ОТЗЫВ

научного руководителя о диссертации А.А.Гаврилюка "Геометрия разбиений евклидова пространства и гипотеза Вороного для параллелоэдров", представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 – геометрия и топология

Диссертация посвящена изучению свойств важного класса евклидовых выпуклых многогранников – параллелоэдров. Параллелоэдр размерности d – это выпуклый d-мерный многогранник, который допускает своими параллельными копиями нормальное, то есть 'грань-в-грань' разбиение евклидова пространства $\mathbb{R}^d$. Понятие параллелоэдра было введено великим русским кристаллографом Е.С.Федоровым в связи с важностью 3-мерных параллелоэдров в кристаллографии. Из определения параллелоэдра непосредственно вытекает, что группа нормального разбиения пространства $\mathbb{R}^d$ на параллелоэдры изоморфна $\mathbb{Z}^d$. Благодаря этому свойству разбиения, трехмерный параллелоэдр в кристаллографии играет роль фундаментальной ячейки кристалла. В случае произвольной размерности d-мерный параллелоэдр, который однозначно индуцирует решетку ранга d, является одним из центральных объектов геометрии чисел. Поэтому вскоре после введения параллелоэдра в кристаллографию этот объект привлек внимание великих основоположников геометрии чисел – Г.Минковского и Г.Ф. Вороного, которые внесли фундаментальный вклад в теорию параллелоэдров. Так, Минковский доказал теорему о необходимых условиях параллелоэдров, которые, как позднее доказал Б.А. Венков, оказались и достаточными, нашел точную верхнюю оценку для числа гиперграней параллелоэдра.

Очень глубокие исследования важного подкласса параллелоэдров, так называемых параллелоэдров Дирихле-Вороного (а сейчас чаще – просто параллелоэдров Вороного) провел сам Г.Ф. Вороной. Он естественным образом вложил множество d-мерных параллелоэдров Вороного в $d(d+1)/2$-мерное пространство (в конус положительных квадратичных форм от d переменных) и построил теорию параллелоэдров Вороного, которая, в принципе, позволяет находить все комбинаторные типы таких многогранников. Значение теории Вороного возрастает благодаря предположению, которое высказал Вороной, о том, что всякий параллелоэдр аффинно эквивалентен некоторому параллелоэдру Вороного. Если гипотеза Вороного верна, то развитая Вороным теория для параллелоэдров Вороного позволяет решить классификационную задачу также и для произвольных параллелоэдров. Сам Вороной доказал гипотезу об аффинной эквивалентности для примитивных параллелоэдров (то есть для таких параллелоэдров, которые порождают разбиения с симплициальной структурой в каждой вершине разбиения). Метод доказательства этой гипотеы в этом частном случае явился основным в поисках доказательства общей гипотезы. Несмотря на серьезный прогресс, достигнутый на пути доказательства гипотезы Вороного в работах Б.Н. Делоне, О.К.Житомирского, Б.А. Венкова, А.Д. Александрова, П. Макмаллена, С.С. Рышкова, Р. Эрдала, В.П. Гришухина и др., в целом проблема вот уже более века остается открытой.

Основные результаты диссертации А.А. Гаврилюка прямо или опосредованно связаны с гипотезой Вороного. Диссертация состоит из 5 глав. Во Введении дается обзор основных понятий и результатов рассматриваемой теории, описываются также основные результаты диссертации.

В Главе 2 рассматривается для произвольного параллелоэдра P его аффинный класс $\mathcal{A}_V(P)$, то есть множество всех параллелоэдров Вороного, которые аффинно-эквивалентны данному параллелоэдру. Гипотеза Вороного состоит в том, что для каждого P его класс $\mathcal{A}_V(P)$ непуст. Основной результат Главы 2 – Теорема 2.4. – состоит в том, что, если для данного параллелоэдра его аффинный класс непуст, то размерность класса равна числу компонент графа Венкова данного параллелоэдра. Эта теорема обобщает теорему 'единственности', доказанную в работе Michel-Ryshkov-Senechal, о том, что для каждого примитивного параллелоэдра его аффинный класс состоит из единственного (с точностью до подобия) параллелоэдра Вороного, а также общую версию теоремы о единственности параллелоэдра Вороного для каждого параллелоэдра со связным графом Венкова (Dolbilin-Itoh-Nara).

В Главе 3 метод канонической нормировки для подъема разбиений посредством параллелоэдров на женетратрису обобщается на более обший класс локально конечных разбиений пространства, а именно, на разбиения пространства на произвольные полиэдры. При этом подробно прописывается процедура подъема разбиения на соответствуюцую женератрису. На этом основании автор предлагает упрощенный вариант редукции гипотезы Вороного к задаче построения канонической нормировки, а также короткое доказательство самой гипотезы Вороного в случае Житомирского, то есть в случае, когда в параллелоэдре все $(d-2)$-грани примитивны (заметим, что эта теорема Житомирского значительно обобщает теорему Вороного для примитивных параллелоэдров).

В Главе 4 рассматривается теория вееров для построения канонических нормировок. Одним из центральных результатов главы является теорема, утверждающая, что звезда грани F в разбиении на полиэдры допускает каноническую нормировку тогда и только тогда, когда веер схождений в этой грани политопален. Разработанная в главе техника паботы с веерами направлена, в частности, на изучение комбинаторной структуры разбиения пространства на параллелоэдры в окрестности граней фиксированной размерности. В частности, в главе дается независимый вывод всех комбинаторных типов схождений параллелоэдров разбиения в гранях коразмерности 3.

В Главе 5 рассматривается теорема о новом классе параллелоэдров, для которого гипотеза Вороного верна. Если из полиэдральной $(d-1)$-сферы - границы параллелеоэдра удалить все стандартные грани коразмерности 2 (то есть $(d-2)$-грани, отвечающие 'четверным' пояскам), то получим так называемую 'δ-поверхность' параллелоэдра. Эта 'поверхность' есть $(d-1)$-мерная полиэдральная сфера, у которой некоторые $(d-2)$-грани удалены. Основная теорема Главы 5 утверждает, что если для параллелоэдра его δ-поверхность односвязна, то параллелоэдр аффинно эквивалентен некоторому параллелоэдру Вороного.

В заключении отметим, что результаты диссертации являются новыми, снабжены доказательствами, опубликованы в трех статьях в центральных журналах, размещены в интернете. Они докладывались на ряде международных конференций, а также на научных семинарах в России, США, Канаде. Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в исследованиях по дискретной геометрии и геометрии чисел, ведущихся в Математическом институте им. В.А.Стеклова, на мехмате МГУ им. М.В.Ломоносова, в Queen's University в Кингстоне (Канада).

На основании вышеизложенного отметим, что диссертация А.А.Гаврилюка удовлетворяет требованиям "Положения о порядке присуждении ученых степеней"ВАК Министерства образования и науки Российской Федерации, а ее автор, Андрей Александрович Гаврилюк, заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 - геометрия и топология.

11 июня 2016 г.

Н.П.Долбилин,

доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник
Отдела геометрии и топологии МИАН
119991 Москва, ул. Губкина 8.
Тел: +7(495) 984 81 41,
E-mail: dolbilin@mi.ras.ru

Подпись Н. П. Долбилина заверяю.
Ученый секретарь МИАН А.Н. Печень
14.06.2016