и построил форму пересечения на 2-х когомологиях, известную ныне как форма Богомолова-Бовилля-Фуджики. За прошедшие с тех пор 30 лет, гиперкэлерова геометрия оформилась в один из центральных предметов комплексной алгебраической геометрии. Существенный вклад в изучение гиперкэлеровых многообразий внесли Яу, Бовиль, Фуджики, Вуазен, Мукаи, Хойбрехтс, Хитчин, Буксом и Сэйвон; также гиперкэлеровы многообразия были одним из центральных объектов изучения в струнной физике, теории Янг-Миллса и теории симплектических особенностей.

Самая фундаментальная проблема, стоящая перед геометрами, работающими в гиперкэлеровой геометрии - это труднодоступность примеров и отсутствие новых примеров гиперкэлеровых многообразий. Богомолов, который положил начало предмету и много лет работал над ним в одиночку, закончил свою работу доказательством (ошибочным) их несуществования. В скором времени после этого, Фуджики и Бовилль выступили с явными конструкциями гиперкэлеровых многообразий. Фуджики взял раздутие симметрического квадрата К3-поверхности, и убедился в том, что оно голоморфно симплектично. Бовилль обобщил пример Фуджики и построил две серии гиперкэлеровых многообразий (схемы Гильберта К3 и обобщенные куммеровы многообразия). С тех пор было обнаружено ровно два новых примера гиперкэлеровых многообразий, в размерности 6 и 10; их построил О'Грэди в 1990-е годы.

В размерности 4, теорема Гуана ограничивает размерность когомологий гиперкэлерова многообразия; из полученных Гуаном неравенств следует, что гипотетический новый пример гиперкэлерова многообразия будет иметь когомологии, весьма мало отличающихся от известных примеров. Вычисления Гуана основываются на неравенствах, полученных М. Вербицким, построившим действие алгебры Ли so(4, b_2-2) на когомологиях, и С. Саламоном, эффективно применившим формулу Римана-Роха-Хирцебруха. Вне размерности 4, эти ограничения продолжают действовать, но ограничений на размерность когомологий сверху известно очень мало, и никаких результатов, обобщающих работу Гуана на другие размерности, до недавних времен не было.

В 2000-е, Хитчин и Сэйвон применили инварианты узлов, полученные в 1990-е Виттеном и Розанским, к топологии гиперкэлеровых многообразий. Инварианты Розанского и Виттена строятся по гиперкэлерову многообразию комплексной размерности 2n и 3-валентному графу с 2n вершинами. С таким графом Розанский и Виттен связывают полином от тензора кривизны, полученный умножением 2n копий тензора кривизны и сверткой индексов, обозначенных ребрами графа. Из этого 2n-тензора они делают (0,2n)-форму альтернированием, умножают на (2n,0)-форму антиголоморфного объема и интегрируют полученную форму объема по многообразию.

Используя гипотезу Делиня о колесном графе, доказанную в конце 1990-х, Хитчин и Сэйвон смогли выразить инварианты Розанского-Виттена определенных графов через классы Черна гиперкэлерова многообразия.

Для некоторых графов полученная Розанским-Виттеном форма объема неотрицательна, что дает новые неравенства на классы Черна и опосредованно на когомологии.

В третьей главе своей диссертации (после введения и предварительных сведений), Никон Курносов получает новые неравенства на размерность когомологий гиперкэлерова многообразия комплексной размерности 6 и 8. Никон пользуется приемами, аналогичными тем, что использовал Гуан в размерности 4, и применяет неравенство, которое следует из результатов Хитчина-Сэйвона. В результате, среди прочего, получена оценка b_2 сверху в предположении, что нечетные когомологии зануляются.

В четвертой главе Никон Курносов изучает абсолютно трианалитические подмногообразия в обобщенном многообразии Куммера.

Трианалитические подмногообразия суть подмногообразия, которые голоморфны по отношению к трем комплексным структурам I,J,K. Такие подмногообразия всегда голоморфно симплектичны (потому что гиперкэлеровы), хотя не все голоморфные симплектические подмногообразия гиперкомплексны.

Достаточно общая деформация гиперкэлерова многообразия всегда неалгебраична, и все комплексные подмногообразия такого многообразия трианалитичны. Комплексные подмногообразия общей деформации гиперкэлерова многообразия называются абсолютно трианалитическими, потому что они трианалитичны относительно всех гиперкэлеровых структур на этом многообразии. Два таких общих многообразия можно отождествить диффеоморфизмом, который переведет все абсолютно трианалитические многообразия в абсолютно трианалитические многообразия.

Классификация абсолютно трианалитических многообразий в известных гиперкэлеровых многообразиях - задача, которой посвящено довольно много литературы. В общей деформации схемы Гильберта K3 нетривиальных комплексных подмногообразий нет, но другая серия гиперкэлеровых многообразий - обобщенные многообразия Куммера - допускает трианалитические подмногообразия, построенные (и отчасти классифицированные) Вербицким и Калединым в серии работ, опубликованных в конце 1990-х. Про подмногообразия двух "спорадических" примеров, построенных О'Грэди, кроме результатов Вербицкого и Солдатенкова пока ничего не известно, но их, по всей видимости, тоже нет.

Известно, что все подмногообразия обобщенных многообразий Куммера являются раздутиями факторов комплексных торов по действию группы Вейля полупростой алгебры Ли, но какие именно группы Вейля могут встречаться в этих многообразиях, никто не ведает. Никон Курносов доказывает, что она по крайней мере нетривиальна, то есть никакой тор не может быть реализован как абсолютно трианалитическое подмногообразие в обобщенном многообразии Куммера.

Делается это так. Пусть Z абсолютно трианалитична в обобщенном многообразии Куммера. Тогда Z можно продеформировать в обобщенное многообразие Куммера, связанное с общим тором, и спроектировать в симметрическую степенп общего тора. Поскольку все подмногообразия в произведении общих торов суть торы, эта проекция Z' будет фактором тора по какой-то подгруппе симметрической группы, а ее прообраз в произведении торов будет тором, то есть окажется изогеничен Z.

Оказывается, что такого не может быть в силу условия, которое выполнено в когомологиях гиперкэлерова многообразия: интеграл подходящей степени вещественной части голоморфной симплектической формы по трианалитическому подмногообразию Z равен интегралу от такой же степени кэлеровой формы по Z; переход от тора к обобщенному Куммеру не меняет голоморфной симплектической формы, но кэлерова форма на обобщенном Куммере получается сложением класса кэлеровой формы на торе и класса когомологий дивизора раздутия с достаточно малым (по модулю) отрицательным коэффициентом. Интегрируя эти формы по тору и сравнивая их, Никон доказывает, что никакой тор, который трианалитичен в симметрической степени общего двумерного тора, не может быть трианалитичен в его раздутии и в соответствующем обобщенном Куммере.

Полученные в диссертации результаты являются новыми, они опубликованы в ведущих российских и зарубежных математических журналах и прошли апробацию на многих специализированных семинарах и конференциях. Диссертант демонстрирует свободное владение методами алгебраической геометрии, топологии и кватернионной дифференциальной геометрии. Результаты диссертации снабжены подробными доказательствами. Изложение материала хорошо продумано и оформлено, снабжено множеством важных и малоизвестных деталей, дополненных прекрасной библиографией, и демонстрирует великолепную профессиональную подготовку в выбранной области.

Считаю, что работа Н. М. Курносова удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК к кандидатским диссертациям по специальности 01.01.04 - геометрия и топология.

Профессор факультета математики НИУ ВШЭ
Михаил Вербицкий, Ph. D. (Harvard). (М. С. Вербицкий)

17.08.2016

Подпись М. С. Вербицкого заверяю,
декан факультета математики НИУ ВШЭ, профессор, доктор физико-математических наук В. А. Тиморин. (В. А. Тиморин)

Заместитель начальника отдела документационного обеспечения делопроизводства управления персонала
Переварюха Д. В.
Подпись заверяю

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ