Математический институт им В.А. Стеклова
Российской Академии Наук

На правах рукописи

Гаврилюк Андрей Александрович

Геометрия разбиений евклидова пространства и гипотеза Вороного для параллелоэдров

01.01.04 – геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2016

Работа выполнена в отделе геометрии и топологии ФГБУН «Математический институт им. В.А. Стеклова РАН»

Научный руководитель: Долбилин Николай Петрович — д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник отдела геометрии и топологии ФГБУН «Математический институт им. В.А. Стеклова РАН», специальность 01.01.04.

Официальные оппоненты: Дольников Владимир Леонидович — д.ф.-м.н., профессор кафедры дискретной математики ФГАОУ ВПО «Московский физико-технический институт (государственный университет)», специальность 01.01.04.

Тарасов Сергей Павлович — к.ф.-м.н., старший научный сотрудник отдела математического моделирования систем проектирования Вычислительного Центра РАН ФИЦ «Информатика и управление» РАН, специальность 01.01.09.

Ведущая организация: ФГБУН Центральный экономико-математический институт РАН

Защита состоится 20 октября 2016 г. в 14 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д.002.022.03 при ФГБУН «Математический институт им. В.А. Стеклова РАН» по адресу: 119991, г. Москва, ул. Губкина, д.8

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МИАН и по электронному адресу http://www.mi.ras.ru/dis/ref16/gavriluk/dis.pdf

Автореферат разослан “ ” августа 2016 года

Учёный секретарь диссертационного совета
Д.002.022.03 при ФГБУН «Математический
институт им. В.А. Стеклова РАН»
д.ф.-м.н., ведущий сотрудник М.А. Королёв

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Параллелоэдры — это важный класс выпуклых многогранников, которые своими параллельными копиями разбивают, то есть заполняют без пробелов и перекрытий, евклидово пространство соответствующей размерности. Квадратная сетка или сетка из правильных шестиугольников ("пчелиные соты") — это знакомые примеры разбиений на двумерные параллелоэдры.

Легко показать, что d-мерный параллелоэдр является фундаментальной областью трансляционной группы, изоморфной $\mathbb{Z}^d$. С этим принципиальным свойством связано появление понятия параллелоэдра в науке. Это понятие (как и сам термин) было введено выдающимся кристаллографом Е.С. Фёдоровым (1885 г.). Трёхмерные параллелоэдры являются фундаментальными ячейками периодической структуры кристалла и играют важную роль в кристаллографии.

Благодаря своей периодичности, разбиения на параллелоэдры порождают решетки ранга d, которые наряду с параллелоэдрами являются одним из центральных объектов геометрии чисел. Поэтому понятие параллелоэдра оказалось в центре внимания в ряде очень важных исследований основоположников геометрии чисел Г. Минковского и Г.Ф. Вороного.

Теория параллелоэдров играет важную роль в ряде других разделов математики, в частности — в дискретной и комбинаторной геометрии (в теории разбиений, упаковок и покрытий евклидова пространства, при оценке хроматического числа пространства и т.д). Вклад в теорию параллелоэдров внесли многие математики: Б.Н. Делоне, А.Д. Александров, О.К. Житомирский, Б.А. Венков, позднее С.С. Рышков, Е.П. Барановский и другие.

Е.С. Фёдоров представил классификацию трёхмерных параллелоэдров и доказал, что всего существует 5 различных их комбинаторных типов. Отметим, что доказательство Фёдорова было дано в предположении, что любой параллелоэдр центрально симметричен. Фёдоров считал, что это свойство непосредственно вытекает из решётчатой структуры разбиения на параллелоэдры и не нуждается в дополнительном обосновании.

В действительности, доказательство этого факта нетривиально и впервые было предложено Г. Минковским[1]. Минковский доказал ряд фундаментальных теорем о характеристических свойствах параллелоэдров. Для этих целей он открыл и доказал одну из основных теорем о выпуклых многогранниках. В частности, из неё Минковский вывел центральную симметрию как самого параллелоэдра, так и всех его гиперграней.

[1] H. Minkowski, Allgemeine Leherzätze über konvexe Polyeder. Nach. Ges. Wiss. Göttingen 1897, 198-219

В работе Б.Н. Делоне[2] было отмечено, что проекция параллелоэдра вдоль $(d-2)$-грани является двумерным параллелоэдров, то есть параллелограммом или центрально-симметричным шестиугольником.

В литературе три эти вышеупомянутых условия объединяются в одну теорему (Минковкий, Делоне):

Теорема.
Если P — d-мерный параллелоэдр, то
(1) многогранник P центрально-симметричен,
(2) все его гиперграни центрально-симметричны,
(3) проекция d-мерного параллелоэдра P вдоль каждой его $(d-2)$-грани на дополнительную 2-мерную плоскость является двумерным параллелоэдром.

Б.А. Венков[3] доказал замечательную теорему о том, что эти три условия являются и достаточными, чтобы выпуклый многогранник был параллелоэдром. А.Д. Александров[4] усилил теорему Венкова, предложив условия, при которых абстрактно заданный полиэдральный комплекс, построенный из евклидовых многогранников, вкладывается в евклидово пространство постоянной кривизны при кусочно-изометричном отображении. Позднее теорема Венкова независимо была передоказана П. Макмалленом[5], а также было показано, что она может быть выведена из теоремы о продолжении[6][7].

Одна из основных задач теории параллелоэдров — это задача перечисления для данной размерности всех комбинаторных типов параллелоэдров.

Г.Ф. Вороной[8] построил глубокую теорию важного класса параллелоэдров — параллелоэдров Дирихле (сейчас называемых параллелоэдрами Вороного или Дирихле-Вороного).

Под *параллелоэдром Вороного* понимается область Дирихле-Вороного некоторой точки $\mathbf{p}$ из целочисленной d-мерной решётки $\Lambda^d \subset \mathbb{E}^d$. Такая область не

[2] Delaunay B.N., Sur lá partition reguliére de l'espace a 4 dimension. Изв. АН СССР, (1929) No 1, 79-110, No 2, 147-164.

[3] Б.А. Венков, Об одном классе эвклидовых многогранников. Вестник Ленинградского Университета, сер. мат., физ., хим., 1954. Том 9, 11-31

[4] Александров А.Д., О заполнении пространства многогранниками. Вестник Ленинградского Университета, сер. мат., физ., хим., 1954. Том 2, 33-43

[5] P. McMullen, Convex bodies which tile space by translation. Mathematika, 27, pp 113-121 (1980)

[6] Н.П. Долбилин, В.С. Макаров, "Теорема о продолжении в теории правильных разбиений и ее приложения", Дискретная геометрия и геометрия чисел, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова, Тр. МИАН, 239, Наука, М., 2002, 146–169.

[7] N.P. Dolbilin, "The extension theorem", Discrete Math., 221:1-3, Selected papers in honor of Ludwig Danzer (2000), 43–59

[8] G. Voronoi, Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. Deuxième mémoire: Recherches sur les paralléloèdres primitifss. I, II. J. Reine Angew. Math. 134, 198–287 (1908); 136, 67–181 (1909); Собрание сочинений, т. II (1952)

зависит от выбора точки $\mathbf{p}$ и является параллелоэдром.

Для исследования этого класса параллелоэдров Вороной построил новую теорию — геометрию положительных квадратичных форм[9]. Эта теория носит конструктивный характер: для любой размерности d она даёт метод получения всех типов параллелоэдров Вороного данной размерности.

Однако, как нетрудно видеть, не каждый параллелоэдр является параллелоэдром Вороного. Для того чтобы применить результаты теории параллелоэдров Дирихле-Вороного к теории общих параллелоэдров, Вороной выдвинул ставшую со временем знаменитой гипотезу.

Гипотеза (Вороной). *Любой параллелоэдр аффинно-эквивалентен некоторому параллелоэдру Вороного.*

Подтверждение гипотезы сводило бы задачу комбинаторной классификации d-мерных параллелоэдров к задаче классификации d-мерных параллелоэдров Вороного. Сам Вороной доказал эту гипотезу для важного класса так называемых примитивных параллелоэдров. Для размерности равной 2, 3 и 4 гипотезу доказал Б.Н. Делоне. Для произвольной размерности d гипотеза доказана лишь для некоторых (хотя и довольно широких с точки зрения традиционных подходов) классов параллелоэдров (Вороной, Житомирский, Макмаллен, Эрдал, Ордин). В общем случае гипотеза Вороного остаётся недоказанной на протяжении более века.

Метод Вороного содержит ряд фундаментальных идей, некоторые из них впоследствии были переоткрыты и использованы в других областях геометрии. В частности, идея подъёма разбиения на полиэдральную поверхность, описанную около параболоида, была использована в вычислительной геометрии как редукция задачи вычисления разбиения пространства на области Вороного к задаче вычисления выпуклой оболочки заданного множества точек[10].

Цели работы

Цели данной работы:
– изучение и развитие классических методов теории параллелоэдров;
– поиск новых подходов к доказательству гипотезы Вороного;
– применение полученных методов к доказательству классических результатов теории параллелоэдров;
– доказательство гипотезы Вороного для новых классов параллелоэдров.

[9] G. Voronoï, Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. Premièr mémoire: Sur quelques propriétés des formes quadratiques positives parfaites. J. Reine Angew. Math. 133, 97–178 (1908); Собрание сочинений, т. I (1952)

[10] H. Edelsbrunner, R. Seidel, "Voronoi Diagrams and Arrangements", Discrete and Computational Geometry, v.1 n.1, p.25-44, 1986

Научная новизна

В диссертации получены следующие основные результаты.
- Доказана теорема о размерности класса параллелоэдров Вороного аффинно эквивалентных данному.
- Обобщён метод канонических нормировок для построения женератрисы на случай произвольного разбиения евклидова пространства на полиэдры. Упрощена редукция гипотезы Вороного к задаче построения канонической нормировки.
- Предложен новый метод построения канонических нормировок ограниченных фрагментов разбиений (звёзд граней). Введено понятие тесного веера, доказаны базовые свойства тесных вееров.
- Гипотеза Вороного доказана для параллелоэдров, δ-поверхность которых обладает тривиальной первой группой гомологий над $\mathbb{Z}$.

Данные результаты являются новыми.

Помимо перечисленных результатов, в диссертации приведено новое доказательство гипотезы Вороного в случае Житомирского (на основе метода канонических нормировок) и новое доказательство классификации Делоне типов схождения параллелоэдров в грани коразмерности 3 (на основе классификации трёхмерных тесных вееров).

Основные методы исследования

В диссертации используются методы теории многогранников, теории положительных квадратичных форм, а также комбинаторной геометрии и топологии.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация имеет теоретический характер. Полученные в диссертации результаты могут быть использованы для дальнейших исследований в теории параллелоэдров, теории подъёмов разбиений, а также для создания новых конструкций в теории полиэдральных вееров.

Апробация результатов

Результаты диссертации были доложены на ряде международных конференций:
- XIII Международная конференция “Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения”, посвященная 85-летию со дня рождения профессора С.С. Рышкова, ТГПУ им. Л.Н. Толстого, Тула, май 2015 г.
- V международная конференция памяти Г. Вороного по аналитической теории чисел и пространственным мозаикам, НПУ им. М.П. Драгоманова, Киев, Украина, сентябрь 2013 г.

• Ярославская Международная Конференция «Дискретная Геометрия», посвящённая 100-летию А.Д. Александрова, ЯрГУ им. Демидова, Ярославль, август 2012 г.
• IV конференция по дискретной геометрии и алгебраической комбинаторике, Техасский университет в Браунсвилле, Саус Падре, США, апрель 2012 г.
• Воркшоп по дискретной геометрии и оптимизации, Филдсовский Институт, Торонто, Канада, сентябрь 2011 г.
• Международная конференция "Геометрия, топология, алгебра и теория чисел, приложения", посвящённая 120-летию Б.Н. Делоне, МИАН им. Стеклова, Москва, август 2010 г.

Также автор выступал с докладами по теме диссертации на следующих семинарах в МГУ им. Ломоносова:
• Алгебраическая топология и её приложения, семинар им. М.М. Постникова (рук. В.М. Бухштабер, А.В. Чернавский, И.А. Дынников, Т.Е. Панов, Л.А. Алания, А.А. Гайфуллин, Д.В. Миллионщиков);
• Дискретная геометрия и геометрия чисел (рук. Н.П. Долбилин, Н.Г. Мощевитин, М.Д. Ковалёв);
• Комбинаторика и графы (рук. А.М. Райгородский).

А также на семинарах других научных заведений:
• Межкафедральный семинар МФТИ по дискретной математике (МФТИ, рук. А.М. Райгородский, Р.Н. Карасёв, М.Н. Вялый, Г.А. Кабатянский);
• Теория сложности вычислений (ВЦ РАН, рук. М.Н. Вялый, А.А. Разборов, С.П. Тарасов);
• Геометрический семинар Р. Эрдала (Queen's University, г. Кингстон, Канада).

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в работах [1, 2] (в журналах из списка ВАК), в [3] (в ведущем мировом журнале по дискретной геометрии) и в препринте [4] (на веб-сайте arxiv.org в сети Интернет). Работа [3] выполнена совместно с А.И. Гарбером и А.Н. Магазиновым, остальные работы выполнены автором самостоятельно.

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из пяти глав, включая введение. Диссертация также содержит оглавление и список литературы. Полный объём диссертации – 108 страниц, библиография включает 40 наименований.

Краткое содержание работы

Во введении приведена история вопроса, дан обзор известных на данный момент результатов в области исследования, сформулированы цели и результаты исследования, приведено краткое содержание работы.

Глава 2 посвящена изучению геометрических и комбинаторных свойств параллелоэдров Вороного. Основным результатом этой главы является теорема:
Теорема 2.4. *Множество $\mathcal{A}_V(P)$ всех параллелоэдров Вороного, аффинных данному параллелоэдру P, либо пусто, либо является орбифолдом, размерность которого равна количеству компонент связности подграфа Венкова данного параллелоэдра P.*

Этот результат является решением задачи, поставленной Н.П. Долбилиным, описания множества $\mathcal{A}_V(P)$ для данного параллелоэдра P. Эта задача тесно связана с гипотезой Вороного: гипотеза эквивалентна тому, что множество $\mathcal{A}_V(P)$ непусто. Для тех параллелоэдров, для которых гипотеза Вороного верна, приведено описание данного множества с точностью до гомоморфизма.

В параграфе 2.1 рассмотрен подграф Венкова данного параллелоэдра, основной результат главы сформулирован в терминах количества компонент связности этого графа.

В параграфе 2.2 дано короткое доказательство естественного критерия того, что данный параллелоэдр является параллелоэдром Вороного. При помощи этого критерия в параграфе 2.3 доказано, что множество параллелоэдров Вороного замкнуто относительно операции прямой суммы (для слагаемых, лежащих в ортогональных подпространствах).

В параграфе 2.4 доказан новый критерий (лемма 2.15) того, что два параллелоэдра Вороного аффинно эквивалентны друг другу. На основе этого критерия и конструкции нормированного параллелоэдра дано доказательство основного результата главы — теоремы 2.4.

Глава 3 посвящена обобщению результатов о связи канонических нормировок с подъёмами разбиений до женератрисы. Главы содержит два основных результата.

Первый результат главы 3 — новый метод построения женератрисы произвольного разбиения $\mathcal{T}$ пространства $\mathbb{E}^d$ на полиэдры (в случае, когда разбиение имеет каноническую нормировку). Метод представлен в определении 3.23, обоснование его корректности является частью доказательства теоремы:
Теорема 3.5. *Женератриса нормального разбиения $\mathcal{T}$ евклидова пространства $\mathbb{E}^d$ на полиэдры существует тогда и только тогда, когда существует каноническая нормировка данного разбиения.*

Предложенный в главе метод развивает идеи Вороного[11], а также Дэвиса[12] Макмаллена[13] и других. В диссертации показано, что этот метод применим для произвольных разбиений на полиэдры (не только на параллелоэдры) и позволяет разбить построение женератрисы на множество элементарных шагов. При этом для выполнения очередного шага необходима информация лишь о небольшом фрагменте разбиения. Обоснование алгоритма построения женератрисы по данному разбиению и его канонической нормировке приведено в параграфах 3.1 – 3.5. Доказательство теоремы 3.5 дано в параграфах 3.5 – 3.7.

Второй результат главы 3 — упрощение доказательства важной теоремы теории параллелоэдров:

Теорема 3.33. *Гипотеза Вороного верна для параллелоэдра P тогда и только тогда, когда существует каноническая нормировка разбиения $\mathcal{T}_P$ для параллелоэдра P.*

Доказанная для произвольных разбиений теорема 3.5 позволяет сразу свести гипотезу Вороного к существованию женератрисы соответствующего разбиения на параллелоэдры. Более того, предложенный в определении 3.23 метод построения женератрисы позволяет существенно сократить и упростить вычисления по сравнению с работами Вороного[10] (в частном случае примитивных параллелоэдров) и Гришухина, Дезы[14]. Доказательству теоремы 3.33 посвящены параграфы 3.8 – 3.10.

В параграфе 3.11 на основе результатов глав 3 и 4 приведено “одностраничное” доказательство гипотезы Вороного для случая Житомирского — для разбиения на параллелоэдры, все $(d-2)$-мерные грани которых примитивны.

Глава 4 посвящена теории вееров как инструменту изучения локальной геометрии разбиений и построения канонических нормировок. Глава объединяет три различные теории: теорию параллелоэдров, теорию политопальности вееров и новую теорию тесных вееров и локальной симметрии.

Во-первых, в этой главе введены понятия веера схождений в грани, тесного веера и локальной симметрии в грани. Доказан ряд технических лемм (например, 4.6, 4.15, 4.16), устанавливающих базовые свойства этих объектов.

Этот инструментарий далее позволяет перевести ряд вопросов про разбиения пространства на язык вееров и получить на них ответы. Вопросам обоснования

[11] G. Voronoi, Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. Deuxième mémoire: Recherches sur les paralléloèdres primitifss. I, II. J. Reine Angew. Math. 134, 198–287 (1908); 136, 67–181 (1909); Собрание сочинений, т. II (1952)

[12] C. Davis, The set of non-linearity of a convex piecewise-linear function, Scripta Mathematica 24 (1959), 219-228.

[13] P. McMullen, Duality, sections and projections of certain Euclidean tiliings, Geom. Dedicata 49 (1994), 183-202

[14] Deza M., Grishukhin V., Properties of parallelotopes equivalent to Voronoi's conjecture. Eur. J. of Comb., 25 (2004), 517-533.

метода вееров посвящены параграфы 4.1 – 4.3.

Во-вторых, в главе исследованы комбинаторные и геометрические свойства тесных вееров для малых размерностей. В теореме 4.19 (параграф 4.4) дана комбинаторная классификация трёхмерных тесных вееров, а в теореме 4.30 (параграф 4.5) доказана политопальность этих вееров.

В-третьих, в этой главе (параграфы 4.6 – 4.7) доказана следующая теорема о связи между канонической нормировкой разбиения и политопальностью вееров.

Теорема 4.37. *Пусть заданы разбиение $\mathcal{T}$ пространства $\mathbb{E}^d$ и некоторая грань $F \in \mathcal{T}$. Каноническая нормировка звезды $St_{\mathcal{T}}(F)$ существует тогда и только тогда, когда веер схождений в грани F политопален.*

Доказательство этой теоремы конструктивно — предложен способ построения соответствующей канонической нормировки.

И, наконец, в параграфе 4.8 полученные ранее результаты применены к параллелоэдрам. Доказана следующая теорема о связи параллелоэдров с тесными веерами.

Теорема 4.40. *Пусть задан параллелоэдр P и соответствующее ему разбиение $\mathcal{T}_P$ пространства $\mathbb{E}^d$. Веер схождений этого разбиения в каждой грани F является тесным.*

Как следствие, из полученной ранее классификации трёхмерных тесных вееров немедленно вытекает классификация комбинаторных типов схождения параллелоэдров в грани коразмерности 3 (следствие 4.41).

В заключении главы доказана теорема 4.42 о том, что для любой грани коразмерности 2 или 3 в разбиении на параллелоэдры существует каноническая нормировка. Эта теорема используется в коротком доказательстве теоремы Житомирского (глава 3) и в доказательстве основного результата из главы 5.

Глава 5 посвящена доказательству гипотезы Вороного для нового класса параллелоэдров. δ-поверхностью d-мерного параллелоэдра P называется $(d-1)$-мерная полиэдральная поверхность, которая получается в результате выбрасывания из границы ∂P всех (замкнутых) стандартных $(d-2)$-граней параллелоэдра P. Доказана следующая теорема:

Теорема 5.7. *Если δ-поверхность параллелоэдра имеет тривиальную первую группу гомологий H_1 над $\mathbb{Z}$, то для P верна гипотеза Вороного.*

Данный результат является обобщением теоремы Житомирского для любой размерности d. Из него немедленно следует, что гипотеза Вороного верна для всех параллелоэдров размерности 3 (см. [3]). Также[15] из теоремы 5.7 следует справедливость гипотезы Вороного в размерности 4.

[15] Garber A.: On π-surfaces of four-dimensional parallelohedra. http://arxiv.org/abs/1309.7661 (2013)

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору, д.ф.-м.н. Н.П. Долбилину за знакомство с увлекательной и богатой темой геометрии параллелоэдров, за постановку задач и введение в мир профессиональных занятий математикой.

Автор благодарит профессора Р.М. Эрдала за плодотворную совместную работу и чудесное время, проведённое в г. Кингстон и Queen's University.

Большую благодарность автор выражает профессору, д.ф.-м.н. В.Л. Дольникову за привитие культуры занятий математикой и поддержку.

Большое спасибо также моим друзьям и соавторам А.И. Гарберу и А.Н. Магазинову.

Список работ автора по теме диссертации

[1] А.А. Гаврилюк, Геометрия подъемов разбиений евклидовых пространств, Геометрия, топология и приложения, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения профессора Николая Петровича Долбилина, Тр. МИАН, 288, МАИК, М., 2015, 49–66

[2] А.А. Гаврилюк, Класс аффинно эквивалентных параллелоэдров Вороного, Матем. заметки, 95:5 (2014), 697–707

[3] A. Garber, A. Gavrilyuk, A. Magazinov, The Voronoi conjecture for parallelohedra with simply connected δ-surface. Discrete and Computational Geometry, vol.53 iss.2, p.245-260, 2015, DOI: 10.1007/s00454-014-9660-z

[4] А.А. Гаврилюк, Тесные веера и их канонические нормировки. Preprint: arXiv:1603.01873, 2016.