Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

На правах рукописи

УДК 512.742.3, 514.154.4, 514.164.4, 515.142.211, 515.165.4

Курносов Никон Михайлович

Числа Бетти и трианалитические подмногообразия гиперкэлеровых многообразий

01.01.04 — геометрия и топология

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
Ph.D.,
проф. М. С. Вербицкий

Москва — 2016

Оглавление

Глава 1

Введение

1.1. Постановка задачи

Данная работа посвящена изучению когомологий и абсолютно трианалитических подмногообразий гиперкэлеровых многообразий. Этим вопросы изучаются в большом числе работ, например, [KV], [V1], [V2], [SV], [Gu], [Gu2], [HS] и многих других. Гиперкэлерово многообразие – это риманово многообразие с тройкой согласованых с метрикой комплексных структур, удовлетворяющих кватернионным соотношениям, кэлеровы формы которых замкнуты. Такие многообразия являются также голоморфно симплектическими, а обратное верно при условии кэлеровости [Y]. Согласно теореме Богомолова [B] любое компактное гиперкэлерово многообразие накрывается произведением торов и гиперкэлеровых многообразий с максимальной голономией (простых). Общая теория гиперкэлеровых многообразий была разработана Богомоловым, Бовилем и Фуджики (см. [B, Bea2, F]). Затем значительные результаты получили Хойбрехтс [H1] и Вербицкий [V7], доказавший, в частности, глобальную Теорему Торелли. Обзор известных результатов о гиперкэлеровых многообразиях можно найти в главе 2.

Понятие трианалитических и абсолютно трианалитических подмногообразий было введено Вербицким ([V1]).

Определение 1.1.1. Пусть (M, I, J, K) является компактным голоморфно симплектическим кэлеровым многообразием и $Z \subset (M, I)$ комплексное подмногообразие, которое является комплексно-аналитическим по отношению к любой гиперкэлеровой структуре, совместимой с I. Тогда Z называется *абсолютно трианалитическим* подмногообразием.

Ранее Вербицкий, Каледин [KV], [KV-book] доказали отсутствие абсолютно трианалитических подмногообразий в схемах Гильберта n точек на $K3$, а также заметили, что схема Гильберта является абсолютно трианалитическим подмногообразием в обобщённом многообразии Куммера. Считается, что других нетривиальных примеров абсолютно трианалитических подмногообразий для известных примеров простых гиперкэлеровых многообразий нет. Недавно Вербицкий и Солдатенков доказали отсутствие известных примеров гиперкэлеровых многообразий как абсолютно трианалитических подмногообразий в многообразиях О'Грэди [SV]. Тем не менее, вопрос наличия абсолютно трианалитических торов в обобщённом куммеровом многообразии долгое время был открытым.

В данный момент известно всего четыре примера простых гиперкэлеровых многообразий с точностью до деформационной эквивалентности. А именно, схемы Гильберта точек над $K3$, обобщённые многообразия Куммера [Bea2] и два примера О'Грэди [O1, O2]. В своё время Каледин, Лен, Зоргер в работе [KLS] показали, что для всех векторов Мукаи соответствующее пространство модулей полустабильных пучков ранга 2 на $K3$ или абелевой поверхности либо не имеет симплектического разрешения особенностей, либо, если оно есть, то полученное гиперкэлерово многообразие деформационно эквивалентно схеме Гильберта над $K3$ или спорадическим примерам О'Грэди. Бовиль сформулировал гипотезу [Bea1]:

Гипотеза 1.1.2. Существует только конечное число простых компактных гиперкэлеровых многообразий в каждой размерности с точностью до деформационной эквивалентности.

Важным шагом в направлении доказательства этой гипотезы служат результаты, связанные с ограниченностью возможных чисел Бетти гиперкэлеровых многообразий.

Гуан в своей работе [Gu] доказал, что существует конечное число возможностей для наборов чисел Бетти для гиперкэлеровых многообразий в комплексной размерности четыре, в частности, второе число Бетти b_2 не превышает 23. Его результаты не обобщаются напрямую в большие размерности. Однако, они тесно связаны с инвариантами Розанского-Виттена. Эти инварианты изучались в работах [S], [HS] и определяются они как свёртка по всем рёбрам тривалентного графа с $2k$ вершинами голоморфно-симплектической формы и тензора, состоящего из прозведения $2k$-копий тензора кривизны. В работах Сейвона и Хитчина были подсчитаны инварианты для наиболее простых графов.

Сейвону [S-b2] удалось получить точную оценку на второе число Бетти гиперкэлеровых многообразий в размерности шесть, используя результаты Вербицкого [V9] и Луенги-Лунца [LL]. В настоящей диссертации получены обобщения результатов Гуана и оценки на второе число Бетти в размерностях восемь и десять.

Цель работы

Цель работы состоит в доказательстве отсутствия абсолютно трианалитических торов в обобщённом многобразии Куммера. Также целью является обобщение результатов Гуана для гиперкэлеровых многообразий большей размерности и получении ограничений на числа Бетти гиперкэлеровых многоообразий.

Методы исследования

В диссертации использованы методы комплексной алгебраической геометрии – разрешение особенностей, теория калибраций. Применяется теорема Каледина о разрешении симплектических особенностей для доказательства изогенности трианалитического тора компоненте торов в произведении.

Применяются инварианты Розанского-Виттена, для получения обобщения результатов Гуана используются формула Саламона и теоремы Вербицкого и Луенги-Лунца, а также результаты Сейвона о строении кольца когомологий гиперкэлеровых многообразий в размерности шесть.

Основные результаты диссертации

Диссертация содержит следующие новые определения, результаты и методы:

- Получено неравенство на числа Бетти гиперкэлеровых многообразий в размерности шесть.
- Получены следствия основного неравенства, включающие конечность числа гиперкэлеровых многообразий в размерности шесть с $b_2 = 23$.
- Доказано отсутствие абсолютно трианалитических торов в обобщённом многобразии Куммера.

Научная новизна

Утверждения 3.2.5, 3.3.3, 3.4.1, 3.4.4, 3.5.1, 4.3.1, 4.3.4, 4.3.5, 4.3.8 являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация имеет теоретический характер. Результаты диссертации могут быть полезны математикам, занимающимся комплексной алгебраической геометрией, гиперкэлеровой геометрией, изучающих многообразия Калаби-Яу.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих научно-исследовательских семинарах:

– семинар Геометрические структуры на многообразиях;

– семинар Постникова;

– семинар Лаборатории Понселе, НМУ и сектора 4.1 ИППИ РАН;

– Доклад "Absolutely trianalytic tori in the generalized Kummer varieties", MAGIC seminar, Imperial College, 28.09.2015.;

– Доклад "Betti numbers of hyperkahler manifolds", Algebra/Algebraic Geometry seminar, University of Sheffield, 29.09.2015.;

– Доклад "Betti numbers of hyperkahler manifolds", ULB Geometry seminar, ULB, Brussels, 10.11.2015.;

– Доклад "On the boundness of the second Betti number of hyperkähler manifolds", Algebraic Geometry Seminar, NYU, 02.02.2016.;

Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

1. Доклад "Connections on nilmanifolds", Geometric structures on manifolds and their applications, Marburg, Germany, 1-7.07.2012.

2. Доклад "On the dynamics of codimension one holomorphic foliations with ample normal bundle", Workshop on complex geometry and foliations, dedicated to the memory of Marco Brunella, September 17-21, 2012.

3. Доклад "Связности на нильмногообразиях", Летняя школа-конференция по проблемам алгебраической геометрии и комплексного анализа, Ярославль, 20-25.05.2013.

4. Доклад “The second Betti number of hyperkähler manifolds”, The School “Carnival Differential Geometry” (Torino), 24-27.02.2014.

5. Доклад “The inequalities involving the Betti numbers of hyperkahler manifolds”, Геометрическая теория управления и анализ на метрических структурах, 3-8.08.2014.

6. Постер “Inequalities with Betti and Hodge numbers for hyperkaehler manifolds”, British Algebraic Geometry meeting (BrAG) (Warwick), 19-21.09.2014.

7. Постер “Trianalytic subvarities in hyperkahler manifolds”, Hyperbolicity-2015, Ilhabela, Brazil, 5-15.01.2015.

8. Доклад “Absolutely trianalytic tori in the generalized Kummer variety”, Conference “Hyperkahler Saturday”, Moscow, Russia, 23.05.2015.

9. Доклад “Absolutely trianalytic tori in the generalized Kummer variety”, V школа-конференция по алгебраической геометрии и комплексному анализу для молодых математиков России, 17-22.08.2015.

10. Доклад “The second Betti number of hyperkahler manifolds”, Conference “Workshop on almost hermitian and contact geometry”, Bedlewo, Poland, 18.10.-24.10.2015.

11. Постер “Cohomology and subvarieties of hyperkähler manifolds”, BrAG, Edinburgh, 13-17 April, 2016.

12. Доклады “Inequalities involving Betti numbers of hyperkähler manifolds” and “Trianalytic subvarities”, miniPAGES Semester, Warsaw, May, 2016.

13. Доклад “Ограничения на когомологии гиперкэлеровых многообразий”, VI Международная конференция по алгебраической геометрии, комплексному анализу и компьютерной алгебре, Коряжма, 03-09.08.2016.

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в 5 работах (2 в рецензируемых журналах), список которых приведен в конце диссертации.

Структура работы

Диссертация состоит из четырёх глав и списка литературы. Первая глава – введение. В ней формулируются основные вопросы, изучаемые в этой работе, даётся общий обзор хода доказательства, обозначаются перспективы дальнейших исследований, вводятся используемые обозначения. Во второй главе даются предварительные сведения, касающиеся понятий, возникающих в работе, а также техники работы с ними. Третья глава диссертации посвящена ограничениям на числа Бетти гиперкэлеровых многообразий. В четвёртой главе мы изучаем абсолютно трианалитические торы в обобщённом многообразии Куммера.

Полный объем диссертации – 78 страниц, список литературы состоит из 75 наименований.

1.2. Краткое содержание работы

1.2.1. Ограничения на числа Бетти гиперкэлеровых многообразий

В размерности четыре ограничения на числа Бетти удалось получить Гуану в [Gu, Gu2]. Важной задачей является получение ограничений на числа Бетти в больших размерностях.

В данной диссертации (глава 3) исследуется задача, как можно обобщить теорему Гуана на размерность шесть и выше. На данный вопрос даётся следующий ответ:

Теорема 1.2.1. *Пусть M – шестимерное гиперкэлерово многообразие. Тогда*

$$97 + \frac{37}{2}b_3 - \frac{19}{2}b_4 - \frac{b_5}{2} + \frac{23}{2}h^{2,2} \leqslant \frac{38b_2^2 - 1030b_2 + 7572}{b_2 + 1}. \tag{1.2.1}$$

Доказательство этой теоремы основано на инвариантах Розанского-Виттена ([HS]), при этом результат Гуана также оказывается следствием неравенств на инварианты Розанского-Виттена:

Лемма 1.2.2. *Пусть M – неприводимое гиперкэлеровое многообразие комплексной размерности $2n$. Тогда*

$$-b_{\Theta^k} \leq (b_2 + 2(k-1))b_{\Theta^{k-2}\Theta_2}. \tag{1.2.2}$$

Доказанное неравенство вместе с недавними результатами Сейвона позволяет получить ограничения на числа Бетти многообразия О'Грэди, а также доказать конечность числа возможных наборов чисел Бетти для гиперкэлеровых многообразий в размерности шесть. В частности, для фиксированного $b_2 = 23$ у нас имеется конечное число возможностей. При этом актуальным остаётся вопрос, могут ли быть деформационно неэквивалентные схеме Гильберта многообразия с $b_2 = 23$.

1.2.2. Абсолютно трианалитические подмногообразия

Рассмотрим гиперкэлерово многообразие (M, I, J, K). Любое трианалитическое подмногообразие гиперкэлерового многообразия $Z \to M$ имеет гладкую гиперкэлерову нормализацию $\widetilde{Z}$ в M; эта иммерсия в общей точке биективна на образ. Тем самым, естественным является вопрос, какие абсолютно трианалитические подмногообразия могут содержаться в известных примерах простых гиперкэлеровых многообразий.

Вербицкий доказал, что любая деформация схемы Гильберта $K3$ поверхности не содержит комплексных подмногообразий [V3]. Аналогичное утверждение предполагалось Калединым и Вербицким и в случае обообщённой поверхности Куммера [KV]. Однако, затем они ([KV1]) обнаружили контрпример, действительно, рассмотрим инволюцию $\nu : t \to -t$, действующую на торе. Эта инволюция может быть продолжена до инволюции схемы Гильберта тора $T^{[n+1]}$, и, так как она коммутирует с отображением Альбанезе $T^{[n+1]} \longrightarrow T$, то ν сохраняет обобщённое многообразие Куммера $K_n(T)$. Замыкание множества пар неподвижных точек деформационно эквивалентно схеме Гильберта. Случай многообразий О'Грэди рассмотрен в [SV].

Теорема 1.2.3. *[SV] Пусть M является гиперкэлеровым многообразием максимальной голономии, T – гиперкэлеров тор, и $T \to M$ гиперкэлерова иммерсия с абсолютно трианалитическим образом. Тогда*

$$\dim_{\mathbb{C}}(T) \geqslant 2^{\frac{b_2(M)-1}{2}},$$

где $b_2(M)$ – второе число Бетти.

Это позволяет доказать, что в многообразиях О'Грэди нет абсолютно трианалитических торов. Также из соображений размерности вторых когомологий следует отсутствие известных простых гиперкэлеровых многообразий в качестве абсолютно трианалитических подмногообразий многообразия О'Грэди M_{10} [SV].

Согласно следующей теореме [GV] трианалитические многообразия связаны с теорией калибраций.

Теорема 1.2.4. *Пусть* (M, I, J, K, g) *– гиперкэлерово многообразие,* $\omega_I, \omega_J, \omega_K$ *соответствующие симплектические формы и* $\Theta_p := \frac{(\omega_I^2+\omega_J^2+\omega_K^2)^p}{c_p}$ *стандартная* $SU(2)$*-инвариантная* $4p$*-форма, нормированная константой* $c_p = \sum_{k=1}^{p} \frac{(p!)^2}{(k!)^2}(2k)!4^{p-k}$*. Тогда* Θ_p *калибрация и её грани это* p*-мерные кватернионные подпространства* TM*. Кроме того, форма* $\Xi_p := \frac{(\omega_J^2+\omega_K^2)^p}{(p!)^2 4^p}$ *также калибрация с теми же гранями.*

Подмногообразия, калибруемые формой Θ_p называются **трианалитическими подмногообразиями**.

В нашей диссертации исследуется вопрос наличия абсолютно трианалитических торов в многообразии Куммера. Выясняется, что таких торов там нет

Теорема 1.2.5 (Основная теорема)**.** *Пусть* $K_n(T)$ *– обобщённое многообразие Куммера, и* $Z \subset K_n(T)$ *абсолютно трианалитическое многообразие. Тогда* Z *не является тором.*

Вместе с результатами предыдущих исследователей она позволяет сказать, что в известных примерах гиперкэлеровых многообразий нет абсолютно трианалитических торов. Таким образом, в этой части классификация завершена. Если рассматривать только известные деформационные типы гиперкэлеровых многообразий, то открытым остаётся вопрос существования абсолютно трианалитических подмногообразий деформационного типа M_{10} в обобщённом многообразии Куммера, а также схем Гильберта n точек на $K3$ в многообразии О'Грэди M_6.

Для доказательства основного результата мы рассматриваем образ $\pi(Z)$ трианалитического тора в симметрической степени тора (общего) и соответствующий прообраз $\tau^{-1}(\pi(Z))$ в T^n.

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & \pi(Z) \arrow[d] & \tau^{-1}(\pi(Z)) \arrow[l] \arrow[d] \\
T^{[n]} \arrow[r, "\pi"] & T^{(n)} & T^n, \arrow[l, "\tau"']
\end{tikzcd}$$

где $T^{[n]}$ – схема Гильберта n точек тора, $T^{(n)}$ – симметрическая степень тора, отображение π это отображение Гильберта-Чжоу (2.1), τ отображение факторизации $T^n \to T^{(n)}$, и квадрат декартов.

Было доказано, что отображения $\tau : \tau^{-1}(\pi(Z)) \to \pi(Z)$ и $\pi : Z \to \pi(Z)$ конечны в общей точке (Предложения 4.3.4, 4.3.5). Из этого, в частности, следует изогенность абсолютно трианалитического тора Z и прозвольной компоненты в $\tau^{-1}(\pi(Z))$.

Предложение 1.2.6. *Пусть $Z \subset T^{[n]}$ – абсолютно трианалитический тор в обобщённом многообразии Куммера. Рассмотрим диаграмму*

$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{Z} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
Z \arrow[dr] & & \tau^{-1}(\pi(Z)) \arrow[dl] \\
 & \pi(Z) &
\end{tikzcd}$$

где $\tilde{Z}$ – расслоенное произведение Z и $\tau^{-1}(\pi(Z))$. Тогда Z и любая компонента $\tau^{-1}(\pi(Z))$ изогенные торы.

Далее, используя теорию калибраций, были подсчитаны симплектический и кэлеров объёмы для исходного тора Z и для подтора $\tau^{-1}(\pi(Z))$ в T^n. Отношения этих объёмов из-за гиперкэлерового условия должны быть равны, однако, в нашем случае, это оказывается не так, что приводит к противоречию.

Благодарности

Автор выражает благодарность своему научному руководителю М. Вербицкому, без внимания и неоценимой помощи которого эта диссертация не могла быть написана. Также автор выражает благодарность за обсуждения результатов работы Ф. Богомолову, С. Галкину, В. Жгуну, Д. Каледину, А. Солдатенкову.

Работа была выполнена при поддержке Лаборатории Алгебраической Геометрии и ее приложений НИУ-ВШЭ в рамках государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации "5-100" и гранта правительства РФ дог. 11.G34.31.0023, гранта РНФ (соглашение 14-21-00052 от 11.08.14). Автор поддержан грантом Фонда Саймонса (2013), грантом "Молодая математика России" (2016) и грантом МК-1297.2014.1 (соисполнитель).

Также автор признателен всем близким и друзьям за поддержку во время работы над диссертацией.

1.3. Обозначения и сокращения

В этой работе мы будем использовать следующие обозначения:

Голоморфно симлектическая форма – Ω,

Группа Пикара многообразия X – $\mathrm{Pic}(X)$,

Дифференциал Дольбо – ∂,

Класс Тода многообразия M – $\mathrm{Td}(M)$,

Обобщённое многообразие Куммера – $K_n(T)$,

Пространство Тейхмюллера – Teich,

Симметрическая степень X – $\mathrm{Sym}^n(X)$ или $X^{(n)}$,

Схема Гильберта n точек для поверхности X – $\mathrm{Hilb}_n(X)$ или $X^{[n]}$,

Тензор кривизны – K^i_{jkl},

Числа Бетти, числа Черна – b_i, c_i соответственно.

Глава 2

Предварительные сведения

Эта глава носит подготовительный характер. В ней приведены необходимые определения и предварительные сведения о гиперкэлеровых многообразиях и их когомологиях, абсолютно трианалитических подмногоообразиях, инвариантах Розанского-Виттена.

2.1. Гиперкэлеровые многообразия и их примеры

Определения и примеры

В дальнейшем мы будем всегда рассматривать дифференцируемые многообразия без края, класса C^∞.

Определение 2.1.1. **Гиперкэлеровым многообразием** называется риманново многоообразие (M, g) с тройкой согласованных с метрикой комплексных структур I, J и K, удовлетворяющих следующим свойствам:

(i) метрика g на M кэлерова для этих комплексных структур,

(ii) для эндоморфизмов I, J и K вещественного касательного расслоения выполнено $I \circ J = -J \circ I = K$, $I^2 = J^2 = K^2 = -1$.

Любая тройка чисел $a, b, c \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, определяет оператор $L := aI + bJ + cK$, который удовлетворяет $L^2 = -1$ и задаёт кэлерову структуру на (M, g). Такую комплексную структуру называют **индуцированной гиперкэлеровой структурой**. Комплексные подмногообразия (M, L) для разных (a, b, c) изучались в [V1], [V2].

Также гиперкэлеровыми многообразиями называют те многообразия, группа голономии которых по классификации Берже ([Ber], [J]) лежит в $\mathrm{Sp}(n)$. В этом случае, на касательном пространстве имеется кватерионнная структура и естественно возникает тройка комлексных структур I, J, K, удовлетворяющих всем необходимым свойствам [GHJ, Часть 1]. При этом, любое гиперкэлерово многообразие является также многообразием Калаби-Яу.

Другим, крайне близким объектом являются голоморфно-симплектические многообразия. Зачастую эти понятия используют как синонимы.

Определение 2.1.2. Многообразие M называется **голоморфно симплектическим**, если это комплексное многообразие с замкнутой голоморфной 2-формой Ω на M, такой что $\Omega^n = \Omega \wedge \Omega \wedge ... \wedge \Omega$ является нигде невырожденным сечением канонического класса многообразия M, где $2n = \dim_{\mathbb{C}}(M)$.

Пусть (M, I, J, K) – гиперкэлерово многообразие и пусть $\omega_I, \omega_J, \omega_K$ – соответствующие кэлеровы формы, определяемые следующим образом:

$$\omega_R = g(RX, Y),$$

где $R = I, J, K$.

Простое алгебраическое вычисление ([Bes]) показывает, что форма

$$\Omega = \omega_J + \sqrt{-1}\omega_K \tag{2.1.1}$$

имеет тип $(2, 0)$. Поскольку она замкнута, то она также и голоморфна. Действительно, из замкнутости следует, что $\partial\Omega = \bar{\partial}\Omega = 0$, т.е. Ω голоморфна. Более того, эта форма, как легко видеть, нигде невырожденна. Она называется *голоморфно симплектической формой многообразия* M. Таким образом, соответствующее комплексное многообразие (M, L) является голоморфно симплектическим для данного гиперкэлерового M и индуцированной комплексной структуры L. Гиперкэлерова структура на компактном комплексном многообразии существует тогда и только тогда, когда оно кэлерово и голоморфно симплектическое.

Теорема 2.1.3. *([Bea2], [Bes, Chapter 11]) Пусть M – это компактное голоморфно симплектическое кэлерово многообразие с голоморфно симплектической формой Ω, кэлеров классом $[\omega] \in H^{1,1}(M)$ и комплексной структурой I. Пусть $n = \dim_{\mathbb{C}} M$. Предположим, что $\int_M \omega^n = \int_M (\Re\Omega)^n$. Тогда существует единственная гиперкэлерова структура $(I, J, K, (\cdot,\cdot))$ на M, такая что класс когомологий формы $\omega_I = (\cdot, I\cdot)$ равен $[\omega]$ и каноническая симплектическая форма $\omega_J + \sqrt{-1}\omega_K$ совпадает Ω.*

Это утверждение является следствием теоремы Калаби-Яу.

Теорема 2.1.4 (Теорема Калаби-Яу). *([Y], [GHJ, Chapter 1]) Пусть* (M, I) *– компактное комплексное многобразие и* g *– кэлерова метрика на* M *с кэлеровой формой* ω*. Предположим, что* ρ' *– вещественная, замкнутая (1,1)-форма на* M*, такая что* $[\rho'] = 2\pi c_1(M)$*. Тогда существует единственная кэлерова метрика* g' *на* M *с кэлеровой формой* ω'*, такая что* $[\omega'] = [\omega] \in H^2(M, \mathbb{R})$ *и формой Риччи* g'*, равной* ρ'*.*

Определение 2.1.5. Компактное гиперкэлерово многообразие M называется **простым**, или **неприводимым голоморфно симплектическим** или **максимальной голономии**, если $\pi_1(M) = 0$, $H^{2,0}(M) = \mathbb{C}$.

Этот класс многообразий особенно важен, поскольку, оказывается, что все компактные гиперкэлеровые многообразия накрываются простыми.

Теорема 2.1.6 (теорема Богомолова о разложении, [B]). *Любое гиперкэлерово многообразие допускает конечное накрытие произведением торов и простых гиперкэлеровых многообразий.*

Следствие 2.1.7. *[Bea2]*

Пусть M *– компактное гиперкэлерово многообразие. Тогда следующие условия эквивалентны:*

- M *– простое,*
- M *не представляется как произедение двух простых гиперкэлеровых многообразий положительной размерности.*

Определение 2.1.8. Пусть M является гиперкэлеровым многообразием и S семейство индуцированных комплексных структур $L := aI + bJ + cK$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Тогда S называется **твисторным семейством** комплексных структур.

Двумерные неприводимые голоморфно симплектические многообразия это $K3$ поверхности. В больших размерностях известно лишь несколько примеров простых гиперкэлеровых многообразий. Приведём известные конструкции простых гиперкэлеровых многообразий, при этом компактные многообразия одного деформационного типа мы не различаем.

(0) *$K3$ поверхности.*

Определение 2.1.9. $K3$ повехностью называется компактная комплексная поверхность с тривиальным каноническим классом и $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$.

Сиу [Siu] показал, что любая $K3$ поверхность является кэлеровой. В больших размерностях, кэлеровость из тривиальности канонического класса и $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ не следует ([Gu2], [B2]).

Примером $K3$ поверхности является квартика в $\mathbb{P}^3$. Например, *квартика Ферма*, задаваемая уравнением $\left\{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) | x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 0\right\}$.

(i) *Схема Гильберта n точек на $K3$.*

Начиная с $K3$ поверхности X, рассматриваем симметрическое произведение $X^{(r)} = X^r/\mathfrak{S}_r$, которое параметризует подмногообразия из r точек на $K3$ поверхности X, посчитанные с учётом кратности; оно гладкое на открытом X_0, состоящем из подмножеств с r различными точками, и особое в остальных случаях. Далее сингулярную часть раздуваем вдоль диагоналей, получая гладкое компактное многообразие. Это и есть схема Гильберта $X^{[r]}$. Естесственное отображение $X^{[r]} \to X^{(r)}$ изоморфизм на X_0, и является разрешением особенностей $X^{(r)}$. Говоря по-другому, схема Гильберта параметризует все 0-мерные подсхемы длины n. Если X – это $K3$ поверхность, то схема Гильберта n точек над X, обозначаемая $\mathrm{Hilb}_n(X)$, это неприводимое голоморфно симплектической многообразие [Bea2]. Его размерность $2n$ и для $n > 1$ его второе число Бетти равно 23.

Рассмотрим детально наиболее простой случай, когда $n = 2$. Для любой $K3$ поверхности X схема Гильберта двух точек $\mathrm{Hilb}^2(X)$ – это раздутие

$\mathrm{Hilb}^2(X) \to S^2(X)$ диагонали в симметрическом квадрате

$$\Delta = \{\{x,x\} \mid x \in X\} \subset S^2(X) = \{\{x,y\} \mid x,y \in X\}.$$

Иначе говоря, $\mathrm{Hilb}^2(X)$ это $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-фактор раздутия диагонали в $X \times X$. Поскольку для $K3$ поверхности существует только одна $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-инвариантная 2-форма на $X \times X$, то голоморфно симплектическая структура на $\mathrm{Hilb}^2(X)$ единственна.

Замечание 2.1.10. Если X проективно, то $\mathrm{Hilb}_n(X)$ проективно, так как она может рассматриваться, как пространство модулей стабильных пучков ранга один на X с $c_2 = n$ [HL]. Если же X непроективно, то схема Гильберта в этом случае не схема, но всё же кэлерова согласно [Var].

Примером многообразия деформационно эквивалентного схеме Гильберта двух точек на $K3$ поверхности служит многообразие Фано $M_1(Y)$ прямых на гладкой кубической гиперповерхности Y в $\mathbb{P}^5$, построенное Бовилем и Донаги [BD]. При этом симлектическая структура может быть задана следующим образом: пусть $C \subset M_1(Y) \times Y$ обозначает универсальное семейство прямых и pr_i $(i = 1, 2)$ – проекции на i-ый сомножитель. Для любой образующей $\alpha \in H^{3,1}(Y) \cong \mathbb{C}$ мы можем построить голоморфную 2-форму $\Omega = \mathrm{pr}_{1*}\,\mathrm{pr}_2^*\,\alpha$ на $M_1(Y)$. Эта конструкция была обобщена М. Леном, К. Леном, Зоргером и ван Стратеном [LLSV], они построили голоморфно симплектическое многообразие исходя из пространства скрученных кубик на кубической гиперповерхности, не содержащей плоскостей, в $\mathbb{P}^5$. Позднее Лен и Аддингтон [AL] доказали, что полученное многообразие деформационно эквиалентно схеме Гильберта четырёх точек на $K3$.

(ii) *Обобщённое многообразие Куммера.* Если T комплексный тор размерности два, то заметим, что схема Гильберта n точек на торе $T^{[n]}$ обладает теми же свойствами, что и схема Гильберта $K3^{[r]}$, но неодносвязна. Групповая структура на торе T задаёт отображение суммирования

$$s\,(t_1, \ldots, t_n) = t_1 + \ldots + t_{n+1},$$

$$\Sigma : T^{n+1} \to T,$$

которое индуцирует отображение $\Sigma : T^{[n+1]} \to T$. Легко видеть, что Σ совпадает с отображением Альбанезе. Обобщённым многообразием

Куммера $\mathrm{K}_n(T)$, ассоциированным с тором T, называется прообраз $\Sigma^{-1}(0) \subset T^{[n+1]}$ нуля $0 \in T$. Это гиперкэлерово многообразие размерности $2n$ [Bea1]. В случае $n > 2$ его второе число Бетти равно 7.

(iii) *Многообразие О'Грэди размерности десять M_{10}.* Пусть X вновь является $K3$ поверхностью, и M – пространство модулей стабильных расслоений ранга два на X, с классами Черна $c_1 = 0, c_2 = 4$. IЭто пространство модулей допускает естественную компактификацию $\tilde{M}$, получаемую добавлением классов полустабильных пучков без кручения. Вдоль границы оно особо, но О'Грэди ([O1]) построил десингуляризацию $\tilde{M}$, являющуюся новым гиперкэлеровым многообразием размерности десять. О'Грэди доказал, что b_2 хотя бы 24 [O1], поэтому оно не деформационно эквивалентно схеме Гильберта.

Позднее Рапаньетта определил, что второе число Бетти $b_2(M_{10}) = 24$ [R]. Эйлерову характеристику M_{10} определил Мозговой [Mo]. Ромб Ходжа для многоообразия О'Грэди M_{10} неизвестен.

(iv) *Многообразие О'Грэди размерности шесть M_6.* Аналогичная конструкция может быть использована для комплексного тора и расслоений ранга два с $c_1 = 0, c_2 = 2$. В этом случае, мы получаем гиперкэлерово многообразие размерности шесть [O2]. Его второе число Бетти b_2 равно 8 [O2]. Числа Ходжа M_6 были недавно определены Монгарди, Рапаньеттой и Саккой [MRS] (см. замечание 3.4.2).

Таким образом, мы имеем две серии (i) и (ii) и два спорадических примера (iii) и (iv). Все они имеют различные числа Бетти. При этом про многообразия О'Грэди в отличии от остальных примеров известно существенно меньше.

Кроме приведённых конструкций гиперкэлеровых многообразий есть и другие, в частности конструкции Ёшиоки, О'Грэди [O3, Yo]. Но все они деформационно эквивалентны уже известным примерам.

Бовиль предположил, что в каждой размерности примеров простых гиперкэлеровых многообразий существует конечное число.

Гипотеза 2.1.11 (Гипотеза Бовиля, [Bea1]). Существует только конечное число простых компактных гиперкэлеровых многообразий в каждой размерности с точностью до деформационной эквивалентности.

В более слабой формулировке гипотеза утверждает, что в каждой размерности все числа Бетти гиперкэлеровых многообразий ограничены. При этом теоретически могут существовать деформационно неэквивалентные гиперкэлеровы многообразия с одинаковыми числами Бетти.

Именно с этой гипотезой связана задача главы 3, в которой мы получим неравенство, связывающие числа Бетти гиперкэлеровых многообразий в размерности шесть, а также ограничения на второе число Бетти в большей размерности.

Форма Бовиля-Богомолова-Фуджики

Важным объектом гиперкэлеровой геометрии является форма Бовиля-Богомолова-Фуджики, определённая ниже.

Теорема 2.1.12. *([F]) Пусть M – неприводимое гиперкэлеровое многообразие и $2n = \dim_{\mathbb{C}} M$. Тогда существует примитивная квадратичная форма q на $H^2(M,\mathbb{Z})$ и целое число $\lambda > 0$ такое, что $\int_M \eta^{2n} = \lambda q(\eta,\eta)^n$ для любой формы $\eta \in H^2(M)$.*

Форма q называется **формой Богомолова-Бовиля-Фуджики (ББФ)**. Она определяется соотношением Фуджики канонически, с точностью до знака. Для нечётных n знак определён однозначно. В случае чётного n выбор знака можно задать с помощью неравенства

$$q(\Omega,\bar{\Omega}) > 0, \qquad 0 \neq \Omega \in H^{2,0}(M),$$

или явной формулы для формы ББФ:

$$\begin{aligned}\mu q(\eta,\eta) = (n/2)\int_X \eta\wedge\eta\wedge\Omega^{n-1}\wedge\bar{\Omega}^{n-1} - \\ -(1-n)\left(\int_X \eta\wedge\Omega^{n-1}\wedge\bar{\Omega}^{n}\right)\left(\int_X \eta\wedge\Omega^{n}\wedge\bar{\Omega}^{n-1}\right),\end{aligned} \tag{2.1.2}$$

где Ω – голоморфно симплектическая форма и $\mu > 0$ – положительная константа. Вместо голоморфно симплектической формы, можно использовать кэлерову форму [V8, (1.1)].

С помощью формулы 2.1.2 можно показать, что форма Бовиля-Богомолова-Фуджики имеет сигнатуру $(3, b_2 - 3)$ [V8].

Примеры О'Грэди и решётка Мукаи

Выше мы привели четыре примера простых гиперкэлеровых многообразий. Вернёмся к примерам О'Грэди и рассмотрим их конструкцию с помощью решётки Мукаи.

Определение 2.1.13. Пусть S – абелева или $K3$ поверхность. Рассмотрим

$$\tilde{H}(S) = H^0(S) \oplus H^2(S) \oplus H^4(S)$$

На $\tilde{H}(S)$ можно задать структуру Ходжа следующим образом:

$$\tilde{H}^{2,0}(S) = H^{2,0}(S), \quad \tilde{H}^{0,2}(S) = H^{0,2}(S), \quad \tilde{H}^{1,1}(S) = H^0(S) \oplus H^{1,1}(S) \oplus H^4(S).$$

Решёткой Мукаи S называется группа $\tilde{H}(S)$, снабжённая симметрической биллинейной формой

$$(\sum_{i=0}^{2} a_i, \sum_{i=0}^{2} b_i) = \int (a_2 \wedge b_2 - a_0 b_4 - a_4 b_0).$$

Для когерентного пучка F обозначим за $v(F)$ вектор

$$v(F) := \mathrm{ch}(F)\sqrt{\mathrm{Td}} = \mathrm{ch}(F)(1 + \epsilon\eta),$$

где $\eta \in H^4(S, \mathbb{Z})$ и ϵ равно 1, если S – $K3$ поверхность, и равно 0, если S – абелева поверхность.

Определение 2.1.14. Вектором Мукаи называется элемент $\mathbf{v} = r + l + s\eta \in \tilde{H}^{1,1}_{\mathbb{Z}}(S)$, где $r \geq 0$ и l эффективен, если $r = 0$.

Обозначим через $\mathcal{M}_S(P) = F$ – полустабильный пучок, т.ч. $\chi(F(n)) = P(n)$ пространство модулей полустабильных пучков с фиксированным многочленом Гильберта. Пусть $v \in \tilde{H}^{1,1}$ – вектор Мукаи, тогда многочлен Гильберта $\chi(F(n))$ пучков F, таких что $v(F) = v$, независит от F. Пусть $\mathcal{M}_S(v)$ – пространство модулей пучков с фиксированным вектором Мукаи

$$\mathcal{M}_S(v) := |F| \in \mathcal{M}_S(P)|v(F) = v.$$

Тогда $M_S(v)$ открыто и замкнуто в $M_S(P)$.

Все известные примеры простых гиперкэлеровых многообразий могут быть получены как пространства модулей полустабильных пучков с определёнными свойствами [GS, O3, Mu].

В частности,

Теорема 2.1.15 (Мукаи, Гётше, Хойбрехтс, О'Грэди, Ёшиока)**.** *Пусть S – проективная $K3$ поверхность. Пусть v – вектор Мукаи, предположим, что вектор Мукаи неделим, что $-2 \leq (v, v)$, и, что $(r, s) \neq (0, 0)$. Тогда $\mathcal{M}_S(v)$ деформационна эквивалентна схеме Гильберта n точек над S, где $2n = 2 + (v, v)$.*

Приведенная конструкция, как показали Каледин, Лен и Зоргер [KLS, Theorem B] чаще всего не имеет симплектического разрешения особенностей.

Теорема 2.1.16. *Если либо $m \geq 2$ и $\langle v_0, v_0 \rangle > 2$, либо $m > 2$ и $\langle v_0, v_0 \rangle \geq 2$, то M_{mv_0} локально факториальное сингулярное симплектическое многообразие. В частности, M_{mv_0} не допускает симплектического разрешения особенностей.*

Теоремы Хойбрехтса о конечности

Возвращаясь к гипотезе Бовиля (2.1.11) отметим, что Хойбрехтсу ([H1]) удалось получить следующий результат, используя теорему конечности Коллара-Матсусаки [KM].

Теорема 2.1.17. *Если заданы вторые целочисленные когомологии и однородный многочлен степени $2n - 2$ на $H^2(\mathbb{Z})$, определённый первым классом*

Понтрягина, то существует конечно число типов компактных гиперкэлеровых многообразий с точностью до диффеоморфизма, имеющих данную структуру.

Также Хойбрехтс показал, что, если фиксировать форму Богомолова-Бовиля-Фуджики, равносильно тому, чтобы фиксировать класс Понтрягина ([H1]).

Более того, если задана диффеоморфная структура на гиперкэлеровом M, то также возможно конечное число деформационных типов гиперкэлеровых метрик на M.

Теорема 2.1.18 ([H1])**.** *Пусть M – компактное многообразие. Тогда существует конечное число деформационных типов голоморфно симплектических комплексных структур на M.*

Используя инварианты Розанского-Виттена (см. раздел 2.3, [HS]) и результаты Нипер-Вайскирхен [N-W], Хойбрехтс доказал следующую теорему.

Теорема 2.1.19. *Пусть (Λ, q_Λ) – решётка. Тогда существует только конечное число деформационных типов неприводимых голоморфно симплектических многообразий фиксированной размерности $2n$, таких что $(H^2(X, \mathbb{Z}, q_X)$ изоморфна (Λ, q_Λ), где q_X – форма ББФ.*

2.2. Абсолютно трианалитические подмногообразия

В этом разделе мы определим один из из основных объектов диссертации – абсолютно трианалитические подмногообразия. Подробнее их примеры будут рассмотрены в разделе 4.1.

Определение 2.2.1. Замкнутое подмножество Z гиперкэлерового многообразия M называется *трианалитическим*, если оно является комплексно-аналитическим по отношению к комплексным структурам I, J, K.

Особенности трианалитических подмногообразий всегда допускают гиперкэлерово разрешение.

Теорема 2.2.2. *[V5, Theorem 6.2.] Пусть M является гиперкэлеровым многообразием, $Z \subset M$ – трианалитическое подмногообразие и I – индуцированная комплексная структура. Рассмотрим нормализацию*

$$\widetilde{(Z,I)} \to (Z,I)$$

для (Z,I). Тогда $\widetilde{(Z,I)}$ гладкое, и отображение $\widetilde{(Z,I)} \to M$ является вложением, и индуцирует гиперкэлерову структуру на $\widetilde{(Z,I)}$.

Теорема 2.2.3. *(эквивалентная 2.1.3)*
Пусть M – гиперкэлерово многообразие. Тогда существует единственная гиперкэлерова метрика в данном кэлеровом классе.

Определение 2.2.4. Пусть (M,I,J,K)является компактным голоморфно симплектическим кэлеровым многообразием и $Z \subset (M,I)$ комплексное подмногообразие, которое является трианалитическим по отношению к любой гиперкэлеровой структуре, совместимой с I. Тогда Z называется *абсолютно трианалитическим* подмногообразием.

Теорема 2.2.5 ([SV]). *Для любых гиперкэлеровых многообразий M, M' в одном деформационном классе существует диффеоморфизм, который отправляет абсолютно трианалитические подмногообразия в абсолютно трианалитические.*

Определение 2.2.6. Гиперкэлерово многообразие называется *общим*, если все его подмногообразия абсолютно трианалитические.

Замечание 2.2.7. Общая деформация гиперкэлерового многообразия является общей в смысле определения 2.2.6 ([KV-book, Предложение 2.14]).

Теорема 2.2.8. *([V2]) Пусть M – гиперкэлерово многообразие, S его твисторное семейство (см. 2.1.8). Тогда существует счётное подмножество $S_1 \subset S$, такое что для любой комплексной структуры $L \in S \backslash S_1$, все компактные комплексные подмногообразия (M, L) трианалитические.*

Определение 2.2.9. Для данной комплексной структуры I рассмотрим **оператор Вейля** W_I, действующий на (p, q)-формах как $\sqrt{-1}(p - q)$. Пусть $G_{MT}(M, I)$ – наименьшая рациональная алгебраическая подгруппа в $\mathrm{Aut}(H^*(M, \mathbb{R})$, содержащая e^{tW_I}. Эта группа называется **группой Мамфорда-Тейта для** (M, I). Группа, порождённая $G_{MT}(M, I)$ для всех комплексных структур I из связной компоненты деформационного пространства, называется **максимальной группой Мамфорда-Тейта для** M ([Del]).

Оказывается, что как функция $I \subset \mathrm{Teich}$ в топологии Зарисского для Teich группа Мамфорда-Тейта для (M, I) является полунепрерывной снизу функцией ([Del]). Тем самым, $G_{MT}(I)$ постоянна вне счётного числа комплексных подмногообразий положительной коразмерности. Мы будем говорить, что $I \in \mathrm{Teich}$ **общая по Мамфорду-Тейту**, если $G_{MT}(I)$ максимальна. Если многообразие M имеет максимальную голономию, то максимальная группа Мамфорда-Тейта изоморфна $\mathrm{Spin}(H^2(M, \mathbb{R}), q)$ ([KV-book]). Любая комплексная структура $I \in \mathrm{Teich}$ за исключением счётного числа подмногообразий положительной коразмерности является общей по Мамфорду-Тейту.

Замечание 2.2.10. Пусть I – комплексная структура общая по Мамфорду-Тейту и η целый (p, p)-класс. Тогда η имеет тип (p, p) для любой деформации I.

Абсолютно трианалитические многообразия могут быть охарактеризованы в терминах группы Мамфорда-Тейта. Ниже в разделе 4.2 мы рассмотрим их ещё и как калибровочные многообразия.

Предложение 2.2.11. *Пусть (M, I, J, K) – это гиперкэлерово многообразие, и $Z \subset (M, I)$ комплексное подмногообразие. Тогда Z является абсолютно трианалитическим подмногообразием тогда и только тогда, когда его фундаментальный класс G-инвариантен, где G – максимальная группа Мамфорда-Тейта для M. В частности, Z является абсолютно трианалитическим, если (M, I) общее по Мамфорду-Тейту.*

Доказательство. Утверждение следует из определений и Утверждения ([V6, Утверждение 4.4]). □

Как мы уже отмечали, множество абсолютно трианалитических подмногообразий не зависит от выбранной комплексной структуры внутри твисторного семейства S в пределах одной компоненты пространства Тейхмюллера. Теорема 2.2.5 тогда будет звучать, как

Теорема 2.2.12. *Пусть $I_1, I_2 \in \mathrm{Teich}$ – точки в одной связной компоненте пространства Тейхмюллера. Тогда существует диффеоморфизм $\nu : (M, I_1) \to (M, I_2)$, такой что любое абсолютно трианалитическое подмногообразие $Z \subset (M, I_1)$ отображается в абсолютно трианалитическое подмногообрази $\nu(Z) \subset (M, I_2)$.*

Доказательство основано на том, что любые две структуры в пределах одной компоненты связности в пространстве Тейхмюллера Teich можно соединить последовательностью твисторных семейств ([V8]).

2.3. Инварианты Розанского-Виттена

Определим инварианты Розанского-Виттена [RW], следуя Хитчину и Сейвону [HS, S]. Напомним, что согласно классификации Берже [Ber] группа голономии гиперкэлеровых многообразий является подгруппой $\mathrm{Sp}(n)$. Мы будем рассматривать простые гиперкэлеровы многообразия (2.1.5), т.е. имеющие максимальную голономию.

Пусть M – простое гиперкэлеровое многообразие. Тензор кривизны можно рассматривать как сечение $K \in \Omega^{1,1}(\operatorname{End} T)$. В локальных координатах тензор кривизны имеет вид $K^i_{jk\bar{l}}$. Поскольку, Ω индуцирует гомоморфизм $T_M \to \Omega_M$ и она везде невырожденна, то этот гомоморфизм биективен. Значит, касательное и кокасательное расслоения неприводимого голоморфно симплектического многообразия изоморфны. Используя голоморфно симплектическую 2-форму Ω, мы отождествляем касательное и кокасательное расслоения и опускаем первый индекс, получая новую форму

$$\Phi \in \Omega^{1,1}(T^* \otimes T^*) = \Omega^{0,1}(T^* \otimes T^* \otimes T^*),$$

где T^* обозначает кокасательное расслоение многообразия M, по формуле

$$\Phi_{ijk\bar{l}} = \sum_m \Omega_{im} K^m_{jk\bar{l}}.$$

Замечание 2.3.1. Тензор $\Phi_{ijk\bar{l}}$ симметричен по индексам j, k, поскольку связность без кручения и сохраняет комплексную структуру. Так как кривизна принимает значения в алгебре Ли $\mathrm{Sp}(2k, \mathbb{C})$ и состоит из матриц вида A^i_j, где $S_{ij} = \sum_k \Omega_{ik} A^k_j$ и S_{ij} симметричные, поэтому тензор $\Phi_{ijk\bar{l}}$ также симметричен по индексам i, j. Значит, $\Phi \in \Omega^{0,1}(\mathrm{Sym}^3 T^*)$.

Пусть Γ – тривалентный граф с $2k$ вершинами и без петель. Определим ориентацию графа Γ как класс эквивалентности цикличных порядков в каждой вершине, два таких порядка эквивалентны, если отличаются на чётном числе вершин. Зафиксируем ориентацию графа и рассмотрим тензор $\Phi \otimes \Phi \otimes \cdots \otimes \Phi$ с $2k$ сомножителями. Если вершины v_m и v_n $(m < n)$ соединены ребром, то свернём тензор с $\tilde{\Omega}$ на T^*, двойственной к Ω. Заметим, что при переходе к двойственному базису матрица Ω^{ij} для $\tilde{\Omega}$ является минус обратной к Ω_{ij}. В результате получаем

$$c_{m,n} \Omega^{i_m i_n} \Phi \otimes \cdots \otimes \Phi_{i_m \cdots} \otimes \cdots \otimes \Phi_{i_n \cdots} \otimes \cdots \otimes \Phi,$$

где $c_{m,n} = 1$, если ребро ориентировано от v_m к v_n и $c_{m,n} = -1$ иначе. Проделав такую операцию по всем $3k$ рёбрам, мы получаем сечение $\bar{T}^* \otimes \cdots \otimes \bar{T}^*$.

Спроецировав на внешнее произведение, получаем форму

$$\Gamma(\Phi) \in \Omega^{0,2k}.$$

Определение 2.3.2. *Инвариантом Розанского-Виттена* для тривалентного графа Γ на гиперкэлеровом многообразии M называется

$$b_\Gamma(M) = \frac{1}{(8\pi^2)^k k!} \int\limits_M \Gamma(\Phi)\omega^k. \tag{2.3.1}$$

Замечание 2.3.3. Множитель в 2.3.1 нужен для того, чтобы инвариант был корректно определён для произведений гиперкэлеровых многообразий [HS].

Инварианты Розанского-Виттена постоянны на компонентах связности пространства модулей гиперкэлеровых метрик на M, это проще всего следует из интерпретации инвариантов Розанского-Виттена через когомологии Дольбо (Капранов [Kapr]).

2.4. Когомологии гиперкэлеровых многообразий

В этом разделе мы напомним основные результаты, связанные с когомологиями гиперкэлеровых многообразий, в частности, неравенство Саламона [Sa], теоремы Вербицкого [V8] и Луенги-Лунца [LL].

Ромб Ходжа и его свойства

Пусть M является компактным кэлеровым многообразием комплексной размерности n. Числа Ходжа $h^{p,q}$ обозначают размерности соответствующих когомологий Дольбо. Для гиперкэлеровых многообразий естественным образом выполнены следующие симметрии для ромба Ходжа, выполненные также и для кэлеровых многообразий:

$$h^{p,q} = h^{n-p,n-q} = h^{q,p}. \tag{2.4.1}$$

Если M компактное гиперкэлерово многообразие вещественной размерности $4m$, то мы можем получить и другие равенства на числа Ходжа.

В частности, Фуджики ([F]) показал, что умножение на голоморфно симплектическую форму задаёт отображение $H^{p,q} \to H^{p+2,q}$, которое инъективно при $p+1 \leq m$, и $(m-p)$-ая его степень – изоморфизм.Тем самым,

$$h^{p,q} = h^{2m-p,q}. \tag{2.4.2}$$

Это также следует из теоремы Вербицкого (2.4.4) о действии алгебры Ли $\mathfrak{so}(5)$ на когомологиях, которая будет приведена ниже (см. раздел 2.4).

Более того, Вакакува ([W]), исследуя действие $\mathrm{Sp}(m)$ на пространстве гармонических форм, доказал, что

$$b_{2k} \geqslant \left(\begin{array}{c} k+2 \\ 2 \end{array} \right)$$

для $k \leqslant m$, и, что нечётные числа Бетти b_{2k+1} делятся на 4. Также Фуджики ([F]) доказал, что $h^{p,q} \geqslant h^{p+1,q-1}$, если $p \geqslant q$.

Замечание 2.4.1. Первое число Бетти b_1 для простого гиперкэлерового многообразия равно нулю по определению, но в общем случае нечётные числа Бетти могут быть ненулевыми, например, $b_3\left(K_2\left(T\right)\right) = 8$.

Равенство Саламона

Симметрии чисел Ходжа 2.4.1 и 2.4.2 в применении к формуле Хирцебруха-Римана-Роха

позволяют получить следующее утверждение.

Предложение 2.4.2. *[S, Theorem 4.1.] Пусть M – компактное кэлерово многообразие вещественной размерности $d = 2n = 4m$ с числами Ходжа, удовлетворяющими соотношению 2.4.2. Тогда*

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{d}\left(-1\right)^{i}\left(6i^2 - \frac{1}{2}d\left(3d+1\right)b_i\right) = \int\limits_M c_1 c_{n-1}$$

Если многообразие M – гиперкэлерово, то $c_1 = 0$, а, значит выполнено равенство Саламона ([Sa]):

$$\sum_{i=0}^{4m} (-1)^i \left(6i^2 - n\,(6n+1)\,b_i\right) = 0 \qquad (2.4.3)$$

Из результатов Вакакува следует, что $ne(X)$ делится на 24, где $e(X)$ – эйлерова характеристика.

Замечание 2.4.3. Для $K3$ поверхности эйлерова характеристика равна 24. Также делимость на 24 была показана Гриценко и Хирцебрухом [GrH].

Неравенство Саламона 2.4.3 может быть переписано в терминах эёлеровой характеристики:

$$\sum_{i=0}^{4m} (-1)^i\, 6i^2 b_i = n\,(6n+1)\,e\,(X)\,,$$

где $e(X)$ – эйлерова характеристика гиперкэлерового многообразия X.

Действие алгебры Ли $so(b_2+2)$ на когомологиях

Описание кольца когомологий в случае схемы Гильберта $K3$ поверхности получено Леном и Зоргером ([LS]), затем Накаджима посчитал базис когомологий [N]. Числа Бетти и Ходжа были определены в работе Гётше и Зорґеля ([GS]).

В общем случае произвольного гиперкэлерового многообразия для чётных когомологий выполнена следующая теорема ([V8, V9])

Теорема 2.4.4. *Пусть M – неприводимое гиперкэлерово многообразие комплексной размерности $2n$ и пусть $SH^2(M,\mathbb{C})\subset H^*(M,\mathbb{C})$ – подалгебра, порождённая $H^2(M,\mathbb{C})$. Тогда $SH^2(M,\mathbb{C}) = S^*H^2(M,\mathbb{C})/\left\langle \alpha^{n+1} \middle|\, q\,(\alpha) = 0\right\rangle$, где q форма Бовиля-Богомолова-Фуджики.*

Замечание 2.4.5. Из этой теоремы следует вложение $\operatorname{Sym}^n H^2\,(M) \hookrightarrow H^{2n}$. При этом теорема 2.4.4 ничего не говорит про нечётные когомологии и ту часть чётных когомологий, которые не лежат в $SH^2(M,\mathbb{C})$.

Пусть M – кэлерово многообразие размерности $2n$. Тогда для любого кэлерового класса $\alpha \in H^{1,1}(M)$ возникает $\mathfrak{sl}(2)$-представление:

$$\phi_\alpha : \mathfrak{sl}(2) \to \mathrm{End}(H^*(M)),$$

заданное умножением на α :

$$L_\alpha := \phi_\alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

,

двойственным оператором Лефшеца:

$$\Lambda_\alpha := \phi_\alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и оператором Ходжа

$$H := \phi_\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

такой что $H|_{H^k(M)} = (2n-k) \cdot id$. Алгебра Ли, порождённая $\phi_{\omega_I, \omega_J, \omega_K}(\mathfrak{sl}(2))$, изоморфна $\mathfrak{so}(4,1)$. В эту алгебру также входят коммутаторы $K_{IJ} = [L_I, \Lambda_J], K_{IK} = [L_I, \Lambda_K], K_{JK} = [L_J, \Lambda_K]$.

Теорема 2.4.6 ([V9]). *Пусть $\mathfrak{g} \subset End(\Lambda^* V^*)$ – алгебра Ли, порождённая операторами $L_\lambda, \Lambda_\lambda, K_{IJ}, K_{IK}, K_{JK}, H$. Тогда $\mathfrak{g}$ изоморфна $\mathfrak{so}(4,1)$.*

Замечание 2.4.7. Операторы L_R $(R = I, J, K)$ имеют степень 2, Λ_R $(R = I, J, K)$ имеют степень -2, K_{RS} – степень ноль. Заметим также, что, например, оператор K_{IJ} имеет вид $i(p-q)\Pi_{IJ}$, где Π_{IJ} является проекцией на пространство $(p,q)_I$-форм.

Пусть M – гиперкэлерово многообразие. Для индуцированной комплексной структуры L на M рассмотрим кэлерову форму $\omega_L = g\left(\cdot, L\cdot\right)$, где $g(\cdot, \cdot)$ риманова форма. Обозначим через L_L, как и раньше, оператор внешнего умножения на ω_L. Двойственный оператор $*^{-1} L_L *$ обозначается через Λ_L. Тогда из теоремы 2.4.4 имеется следующее следствие.

Следствие 2.4.8 ([V9]). *Пусть M – гиперкэлерово многообразие и $\mathfrak{a}_{\mathcal{H}}$ алгебра Ли, порождённая L_L и Λ_L для всех индуцированных комплексных структур L на M. Тогда алгебра Ли $\mathfrak{a}_{\mathcal{H}}$ изоморфна $\mathfrak{so}(4,1)$.*

Из теоремы 2.4.6 следует утверждение ([LL]):

Следствие 2.4.9 ([LL]). *Структура Ходжа на кольце когомологий $H^*(M)$ простого гиперкэлерового многообразия M полностью определяется структурой Ходжа на $H^2(M)$ и действием $H^2(M)$ на $H^*(M)$.*

Подалгебра, порождённая $H^2(M)$ может быть посчитана явно, в частности, теорему 2.4.4 можно переписать в следующем виде:

Теорема 2.4.10 ([V8]). *Пусть M является компактным простым гиперкэлеровым многообразием, $\dim_{\mathbb{C}} M = 2n$ и $H_r^*(M)$ – подалгебра в когомологиях, порождённая $H^2(M)$. Тогда*

$$\begin{aligned} H_r^{2i}(M) &\cong S^i H^2(M) \qquad i \leqslant n, \\ H_r^{2i}(M) &\cong S^{2n-i} H^2(M) \qquad i \geqslant n \end{aligned}$$

Если мы будем рассматривать алгебру Ли, порождённую $\mathfrak{sl}(2)$-представлениями для всех классов α в $H^2(M)$, то эта алгебра называется общей алгеброй Ли $\mathfrak{g}_{tot}$. Эта алгебра Ли была описана в работах Вербицкого ([V8]) и Луенги-Лунца ([LL]).

Теорема 2.4.11. *Общая алгебра Ли гиперкэлерового многообразия M изоморфна $\mathfrak{so}((H^2(M), q) \oplus U)$, где U – гиперболическая плоскость.*

Из этой теоремы 2.4.11 следует, что когомологии неприводимого гиперкэлерового многообразия распадаются в сумму неприводимых представлений алгебры Ли $\mathfrak{so}(4, b_2 - 2)$. Об этом речь пойдёт в разделах 3.4.3 и 3.5.

В случае рассмотрения целочисленных когомологий даже для схемы Гильберта над $K3$ строение когомологий является непростым вопросом. В частности, недавно было доказано, что фактор $H^4(\mathrm{Hilb}_n(K3, \mathbb{Z})) / \operatorname{Sym}^2 H^2(M, \mathbb{Z})$ содержит элементы конечного порядка при $n = 2, 3$ ([BNS, Kap]). Для схемы Гильберта трёх точек Капфер использовал компьютерные вычисления, исходя из базиса Накаджимы для когомологий схемы Гильберта [N]. Для $n \geq 4$ Маркман ([Ma]) ранее показал, что фактор – свободная группа порядка 24.

Теорема 2.4.12 ([BNS, Kap, Ma]). *Пусть M – схема Гильберта n точек на $K3$. Тогда*

(1) $\frac{H^4(M,\mathbb{Z})}{\operatorname{Sym}^2 H^2(M,\mathbb{Z})} = (\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})^{\oplus 23} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{5\mathbb{Z}}$ *при* $n = 2$,

(2) $\frac{H^4(M,\mathbb{Z})}{\operatorname{Sym}^2 H^2(M,\mathbb{Z})} = \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}^{\oplus 23}$ *при* $n = 3$,

(3) $\frac{H^4(M,\mathbb{Z})}{\operatorname{Sym}^2 H^2(M,\mathbb{Z})} = \mathbb{Z}^{\oplus 24}$ *при* $n \geq 4$.

Глава 3

Ограничения на числа Бетти гиперкэлеровых многообразий

В этой главе мы рассмотрим методы обобщения теоремы Гуана 3.1.1 на гиперкэлеровые многообразия большей размерности. В частности, используя инварианты Розанского-Виттена можно получить неравенство, связывающее числа Бетти в размерности шесть, основной результат Теоремы Гуана в этом случае будет простым следствием из неравенства на инварианты Розанского-Виттена. Помимо этого мы используем недавние результаты Сейвона ([S-b2]) для простых гиперкэлеровых многообразий размерности шесть и получим следствия из нашего основного неравенства. Предварительные сведения об известных примерах гиперкэлеровых многообразиях и свойствах когомологий гиперкэлеровых многообразиях можно прочесть в разделах 2.1, 2.4. Основные результаты данной главы опубликованы в [Ku1, Ku3, Ku5].

В разделе 3.1 мы напомним теорему Гуана и результаты по четырёхмерным гиперкэлеровым многообразиям, а также рассмотрим те методы, которые впоследствии будут нами использованы для получения результатов в больших размерностях. В разделе 3.2 мы рассмотрим инварианты Розанского-Виттена для простейших графов и получим неравенство для инвариантов Розанского-Виттена. В разделе 3.3 мы докажем основной результат – неравенство, связывающие числа Бетти гиперкэлеровых многообразий в размерности шесть. Затем в разделе 3.4 мы используем основное неравенство для получения различных следствий для шестимерных гиперкэлеровых многообразий. В разделе 3.5 мы рассмотрим случаи многообразий размерности восемь и десять, а также сформулируем гипотезу об ограниченности b_2 в общем случае.

3.1. Четырёхмерные гиперкэлеровы многообразия

Для гиперкэлеровых многообразий комплексной размерности четыре Гуану удалось доказать, что существует конечное число возможностей для чисел Бетти, а именно

Теорема 3.1.1. *Если M неприводимое гиперкэлеровое многообразие комплексной размерности четыре, то*

- *если $b_2 = 23$, то $b_3 = 0$, то ромб Ходжа M такой же, как у схемы Гильберта двух точек над $K3$,*
- *если $b_2 \neq 23$, то $b_2 \leqslant 8$, и если $b_2 = 8$, то $b_3 = 0$.*
- *в случае, если $b_2 = 7$, то $b_3 = 0$ или 8.*
- *в случае, если $b_2 = 3, 4, 5, 6$, то возможны следующие случаи*

b_2	3	4	5	6
b_3	$4l, l \leqslant 17$	$4l, l \leqslant 15$	$4l, l \leqslant 9$	$4l, l \leqslant 4$

.

- *второй класс Черна лежит в алгебре $H^{(4)}$, порождённой $H^2(M)$ если и только, если*

$$(b_2, b_3) = (5, 36), (7, 8), (8, 0), (23, 0).$$

Доказательство ограниченности второго числа Бетти опирается на результат Вербицкого о вложении $\mathrm{Sym}^n(H^2(M))$ в $H^{2n}(M)$ 2.4.4, [LL]. Чтобы получить ограничения на b_3 Гуан в своей работе [Gu] использовал следующий результат для полиномов от чётных классов Черна:

Предложение 3.1.2. *Пусть M – компактное гиперкэлерово многообразие, C – полином от чётных классов Черна степени $4r$. Тогда число*

$$C(u) = \int_M C^{2n-2r} / (\int_M u^{2n})^{\frac{n-r}{n}}$$

независит от $u \in H^{2n}(M)$ таких, что $\int_M u^{2n} \neq 0$.

Используя соотношения Ходжа-Римана ([GH, p. 123]) можно получить

Предложение 3.1.3. *Пусть M – неприводимое компактное гиперкэлерово многообразие комплексной размерности четыре, тогда*

$$3b_2(C_2(u))^2 \geq (b_2+2)C_2^2[M]$$

и равенство выполняется только в том случае, если $C_2 \in \Lambda^2(H^2)$.

В качестве следствия Предложений 3.1.2 и 3.1.3 Гуан получил

Предложение 3.1.4. *Если M неприводимое гиперкэлеровое многообразие комплексной размерности четыре, то*

$$b_3 \geq \frac{4(23-b_2)(8-b_2)}{(b_2+1)} \tag{3.1.1}$$

Заметим, что третий пункт теоремы из Предложения 3.1.4 не следует. Согласно Вакавуке ([W]) нечётные числа Бетти делятся на четыре. В случае же четырёхмерных гиперкэлеровых многообразий верно следующее утверждение:

Предложение 3.1.5. *Пусть M – неприводимое компактное гиперкэлерово многообразие комплексной размерности четыре, тогда $b_3 = k2^{\frac{b_2-1}{2}}$ для некоторого целого k. В частности, если $b_2 = 7$, то $b_3 = 8k$.*

Это предложение следует из результатов Вербицкого и Луенги-Лунца (Теорема 2.4.4, [LL]). В самом деле, алгебра Ли $\mathfrak{so}(4, b_2-2)$ действует на кольце когомологий гиперкэлерового многообразия M (см. раздел 2.4). В частности, $H^3 \oplus H^5$ является спинорным представлением $\mathrm{Spin}\,(b_2+2)$, и поэтому $2b_3$ делится на $2^{\left[\frac{b_2+2}{2}\right]}$. В случае, если $b_2 = 7$, получаем, таким образом, что $b_3 \vdots 8$.

Естественным является желание обобщить результаты Гуана. К сожалению, прямое обобщение не позволяет получить неравенств на числа Бетти и Ходжа гиперкэлеровых многообразий. В следующих разделах мы рассмотрим использование инвариантов Розанского-Виттена, в частности, докажем неравенство на инварианты Розанского-Виттена (см. раздел 3.2.5). Оказывается, что с использованием этого неравенства можно получить наше основное неравенство – некоторый аналог Предложения 3.1.4 в размерности шесть.

Отдельным вопросом является ограниченность второго числа Бетти, для этого требуется рассмотреть неприводимые представления алгебры Ли $\mathfrak{so}(b_2+2)$, на которые распадается ромб Ходжа согласно теореме Луенги-Лунца (теорема 2.4.11). В малых размерностях ограниченность b_2 доказана Сейвоном ([S-b2]) и автором ([Ku3]). В заключение главы (см. раздел 3.5) мы приведём некоторые результаты и сформулируем ряд гипотез.

Отдельное место занимает вопрос изучения гиперкэлеровых многообразий с заданными числами Бетти. Наиболее "простой"случай – многообразия размерности четыре с $b_2 = 23$. Но даже в этом случае полной классификации пока нет. Некоторые результаты удалось получить Капустке [Ka].

Оказывается, что для гиперкэлерового многообразия X с $b_2 = 23$ любой обильный дивизор имеет самопересечение вида $12k^2$ для некоторого натурального k. В работе [Ka] изучен случай минимального возможного самопересечения, т.е. когда есть дивизор H с $H^4 = 12$. Напомним, что идеал для $\varphi_{|H|}$ задаёт структуру схемы C на особой части образа $\varphi_{|H|}(X) \subset \mathbb{P}^5$. Известно, что $C \subset \mathbb{P}^5$ Коэн-Макалеево размерности 3.

Напомним, что *EPW секстикой* $S_A \subset \mathbb{P}^5 =: \mathbb{P}(W)$ называется секстика, определяемая детерминантом морфизма

$$A \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^5} \to \Omega^2_{\mathbb{P}^5}(3) \subset \mathbb{P}(W) \times \bigwedge^3 W \tag{3.1.2}$$

соответствующего выбору 10-мерного Лагранжиана $A \subset \bigwedge^3 W$ по отношению к естественной симметрической форме ([EPW, Ex. 9.3]).

Теорема 3.1.6. *Пусть X – четырёхмерное гиперкэлерово многообразие с $b_2 = 23$, допускающее обильный дивизор с $H^4 = 12$, такой что H задаёт бирациональный автоморфизм $\varphi_{|H|}$. Тогда существует единственная секстика, содержащая схему с особенностями $C \subset \mathbb{P}^5$, определённую по $\varphi_{|H|}(X) \subset \mathbb{P}^5$ выше. Более того, эта секстика – EPW секстика S_A.*

3.2. Инварианты Розанского-Виттена для некоторых графов

Инварианты Розанского-Виттена для простых графов были определены в работах Сейвона и Хитчина ([HS, S]). В этом разделе мы докажем неравенство 3.2.5, связывающее инварианты Розанского-Виттена простых графов. Напомним, что определение самих инвариантов было дано в разделе 2.3.

Наиболее простыми являются граф Θ, имеющий две вершины, соединённые тремя рёбрами и граф Θ_2, у которого четыре вершины.

В большей размерности чаще всего рассматривают графы Θ^k (k дизъюнктных копий графа Θ на двух вершинах) и $\Theta^{k-2}\Theta_2$ (k дизъюнктных копий графа Θ на двух вершинах и один граф Θ_2 на 4 вершинах).

Оказывается, что для графа Θ^k его инвариант Розанского-Виттена на многообразии M является геометрической характеристикой самого многообразия [HS, (10)].

Предложение 3.2.1. *Пусть M – гиперкэлерово многообразие размерности $2k$. Тогда*

$$b_{\Theta^k}(M) = \frac{k!}{(4\pi^2 k)^k}\frac{||R||^{2k}}{(Vol(M)^{k-1}} = \frac{(2n)^n}{n!}\frac{(\int_M c_2\Omega^{n-1}\bar{\Omega}^{n-1})^n}{(\int_M \Omega^n\bar{\Omega}^n)^{n-1}} \qquad (3.2.1)$$

В частности, если $k = 1$, т.е. в случае $K3$ имеем

$$b_\Theta(M) = 2c_2(M) = 48.$$

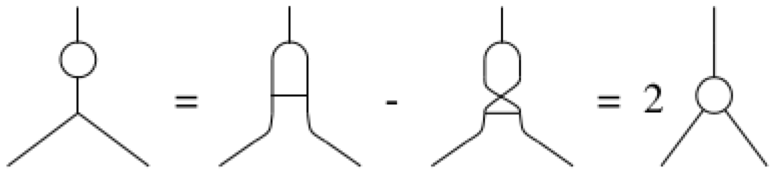
Более того, верно следующее утверждение:

Предложение 3.2.2. *Пусть M – компактное неприводимое гиперкэлерово многообразие размерности $2k$. Тогда*

$$\frac{1}{(192\pi^2 k)^k}\frac{||R||^{2k}}{(Vol(M)^{k-1}} = Td^{1/2}[M], \qquad (3.2.2)$$

где $Td^{1/2}$ мультипликативная последовательность классов Понтрягина, определённая степенным рядом $(\frac{\sqrt{z}/2}{sinh\sqrt{z}/2})^{1/2}$.

Следующим по сложности графом является граф $\Theta^{k-2}\Theta_2$, состоящий из графа Θ_2 и $k-2$ копий графа Θ. Для того, чтобы вычислить его инвариант Розанского-Виттена можно воспользоваться "пузырьковой" теоремой, которая позволяет осуществлять перестроения графов в соответствии со следующей картинкой:



Теорема 3.2.3. *(пузырьковая теорема, [HS, Глава 4, Предложение 14]) Граф $\Theta^{k-m}\Theta_m$ при m от 1 до k может быть выражен как линейная комбинация поликолёс (т.е. не тривалентных графов, состоящих из круга и $2l$-"спиц") и несвязных объединений графов Θ, Θ_2, ..., Θ_{m-1}.*

В частности, из результатов Хитчина и Сейвона [S, Chapter 5] следует, что

Предложение 3.2.4.

$$b_{\Theta^n}(M)+2b_{\Theta^{n-2}\Theta_2}(M) = \frac{2^n n^{n-2}}{(n-2)!}\frac{(\int_M c_2\Omega^{n-1}\bar{\Omega}^{n-1})^{n-2}(\int_M c_2^2\Omega^{n-2}\bar{\Omega}^{n-2})}{(\int_M \Omega^n\bar{\Omega}^n)^{n-2}} \quad (3.2.3)$$

Теперь докажем следующую важную

Лемма 3.2.5. *Пусть M – неприводимое гиперкэлеровое многообразие комплексной размерности $2n$. Тогда*

$$-b_{\Theta^k} \leq (b_2+2(k-1))b_{\Theta^{k-2}\Theta_2}. \quad (3.2.4)$$

Доказательство. Ранее мы говорили о вложении $\mathrm{Sym}^2(H^2(M,\mathbb{Q}))$ в $H^4(M,\mathbb{Q})$ по теореме 2.4.4. Таким образом c_2 можно представить как $g+p$, где $g \in \mathrm{Sym}^2(H^2(M,\mathbb{Q}))$ и $p \in H^4_{prim}(M)$ (примитивные формы).

Обозначим двойственную к форме ББФ форму в $\mathrm{Sym}^2 H^2(M,\mathbb{Q})$ за Q. Заметим, что Q – единственный элемент из $\mathrm{Sym}^2 H^2(M,\mathbb{Q})$ с точностью до константы, который имеет тип (2,2) при любой вариации комплексной структуры из S^2-семейства комплексных структур, согласованных с гиперкэлеровой метрикой 2.1.12. Значит, так как c_2 также имеет тип (2,2), то g – кратно Q. Тогда c_2 представляется в виде $\mu Q + p$, где p лежит в примитивных когомологиях $H^4_{prim}(M)$. Поэтому

$$c_2^2 = \mu^2 Q^2 + 2\mu Q p + p^2,$$

умножая на $\Omega^{n-2}\bar{\Omega}^{n-2}$ и интегрируя, имеем

$$\int\limits_M c_2^2\Omega^{n-2}\bar{\Omega}^{n-2} = \mu^2\int\limits_M Q^2\Omega^{n-2}\bar{\Omega}^{n-2} + \int\limits_M p^2\Omega^{n-2}\bar{\Omega}^{n-2} \geq \mu^2\int\limits_M Q^2\Omega^{n-2}\bar{\Omega}^{n-2},$$

где мы воспользовались ортогональностью $Q\Omega^{n-2}\bar{\Omega}^{n-2}$ и p. Константу μ можно определить, домножив равенство $c_2 = \mu Q + p$ на $\Omega^{n-1}\bar{\Omega}^{n-1}$ и проинтегрировав:

$$\int\limits_M c_2\Omega^{n-1}\bar{\Omega}^{n-1} = \mu\int\limits_M Q\Omega^{n-1}\bar{\Omega}^{n-1}.$$

Таким образом, получаем

$$(\int\limits_M c_2^2\Omega^{n-2}\bar{\Omega}^{n-2})(\int\limits_M Q\Omega^{n-1}\bar{\Omega}^{n-1})^2 \geq (\int\limits_M c_2\Omega^{n-1}\bar{\Omega}^{n-1})^2(\int\limits_M Q^2\Omega^{n-2}\bar{\Omega}^{n-2})$$

Домножив обе части неравенства на $(\int_M c_2\Omega^{n-1}\bar{\Omega}^{n-1})^{n-2}/(\int_M \Omega^n\bar{\Omega}^n)$ и, используя формулы для b_{Θ^k} (3.2.1) и $b_{\Theta^{k-2}\Theta_2}$ (3.2.4), получаем неравенство

$$n(b_{\Theta^n} + 2b_{\Theta^{n-2}\Theta_2})(\int\limits_M Q\Omega^{n-1}\bar{\Omega}^{n-1})^2 \geq (n-1)b_{\Theta^n}(\int\limits_M Q^2\Omega^{n-2}\bar{\Omega}^{n-2})(\int\limits_M \Omega^n\bar{\Omega}^n)$$

Заметим, что мы можем перейти от $\Omega\bar{\Omega}$ к $\Omega+\bar{\Omega}$. Поскольку полученное неравенство остаётся верным и после деформации комплексной структуры, значит, мы можем заменить $\Omega + \bar{\Omega}$ на произвольную форму $u \in H^2(M, \mathbb{Q})$. Тем самым мы получаем неравенство

$$(2n-1)(b_{\Theta^n} + 2b_{\Theta^{n-2}\Theta_2})(\int\limits_M Qu^{2n-2})^2 \geq (2n-3)b_{\Theta^n}(\int\limits_M Q^2u^{2n-4})(\int\limits_M u^{2n}) \quad (3.2.5)$$

Пусть $e_1, \dots e_{b_2}$ – ортонормальный базис на $H^2(M, \mathbb{C})$ такой, что $Q = \sum_{i=1}^{b_2} e_i^2$. Возьмём в качестве формы u сумму $\sum_{i=1}^{b_2} e_i$. Тогда, пользуясь формулой Фуджики (Теорема 2.1.12) и [H2, Следствие 23.17], имеем

$$\int\limits_M Qu^{2n-2} = \lambda_Q q(u)^{n-1}$$

и

$$\int\limits_M Q^2u^{2n-4} = \lambda_{Q^2} q(u)^{n-2}$$

,

где λ_Q и λ_{Q^2} – константы.

Чтобы найти λ_Q и λ_{Q^2} можно подставить $u = e_j$, в этом случае

$$\lambda_Q = \lambda_Q q(e_j)^{n-1} = \int\limits_M (\sum_i e_i^2) e_j^{2n-2} = \int\limits_M e_i^{2n} + (b_2 - 1)\int\limits_M e_i^2 e_j^{2n-2} =$$

$$= \lambda + (b_2 - 1)\frac{\lambda \cdot n}{(2n)(2n-1)} = \lambda(\frac{b_2 + 2n - 2}{2n-1}).$$

и

$$\lambda_{Q^2} = \lambda_{Q^2} q(e_j)^{n-2} = \int\limits_M (\sum_i e_i^4 + \sum_{i \neq k} e_i^2 e_k^2) e_j^{2n-4} =$$

$$= \int\limits_M e_i^{2n} + (b_2-1)\int\limits_M e_i^4 e_j^{2n-4} + (b_2-1)(b_2-2)\int\limits_M e_i^2 e_k^2 e_j^{2n-4} = \lambda\frac{(b_2+2n-2)(b_2+2n-4)}{(2n-1)(2n-3)}.$$

Значит,

$$\int\limits_M Q^2u^{2n-4} = \lambda_{Q^2} q(\sum e_i))^{n-2} = \lambda(\frac{(b_2+2n-2)(b_2+2n-4)}{(2n-1)(2n-3)}) b_2^{n-2},$$

Таким образом,

$$\int\limits_M Qu^{2n-2} = \lambda_Q q(\sum e_i))^{n-1} = \lambda(\frac{b_2+2n-2}{2n-1})b_2^{n-1}$$

и

$$\int\limits_M Q^2u^{2n-4} = \lambda_{Q^2} q(\sum e_i))^{n-2} = \lambda(\frac{(b_2+2n-2)(b_2+2n-4)}{(2n-1)(2n-3)})b_2^{n-2},$$

где $\lambda = \int_M e_i^{2n}$. Таким образом, подставляя всё это в неравенство 3.2.5, получаем требуемое. $\square$

3.3. Основное неравенство

В этом разделе мы получим основное неравенство из Леммы 3.2.5. Для начала напомним

Определение 3.3.1. Нормированными классами Черна называются классы

$$s_{2m} = [\frac{1}{(2\pi i)^{2m}} \operatorname{tr} K^{2m}] \in H^{4m}(M, \mathbb{Z}),$$

где K – тензор кривизны.

В этих терминах, например, характер Черна выглядит следующим образом:

$$\operatorname{ch}(T) = \sum_m \frac{s_{2m}}{(2m)!}.$$

Оказывается, что именно в терминах нормированных классов Черна проще всего выражаются инварианты Розанского-Виттена [HS, Section 4.2.].

Используя формулу "пузырьков"(3.2.3, [S, стр. 68]), получаем выражение для инварианта Розанского-Виттена графа $\Theta^{k-2}\Theta_2$:

$$b_{\Theta^{k-2}\Theta_2} = -2^{k-2}(24)^{k-1}(k-2)!(48k+s_2)Td^{1/2}, \tag{3.3.1}$$

где $Td^{1/2}$ мультипликативная последовательность классов Понтрягина, определённая степенным рядом $(\frac{\sqrt{z}/2}{sinh\sqrt{z}/2})^{1/2}$, а s_2 – второй нормированный класс Черна. Производящая функция для $Td^{1/2}$ получена в [S, Теорема 10] и может быть выражена в терминах нормированных классов Черна:

$$Td^{1/2} = 1 - \frac{1}{48}s_2 + \frac{1}{48^2 2!}(s_2^2 + \frac{4}{5}s_4) - \frac{1}{48^3 3!}(s_2^3 + \frac{12}{5}s_2 s_4 + \frac{64}{35}s_6) + ... \quad (3.3.2)$$

Для графа Θ^k имеем ([HS])

$$b_{\Theta^{k-2}\Theta_2} = 48^k k! Td^{1/2}. \quad (3.3.3)$$

Определение 3.3.2. Числами Хирцебруха χ^i называются суммы

$$\chi^i = \sum_{j=0}^{n} h^{i,j}.$$

Надо отметить, что нормированные (и обычные) классы Черна выражаются через числа Хирцебруха χ^i в малых размерностях ([S, стр. 121-122]).

Теперь докажем неравенство, аналогичное неравенству 3.1.3, в размерности шесть.

Теорема 3.3.3. *Пусть M – шестимерное простое гиперкэлерово многообразие. Тогда*

$$97 + \frac{37}{2}b_3 - \frac{19}{2}b_4 - \frac{b_5}{2} + \frac{23}{2}h^{2,2} \leqslant \frac{38b_2^2 - 1030b_2 + 7572}{b_2 + 1}, \quad (3.3.4)$$

или в терминах чисел Ходжа:

$$78 + 36h^{1,2} - 20h^{1,3} + 2h^{2,2} + h^{2,3} \leqslant \frac{38(h^{1,1})^2 - 878h^{1,1} + 5664}{h^{1,1} + 3}, \quad (3.3.5)$$

Доказательство. Воспользуемся доказанной в предыдущем разделе леммой 3.2.5 для случая размерности шесть ($k = 3$). Из значения инвариантов Розанского-Виттена для графов Θ^3 (из 3.3.3) и $\theta\theta_2$ (из 3.3.1) и формулы 3.3.2, получаем следующее неравенство

$$(-s_2^3 - \frac{12}{5}s_2s_4 - \frac{64}{35}s_6) \geq (b_2+4)(2\cdot 24^2(48\cdot 3+s_2)(1-(\frac{1}{48})s_2 \\ +(\frac{1}{48^2 2!})(s_2^2+\frac{4}{5}s_4) - (\frac{1}{48^3 3!})(s_2^3+\frac{12}{5}s_2s_4+\frac{64}{35}s_6)), \tag{3.3.6}$$

выразив классы Черна через числа Хирцебруха, это неравенство можно упростить ([S, стр. 123].

В частности, в размерности шесть имеем

$$s_2^3 = -58176\chi^0 + 1472\chi^1 + 64\chi^2,$$

$$s_2s_4 = -18144\chi^0 - 928\chi^1 - 32\chi^2,$$

$$s_6 = -6552\chi^0 - 784\chi^1 - 56\chi^2.$$

Подставляя в 3.3.6 получаем

$$3(3948 + 19\chi^1 + \chi^2) \geq (b_2+4)(1068 + 19\chi^1 + \chi^2). \tag{3.3.7}$$

Заметим, что по определению $\chi^1 = 5 - 2b_2 + b_3 - \frac{1}{2}b_4 + \frac{1}{2}h^{2,2}$ и $\chi^2 = 2 - \frac{1}{2}b_3 + 2h^{2,2} - \frac{1}{2}b_5$. Подставив в предыдущее неравенство, получаем искомое 3.3.4. Чтобы получить неравенство 3.3.5 необходимо переписать числа Бетти в терминах чисел Ходжа. □

Замечание 3.3.4. В случае $\mathrm{Hilb}^3(K3)$ выполнено равенство.

Пример 3.3.5. Ромбы Ходжа схемы Гильберта трёх точек над $K3$ и обобщённого многообразия Куммера $K_3(T)$ были получены Гётше и Зоргелем [GS]:

- Схема Гильберта трёх точек над $K3$:

  Мы знаем, что для неё $b_2 = 23, b_3 = b_5 = 0$, и ромб Ходжа имеет вид

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 0 & & 0 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 21 & & 1 & & & & \\
 & & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & & \\
 & & 1 & & 22 & & 253 & & 22 & & 1 & & \\
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \\
1 & & 21 & & 253 & & 2004 & & 253 & & 21 & & 1 \\
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & & 1 & & 22 & & 253 & & 22 & & 1 & & \\
 & & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & & \\
 & & & & 1 & & 21 & & 1 & & & & \\
 & & & & & 0 & & 0 & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & & &
\end{array}
$$

- Обобщённая поверхность Куммера:

  В случае $K_3(T)$ ромб Ходжа устроен более сложно:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 0 & & 0 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 5 & & 1 & & & & \\
 & & & 0 & & 4 & & 4 & & 0 & & & \\
 & & 1 & & 6 & & 37 & & 6 & & 1 & & \\
 & 0 & & 4 & & 24 & & 24 & & 4 & & 0 & \\
1 & & 5 & & 37 & & 372 & & 37 & & 5 & & 1 \\
 & 0 & & 4 & & 24 & & 24 & & 4 & & 0 & \\
 & & 1 & & 6 & & 37 & & 6 & & 1 & & \\
 & & & 0 & & 4 & & 4 & & 0 & & & \\
 & & & & 1 & & 5 & & 1 & & & & \\
 & & & & & 0 & & 0 & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & & &
\end{array}
$$

Замечание 3.3.6. Поскольку различных чисел Бетти пять, а чисел Ходжа шесть, то, в отличии от случая размерности четыре, полностью исключить последние нельзя. В размерности восемь ситуация сложнее, поскольку числа Черна неоднозначно выражаются через χ^i [S]. Однако, неравенство 3.2.4 остаётся верным и в больших размерностях.

3.4. Применения Основного неравества

3.4.1. Размерность четыре

В размерности четыре лемма 3.2.5 даёт в точности результат Гуана [Gu]. При этом можно заметить, что 3.1.3 эквивалентно неравенству 3.2.4, поскольку инварианты Розанского-Виттена в этом случае выражаются в терминах второго класса Черна.

Действительно, воспользуемся теми же формулами (3.3.3 и 3.3.1) для b_{Θ^2} и b_{Θ_2} и получим

$$492 + \chi^1 \geqslant (b_2 + 2)\left(60 + \chi^1\right).$$

Первое число Хирцебруха χ^1 можно легко вычслить, в результате получаем

$$\chi^1 = \frac{b_3}{2} - 2b_2 + 4.$$

Тем самым, мы получаем одно из утверждений теоремы Гуана (3.1), что

$$b_3 \leq \frac{4(23 - b_2)(8 - b_2)}{(b_2 + 1)}.$$

3.4.2. Случай шестимерного О'Грэди

Как показали О'Грэди и Рапаньетта ([O1, R]) второе число Бетти для многообразия О'Грэди M_6 равно восьми, а константа Фуджики равна 4 ([R]). Также Рапаньетте удалось вычислить эйлерову характеристику, она равна 1920 ([R]).

В своей работе ([R]) Рапаньетта использовал бирациональную симплектическую инволюцию схемы Гильберта трёх точек, которую также рассматривали Монгарди и Вандель в недавней работе про автоморфизмы, тривиально действующие на вторых когомологиях ([MW]). В частности, из их результатов следует, что нечётные числа Бетти равны нулю.

Предложение 3.4.1. *Пусть M является шестимерным гиперкэлеровым многообразием с $b_2 = 8$ и $\chi(M) = 1920$. Тогда возможны следующие варианты в зависимости от делимости b_5 на 8:*

- *Если $b_5 = 8m$, то $b_3 = 4k$, где $k \in [0, m]$ и $b_4 = 199 + 2m + 9k$, $b_6 = 1504 + 12m - 10k$, $h^{2,2} \leqslant 173 + 2m + k$,*

- *Если* $b_5 = 8m + 4$, *то* $b_3 = 4k$, *где* $k \in [0, m]$ *и* $b_4 = 200 + 2m + 9k$, $b_6 = 1510 + 12m - 10k$, $h^{2,2} \leqslant 174 + 2m + k$.

- *Если* $b_5 = 0$ *(*$b_3 = 0$ *также), то* $b_4 = 199$, $b_6 = 1504$, $h^{2,2} \leqslant 173$ *(случай многообразия* M_6*).*

Доказательство. Воспользуемся основным неравенством 3.3.4 и неравенством Саламона 2.4.3, а также вложением $\mathrm{Sym}^3(H^2(M))$ в $H^6(M)$ (2.4.4):

$$97 + \frac{37}{2}b_3 - \frac{19}{2}b_4 - \frac{b_5}{2} + \frac{23}{2}h^{2,2} \leqslant \frac{38b_2^2 - 1030b_2 + 7572}{b_2 + 1}$$

$$96b_3 + b_2^3 + 3b_2^2 + 2b_2 \leqslant 420 + 180b_2 + 36b_4$$

где во втором неравенстве мы воспользовались вложением $\mathrm{Sym}^3(H^2(M)) \hookrightarrow H^6(M)$.

Используя неравенство Саламона и эйлерову характеристику многообразия О'Грэди M_6 ($b_2 = 8$, $\chi = 1920$), получаем

$$\begin{aligned} 1920 = 2 + 2 \cdot 8 - 2b_3 + 2b_4 - 2b_5 + b_6, \\ b_6 + 16b_3 = 6b_4 + 310, \end{aligned}$$

Дальше оставшееся утверждение про $h^{2,2}$ легко следует из 3.3.4. □

Замечание 3.4.2. Недавно Монгарди, Рапаньетта и Сакка ([MRS]) удалось определить числа Ходжа для M_6. В своей работе они воспользовались уже упомянутой инволюцией и подсчитали числа Ходжа для M_6:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
&&&&&&1&&&&&&\\
&&&&&0&&0&&&&&\\
&&&&1&&6&&1&&&&\\
&&&0&&0&&0&&0&&&\\
&&1&&12&&173&&12&&1&&\\
&0&&0&&0&&0&&0&&0&\\
1&&6&&173&&1144&&173&&6&&1\\
&0&&0&&0&&0&&0&&0&\\
&&1&&12&&173&&12&&1&&\\
&&&0&&0&&0&&0&&&\\
&&&&1&&6&&1&&&&\\
&&&&&0&&0&&&&&\\
&&&&&&1&&&&&&
\end{array}
$$

В случае шестимерного многообразия О'Грэди M_6 неравенство 3.3.4 обращается в равенство.

3.4.3. Шестимерные гиперкэлеровые многообразия

Согласно 2.4.4 и [LL] $\bigoplus_{k=0}^{4n} H^k(M,\mathbb{C})$ раскладывается в сумму неприводимых представлений $\mathfrak{so}(b_2+2,\mathbb{C})$ в соответствии с действием этой алгебры Ли.

При этом ромб Ходжа является проекцией на плоскость решётки весов $\mathfrak{so}(b_2+2,\mathbb{C})$ [LL]. Положительные веса могут быть выбраны так, что доминантная клетка Вейля проецируется в октант ромба Ходжа.

Случай размерности шесть изучен Сейвоном в [S-b2]. Он доказал следующую

Теорема 3.4.3. *Пусть M – простое гиперкэлерово многообразие размерности шесть, тогда $b_2(M) \leq 23$.*

Доказательство следует из равенства Саламона 2.4.3 и соотношений на числа Бетти, получаемых из разбиения ромба Ходжа на неприводимые представления алгебры Ли $\mathfrak{so}(b_2+2)$. Напомним, что в зависимости от чётности b_2 алгебра Ли $\mathfrak{so}(b_2+2)$ имеет тип B_n или D_n. И, соответственно, имеется b_2+2

фундаментальных представления вида $\Lambda^i\mathbb{C}^{b_2+2}$, а также спинорные представления. Остальные неприводимые представления – подмодули в тензорных произведениях фундаментальных.

Рассмотрим подробнее строение ромба Ходжа шестимерных гиперкэлеровых многообразий, чтобы получить ограничения на числа Бетти из неравенства 3.3.4.

Положительные веса соответствуют элементам ромба Ходжа, при этом неприводимое представление со старшим вектором $1 \in H^0(M,\mathbb{C})$ в точности подкольцо в кольце когомологий, порождённое $H^2(M,\mathbb{C})$. Напомним, что

$$H^4(M) = \operatorname{Sym} H^2(M) \oplus H^4_{prim}(M).$$

Соответственно, элементы из примитивной части четвёртых когомологий, лежащие в $H^{3,1}_{prim}(M)$ и $H^{2,2}_{prim}(M)$ также задают неприводимые модули. Таким образом, мы имеем следующие неприводимые модули

- V_1, порождённое элементами $H^{2,1}(M)$ – спинорное представление,
- V_2, порождённое элементами $H^{3,1}(M)$ – $\Lambda^2\mathbb{C}^{b_2+2}$ размерности $(b_2+2)(b_2+1)/2$,
- V_3, порождённое элементами $H^{2,2}(M)$ – $\mathbb{C}^{b_2+2}$ размерности b_2+2,
- V_4, порождённое элементами $H^{3,2}(M)$ – спинорное представление,
- V_5, порождённое элементами $H^{3,3}(M)$ – тривиальное размерности 1

Более того V_2 сидит в ромбе Ходжа следующим образом ($V_2^{p,q}$):

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 0 & & & & & & \\
 & & & & & 0 & & 0 & & & & & \\
 & & & & 0 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & & \\
 & & 0 & & 1 & & b_2-2 & & 1 & & 0 & & \\
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \\
0 & & 0 & & b_2-2 & & \frac{b_2^2-5b_2+10}{2} & & b_2-2 & & 0 & & 0 \\
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & & 0 & & 1 & & b_2-2 & & 1 & & 0 & & \\
 & & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & & \\
 & & & & 0 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & & & & 0 & & 0 & & & & & \\
 & & & & & & 0 & & & & & &
\end{array}$$

А V_3 сидит в ромбе Ходжа следующим образом ($V_3^{p,q}$):

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 0 & & & & & & \\
 & & & & & 0 & & 0 & & & & & \\
 & & & & 0 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & & \\
 & & 0 & & 0 & & 1 & & 0 & & 0 & & \\
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \\
0 & & 0 & & 1 & & b_2-2 & & 1 & & 0 & & 0 \\
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & & 0 & & 0 & & 1 & & 0 & & 0 & & \\
 & & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & & \\
 & & & & 0 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & & & & 0 & & 0 & & & & & \\
 & & & & & & 0 & & & & & &
\end{array}
$$

Таким образом, можно ролучить выражения для чисел Бетти b_4 и b_6 в терминах b_2 ([S-b2]):

$$b_6 = \binom{b_2+2}{3} + c\left(\frac{b_2^2 - b_2 + 2}{2}\right) + db_2 + e, b_4 = \binom{b_2+1}{2} + cb_2 + d. \quad (3.4.1)$$

где c – кратность вхождения представления V_2 в разложение когомологий на неприводимые $\mathfrak{so}(b_2+2,\mathbb{C})$-модули, а d – представления V_3.

Равенство Саламона в случае шестимерных гиперкэлеровых многообразий принимает вид:

$$18b_4 - 48b_3 + 90b_2 + 210 = 3b_6.$$

Подставляя в это равенство формулы 3.4.1, можно получить, что $b_2 \leq 23$. А используя 3.3.3, мы можем доказать и следующую теорему.

Теорема 3.4.4. *Пусть M – гиперкэлерово многообразие размерности шесть с $b_5 = 0$. Тогда*

(1) Если $b_2 = 23$, то возможны следующие комбинации чисел Бетти

b_4 299 $276+k$
b_6 2554 $2422+6k$
где k – от 0 до 10.

(2) *Равенство в 3.3.4 возможно при следующих значениях b_2 –* $3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 14, 15, 17, 19, 23$.

Доказательство. Подставляя 3.4.1 в неравенство 3.3.4, получаем:

$$(b_2^2 - 22b_2 + 23) + 2d + c(2b_2 - 23) + 97 \leq \frac{2(38b_2^2 - 1030b_2 + 7572)}{b_2 + 1} \quad (3.4.2)$$

Если $b_2 = 23$, то получаем

$$2d + 23c \leq 23,$$

поскольку числа c, d – целые, то отсюда следует (1).

Чтобы получить (2) достаточно заметить, что левая часть 3.4.2 всегда целая, при равенстве правая часть тоже должна быть целой, это возможно, только при приведённых значениях b_2. □

3.5. Ограничения на b_2 в размерностях восемь и десять

Чтобы найти ограничения в размерностях восемь и десять мы используем метод, описанный Сейвоном [S-b2]. Действительно, как мы уже знаем, $\mathfrak{so}(b_2+2, \mathbb{C})$ действует на когомологиях.

Теорема 3.5.1. *Пусть M – восьмимерное простое гиперкэлерово многообразие с $H^{2k+1}(M, \mathbb{C}) = 0$. Тогда $b_2 \leqslant 24$.*

Замечание 3.5.2. Из $H^{2k+1}(M, \mathbb{C}) = 0$ следует, что зануляются все нечётные числа Бетти.

Доказательство. Также как и в размерности четыре и шесть, выразим b_4, b_6, и b_8 в терминах b_2 и кратности других представлений.

Рассмотрим действие $\mathfrak{so}(b_2+2, \mathbb{C})$ на комплексных когомологиях многообразия M. Элемент $H^{3,1}_{pr}(M)$ порождает неприводимый $\mathfrak{so}(b_2+2, \mathbb{C})$-модуль размерности $\frac{(b_2+2)(b_2+1)b_2}{6}$. В ромб Ходжа он входит как

$$
\begin{array}{c}
0\\
0 \quad 0\\
0 \quad 0 \quad 0\\
0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\\
0 \quad 1 \quad h \quad 1 \quad 0\\
0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\\
0 \quad 1 \quad h \quad \frac{h^2-h+4}{2} \quad h \quad 1 \quad 0\\
0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\\
0 \quad 0 \quad \mathrm{h} \quad \frac{h^2-h+4}{2} \quad \frac{h^3-3h^2-10h-60}{6} \quad \frac{h^2-h+4}{2} \quad h \quad 0 \quad 0\\
0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\\
0 \quad 1 \quad h \quad \frac{h^2-h+4}{2} \quad h \quad 1 \quad 0\\
0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\\
0 \quad 1 \quad h \quad 1 \quad 0\\
0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\\
0 \quad 0 \quad 0\\
0 \quad 0\\
0
\end{array}
$$

Аналогично, мы имеем неприводимый $\mathfrak{so}(b_2+2,\mathbb{C})$-модуль, задаваемый теми элементами $H^{2,2}_{pr}$, которые не лежат в модуле, порождённом вторыми когомологиями, и в модулях, порождённых элементами из $H^{3,1}_{pr}$. В ромб Ходжа он входит следующим образом

$$
\begin{array}{c}
0\\
0 \quad 0\\
0 \quad 0 \quad 0\\
0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\\
0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0\\
0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\\
0 \quad 0 \quad 1 \quad h \quad 1 \quad 0 \quad 0\\
0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\\
0 \quad 0 \quad 1 \quad h \quad \frac{h^2-h-4}{2} \quad h \quad 1 \quad 0 \quad 0\\
0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\\
0 \quad 0 \quad 1 \quad h \quad 1 \quad 0 \quad 0\\
0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\\
0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0\\
0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\\
0 \quad 0 \quad 0\\
0 \quad 0\\
0
\end{array}
$$

Напомним, что $b_4 = \frac{(b_2+1)b_2}{2} + cb_2 + d$, где d – та часть $H^{2,2}_{pr}$, которая не происходит из $H^{3,1}_{pr}$.

Таким образом первый модуль даёт вклад в $H^8(M)$

$$c\left(\frac{h^3+3h^2-4h-36}{6}\right)=c\left(\frac{b_2^3-3b_2^2-4b_2-24}{6}\right),$$

второй – $d\left(\frac{h^2-h-4}{2}+2h+2\right)=d\left(\frac{h^2+3h}{2}\right)=d\left(\frac{b_2^2-b_2-2}{2}\right)$.

Ясно, что в $H^8(M)$ есть элементы, которые приходят из той части $H^6(M)$, которая не задаётся элементами $\mathrm{Sym}^3 H^2$ и двумя $\mathfrak{so}\,(b_2+2,\mathbb{C})$-модулями, порождёнными элементами из $H^{3,1}_{pr}$ и $H^{2,2}_{pr}$.

$$b_6=\frac{(b_2+2)\,(b_2+1)\,b_2}{6}+c\left(\frac{b_2^2-b_2+2}{2}\right)+db_2+e$$

Каждый элемент из $H^{3,3}_{pr}$ части задаёт $\mathfrak{so}\,(b_2+2,\mathbb{C})$-модуль размерности (b_2+2). Это даёт в b_8 следующий вклад $e\,(b_2)$.

Таким образом, для b_8 имеем

$$b_8\geqslant\frac{(b_2+3)\,(b_2+2)\,(b_2+1)\,b_2}{24}+c\left(\frac{b_2^3-3b_2^2-4b_2-24}{6}\right)+d\left(\frac{b_2^2-b_2-2}{2}\right)+eb_2$$

Из соотношения Саламона (2.4.3) следует, что

$$\begin{aligned}8\cdot\frac{(b_2+2)\,(b_2+1)\,b_2}{6}+8c\left(\frac{b_2^2-b_2+2}{2}\right)+8db_2+8e+44\left(\frac{(b_2+1)\,b_2}{2}+cb_2+d\right)+\\+104b_2+188+b_7-71b_3-23b_5\geqslant\\\geqslant 2\frac{(b_2+3)\,(b_2+2)\,(b_2+1)\,b_2}{24}+2c\left(\frac{b_2^3-3b_2^2-4b_2-24}{6}\right)+2d\left(\frac{b_2^2-b_2-2}{2}\right)+2eb_2\end{aligned}$$

Преобразуем, перенеся все члены, возникающие из симметрических степеней налево, всё остальное, кроме b_7 налево:

$$\begin{aligned}-2\frac{(b_2+3)\,(b_2+2)\,(b_2+1)\,b_2}{24}+8\cdot\frac{(b_2+2)\,(b_2+1)\,b_2}{6}+44\left(\frac{(b_2+1)\,b_2}{2}\right)+104b_2+188+b_7\geqslant\\\geqslant c\left(\frac{b_2^3-15b_2^2-124b_2-48}{3}\right)+d\left(b_2^2-9b_2-46\right)+2e\,(b_2-4)+71b_3+23b_5\end{aligned}$$

Левая часть $\frac{-b_2^4+10b_2^3+301b_2^2+530b_2+2256}{12}+b_7$.

Все нечётные числа Бетти нулевые, поэтому левая часть неотрицательна $b_2\geqslant 24$, а правая часть положительна. $\square$

Замечание 3.5.3. Второе число Бетти b_2 не более 24 для достаточно малых b_7. В самом деле, для доказательства 3.5.1 м использовали тот факт, что

$$F\left(b_2\right)+b_7:=\frac{-2b_2^4+20b_2^3+602b_2^2+1060b_2+4512}{24}+b_7$$

отрицателен, если $b_2 \geqslant 25$. Это также верно при $b_7 \leqslant \left|F\left(b_2\right)|_{b_2=25}\right| = 1281$.

Теорема 3.5.4. *Пусть M – 10-мерное гиперкэлерово многообразие с $H^{2k+1}\left(M,\mathbb{C}\right)=0$. Тогда $b_2 \leqslant 25$.*

Доказательство. Доказательство такое же, как и в предыдущем случае. Можем заметить, что есть вклады от неприводимых модулей $V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7, V_8$, порождённых элементами $H_{pr}^{3,1}, H_{pr}^{2,2}, H_{pr}^{3,3}, H_{pr}^{4,2}, H_{pr}^{4,4}, H_{pr}^{5,3}, H_{pr}^{5,5}$. Они изомофны $\bigwedge^4\mathbb{C}^{b_2+2}, \bigwedge^3\mathbb{C}^{b_2+2}, \bigwedge^4\mathbb{C}^{b_2+2}, \mathbb{C}^{b_2+2}, \bigwedge^2\mathbb{C}^{b_2+2}$ и тривиальному представлениям соответственно как неприводимые $\mathfrak{so}\left(b_2+2,\mathbb{C}\right)$-модули.

Аналогично доказательству 3.5.1 перенесём все члены, отвечающие симметрическим степеням налево, остальные члены – направо.

После вычислений получаем

$$\frac{1}{60}(b_2+3)(b_2+4)(b_2+10)(-b_2^2-21b_2+118)=Q\left(b_2,c,d,e,f,g,h,i\right),$$

где $Q\left(b_2,c,d,e,f,g,h,i\right)$ – сумма вкладов неприводимых модулей $V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7, V_8$, а c,d,e,f,g,h,i – их кратности.

В этом случае, аналогично теореме 3.5.1 оказывается, что левая часть предыдущего равенства отрицательна при $b_2 \leqslant 25$, а правая – положительна. Таким образом, в размерности десять $b_2 \leqslant 25$. □

Замечание 3.5.5. Заметим, что в больших размерностях у нас существенно больше образующих в кольце Ходжа [KoS], а размерность максимального фундаментального представления равна $\Lambda^{b_2+2}\mathbb{C}^{b_2+2}$. Из-за этого в больших размерностях в ромб Ходжа входят модули, являющиеся подпредставлениями тензорных степеней фундаментальных, что существенно усложняет получение ограничений на второе число Бетти b_2.

Гипотеза 3.5.6. Второе число Бетти b_2 простого гиперкэлерового многообразия комплексной размерности $2n$ ограничено максимальным корнем следующего многочлена

$$P(b_2,n) = -\frac{n}{(n-1)!}\prod_{i=0}^{i=n-1}(b_2+i) + 2\sum_{j=1, j\vdots 2}^{j=2n}\left(3j^2-n\right)\frac{1}{(n-j/2)!}\prod_{i=0}^{i=n-j/2-1}(b_2+i),$$

который обозначается b_2^{lef}.

Многочлен $P(b_2,n)$ – эта сумма вкладов симметрических степеней вторых когомологий с учётом коэффициентов из равенства Саламона 2.4.3. Чтобы доказать, что ограничение на b_2 действительно таково, мы аналогично размерностям восемь и десять должны показать, что многочлен, образованный вкладами остальных представлений отрицателен при $b_2 \geq b_2^{lef}$.

Предложение 3.5.7. *Пусть M – простое гиперкэлерово многообразие комплексной размерности $2n$. Тогда*

$$P(b_2,n) = -\frac{1}{n!}\left(\prod_{i=3}^{i=n-1}(b_2+i)\right)\cdot(b_2+2n)\cdot(b_2^2-21b_2+2-96n),$$

и

$$b_2^{lef} = \frac{21+\sqrt{433+96n}}{2}.$$

Доказательство. Заметим, что сумма четырёх членов в $P(b_2,n)$, отвечающих $j = 2n, 2n-2, 2n-4, 2n-6$ in 3.5.6 делится на (b_2+3) и частное есть

$$\frac{P(b_2,n)}{b_2+3} = \frac{1}{3}((12n^2-73n+108)b_2^2 + 3(12n^2-49n+48)b_2 + 12n(n-1))$$

Тогда мы можем показать по индукции, что сумма последних k членов $P(b_2,n)$, отвечающих $j = 2n, ..., 2n-2k+2$ в 3.5.6 равна

$$2\frac{1}{(k-1)!}\left(\prod_{i=3}^{i=k-1}(b_2+i)\right)\cdot(A_k\cdot b_2^2 + 3B_k\cdot b_2 + 12n(n-1)),$$

где $A_k = (12n^2 - (73 + 24(k-4))n + 108 + 60k + 24\frac{(k-4)(k-3)}{2})$ и $B_k = (12n^2 - (49 + 16k)n + 48 + 24k + 8\frac{(k-4)(k-3)}{2})$.

Действительно, сумма членов с $j = 2n, ..., 2n-2k$ в 3.5.6 равна

$$2\frac{1}{(k-1)!}\left(\prod_{i=3}^{i=k-1}(b_2+i)\right)\cdot(A_k\cdot b_2^2 + 3B_k\cdot b_2 + 12n(n-1)) + \\ + \left(3(2n-2k)^2 - n\right)\frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{i=k-1}(b_2+i) = \\ = 2\frac{1}{k!}\left(\prod_{i=3}^{i=k}(b_2+i)\right)\cdot(A_{k+1}\cdot b_2^2 + 3B_{k+1}\cdot b_2 + 12n(n-1)).$$

Поэтому мы можем записать многочлен $P(b_2, n)$ в следующем виде:

$$P(b_2,n) = \frac{n}{(n-1)!}\prod_{i=0}^{i=n-1}(b_2+i) + 2\frac{1}{(n-1)!}\left(\prod_{i=3}^{i=n-1}(b_2+i)\right)\cdot(A_n\cdot b_2^2 + 3B_n\cdot b_2 + 12n(n-1)).$$

После приведения подобных слагаемых получаем искомое утверждение.

□

Ограниченность второго числа Бетти можно получать совсем другим путём. В частности из следующей теоремы Каменоновой [Kam].

Напомним, что решётка Λ, свободный $\mathbb{Z}$-модуль конечного ранга с невырожденной симметрической билинейной формой q со значениями в $\mathbb{Z}$. Если e_i – базис в Λ, то дискриминат решётки определяется как $\mathrm{discr}(\Lambda) = \det(e_i \cdot e_j)$.

Теорема 3.5.8. *Существует конечное число лагранжевых расслоений $\pi : M \to \mathbb{C}P^n$ с точностью до деформации с заданной константой Фуджики с и заданным дискриминантом решётки Бовиля-Богомолова-Фуджики (Λ, q).*

Из этой теоремы следует, что существует только конечное число деформационных типов гиперкэлеровых многообразий, а значит есть только конечный набор возможных вторых чисел Бетти.

Следствие 3.5.9. *В предположениях теоремы 3.5.8 второе число Бетти гиперкэлеровых многообразий ограниченно.*

Замечание 3.5.10. В отличии от способа, изложенного выше из конечности числа лагранжевых расслоений мы не получаем явных оценок на числа Бетти. С другой стороны, отдельной трудной задачей представляется получение ограничения на возможные значения константы Фуджики.

Глава 4

Абсолютно трианалитические подмногообразия гиперкэлеровых многообразий

В этом разделе мы рассмотрим абсолютно абсолютно трианалитические подмногообразия гиперкэлеровых многообразий. Ранее в [SV] и [V3] было показано, что в известных примерах простых гиперкэлеровых многообразий за редким исключением не содержится абсолютно трианалитических многообразий. В своей работе [GK] показали, что абсолютно трианалитическим подмногообразиями в обобщённом многообразии Куммера могут быть только деформации разрешения особенностей для фактора тора по действию группы Вейля A_n, B_n, C_n. До настоящего момента вопрос существования абсолютно трианалитических торов в обобщённом многообразии Куммера был открытым, в этой главе мы ответим на этот вопрос и покажем, что в обобщённых многообразиях Куммера нет абсолютно трианалитических торов. Предварительные сведения о трианалитических многообразиях можно найти в главе 2. Результаты этой главы опубликованы в [Ku2, Ku4].

В разделе 4.1 мы напомним примеры абсолютно трианалитических подмногообразий и препятствия к их существованию. В разделе 4.2 мы приведём конструкцию калибраций на гиперкэлеровых многообразиях. В разделе 4.3 мы докажем основной результат.

4.1. Трианалитические подмногообразия в известных примерах гиперкэлеровых многообразий

Рассмотрим гиперкэлеровое многообразие (M, I, J, K). Как было уже отмечено в разделе 2.2, трианалитические подмногообразия являются гиперкомплексными в гладких точках, их комплексная размерность четна. Поэтому в (M, L) нет компактных нечетномерных подмногообразий, где L – общая комплексная структура (см. раздел 2.2. Из этого следует, в частности, что (M, L) не является алгебраическим многообразием.

Теорема 4.1.1. *[V5, Theorem 6.2.] Пусть M – гиперкэлерово многообразие,*

$Z \subset M$ – трианалитическое подмногообразие и I – индуцированная комплексная структура. Рассмотрим нормализацию

$$\widetilde{(Z, I)} \to (Z, I)$$

для (Z, I). Тогда $\widetilde{(Z, I)}$ гладкое, и отображение $\widetilde{(Z, I)} \to M$ является вложением, и индуцирует гиперкэлерову структуру на $\widetilde{(Z, I)}$.

В частности любое трианалитическое подмногообразие гиперкэлерового многообразия $Z \to M$ имеет гладкую гиперкэлерову нормализацию $\widetilde{Z}$ в M; эта иммерсия в общей точке биективна на образ. Тем самым, мы можем рассматривать не абсолютно трианалитические циклы, а гиперкэлеровы многообразия. Тем самым, естественным является вопрос, какие трианалитические подмногообразия содержаться в известных примерах простых гиперкэлеровых многообразий.

Вербицкий доказал, что любая деформация схемы Гильберта $K3$ поверхности не содержит комплексных подмногообразий [V3]. Аналогичное утверждение предполагалось Калединым и Вербицким и в случае обообщённой поверхности Куммера [KV]. Однако, затем они ([KV1]) обнаружили контрпример, действительно, рассмотрим инволюцию $\nu : t \to -t$, действующую на торе. Эта инволюция может быть продолжена до инволюции схемы Гильберта тора $T^{[n+1]}$, и, так как она коммутирует с отображением Альбанезе $T^{[n+1]} \longrightarrow T$, то легко видеть, что ν сохраняет обобщённое многообразие Куммера $K_n(T)$. Более того, ν отображает кэлеров класс в себя. Таким образом, инволюция ν сохраняет гиперкэлерову структуру на $K_n(T)$. В случае нечётного $n = 2m - 1$ отображение ν сохраняет $2m$-элементный набор

$$(x_1, -x_1, x_2, -x_2, ..., x_m, -x_m) \in T^{(n+1)}$$

Если $x_i, -x_i$ попарно различны, то такие наборы задают точки в схеме Гильберта, сохраняемой действием инволюции ν. Рассмотрим замыкание X множества таких точек. Это одна из компонент множества неподвижных точек инволюции ν. Подмногообразие X бирационально эквивалентно схеме Гильберта $K3$ поверхности.

Следствие 4.1.2. *Многообразие* $\mathrm{Sym}^2(T)$ *содержит 81 куммерову* $K3$ *поверхность.*

Отсутствие абсолютно трианалитических подмногообразий в схеме Гильберта $K3$ поверхности $\mathrm{Hilb}_n(K3)$ была использована в [KV-book] для доказательства компактности пространства деформаций некоторых стабильных голоморфных расслоений на M. Несмотря на то, что трианалитические подмногообразия в обобщённом многообразии Куммера есть, Вербицкому и Каледину удалось использовать изначальный аргумент и показать, что любое абсолютно трианалитическое подмногообразие Z обобщённого Куммерового многообразия является деформацией разрешения особенностей для фактора тора по действию группы Вейля. Основная идея доказательства заключается в том, что в этом случае Z является разрешением особенностей для фактора плоского подтора в симметрической степени тора $T^{(n)}$, и классификации тех действий группы Вейля, которые допускают голоморфно-симплектическое разрешение особенностей. Позже Гинзбург и Каледин показали, что только группы Вейля A_n, B_n, C_n могут возникать в случаях, когда фактор допускает голоморфно-симплектическое разрешение особенностей ([GK]).

Вообще говоря, абсолютно трианалитические многообразия возникают как многообразия калибраций (см. раздел 4.2), и как графики в $M \times M$ для автоморфизмов гиперкэлеровых многообразий, действующих тривиально на вторых когомологиях. Группа таких автоморфизмов конечна [H1]. Для схем Гильберта над $K3$ она тривиальна [H1]. И была изучена в случае обобщённых многообразий Куммера Огизо ([Og]), Буассье, Нипер-Вайскирхен и Сарти ([BNS]), и для многообразий О'Грэди Монгарди и Ванделем ([MW]).

В частности, оказывается, что

Теорема 4.1.3. *[MW]*

(1) Пусть X – деформационно эквивалентное многообразию О'Грэди размерности десять. Тогда ядро отображения

$$\nu : \mathrm{Aut}(X) \to O(H^2(X, \mathbb{Z}))$$

инъекивно.

(2) Пусть X – деформационно эквивалентное многообразию О'Грэди размерности десять. Тогда ядро отображения

$$\nu : \mathrm{Aut}(X) \to O(H^2(X, \mathbb{Z}))$$

изоморфно $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\times 8}$.

Далее мы рассмотрим свойства абсолютно трианалитических подмногообразий в известных примерах гиперкэлеровых многообразий, в частности многообразиях О'Грэди.

Теорема 4.1.4. *[SV] Пусть M – гиперкэлерово многообразие, $Z \subset M$ – абсолютно трианалитическое подмногообразие, и $\widetilde{Z} \to M$ его нормализация, такая что $\widetilde{Z} = T \times \prod_i K_i$, где K_i голоморфно симплектические многообразия максимальной голономии. Тогда $b_2(T) \geq b_2(M)$ и $b_2(K_i) \geq b_2(M)$.*

Отсюда легко следует, что в схемах Гильберта малых размерностей (четыре, шесть) нет абсолютно трианалитических многообразий. Действительно, как мы убедились в предыдущей главе $b_2 \leq 23$ для четырёхмерных и шестимерных гиперкэлеровых многообразий.

Доказательство отсутствия абсолютно трианалитических подмногообразий известного типа в многообразии О'Грэди размерности десять и отсутствия торов в шестимерном многообразии О'Грэди было получено Солдатенковым и Вербицким в [SV]. Их доказательство использует k-симплектическую структуру на первых гомологиях тора.

Пусть $\Omega \subset \Lambda^2 M$ это k-мерное пространство вещественных 2-форм на многообразии M, причём все они замкнуты и постоянного ранга, и $Q \subset \Omega$ множество всех вырожденных форм в Ω. Ω называется **а k-симплектической структурой**, если Q квадрика в Ω, и все ненулевые формы $v \in Q$ имеют ранг $\frac{1}{2} \dim M$.

Оказывается, что, если в гиперкэлеровом многообразии есть подтор, то на его первых когомологиях возникает соответствующая k-симплектическая структура, а именно

Предложение 4.1.5. *Пусть X является голоморфно симплектическим многообразием, $k = b_2(X)$ его второе число Бетти и T компактный тор размерности $2m$, погруженный в X. Предположим, что T абсолютно трианалитической подмногообразие. Тогда $H_1(T, \mathbb{C})$ имеет невырожденную вещественную k-симплектическую структуру. Соответствующая квадратичная форма имеет сигнатуру $(k-3, 3)$.*

Замечание 4.1.6. Абсолютная трианалитичность тора T выполняется, если X достаточно общее (2.2.11).

Из предыдущего утверждения легко вытекает следующая

Теорема 4.1.7. *[SV] Пусть M – гиперкэлерово многообразие максимальной голономии, T – гиперкэлеров тор, и $T \to M$ гиперкэлерова иммерсия с абсолютно трианалитическим образом. Тогда*

$$\dim_{\mathbb{C}}(T) \geqslant 2^{\frac{b_2(M)-1}{2}},$$

где $b_2(M)$ – второе число Бетти.

Вместе с 4.1.4 это позволяет доказать, что в многообразии О'Грэди M нет подмногообразий известного типа, поскольку для него $b_2(M) = 24$. Действительно гиперкэлеровы многообразия с максимальной голономией K_i в размерности 2 удовлетворяют $b_2(K_i) \leq 22$ (классификация Кодаиры-Спенсера, см. например [Bes]). В случае четырёхмерных гиперкэлеровых многообразий из теоремы Гуана 3.1.1 следует $b_2(K_i) \leq 23$ ([Gu]). Таким образом, любое абсолютно трианалитическое подмногообразие 10-мерного многообразия О'Грэди имеет размерность хотя бы 8 (размерность шесть невозможна по теореме Сейвона 3.4.3) и максимальную голономию.

Теорема 4.1.8. *Пусть $Z \subset M$ – комплексное подмногообразие общей деформации 10-мерного многообразия О'Грэди, $\tilde{Z}$ – его нормализация, и $\tilde{Z}_1$ – накрытие, снабжённое разложением Богомолова. Тогда $\tilde{Z}_1 = \prod_i K_i$, где K_i гиперкэлеровы многообразия максимальной голономии с $b_2 \geq 24$.*

Теорема 4.1.9. *В десятимерном многообразии О'Грэди M_{10} нет абсолютно трианалитических торов.*

Доказательство. Достаточно применить 4.1.7 и использовать, что $b_2(M_{10}) = 24$. □

Для шестимерного многообразия О'Грэди M_6 ситуация обстоит сложнее, поскольку $b_2(M_6) = 8$, а значит оно может содержать абсолютно трианалитические многообразия Z с $b_2(Z) \geq 8$, но при этом комплексные торы всё же не могут в нём быть. Этот изящный результат также получен Вербицким и Солдатенковым в [SV] с использованием структуры модуля над алгеброй Клиффорда для k-симплектической структуры.

Теорема 4.1.10. *Пусть M – общая деформация 6-мерного многообразия О'Грэди. Тогда любое голоморфное отображение из комплексного тора в M тривиально.*

В случае многообразия Куммера теорема 4.1.7 даёт $dim_{\mathbb{C}} \geq 4$, но никакого противоречия это не даёт. Ниже мы покажем, что всё же и в этом случае абсолютно трианалитических торов как подмногообразий не бывает.

4.2. Калибрации

В этом разделе мы дадим основные определения и свойства калибраций. Более подробные сведения содержаться в [HarL], а также в [J], где приведены результаты для многообразий с ограниченной группой голономии.

Пусть $W \subset V$ является p-мерным подпространством Евклидова пространства и $\mathrm{Vol}(W)$ обозначает риманнову форму объёма для $W \subset V$, определённую с точностью до знака. Для любой p-формы $\eta \in \Lambda^p V$, назовём **комассой** $comass(\eta)$ максимум из $\frac{\eta(v_1, v_2, \ldots, v_p)}{|v_1||v_2|\ldots|v_p|}$, для всех p-элементных наборов

$(v_1, ..., v_p)$ векторов в V и **гранью** назовём набор плоскостей $W \subset V$, где $\frac{\eta}{\mathrm{Vol}(W)} = comass(\eta)$.

Прекалибрацией на римановом многообразии называется дифференциальная форма с комассой ≤ 1 везде.

Калибрацией называется прекалибрация, которая замкнута.

Определение 4.2.1. Пусть η – k-мерная прекалибрация риманового многообразия и $Z \subset M$ – k-мерное подмногообразие (обычно предполагается, что хаусдорфова размерность множества особых точек Z не более, чем $k-2$, поскольку в этом случае дифференциальная форма с компактным носителем может быть проинтегрирована над Z). Будем говорить, что Z **калибруется формой** η, если для любой гладкой точки $z \in Z$, касательное пространство $T_z Z$ является гранью прекалибрации η.

Замечание 4.2.2. : Ясно, что для любой прекалибрации η,

$$\mathrm{Vol}(Z) \geq \int\limits_Z \eta, \tag{4.2.1}$$

где $\mathrm{Vol}(Z)$ обозначает риманов объём компактного подмногообразия Z, и равенство выполняется тогда и только тогда, когда Z калибруется формой η. Если к тому же η замкнута, то $\int_Z \eta$ когомологический инвариант, и из неравенства (4.2.1) следует, что Z минимизирует риманов объём в своём классе гомологий.

В работе [GV] было построено несколько семейств калибраций на гиперкэлеровых многообразиях. Пусть (M, I, J, K) – гиперкэлерово многообразие, а $\omega_I, \omega_J, \omega_K$ – кэлеровы формы. Эти формы порождают некоторую коммутативную подалгебру в $\Lambda^*(M)$ (некоторые результаты об этой подалгебре можно найти в [GV, HarL]). В [GV] Грanчаров и Вербицкий строят новые калибрации, которые являются полиномами от $\omega_I, \omega_J, \omega_K$.

Калибрации играют центральную роль в различных геометрических аспектах теории струн и M-теории. До размерности восемь, калибрации хорошо изучены ([DHM]), но в больших размерностях, их классификация существенно сложнее. Даже в таких специальных случаях, как гиперкэлерова геометрия, проблема классификации естественных, т.е. $\mathrm{Sp}(n)$-инвариантных также изучена не полностью. Тем не менее, ряд хороших калибраций получен в [GV]

На кэлеровом многообразии, нормированная степень кэлеровой формы $\frac{\omega^p}{p!}$ является калибрацией. И, более того, подмногообразие является комплексно-аналитическим если и только если оно калибруется этой формой. Заметим, что абсолютно трианалитические многообразия по определению являются комплексно аналитическими, что мы в дальнейшем используем при доказательстве основного утверждения. Действительно, подпространство $V \subset TM$ является гранью $\frac{\omega^p}{p!}$ тогда и только тогда V комплексно-линейно, это, в частности, следует из неравенств Виртингера [HarL]).

Калибрации, возникающие в кватернионной геометрии, и соответствующие калиброванные многообразия были в первую очередь рассмотрены в [GV]. Эти калибрации аналогичны во многих смыслах приведённой выше калибрации степенями кэлеровой формы. Так, в гиперкэлеровой геометрии роль кэлеровой формы выполняет 4-форма $\Theta := \omega_I^2 + \omega_J^2 + \omega_K^2$. Оказывается, что степени Θ^p являются калибрациями. Несложно видеть, что $V \subset TM$ грань для Θ тогда и только тогда, когда V кватернионной пространство (4.2.4).

Соответственные калиброванные подмногообразия это те, которые комплексно аналитичны по отношению ко всем трём структурам I, J и K, т.е. **трианалитические**.

Более сложные калибрации задаются однородными полиномами $P(x, y, z)$ степени p. В частности, любой однородный полином $P(x, y, z)$ степени p даёт замкнутую $2p$-форму $P(\omega_I, \omega_J, \omega_K)$ на M. В случае, когда голономия M максимальна, то все параллельные дифференциальные формы получаются таким способом [GV]. Когда $P(x, y, z) = \frac{x^p}{p!}$ это кэлерова калибрация, если $P(x, y, z) = c_p(x^2 + y^2 + z^2)^p$, где $c_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{(p!)^2}{(k!)^2}(2k)!4^{p-k}$, то это трианалитическая калибрация, определённая выше (4.2.4).

Ранее было отмечено, что поскольку трианалитические многообразия являются комплексно-аналитическими, то прекалибрация, задаваемая Θ^p "слабее" кэлеровой калибрации. В общем случае, на прекалибрациях можно ввести упорядочение.

Определение 4.2.3. Будем говорить, что $\eta \preceq \eta_1$ (η слабее η_1), если все грани η также являются гранями для η_1.

$$c_p \Theta^p \preceq \frac{\omega_I^{2p}}{(2p)!}$$

(4.2.4).

Наиболее простой пример калибрации на гиперкэлеровом многообразии задаётся следующей теоремой, аналогичное утверждение для кватернионного неравенства Виртингера есть в [Ber].

Теорема 4.2.4. *Пусть* (M, I, J, K, g) *– гиперкэлерово многообразие,* $\omega_I, \omega_J, \omega_K$ *соответствующие симплектические формы и* $\Theta_p := \frac{(\omega_I^2+\omega_J^2+\omega_K^2)^p}{c_p}$ *стандартная* $SU(2)$*-инвариантная* $4p$*-форма, нормированная константой* $c_p = \sum_{k=1}^{p} \frac{(p!)^2}{(k!)^2}(2k)!4^{p-k}$. *Тогда* Θ_p *калибрация и её грани это* p*-мерные кватернионные подпространства* TM. *Кроме того, форма* $\Xi_p := \frac{(\omega_J^2+\omega_K^2)^p}{(p!)^2 4^p}$ *также калибрация с теми же гранями.*

Подмногообразия, калибруемые формой Θ_p называются **трианалитическими подмногообразиями**.

4.3. Основная теорема

В этой секции мы докажем основную

Теорема 4.3.1 (Основная теорема)**.** *Пусть* $K_n(T)$ *– обобщённое многообразие Куммера, и* $Z \subset K_n(T)$ *абсолютно трианалитическое многообразие. Тогда* Z *не является тором.*

Вместе с теоремами 4.1.9 и 4.1.10 она позволяет сказать, что в известных примерах гиперкэлеровых многообразий нет абсолютно трианалитических торов. Таким образом, в этой части классификация завершена. Если рассматривать только известные деформационные типы гиперкэлеровых многообразий, то открытым остаётся вопрос существования абсолютно трианалитических подмногообразий деформационного типа M_{10} в обобщённом многообразии Куммера, а также схем Гильберта в M_6.

4.3.1. Плоские торы в T^n

В этом разделе, мы получим основные вспомогательные результаты, необходимые для доказательства основной теоремы 4.3.1.

Пусть $Z \subset K_n(T)$ – абсолютно трианалитическое подмногообразие в обобщённом многообразии Куммера, нормализацией которого является тор (4.1.1).

Замечание 4.3.2. Поскольку $K_n(T)$ вложено в схему Гильберта тора $T^{[n]}$, мы можем рассматривать Z как абсолютно трианалитическое подмногообразие в $T^{[n]}$.

Рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & \pi(Z) \arrow[d] & \tau^{-1}(\pi(Z)) \arrow[l] \arrow[d] \\ T^{[n]} \arrow[r, "\pi"] & T^{(n)} & T^n, \arrow[l, "\tau"'] \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

где $T^{[n]}$ – схема Гильберта тора, $T^{(n)}$ – симметрическая степень тора, отображение π это отображение Гильберта-Чжоу (2.1), τ отображение факторизации $T^n \to T^{(n)}$, и квадрат декартов.

Замечание 4.3.3. По [EV, Theorem 7.7] можем выбрать T общим (в смысле 2.2.6) в том же деформационном классе. Напомним, что по теореме 2.2.5 трианалитические подмногообразия обладают следующим свойством: для любых M, M' в одном деформационном классе существует диффеоморфизм $M \to M'$, который отображает абсолютно трианалитические подмногообразия в абсолютно трианалитические. Тем самым, достаточно доказать нашу теорему для общего тора T.

Предложение 4.3.4. *Пусть $Z \subset T^{[n]}$ – абсолютно трианалитический тор. Тогда каждая неприводимая компонента $\tau^{-1}(\pi(Z))$ общий тор в T^n, $Pic(\tau^{-1}(\pi(Z))) = 0$, и отображение $\tau : \tau^{-1}(\pi(Z)) \to \pi(Z)$ конечно.*

Доказательство. Поскольку T – общий тор, то все подмногообразия в T^n являются абсолютно трианалитическими. Значит, $\tau^{-1}(\pi(Z))$ вполне геодезично, и, следовательно, плоско. Тем самым, каждая неприводимая компонента $\tau^{-1}(\pi(Z))$ является подтором в T^n. Поскольку T общий, то любой подтор общий, и, в частности, группа Пикара $\tau^{-1}(\pi(Z))$ нулевая. Конечность отображения τ очевидна. Действительно, ведь это отображение факторизации по симметрической группе. □

Предложение 4.3.5. *Пусть $Z \subset T^{[n]}$ – абсолютно трианалитический тор. Тогда отображение $\pi : Z \to \pi(Z)$ конечное в общей точке.*

Для доказательства этого утверждения нам понадобится следующее утверждение, доказанное Калединым.

Предложение 4.3.6. *([K, Лемма 2.9.]) Пусть $\pi : \tilde{X} \to X$ является гладким проективным разрешением особенностей симплектического многообразия X. Обозначим за $\Omega \in \Omega^2(\tilde{X})$ симплектическую форму на многообразии $\tilde{X}$. Пусть $\sigma : Z \to U$ – гладкое отображение гладких связных алгебраических поверхностей, и предположим, что имеется следующая коммутативная диаграмма:*

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\sigma"'] & \tilde{X} \arrow[d, "\pi"] \\ U \arrow[r, "\eta_0"] & X \end{tikzcd} \tag{4.2}$$

Тогда существует плотное открыто подмножество $U_0 \subset U$ и 2-форма $\Omega_U \in \Omega^2(U_0)$ на U_0, такая что

$$\sigma^*\Omega_U = \eta^*\Omega$$

на $\sigma^{-1}(U_0) \subset Z$.

Доказательство Предложения 4.3.5. Существует каноническая стратификация на каждой симплектической особенности и эта стратификация совпадает со стратификацией диагоналями на $T^{(n)}$ ([K, Предложение 3.1.]). Кроме того, каждый страт имеет симплектическую форму, и для $T^{(n)}$ эти формы индуцируются эквивариантной относительно перестановок симплектической формой. Ограничение этой симплектической формы на гладкую часть прообраза $\pi^{-1}(V)$ для произвольного страта V в $T^{(n)}$ является поднятием симплектической формы на этот страт в $T^{(n)}$ ([K, Лемма 2.9.]). Тогда плотное открытое подмножество U в $Z \subset T^{[n]}$ проецируется на открытую часть некоторого страта. Поэтому, ограничение симплектической формы на U это поднятие симплектической формы на страт. Если Z проецируется на $\pi(Z)$ с общими слоями положительной размерности, то эта форма не может быть невырожденной, а, значит, в этом случае Z несимплектично. Противоречие. $\square$

Определение 4.3.7. Пусть E_1 и E_2 – абелевы многообразия одной размерности надо полем k. Изогенией между E_1 и E_2 называется плотный морфизм $f : E_1 \to E_2$ многобразий, сохраняющий базовые точки (т.е. f переводит единицу на E_1 в единицу на E_2).

Предложение 4.3.8. *Пусть $Z \subset T^{[n]}$ – абсолютно трианалитический тор в обобщённом многообразии Куммера. Рассмотрим диаграмму*

$$\begin{tikzcd} & \tilde{Z} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ Z \arrow[dr] & & \tau^{-1}(\pi(Z)) \arrow[dl] \\ & \pi(Z) & \end{tikzcd} \tag{4.3}$$

где $\tilde{Z}$ – расслоенное произведение Z и $\tau^{-1}(\pi(Z))$. Тогда Z и любая компонента $\tau^{-1}(\pi(Z))$ изогенные торы.

Доказательство. Расслоенное произведение $\tilde{Z}$ это подмногообразие в произведении $Z \times \tau^{-1}(\pi(Z)$ общих торов. Тогда $\tilde{Z}$ является трианалитическим и поэтому плоским. Отображения плоского тора $\tilde{Z}$ в Z и $\tau^{-1}(\pi(Z))$ конечны в общей точке (конечность отображения $\tilde{Z} \to \tau^{-1}(\pi(Z))$ следует из 4.3.5), значит, эти торы изогенны. □

Зафиксируем неприводимую компоненту $\tau^{-1}(\pi(Z))$ и обозначим её через Z'.

Обозначим степень отображения $Z \to \pi(Z)$ через d и степень отображения $\tau^{-1}(\pi(Z)) \to \pi(Z)$ через $\tilde{d}$.

Замечание 4.3.9. Из 4.3.4 и 4.3.8 следует, что $Pic(Z) = 0$.

4.3.2. Отсутствие абсолютно трианалитических торов в обобщённом многообразии Куммера

В этом разделе мы доказываем основную Теорему 4.3.1.

Определение 4.3.10. Голоморфно симплектическим объёмом голоморфно симплектического многообразия (M, Ω) называется $Vol^s_M := \int_M \Omega^{\frac{1}{2}\dim M} \wedge \overline{\Omega}^{\frac{1}{2}\dim M}$.

Определение 4.3.11. Кэлеровым объёмом кэлерова многобразия (M, I, ω) называется $\frac{1}{2^{2n}(2n)!}\int_M \omega^{2n}$, где $\dim_{\mathbb{R}}(M) = 2n$.

Замечание 4.3.12. : Для гиперкэлеровых многобразий (в частности, для абсолютно трианалитических подмногообразий) кэлеров объём совпадает с голоморфно симплектическим ([GV, Теорема 5.3.]). Будем называть это *гиперкэлеровым условием.*

Теорема 4.3.13. *Теорема 4.3.1 Пусть $K_n(T)$ – обобщённое многообразие Куммера, и $Z \subset K_n(T)$ абсолютно трианалитическое многообразие. Тогда Z не является тором.*

Доказательство. Во-первых, заметим, что любая комплексная структура кэлерового типа на плоском торе T задаёт комплексную структуру кэлерового типа на $T^{[n]}$. Рассмотрим стандартное отображение из $H^2(T^{(n)}, \mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}[E]$ на $H^2(T^{[n]}, \mathbb{C})$, где E исключительный дивизор раздутия $T^{(n)}$ в $T^{[n]}$. Класс когомологий $[E]$ типа $(1,1)$.

Зафиксируем гиперкэлерову структуру (I, J, K) на T, и пусть Ω – соответствующая голоморфно симплектическая форма на T^n. Гиперкэлерова тройка на T^n задаётся тремя формами ω'_I, ω'_J, и ω'_K одинакового кэлерового объёма. Обозначим через $[\omega'_I]$, $[\omega'_J]$, и $[\omega'_K]$ их классы когомологий. Поскольку симплектическая форма на T^n эквивариантa по отношению к перестановкам, то соответствующие классы когомологий на $T^{(n)}$, обозначаемые через $[\omega_I]$, $[\omega_J]$, и $[\omega_K]$ таковы, что

$$\tau^*[\omega_I] = [\omega'_I], \tau^*[\omega_J] = [\omega'_J], \tau^*[\omega_K] = [\omega'_K].$$

Мы имеем дело именно с классами когомологий, поскольку само многообразие $T^{(n)}$ имеет особенности и поэтому и симплектические формы и объёмы на нём не вполне определены. Другой подход заключается в рассмотрении симметрического произведения как орбиообразия.

По Предложению 4.3.5 на каждом открытом страте симметрической степени $T^{(n)}$ существует кэлерова форма и класс этой формы является ограничением $[\omega_J] + i[\omega_K]$ на страт.

Хорошо известно (см. например [OVV, Лемма 3.4]), что существует кэлерова метрика с кэлеровым классом $[\omega_{T^{[n]}}] = [\pi^*\omega_{T^{(n)}}] - \epsilon[E]$, где E – исключительный дивизор и $0 < \epsilon < 1$.

Напомним, что симплектический объём не меняется при раздутиях. По Теореме 2.1.3 существует некоторая константа λ и гиперкэлерова структура на $T^{[n]}$, такая что $[\tilde{\omega}_I] := \lambda[\pi^*\omega_I] - \lambda\epsilon[E]$, $[\tilde{\omega}_J]$, и $[\tilde{\omega}_K]$ имеет тот же кэлеров объём. После разрешения особенностей симметрической степени $T^{(n)}$ при построении схемы Гильберта n точек $T^{[n]}$ обратные образы $[\omega_J]$ и $[\omega_K]$ это $[\tilde{\omega}_J]$ и $[\tilde{\omega}_K]$:

$$\pi^*[\omega_J] = [\tilde{\omega}_J], \qquad \pi^*[\omega_K] = [\tilde{\omega}_K].$$

Заметим, что $\pi^*(\omega) \cup [E] = 0$, и обозначим через $\mu = [E]^{2n}$.

Тогда

$$Vol_{\omega_I} = \int\limits_{T^{[n]}} \tilde{\omega}_I^{2n} = (\lambda)^{2n} \cdot Vol_{\omega_I} - (\lambda)^{2n} \epsilon^{2n} \cdot \mu$$

Константа λ может быть определена из уравнения выше, в частности, имеем $\lambda > 1$.

Вспомним, что по Предположению 4.3.5 и Предположению 4.3.4 отображение из Z в $\pi(Z)$ и отображение $Z' \to \pi(Z)$ конечны в общей точке. Значит, симплектические объёмы Z и Z' отличаются умножением на $\frac{\tilde{d}}{d}$

$$\frac{\tilde{d}}{d} \cdot Vol_Z^s = Vol_{Z'}^s,$$

где d – степень отображения $Z \to \pi(Z)$ и $\tilde{d}$ – степень отображения $\tau^{-1}(\pi(Z)) \to \pi(Z)$. Кэлеровы объёмы Z и Z' определяются гиперкэлеровым условием.

Поскольку Z' абсолютно трианалитическое подмногообразие в T^n, его объём по отношению к ω_J' и ω_K' совпадает с объёмом по отношению к ω_I'. Однако, Z также абсолютно трианалитическое подмногообразие в $T^{[n]}$, значит, его объём также совпадает с объёмом по отношению к $\lambda[\pi^*\omega_I] - \lambda\epsilon[E]$.

Заметим, что $[Z] \cup [E] = 0$. Действительно, рассмотрим линейное расслоение $\mathcal{O}(E)$, ограниченное на Z. Так как группа Пикара Z нулевая (Предложени 4.3.9), то над Z нет нетривиальных линейных расслоений.

Применяя гиперкэлерово условие для Z и Z', получаем

$$1 = \frac{\int_Z (\lambda[\pi^*\omega_I] - \lambda\epsilon[E])^k}{\int_Z (\tilde{\omega}_J)^k} = \frac{\lambda^k \int_{\pi(Z)} [\omega_I]^k}{\int_{\pi(Z)} [\omega_J]^k} = \frac{\lambda^k \int_{Z'} (\omega_I')^k}{\int_{Z'} (\omega_J')^k} = \lambda^k.$$

С другой стороны $\lambda > 1$, что даёт противоречие. □

Замечание 4.3.14. На общие случаи абсолютно трианалитических подмногообразий обобщённого многообразия Куммера приведённое выше доказательство не обобщается. Действительно, в общем случае Z не изогенно неприводимым компонентам $\tau^{-1}(\pi(Z))$ и группа Пикара Z также может быть ненулевой.

Заключение

Диссертация содержит следующие новые определения, результаты и методы:

- Доказано отсутствие абсолютно трианалитических торов в обобщённом многообразии Куммера;
- Получено неравенство на числа Бетти гиперкэлеровых многообразий в размерности шесть;
- Получены следствия основного неравенства, включающие конечность числа простых гиперкэлеровых многообразий в размерности шесть с $b_2 = 23$.

Публикации по теме диссертации

[Ku1] Курносов Н.М., *“О неравенстве для чисел Бетти гиперкэлеровых многоообразий размерности шесть” // Матем. Заметки*, **99**:2 (2016), 309–313. *An inequality for Betti numbers of hyper-Kähler manifolds of dimension 6 // Mathematical Notes.*, **99**, 1, pp. 330-334, 2016.

[Ku2] Kurnosov N., *Absolutely trianalytic tori in the generalized Kummer variety*, *Advances in Mathematics*, **298**, 6, pp. 473-483, 2016.

[Ku3] Kurnosov N., *Boundness of b_2 for hyperkähler manifolds with vanishing odd-Betti numbers*. Preprint arXiv:1511.02838v2 [math.AG].

[Ku4] Курносов Н.М., Доклад *“Absolutely trianalytic tori in the generalized Kummer variety”*, V Школа-конференция по алгебраической геометрии и комплексному анализу для молодых математиков России, Коряжма, 17-22.08.2015.

[Ku5] Курносов Н.М., Доклад *“Ограничения на когомологии гиперкэлеровых многообразий”*, VI Международная конференция по алгебраической геометрии, комплексному анализу и компьютерной алгебре, Коряжма, 03-09.08.2016.

Список литературы

[AL] Addington N., Lehn M., *On the symplectic eightfold associated to a Pfaffian cubic fourfold*. Preprint arXiv:1404.5657v2 [math.AG].

[B] Bogomolov F.A., *On the decomposition of Kähler manifolds with trivial canonical class*, *Math. USSR-Sb.* **22**, pp. 580 - 583, 1974.

[B2] Bogomolov F.A., *On Guan's example of simply connected non-Kahler compact complex manifolds*, *Am. J. Math.*, **118** , pp. 1037-1046, 1996.

[Bea1] Beauville A., Holomorphic symplectic geometry: a problem list. Preprint, arXiv:1002.4321v1 [math.AG].

[Bea2] Beauville A., *Varietes Kahleriennes dont la premi'ere classe de Chern est nulle*, *J. Diff. Geom.*, **18**, pp. 755-782, 1983.

[BD] Beauville, A., Donagi, R., *La variété des droites d'une hypersurface cubique de dimension 4*. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **301**, 14, pp. 703–706, 1985.

[Ber] Berger, M. *Classification des espaces homogenes symétriques irreductibles.*, *C. r. Acad. sci. Paris*, **240**, pp. 2370-2372, 1985.

[Bes] Besse A., *Einstein Manifolds*, Springer-Verlag, New York, 1987.

[BNS] Boissiere S., Nieper-Wisskirchen M., Sarti A., *Higher dimensional Enriques varieties and automorphisms of generalized Kummer varieties*, *Journal de Mathematiques Pures et Appliquees*, vol. **95**, 5, pp. 553-563, 2011. Preprint arXiv:1001.4728v3 [math.AG].

[Del] Deligne, P., *Hodge cycles on abelian varieties (notes by J. S. Milne)*, in Lecture Notes in Mathematics, **900** (1982), pp. 9-100, Springer- Verlag.

[DHM] Dadok J., Harvey R., Morgan F., *Calibrations in* $\mathbb{R}^8$, *Trans. Amer Math. Soc.*, **307**, pp. 1-40, 1988.

[EPW] Eisenbud D., Popescu S., Walter Ch., *Lagrangian subbundles and codimension 3 subcanonical sub- schemes.*, *Duke Math. J.*, **107**, 3, pp. 427–467, 2001.

[EV] Entov M., Verbitsky M., *Full symplectic packing for tori and hyperkahler manifolds.* Preprint arXiv:1412.7183 [math.AG].

[F] Fujiki A., *On the de Rham cohomology group of a compact Kähler symplectic manifold*, *Adv. St. Pure Math*, **10**, pp. 105-165, 1987.

[GH] Griffiths P., Harris J., *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley & Sons, Inc. 1978.

[GHJ] Gross M., Huybrechts D., Joyce D., *Calabi-Yau Manifolds and Related Geometries*, Lectures at a Summer School in Nordfjordeid, 2003.

[GK] Ginzburg V., Kaledin D., *Poisson deformations of symplectic quotient singularities*, *Adv. Math.*, **186**, no. 1, 1-57, 2004.

[GS] Göttsche L., Soergel W., *Perverse sheaves and the cohomology of Hilbert schemes of smooth algebraic surfaces*, *Math. Ann.*, **296**, 1, 235-245.

[GrH] Gritsenko V., Hirzebruch F., *On the Euler characteristic of manifolds with* $c_1 = 0$. *A letter to V. Gritsenko.*, *Algebra and Analysis*, **11** (5). pp. 126-129, 1999.

[GV] Grantcharov G., Verbitsky M., *Calibrations in hyperkähler geometry. Calibrations in hyperkähler geometry*, *Commun. Contemp. Math.*, **15**, 1250060, 2013. Preprint arXiv:1009.1178 [math.AG].

[Gu] Guan G., *On the Betti numbers of irreducible compact hyperkähler manifolds of complex dimension four*, *Math. Res. Lett.*, **8**, 5-6, pp 663-669, 2001.

[Gu2] Guan D., *On representation theory and the cohomology rings of irreducible compact hyperkähler manifolds of complex dimension four, Cent. Eur. J. of Math.*, **1**, 4, pp 661–669, 2003.

[Gu3] Guan, D., *Examples of compact holomorphic symplectic manifolds which are not Kahlerian. II*, *Invent. Math.*, **121**, 1, pp. 135–145, 2005

[H1] Huybrechts D., Finiteness results for hyperkähler manifolds, preprint arXiv:0109024 [math.AG].

[H2] Huybrechts D., *Compact Hyperkähler Manifolds*. In book M. Gross, D. Huybrechts, and D. Joyce, Calabi-Yau manifolds and related geometries, Springer Universitext, 2002.

[HL] Huybrechts D., Lehn M., *The Geometry of Moduli Spaces of Sheaves*, Aspects of Mathematics, E. 31, Vieweg Verlag (1997).

[HarL] Harvey R., Lawson B., *Calibrated geometries, Acta Math.*, **148**, pp. 47-157, 1982.

[HS] Hitchin N., Sawon J.,, *Curvature and Characteristic Numbers of Hyperkähler Manifolds*, *Duke Math. J.*, **106**(3), pp. 599-615, 2001. Preprint version, arXiv:math/9908114v1

[J] Joyce D., *Compact manifolds with special holonomy*, Oxford Mathematical Monographs Series, Oxford University Press, 2000

[K] Kaledin D., *Symplectic singularities from the Poisson point of view*, Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal), **600**, pp. 135–156, 2006. Preprint arXiv:0310186v4 [math.AG].

[Ka] Kapustka G., On IHS fourfolds with $b_2 = 23$, preprint arXiv:1403.1074 [math.AG].

[Kam] Kamenova L., *Finiteness of Lagrangian fibrations with fixed invariants, Comptes Rendus Mathematique*, **354**, 7, pp. 707–711, 2016. Preprint arXiv:1509.01897 [math.AG].

[Kap] Kapfer S., *Computing Cup-Products in integral cohomology of Hilbert schemes of points on K3 surfaces*, *LMS Jour. Comp. Math.*, **19**, pp. 78-97, 2006.

[Kapr] Kapranov M., *Rozansky-Witten invariants via Atiyah classes*, *Compositio Math*, **115**, pp. 71-113, 1999.

[KM] Kollar J., Matsusaka T., *Riemann-Roch Type Inequalities*, *American Journal of Mathematics*, **105**, 1, pp. 229-252, 1983.

[KLS] Kaledin D., Lehn M., Sorger C., *Singular symplectic moduli spaces*, *Invent. Math.*, **164**, no. 3, pp. 591–614, 2006.

[KoS] Kotschick D., Schreieder S., *The Hodge ring of Kaehler manifolds*, *Compositio Math.*, **149**, pp. 637-657, 2013. Preprint arXiv:0504202 [math.AG].

[KV] Kaledin D., Verbitsky M., *Trianalytic subvarieties of generalized Kummer varieties*, *Internat. Math. Res. Notices*, **9**, pp. 439–461, 1998. Preprint arXiv:9801038 [math.AG].

[KV1] Kaledin D., Verbitsky M., *Partial resolutions of Hilbert type, Dynkin diagrams, and generalized Kummer varieties*. Preprint arXiv:9812078 [math.AG].

[KV-book] Kaledin D., Verbitsky M., *Hyperkähler manifolds*, International Press, Boston, 2001.

[LL] Looijenga E., Lunts V., *A Lie algebra attached to a projective variety*, *Invent. math.*, **129**, pp. 361-412, 1997.

[LS] Lehn M., Sorger C., *The cup product of Hilbert schemes for K3 surfaces*, *Invent. math.*, **152**, 2, pp 305–329, 2003.

[LLSV] Lehn C., Lehn M., Sorger C., van Straten D., *Twisted cubics on cubic fourfolds Journal für die reine und angewandte Mathematik*, DOI: 10.1515/crelle-2014-0144, 2015.

[MRS] Mongardi G., Rapagnetta A., Saccà G., *The Hodge diamond of O'Grady's 6-dimensional example*. Preprint arXiv:1603.06731 [math.AG].

[Ma] Markman E., *Integral constraints on the monodromy group of the hyperkahler resolution of a symmetric product of a K3 surface*, *Int. Journ. of Math.*, **21**, 2, pp. 169-223, 2010.

[Mo] Mozgovoy S., *The Euler number of O'Grady's ten-dimensional symplectic manifold*, PhD thesis University of Mainz, 2006.

[Mu] Mukai S., *On the moduli space of bundles on K3 surfaces I*, Vector Bundles on Algebraic Varieties, TIFR, Bombay, O.U.P. (1987), pp. 341-413.

[MW] Mongardi G., Wandel M., *Automorphisms of O'Grady's Manifolds Acting Trivially on Cohomology*, Preprint arXiv:1411.0759 [math.AG].

[N] Nakajima H., *Lectures on Hilbert Schemes of Points on Surfaces*, University Lecture Series, 1999.

[N-W] Nieper-Weisskirchen M., *Hirzebruch-Riemann-Roch Formulae on Irreducible Symplectic Kähler Manifolds*, *J. Algebraic Geom.*, **12**, 4, pp. 715-739., 2003.

[O1] O'Grady K.G., *Desingularized moduli spaces of sheaves on a* $K3$, *J. fur die reine und angew. Math.*, **512**, pp. 49-117, 1999. Preprint arXiv:9708009v2 [math.AG].

[O2] O'Grady K.G., *A new six-dimensional irreducible symplectic variety*, *J. Algebraic Geom.*, **12**, pp. 435-505, 2003.

[O3] O'Grady K.G., *The weight-two Hodge structure of moduli spaces of sheaves on a* $K3$ *surface*, *J. of Alg. Geom.*, **6**, pp. 599-644, 1997.

[Og] Oguiso K., *No cohomologically trivial non-trivial automorphism of generalized Kummer manifolds*, Preprint arXiv:1208.3750v3 [math.AG].

[OVV] Ornea L., Verbitsky M., Vuletescu V., *Blow-ups of LCK manifold*, *Int. Math. Res. Not.*, **12**, pp. 2809-2821, 2013. Preprint arXiv:1108.4885v2 [math.AG].

[R] Rapagnetta A., *Topological invariants of O'Grady's six dimensional irreducible symplectic variety*, *Math. Z.*, **256**, pp. 1-34, 2007. Preprint arXiv:0406026v2 [math.AG].

[RW] Rozansky L., Witten E., *Hyperkähler geometry and invariants of three- manifolds*, *Selecta Mathematica (N.S.*, **3**, pp. 401-458, 1997.

[S] Sawon J., *Rozansky-Witten Invariants of Hyperkähler Manifolds*, PhD thesis University of Cambridge, 1999.

[S-b2] Sawon J., *A bound on the second Betti number of hyperkähler manifolds of complex dimension six*, Preprint arXiv:1511.09105 [math.AG].

[Sa] Salamon S., On the cohomology of Kähler and hyperkähler manifolds, *Topology*, **35**, pp. 137-155, 1996.

[Siu] Siu Y.-T., *Every* $K3$ *surface is Kahler*, *Invent. math.*, **73** (1983), pp. 139-150.

[SV] Soldatenkov A., Verbitsky M., *k-symplectic structures and absolutely trianalytic subvarieties*, *J. of Geometry and Physics*, **92**, pp. 147–156, 2015. Preprint arXiv:1409.1100v2 [math.AG].

[V1] Verbitsky M., *Hyperkähler and holomorphic symplectic geometry I, Journ. of Alg. Geom.*, **5**, no. 3, pp. 401-415, 1996. Preprint arXiv:9307009 [math.AG].

[V2] Verbitsky M., *Trianalytic subvarieties of hyperkaehler manifolds*, GAFA, **5**, no. 1, pp. 92-104, 1995. Preprint arXiv:9403006 [math.AG].

[V3] Verbitsky M., *Trianalytic subvarieties of the Hilbert scheme of points on a* $K3$ *surface*, GAFA, **8**, pp. 732-782, 1998. Preprint arXiv:9705004 [math.AG].

[V4] Verbitsky M., *Deformations of trianalytic subvarieties of hyperk?hler manifolds*, *Selecta Math. (N.S.)*, **4**, no. 3, pp. 447-490, 1998. Preprint arXiv:9610010 [math.AG].

[V5] Verbitsky M., *Hypercomplex Varieties*, *Comm. Anal. Geom.*, **7**, no. 2, pp. 355-396, 1999. Preprint arXiv:9703016 [math.AG].

[V6] Verbitsky M., *Coherent Sheaves on General K3 Surfaces and Tori*, Pure and Applied Mathematics Quarterly Volume 4, Number 3 (Special Issue: In honor of Fedor Bogomolov, Part 2 of 2), pp. 651-714, 2008.

[V7] Verbitsky M., *A global Torelli theorem for hyperkahler manifolds*, *Duke Math. J.*,**162**, 15, pp. 2929-2986, 2013.

[V8] Verbitsky M., *Cohomology of compact hyperkähler manifolds*, GAFA, **6**, 4, pp 601–611, 1996. alg-geom electronic preprint 9501001, 89 pages, LaTeX.

[V9] M. Verbitsky, *Action of the Lie algebra SO (5) on the cohomology of a hyperkähler manifold*, Functional Analysis and Its Applications, **24**:3 (1990), pp. 229–230

[Var] Varouchas J., *Kahler Spaces and a Proper Open Morphisms*, *Math. Ann.*, **283**, pp. 13-52, 1989.

[W] Wakakuwa H., *On Riemannian manifolds with homogeneous holonomy group* $\mathrm{Sp}(n)$, *Tohoku Math. J.*, **1958**, 10(2), pp. 274-303.

[Y] Yau S.T., *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold a and the complex Monge-Ampere equation I.*, *Comm. on Pure and Appl. Math.*, **31**, pp. 339-411, 1978.

[Yo] Yoshioka K., *Moduli spaces of a stable sheaves on abelian surfaces*, *Math. Ann.*, **321**, pp. 817-884, 2001.