Федеральное государственное
бюджетное учреждение науки
Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук

На правах рукописи

Гаврилюк Андрей Александрович

Геометрия разбиений евклидова пространства и гипотеза Вороного для параллелоэдров

01.01.04 — геометрия и топология

Диссертация

на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. Н. П. Долбилин

Москва — 2016

Содержание

1 Введение

1.1 Актуальность темы

Параллелоэдры — это важный класс выпуклых многогранников, которые своими параллельными копиями разбивают, то есть заполняют без пробелов и перекрытий, евклидово пространство соответствующей размерности. Квадратная сетка или сетка из правильных шестиугольников ("пчелиные соты") — это знакомые примеры разбиений на двумерные параллелоэдры.

По определению, разбиение пространства на параллелоэдры *нормально*, то есть любые два соседние в разбиении параллелоэдра пересекаются по целой грани. Из этого условия следует, что параллельный перенос, который переводит параллелоэдр разбиения в пересекающийся с ним другой параллелоэдр разбиения, переводит всё разбиение само в себя. Отсюда выводится, что группа переносов, сохраняющих данное разбиение, изоморфна $\mathbb{Z}^d$ и транзитивно действует на множестве ячеек разбиения. Таким образом, параллелоэдр является фундаментальной областью трансляционной группы.

Понятие параллелоэдра (как и сам термин) было введено выдающимся кристаллографом Е.С. Фёдоровым (1885 г.). Трёхмерные параллелоэдры являются фундаментальными ячейками периодической структуры кристалла и играют важную роль в кристаллографии.

Благодаря своей периодичности, разбиения на параллелоэдры порождают решетки ранга d, которые наряду с параллелоэдрами являются одним из центральных объектов геометрии чисел. Поэтому понятие параллелоэдра оказалось в центре внимания в ряде очень важных исследований основоположников геометрии чисел Г. Минковского и Г.Ф. Вороного.

Теория параллелоэдров играет важную роль в ряде других разделов математики, в частности — в дискретной и комбинаторной геометрии (в теории разбиений, упаковок и покрытий евклидова пространства, при оценке хроматического числа пространства и т.д). Вклад в теорию параллелоэдров внесли известные математики: Б.Н. Делоне, А.Д. Александров, О.К. Житомирский, Б.А. Венков, позднее С.С. Рышков, Е.П. Барановский, М.И. Штогрин, П. Макмаллен, Р. Эрдал, В.П. Гришухин, П. Энгел, Н.П. Долбилин и другие.

Е.С. Фёдоров представил классификацию трёхмерных параллелоэдров. Все 5 типов трёхмерных параллелоэдров были найдены Фёдоровым в предположении, что любой параллелоэдр центрально симметричен. Он считал, что это свойство автоматически следует из решётчатой структуры разбиения на параллелоэдры.

В действительности, доказательство этого факта нетривиально и впервые было предложено Г. Минковским [33]. Минковский доказал ряд фундаментальных теорем о характеристических свойствах параллелоэдров. Для этих целей он открыл и доказал одну из основных теорем о выпуклых многогранниках. В частности, из неё Минковский вывел центральную симметрию как самого параллелоэдра, так и всех его гиперграней.

В работе [20] Б.Н. Делоне было отмечено, что проекция параллелоэдра вдоль $(d-2)$-грани является двумерным параллелоэдров, то есть параллелограммом или центрально-симметричным шестиугольником.

Таким образом, были найдены три необходимых условия параллелоэдра:

Теорема (Минковский, Делоне). *Если P — d-мерный параллелоэдр, то*
(1) многогранник P центрально-симметричен,
(2) все его гиперграни центрально-симметричны,
(3) проекция d-мерного параллелоэдра P вдоль каждой его $(d-2)$-грани на дополнительную 2-мерную плоскость является двумерным параллелоэдром.

Б.А. Венков [3] доказал замечательную теорему о том, что эти три условия являются и достаточными, чтобы выпуклый многогранник был параллелоэдром.

А.Д. Александров [1] усилил теорему Венкова и предложил условия, при которых абстрактно заданный полиэдральный комплекс вкладывается в пространство постоянной кривизны при кусочно-изометричном отображении.

Также теорему Венкова независимо доказал П. Макмаллен [30]. Позднее теорема Венкова была выведена из более общей теоремы о продолжении [10, 22].

Одна из основных задач теории параллелоэдров — это задача перечисления для данной размерности всех комбинаторных типов параллелоэдров.

Г.Ф. Вороной [39] построил глубокую теорию важного подкласса параллелоэдров — параллелоэдров Дирихле (сейчас называемых параллелоэдрами Вороного или Дирихле-Вороного).

Первое из условий Минковского-Делоне-Венкова уточняет связь разбиений на параллелоэдры с целочисленными решётками: центры параллелоэдров данного разбиения образуют d-мерную решётку $\Lambda^d(P)$ в пространстве $\mathbb{E}^d$ [8].

Под *параллелоэдром Вороного* понимается область Дирихле-Вороного некоторой точки $\mathbf{p}$ из решётки центров $\Lambda^d(P) \subset \mathbb{E}^d$. Такая область не зависит от выбора точки $\mathbf{p}$ и является параллелоэдром.

Вороной развил так называемую геометрию положительных квадратичных форм для данного исследования параллелоэдров Дирихле-Вороного. Эта теория носит конструктивный, алгоритмический характер.

Легко видеть, что не каждый параллелоэдр является параллелоэдром Вороного. Для того чтобы применить результаты специальной теории параллелоэдров Дирихле-Вороного к общей теории параллелоэдров, Вороной выдвинул ставшую впоследствии знаменитой гипотезу.

Гипотеза (Вороной)**.** *Любой параллелоэдр аффинно-эквивалентен некоторому параллелоэдру Вороного.*

Далее наравне с фразой "многогранник P аффинно эквивалентен многограннику Q" мы будем использовать более краткое "P аффиннен Q".

Доказательство гипотезы сводило бы задачу классификации d-мерных параллелоэдров к задаче классификации d-мерных параллелоэдров Вороного. Сам Вороной доказал эту гипотезу для важного класса так называемых примитивных параллелоэдров. Для размерности равной 2, 3 и 4 гипотезу доказал Б.Н. Делоне. Для произвольной размерности d гипотеза доказана лишь для некоторых (хотя и довольно широких с точки зрения традиционных подходов к задаче) классов параллелоэдров (Вороной, Житомирский, Макмаллен, Эрдал, Ордин). В общем случае гипотеза Вороного остаётся недоказанной.

Метод Вороного содержал ряд фундаментальных идей, некоторые из них впоследствии были переоткрыты и использованы в других областях геометрии. В частности, идея подъёма разбиения на полиэдральную поверхность, описанную около параболоида, была использована в вычислительной геометрии как редукция задачи вычисления разбиения к задаче вычисления выпуклой оболочки (см. например, [24]).

Задача данного исследования:

– изучение и развитие классических методов теории параллелоэдров;
– поиск новых подходов к доказательству гипотезы Вороного;
– применение полученных методов к доказательству классических результатов теории параллелоэдров;
– доказательство гипотезы Вороного для новых классов параллелоэдров.

1.2 Основные понятия и результаты теории параллелоэдров

Определение 1.1. Следуя [15], *полиэдром* мы называем пересечение конечного числа замкнутых полупространств в $\mathbb{E}^d$.

Под *многогранником* мы будем понимать ограниченнй полиэдр в $\mathbb{E}^d$.

Таким образом, все рассматриваемые в работе многогранники, по определению, являются выпуклыми.

Определение 1.2. *Параллелоэдром* называется такой выпуклый компактный d-мерный многогранник P, что некоторые его параллельные переносы $P_1, P_2, \dots$ заполняют пространство $\mathbb{E}^d$, то есть $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} P_i = \mathbb{E}^d$, при этом, заполняют нормальным образом, то есть пересечение $P_i \bigcap P_j, i \neq j$ является гранью каждого из P_i и P_j, либо пусто.

Очевидно, что параллелоэдров размерности 1 лишь один тип — отрезок. Нетрудно видеть, что двумерные параллелоэдры представлены двумя типами: параллелограммы и выпуклые центрально симметричные шестиугольники. Е.С. Фёдоров в своей работе [14] нашёл все 5 комбинаторных типов трёхмерных параллелоэдров. Б.Н. Делоне нашёл 51 тип четырёхмерных параллелоэдров [20], упустив один тип. Недостающий 52-й тип был найден М.И. Штогриным [16].

Определение 1.3. *Параллелоэдром Вороного* P_V называется область Дирихле-Вороного произвольной точки p из d-мерной целочисленной решётки $\Lambda^d \subset \mathbb{E}^d$ (в стандартной евклидовой метрике):

$$P_V = \left\{ x \in \mathbb{E}^d : \|x-p\| \leqslant \|x-q\| \text{ для всех } q \text{ принадлежащих } \Lambda^d \right\}$$

Определение 1.4. Нормальное разбиение $\mathcal{T}_P$ пространства $\mathbb{E}^d$ на параллельные копии параллелоэдра P называется *примитивным* в k-мерной грани F, $0 \leqslant k \leqslant d-1$, если её содержат $(d+1-k)$ параллелоэдров разбиения. Грань F при этом называется *примитивной.*

Если параллелоэдр примитивен во всех своих k-гранях, то он называется *k-примитивным.* 0-примитивные параллелоэдры называются просто *примитивными.*

Вороной доказал свою гипотезу для примитивных параллелоэдров произвольной размерности. Доказательство Вороного состоит из нескольких последовательных геометрических конструкций, каждая из которых нетривиальна.

Пусть Γ_A и Γ_B — касательные гиперплоскости к стандартному параболоиду $\Pi = \left\{(x_1, \ldots, x_{d+1}) \in \mathbb{E}^d \mid x_{d+1} = \sum\limits_{i=1}^{d} x_i^2\right\}$, построенные в точках $A, B \in \Pi$, $A \neq B$. Вороной отметил, что ортогональная проекция $\Pr$ из $\mathbb{E}^{d+1}$ в гиперплоскость $\mathbb{E}^d := \{x_{d+1} = 0\}$ переводит пересечение $\Gamma_A \bigcap \Gamma_B$ в срединный перпендикуляр к отрезку с концами $\Pr A$ и $\Pr B$ (гиперплоскость в $\mathbb{E}^d$).

Данное свойство стандартного параболоида, как было доказано позднее в [24], позволяет строить области Дирихле-Вороного для произвольного локально конечного точечного множества $\mathcal{P} \in \mathbb{E}^d$ в виде ортогональной проекции некоторых d-мерных полиэдров в $\mathbb{E}^{d+1}$. Описанная конструкция лежит в основе различных алгоритмов вычислительной геометрии для построения областей Дирихле-Вороного и триангуляций Делоне.

Первый шаг в рассуждениях Вороного — построение женератрисы разбиения на примитивные d-мерные параллелоэдры. Под *женератрисой разбиения* понимается график $\mathcal{G}_P$ кусочно-линейной выпуклой функции $G(x)$, линейной на каждой ячейке разбиения $\mathcal{T}_P$, но не линейной на более крупных областях (точное определение будет дано в главе 3). Вороной доказал, что для примитивного параллелоэдра P существует женератриса $\mathcal{G}_P$ разбиения $\mathcal{T}_P$.

Второй шаг рассуждений Вороного — существование вписанного в женератрису $\mathcal{G}_P$ эллиптического параболоида. $\mathcal{G}_P$ является границей надграфика $epi\, G \subset \mathbb{E}^{d+1}$ функции $G(x)$. Из кусочной линейности $G(x)$ следует, что $epi\, G$ является квази-полиэдром (см. “quasi-polyhedral set” в [29]).

Определение 1.5. *Квази-полиэдром* в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$ называется такое подмножество $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}^n$, что $\mathcal{K} \bigcap M$ является выпуклым многогранником для любого выпуклого многогранника $M \subset \mathbb{E}^n$.

В частности, квази-полиэдры являются замкнутыми выпуклыми множествами. Грани квази-полиэдра $\mathcal{K}$ определяются стандартно — как пересечения $\mathcal{K}$ со своими опорными гиперплоскостями.

Вороной доказал, что для примитивного параллелоэдра P существует эллиптический параболоид, который принадлежит надграфику $epi\, G$ и касается гиперграней этого квази-полиэдра в точках, проекции которых на $\mathbb{E}^d$ — центры ячеек разбиения $\mathcal{T}_P$.

Последний шаг рассуждений Вороного заключается в том, что аффинное преобразование, сохраняющее гиперплоскость $\mathbb{E}^d = \{x_{d+1} = 0\}$ и переводящее построенный для P эллиптический параболоид в стандартный параболоид вращения Π, переводит параллелоэдр P в некоторый параллелоэдр Вороного.

Ряд усилений результата Вороного используют данную схему доказательства. В частности, О.К. Житомирский [40] доказал гипотезу Вороного для $(d-2)$-примитивных параллелоэдров. В работе Житомирского обоснования потребовал лишь первый пункт схемы, доказательство остальных двух пунктов полностью аналогично доказательствам Вороного для примитивных параллелоэдров.

В [21] доказана теорема, что если для некоторого параллелоэдра P существует женератриса $\mathcal{G}_P$, то существует и вписанный в $\mathcal{G}_P$ эллиптический параболоид. Следовательно, аналогично рассуждениям Вороного, существует и аффинное преобразование, переводящее P в параллелоэдр Вороного. Эта теорема сводит доказательство гипотезы Вороного для произвольного параллелоэдра P к доказательству того, что существует женератриса соответствующего разбиения $\mathcal{T}_P$. Упрощённое доказательство этой теоремы предложено в главе 3 диссертации.

Теорема Вороного — это теорема существования. В работе [32] доказана теорема единственности. Авторы показали, что параллелоэдр Вороного, аффинный данному примитивному параллелоэдру, определён однозначно с точностью до подобия.

Обобщение теоремы единственности предложено в работе [23]. В работе рассмотрен класс параллелоэдров, в которых от любой гиперграни до любой другой можно дойти, переходя от гиперграни к гиперграни лишь через общую примитивную $(d-2)$-грань. Доказано, что если для такого параллелоэдра существует хотя бы один аффинный ему параллелоэдр Вороного, то такой параллелоэдр Вороного определён однозначно с точностью до подобия.

Из этой теоремы и теоремы Житомирского следует единственность аффинного параллелоэдра Вороного для $(d-2)$-примитивных параллелоэдров. В общем случае, теорема существования (гипотеза Вороного) для рассмотренного класса параллелоэдров не доказана.

Результат работы [23] усилен в главе 2 диссертации.

Женератрисы рассматриваются также для более общей конструкции — для нормальных разбиений евклидова пространства на полиэдры.

Определение 1.6. *Нормальным разбиением* евклидова пространства $\mathbb{E}^d$ на полиэдры называется такой набор $\mathcal{T}$ различных полиэдров $\{Q_1, Q_2, \ldots\}$ в $\mathbb{E}^d$, что

a) все грани произвольного полиэдра $Q_i \in \mathcal{T}$, включая пустую грань, также являются полиэдрами из $\mathcal{T}$;

b) для любых двух полиэдров Q_i, Q_j из $\mathcal{T}$ пересечение $Q_i \bigcap Q_j$ является гранью (возможно, несобственной) каждого из Q_i и Q_j;

c) объединение всех полиэдров набора покрывает всё пространство: $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} Q_i = \mathbb{E}^d$.

Полиэдры набора $\mathcal{T}$ называются *гранями* разбиения. Грани полной размерности d из $\mathcal{T}$ называются *ячейками* разбиения.

Далее в диссертации рассматриваются только локально конечные нормальные разбиения пространства, то есть такие, что любой шар в $\mathbb{E}^d$ пересекает лишь конечное число граней данного разбиения.

Ранее упоминался (см. параграф 1.1) алгоритм из [24] построения разбиения Дирихле-Вороного для заданного локально-конечного точечного множества. Как и на третьем шаге алгоритма Вороного доказательства его гипотезы, в [24] строится квази-полиэдр, описанный около стандартного параболоида. Граница этого квази-полиэдра является женератрисой искомого разбиения Дирихле-Вороного.

Построение женератрисы по разбиению, когда это возможно, называют *подъёмом разбиения до женератрисы* или просто *подъёмом разбиения.*

В работе [19] показано, что при $d \geqslant 3$ для произвольного конечного разбиения на примитивные полиэдры (то есть в k-мерных гранях которых сходятся $d+1-k$ ячеек разбиения) существует женератриса. Показано, что для таких разбиений женератрису можно построить, поднимая ячейки последовательно одна за одной.

В работах [17, 31] показано, что женератриса разбиения на полиэдры существует тогда и только тогда, когда для этого разбиения существует *ортогонально-дуальное* множество. Ортогонально-дуальным множеством для разбиения называется граф, вершины которого соответствуют ячейкам разбиения, рёбра соответствуют парам смежных по гиперграни ячеек (то есть соответствуют самой гиперграни), и сам граф вложен в пространство $\mathbb{E}^d$ с рёбрами – отрезками прямых, ортогональных соответствующим им гиперграням.

В [36] доказано, что женератриса существует для разбиений *заданных канонически*. Разбиение называется заданным канонически, если уравнения $E_{i,j}(x) = 0$ гиперплоскостей, содержащих гиперграни $P_i \bigcap P_j$ разбиения (где P_i, P_j — соответствующие ячейки), можно одновременно нормировать так, что сумма $\sum E_{i,i+1}(x)$ при циклическом обходе вокруг произвольной $(d-2)$-грани F тождественно равна нулю.

Канонические нормировки разбиений впервые были введены, по всей видимости, в [35]. Они обобщают и метод ортогонально-дуальных множеств, и метод канонического задания разбиений. *Канонической нормировкой* разбиения называется отображение из множества гиперграней разбиения в множество положительных вещественных чисел, удовлетворяющее дополнительным условиям. Методу канонических нормировок посвящена глава 3, где приведены все необходимые определения.

В [21] доказано (в других терминах), что из существования канонической нормировки для разбиения на параллелоэдры следует существование ортогонально-дуального множества, а значит и существование женератрисы. В диссертации доказано обобщение этого результата, а также результатов из работ [17, 31, 36] для общего случая нормального локально конечного разбиения. Доказана теорема 3.5, что женератриса разбиения на полиэдры существует тогда и только тогда, когда существует каноническая нормировка данного разбиения.

Основной метод построения канонических нормировок разбиения пространства — построение набора канонических нормировок, заданных лишь локально — на части $(d-1)$-граней разбиения, и последующее их согласование (см. [35]).

Существование канонических нормировок зависит от локальных геометрических свойств разбиения. В работе [35] доказано, что существует каноническая нормировка гиперграней, сходящихся в $(d-4)$-гранях, так называемых, 3-неразложимых параллелоэдров. Однако ещё Вороной и Житомирский ([39] и [40]) доказали, что разбиения на примитивные и $(d-2)$-примитивные параллелоэдры, допускает каноническое задание плоскостей гиперграней, сходящихся, соответственно, в $(d-2)$- и $(d-3)$-гранях таких разбиений. Отсюда следует существование канонических нормировок для соответствующих случаев.

Результаты Вороного и Житомирского о нормировках обобщены в главе 4. Доказана теорема 4.42, что существует каноническая нормировка гиперграней, сходящихся в гранях размерности $d-2$ и $d-3$ разбиений на параллелоэдры.

Важную роль при изучении локальных геометрических свойств разбиения $\mathcal{T}_P$ играют свойства симметрии разбиения. В работе [33] Г. Минковский доказал, что центры гиперграней из $\mathcal{T}_P$ являются полуцелыми точками решётки $\Lambda^d(P)$ центров ячеек из $\mathcal{T}_P$. Отсюда он вывел, что число гиперграней параллелоэдра не превосходит $2(2^d-1)$. В частности, это означает, что в каждой размерности существует лишь конечное число различных комбинаторных типов параллелоэдров.

Н.П. Долбилин [8] доказал более общий результат, введя понятие стандартных граней разбиения на параллелоэдры. Этот термин применим и в случае произвольных нормальных разбиений на полиэдры.

Определение 1.7. *Стандартной гранью* нормального разбиения $\mathcal{T}$ на полиэдры называется грань F, которую можно представить в виде пересечения двух различных ячеек разбиения.

В частности, гиперграни произвольного разбиения являются стандартными гранями.

Долбилин доказал, что в произвольном разбиении $\mathcal{T}_P$ на параллелоэдры стандартные грани центрально-симметричны, их центры являются полуцелыми точками решётки $\Lambda^d(P)$ центрами симметрии разбиения $\mathcal{T}_P$.

Для изучения локальных свойств разбиения $\mathcal{T}$ на полиэдры не требуется всё разбиение целиком. Все свойства, которые выполняются в достаточно малой окрестности внутренней точки v произвольной грани F из $\mathcal{T}$, можно исследовать при помощи полиэдральных вееров. К таким свойствам относится, например, свойство грани G разбиения содержать или не содержать F как подгрань.

Определение 1.8. *Полиэдральным конусом* называется множество всех неотрицательных линейных комбинаций $\{v + \alpha_1\overrightarrow{e_1} + \ldots + \alpha_k\overrightarrow{e_k}, \alpha_i \geqslant 0\}$ для конечного набора векторов $\{\overrightarrow{e_i}\}$ и точки v в $\mathbb{E}^d$.

Полиэдральные конусы являются примером неограниченных полиэдров, то есть полиэдров, которые не являются многогранниками (см. [15]).

Определение 1.9. *Веером* в $\mathbb{E}^d$ называется конечный набор $\mathcal{F}$ различных полиэдральных конусов $\{C_1, C_2, \ldots C_n\}$ такой, что всякая грань конуса $C_i \in \mathcal{F}$ также является конусом из $\mathcal{F}$, и пересечение любых двух $C_i, C_j \in \mathcal{F}$ является непустой гранью каждого из них.

Веер $\mathcal{F}$ называется *полным*, если конусы из $\mathcal{F}$ покрывают всё пространство $\mathbb{E}^d$, то есть если $\mathcal{F}$ является разбиением $\mathbb{E}^d$.

В работах [20] и [12] доказано, что для граней коразмерности 3 в разбиении на d-мерные параллелоэдры существует 5 различных комбинаторных типов (см. определение 4.21) схождений ячеек. Каждому из них соответствует свой тип полных трёхмерных вееров. Новое доказательство этого факта предложено в главе 4 диссертации.

В разбиении на примитивные параллелоэдры (случай из теоремы Вороного) встречается лишь один из этих пяти типов схождений [35]. Разбиения на $(d-2)$-примитивные параллелоэдры (случай из теоремы Житомирского) включают в себя разбиения на примитивные параллелоэдры, поэтому также допускают первый тип схождений, однако могут содержать ещё один из пяти типов. А. Ордин доказал гипотезу Вороного для случая *3-неразложимых* параллелоэдров [35], допуская ещё один — третий из 5 типов схождений в $(d-3)$-грани разбиения.

Классификация типов схождения в грани разбиения помогает строить локальные канонические нормировки. В главе 3 диссертации показано, что существование канонической нормировки произвольного разбиения равносильно тому, что существует женератриса разбиения. В торической топологии (см. например, [26]) известно, что женератриса полного веера существует тогда и только тогда, когда этот веер является веером граней некоторого выпуклого многогранника P (см. [15]), то есть когда его можно представить в виде набора конусов с общей вершиной внутри P и порождённых гранями P. Эти две теоремы позволяют свести задачу построения локальных канонических нормировок разбиения к задаче построения канонических нормировок полных вееров.

В главе 4 предложено обобщение этой теории для случая разбиения на параллелоэдры. Введена конструкция тесных вееров, стандартные грани которых обладают теми же свойствами локальной симметрии, что и стандартные грани разбиения на параллелоэдры.

Следует отметить, что для некоторых классов параллелоэдров гипотеза Вороного была доказана другими методами. Р. Эрдал доказал гипотезу Вороного для параллоэдров, являющихся зоноэдрами [25]. Другой подход представлен в работах Гришухина [7] и Магазинова [11]. В [11] доказано, что гипотеза Вороного верна для суммы Минковского параллелоэдра Вороного и отрезка (в случае, когда такая сумма является параллелоэдром).

1.3 Краткое содержание диссертации.

Краткий план диссертации:

- доказательство новой теоремы о размерности класса параллелоэдров Вороного аффинных данному (Глава 2);
- обобщение метода канонических нормировок для построения женератрисы на случай произвольного разбиения евклидова пространства на полиэдры, упрощение редукции гипотезы Вороного к задаче построения канонической нормировки, применение данного метода к доказательству гипотезы Вороного в случае Житомирского (Глава 3);
- новый метод построения канонических нормировок ограниченных фрагментов разбиений (звёзд граней), введение понятия тесного веера, новый метод доказательства классификации Делоне типов схождения параллелоэдров в грани коразмерности 3 (Глава 4);
- доказательство гипотезы Вороного для нового класса параллелоэдров —

параллелоэдров, δ-поверхность которых обладает тривиальной первой группой гомологий над $\mathbb{Z}$ (Глава 5).

Глава 2 посвящена изучению геометрических и комбинаторных свойств параллелоэдров Вороного. Основным результатом этой главы является теорема:

Теорема 2.4. *Множество $\mathcal{A}_V(P)$ всех параллелоэдров Вороного, аффинных данному параллелоэдру P, либо пусто, либо является орбифолдом (см. определение 2.7), размерность которого вычисляется по комбинаторному типу параллелоэдра P.*

Этот результат является решением задачи, поставленной Н.П. Долбилиным, описания множества $\mathcal{A}_V(P)$ для данного параллелоэдра P. Эта задача тесно связана с гипотезой Вороного: гипотеза эквивалентна тому, что множество $\mathcal{A}_V(P)$ непусто. Для тех параллелоэдров, для которых гипотеза Вороного верна, приведено описание данного множества с точностью до гомоморфизма.

В параграфе 2.1 рассмотрен подграф Венкова данного параллелоэдра (см. определение 2.6), основной результат главы сформулирован в терминах количества компонент связности этого графа.

В параграфе 2.2 дано короткое доказательство фольклорного критерия того, что данный параллелоэдр является параллелоэдром Вороного. При помощи этого критерия в параграфе 2.3 доказано, что множество параллелоэдров Вороного замкнуто относительно операции прямой суммы (для слагаемых, лежащих в ортогональных подпространствах).

В параграфе 2.4 доказан новый критерий (лемма 2.15) того, что два параллелоэдра Вороного аффинно эквивалентны друг другу. На основе этого критерия и конструкции нормированного параллелоэдра (см. определение 2.12) дано доказательство основного результата главы — теоремы 2.4.

Глава 3 посвящена обобщению результатов о связи канонических нормировок с подъёмами разбиений до женератрисы. Главы содержит два основных результата.

Первый результат главы 3 — новый метод построения женератрисы произвольного разбиения $\mathcal{T}$ пространства $\mathbb{E}^d$ на полиэдры (в случае, когда разбиение имеет каноническую нормировку). Метод представлен в определении 3.23, обоснование его корректности является частью доказательства теоремы:

Теорема 3.5. *Женератриса нормального разбиения $\mathcal{T}$ евклидова пространства $\mathbb{E}^d$ на полиэдры существует тогда и только тогда, когда существует каноническая нормировка данного разбиения.*

Предложенный в главе метод развивает идеи Вороного [39], а также Дэвиса [19], Макмаллена [31] и других. Он работает для произвольных разбиений (не только на параллелоэдры) и позволяет разбить построение женератрисы на множество элементарных шагов. При этом для выполнения очередного шага необходима информация лишь о небольшом фрагменте разбиения. Алгоритму построения женератрисы по разбиению и его канонической нормировке посвящены параграфы 3.1 – 3.5. Доказательство теоремы 3.5 приведено в параграфах 3.5 – 3.7.

Второй результат главы 3 — упрощение доказательства важной теоремы теории параллелоэдров:

Теорема 3.33. *Гипотеза Вороного верна для параллелоэдра P тогда и только тогда, когда существует каноническая нормировка разбиения $\mathcal{T}_P$ для параллелоэдра P.*

Доказанная для произвольных разбиений теорема 3.5 позволяет сразу свести гипотезу Вороного к существованию женератрисы соответствующего разбиения на параллелоэдры. Более того, предложенный в определении 3.23 метод построения женератрисы позволяет существенно сократить и упростить вычисления по сравнению с работами Вороного [39] (в частном случае примитивных параллелоэдров) и Гришухина, Дезы [21]. Доказательству теоремы 3.33 посвящены параграфы 3.8 – 3.10.

В параграфе 3.11 на основе результатов глав 3 и 4 приведено “одностраничное” доказательство гипотезы Вороного для случая Житомирского — для разбиения на параллелоэдры, все $(d-2)$-мерные грани которых примитивны.

Глава 4 посвящена теории вееров как инструменту изучения локальной геометрии разбиений и построения канонических нормировок. Глава объединяет три различные теории: теорию параллелоэдров, теорию политопальности вееров и новую теорию тесных вееров и локальной симметрии.

Во-первых, в этой главе введены понятия веера схождений в грани, тесного веера и локальной симметрии в грани. Доказан ряд технических лемм (например, 4.6, 4.15, 4.16), устанавливающих базовые свойства этих объектов.

Этот инструментарий далее позволяет перевести ряд вопросов про разбиения пространства на язык вееров и получить на них ответы. Вопросам обоснования метода вееров посвящены параграфы 4.1 – 4.3.

Во-вторых, в главе исследованы комбинаторные и геометрические свойства тесных вееров для малых размерностей. В теореме 4.19 (параграф 4.4) дана комбинаторная классификация трёхмерных тесных вееров, а в теореме 4.30 (параграф 4.5) доказана политопальность этих вееров.

В-третьих, в этой главе (параграфы 4.6 – 4.7) доказана следующая теорема о связи между канонической нормировкой разбиения и политопальностью вееров.

Теорема 4.37. *Пусть заданы разбиение $\mathcal{T}$ пространства $\mathbb{E}^d$ и некоторая грань $F \in \mathcal{T}$. Каноническая нормировка звезды $St_{\mathcal{T}}(F)$ существует тогда и только тогда, когда веер схождений в грани F политопален.*

Доказательство этой теоремы конструктивно — предложен способ построения соответствующей канонической нормировки.

И, наконец, в параграфе 4.8 полученные ранее результаты применены к параллелоэдрам. Доказана следующая теорема о связи параллелоэдров с тесными веерами.

Теорема 4.40. *Пусть задан параллелоэдр P и соответствующее ему разбиение $\mathcal{T}_P$ пространства $\mathbb{E}^d$. Веер схождений этого разбиения в каждой грани F является тесным.*

Как следствие, из полученной ранее классификации трёхмерных тесных вееров немедленно вытекает классификация комбинаторных типов схождения параллелоэдров в грани коразмерности 3 (следствие 4.41).

В заключении главы доказана теоремы 4.42 о том, что для любой грани коразмерности 2 или 3 в разбиении на параллелоэдры существует каноническая нормировка. Эта теорема используется в коротком доказательстве теоремы Житомирского (глава 3) и в доказательстве основного результата из главы 5.

Глава 5 посвящена доказательству гипотезы Вороного для нового класса параллелоэдров. δ-поверхностью d-мерного параллелоэдра P называется $(d-1)$-мерная полиэдральная поверхность, которая получается в результате выбрасывания из границы ∂P всех (замкнутых) стандартных $(d-2)$-граней параллелоэдра P. Доказана следующая теорема:

Теорема 5.7. *Если δ-поверхность параллелоэдра имеет тривиальную первую группу гомологий H_1 над $\mathbb{Z}$, то для P верна гипотеза Вороного.*

Из данного результата следует, что гипотеза Вороного верна для всех параллелоэдров размерности 3 и 4 (см. [27]). Эта теорема является обобщением теоремы Житомирского. Теорема доказана в совместной работе с А. Гарбером и А. Магазиновым.

Результаты диссертации опубликованы в работах [5, 6] (в журналах из списка ВАК), в [28] в ведущем мировом журнале Discrete and Computational Geometry (совместно с А. Гарбером и А. Магазиновым) и в препринте [4] (на веб-сайте arxiv.org в сети Интернет).

Результаты диссертации были доложены на ряде международных конференций и воркшопов, таких как:

• XIII Международная конференция "Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения", ТГПУ им. Л.Н. Толстого, Тула, май 2015 г.

• V международная конференция памяти Г. Вороного по аналитической теории чисел и пространственных мозаиках, НПУ им. М.П. Драгоманова, Киев, Украина, сентябрь 2013 г.

• Ярославская Международная Конференция «Дискретная Геометрия», посвящённая 100-летию А.Д. Александрова, ЯрГУ им. Демидова, Ярославль, август 2012 г.

• IV конференция по дискретной геометрии и алгебраической комбинаторике, Техасский университет в Браунсвилле, Саус Падре, США, апрель 2012 г.

• Воркшоп по дискретной геометрии и оптимизации, Филдсовский Институт, Торонто, Канада, сентябрь 2011 г.

• Международная конференция "Геометрия, топология, алгебра и теория чисел, приложения", посвящённая 120-летию Б.Н. Делоне, МИАН им. Стеклова, Москва, август 2010 г.

Также автор выступал с докладами по теме диссертации на следующих семинарах в МГУ им. Ломоносова:

• Алгебраическая топология и её приложения, семинар им. М.М. Постникова (рук. В.М. Бухштабер и др.)

• Дискретная геометрия и геометрия чисел (рук. Н.П. Долбилин, Н.Г. Мощевитин, М.Д. Ковалёв)

• Комбинаторика и графы (рук. А.М. Райгородский)

А также на семинарах:

• Межкафедральный семинар МФТИ по дискретной математике (МФТИ, рук. А.М. Райгородский, Р.Н. Карасёв, М.Н. Вялый, Г.А. Кабатянский)

• Теория сложности вычислений (ВЦ РАН, рук. С.П. Тарасов)

• Геометрический семинар Р. Эрдала (Queen's University, г. Кингстон, Канада).

2 Аффинные классы параллелоэдров Вороного

2.1 Граф Венкова и его специальный подграф

Пусть задан d-мерный параллелоэдр P и соответствующее ему нормальное разбиение $\mathcal{T}_P$ евклидова пространства $\mathbb{E}^d$. Согласно первому условию Минковского-Делоне-Венкова (см. параграф 1.1), параллелоэдр P центрально симметричен.

Определение 2.1. *Антиподальными* называются пары граней параллелоэдра P, симметричные относительно его центра.

Определение 2.2. Пусть все гиперграни выпуклого d-мерного многогранника M центрально-симметричны. *Поясом*, порождённым $(d-2)$-гранью F из M называется множество граней в M размерности $d-1$ и $d-2$ параллельных F.

Из третьего условия Минковского-Делоне-Венкова следует, что любой пояс в параллелоэдре состоит из двух или трёх пар антиподальных гиперграней (и такого же количества пар антиподальных $(d-2)$-граней).

Определение 2.3. *Графом Венкова V_P* (см. [35]) данного параллелоэдра P называется граф с заданной окраской его рёбер в два цвета. Вершинами этого графа являются пары антиподальных гиперграней параллелоэдра P. Рёбра соединяют те и только те пары вершин этого графа, которые соответствуют гиперграням из одного пояса в P. Если вершины произвольного ребра соответствуют гиперграням из одного 6-пояса, то это ребро красится в *красный* цвет. Если вершины ребра соответствуют гиперграням из одного 4-пояса, то ребро красится в *синий* цвет.

Докажем, что окраска рёбер его графа Венкова V_P задана корректно. Это вытекает из следующей более общей леммы.

Лемма 2.1. *Пусть все гиперграни выпуклого d-мерного многогранника M центрально симметричны, тогда любые два его пояса либо не имеют общих гиперграней, либо содержат ровно одну пару антиподальных гиперграней.*

Доказательство. По теореме Александрова-Шепарда [37], такой многогранник M является центрально симметричным. Его центр симметрии обозначим $O(M)$. Легко видеть, что произвольный пояс также симметричен относительно $O(M)$.

Рассмотрим пару поясов, у которых есть общие гиперграни. Пусть один из них задан $(d-2)$-гранью F_1, второй — $(d-2)$-гранью F_2. Тогда произвольная общая гипергрань H этих поясов параллельна $\mathrm{aff}\,(F_1)$ и $\mathrm{aff}\,(F_2)$, которые непараллельны друг другу.

Определение 2.4. *Линейной частью* $lin\,(L)$ аффинного подпространства L в $\mathbb{E}^d$ называется линейное подпространство $L-p$, где p — произвольная точка из L.

Имеем $lin\,(H) \supset lin\,(F_i)$, для $i=1,2$, а значит $lin\,(H) \supset lin\,(F_1)+lin\,(F_2)$. Получаем цепочку соотношений:

$$d-1 = \dim(lin\,(H)) \geqslant \dim(lin\,(F_1)+lin\,(F_2)) > \dim(lin\,(F_1)) = d-2$$

Значит $\dim(lin\,(F_1)+lin\,(F_2)) = d-1$, сумма линейных подпространств $lin\,(F_1)+lin\,(F_2)$ — гиперплоскость, и все общие гиперграни H_i данных двух поясов параллельны $lin\,(F_1)+lin\,(F_2)$ и друг другу.

Значит у данных двух поясов не более двух общих гиперграней. Из центральной симметрии поясов относительно $O(M)$ следует, что их ровно 2 и они антиподальны. □

Определение 2.5. *Комбинаторно связными* называются произвольные две гиперграни H_1, H_2 на поверхности параллелоэдра P, для которых найдётся соединяющая их последовательность гиперграней $H_1 = C_1, C_2, \ldots, C_m = H_2$ параллелоэдра P, в которой любые две последовательные гиперграни C_i, C_{i+1} пересекаются по примитивной $(d-2)$-грани.

Компонентой комбинаторной связности на поверхности параллелоэдра P называется произвольное максимальное по включению множество связных между собой гиперграней.

Лемма 2.2. *Если компонента связности параллелоэдра содержит более одной гиперграни, то она центрально симметрична.*

Доказательство. Предположим, что данная компонента содержит более одной гиперграни, и F — любая из этих гиперграней. Ясно, что среди $(d-2)$-граней в F есть хотя бы одна примитивная. Эта $(d-2)$-грань порождает 6-пояс, все гиперграни которого принадлежат той же компоненте, что F. В частности, гипергрань антиподальная гиперграни F, также принадлежит данной компоненте. $\square$

Определение 2.6. *Подграфом Венкова G_P* параллелоэдра P называется подграф графа Венкова V_P, который содержит все вершины из V_P и только красные рёбра из V_P. Иными словами, две вершины G_P соединены ребром тогда и только тогда, когда им соответствуют гиперграни из одного 6-пояса.

Из леммы 2.2 немедленно следует

Предложение 2.3. *Подграф Венкова G_P данного параллелоэдра P содержит ровно k компонент связности тогда и только тогда, когда множество гиперграней P распадается в точности на k классов, где каждый класс является либо центрально симметричной компонентой комбинаторной связности, либо парой антиподальных изолированных гиперграней, каждая из которых составляет отдельную компоненту комбинаторной связности.*

Определение 2.7. *Орбифолдом* называется топологическое пространство, локально являющееся факторпространством $\mathbb{R}^d$ по модулю конечной группы (см. [38]).

Определение 2.8. *Аффинным классом* данного параллелоэдра P называется множество всех параллелоэдров аффинных P. Аффинный класс параллелоэдра P обозначается $\mathcal{A}(P)$.

Аффинным классом параллелоэдров Вороного данного параллелоэдра P называется подмножество всех параллелоэдров Вороного из аффинного класса $\mathcal{A}(P)$. Этот класс обозначается $\mathcal{A}_V(P)$.

Основным результатом данной главы является следующая теорема. С учётом предложения 2.3, она решает поставленную в работе [23] задачу описания аффинного класса $\mathcal{A}(P)$.

Теорема 2.4 (О размерности орбифолда параллелоэдров Вороного)**.** *Пусть аффинный класс $\mathcal{A}(P)$ параллелоэдра P содержит хотя бы один параллелоэдр Вороного, и пусть подграф Венкова G_P имеет ровно k компонент связности. Тогда множество параллелоэдров Вороного в $\mathcal{A}(P)$ является орбифолдом размерности k.*

Параллелоэдры Вороного в аффинном классе $\mathcal{A}(P)$ рассматриваются с точностью до конгруэнтности.

2.2 Критерий параллелоэдров Вороного

Определение 2.9. *Фацетным вектором* $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(F)$ гиперграни F параллелоэдра P называется вектор с началом в центре P и концом в центре смежного по F параллелоэдра P_F: $P \bigcap P_F = F$.

Множество всех фацетных векторов параллелоэдра P обозначим $\mathcal{V}$.

Рассмотрим d-мерный параллелоэдр Вороного P_V. Для произвольной пары точек $p, q \in \mathbb{E}^d$ обозначим через H_{pq} плоскость, заданную уравнением $|x - p| = |x - q|$, то есть срединную перпендикулярную гиперплоскость к отрезку pq, а через H^-_{pq} — то из замкнутых полупространств в $\mathbb{E}^d$, ограниченных гиперплоскостью H_{pq}, что содержит точку p. Тогда для произвольных $p, q \in \mathbb{E}^d$, в частности, имеем $H^-_{pq} \bigcap H^-_{qp} = H_{pq}$, $H^-_{pq} \bigcup H^-_{qp} = \mathbb{E}^d$. Из определения следует, что

$$P_V = \bigcap_{c \in \Lambda, q \neq c} H^-_{cq}$$

где c — центр параллелоэдра P. Отсюда следует фольклорный критерий для параллелоэдров Вороного:

Теорема 2.5 (Критерий)**.** *Параллелоэдр P является параллелоэдром Вороного тогда и только тогда, когда каждая его гипергрань F перпендикулярна соответствующему ей фацетному вектору $\boldsymbol{f}(F)$.*

Доказательство. Если P является параллелоэдром Вороного (с центром c), то каждая его гипергрань содержится в соответствующей гиперплоскости H_{cq}.

Обратно, если все фацетные вектора P ортогональны соответствующим гиперграням, то $P = \bigcap\limits_{q \in M, q \neq c} H^-_{cq}$, где M — множество центров всех параллелоэдров, смежных с P по гиперграням. Рассмотрим нормальное разбиение

$\mathcal{T}_P$, соответствующее параллелоэдру P и решётку $\Lambda = \Lambda^d(P)$ центров ячеек этого разбиения. Для данной решётки определён параллелоэдр Вороного $P_V = \bigcap\limits_{q\in\Lambda, q\neq c} H^-_{cq}$. Так как $M \subset \Lambda$, то $P_V \subset P$. Однако, и P, и P_V являются фундаментальными областями для Λ, а значит имеют равный объём. Отсюда следует, что $P = P_V$ и значит P также является параллелоэдром Вороного. $\square$

2.3 Разложимость параллелоэдра

Определение 2.10. Напомним, что *суммой Минковского* множеств $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k \subset \mathbb{E}^n$ называется множество точек

$$Q = \sum_{i=1}^{k} Q_i := \left\{ x \mid x = \sum_{i=1}^{k} q_i, q_i \in Q_i \right\}$$

Если слагаемые расположены в трансверсальных подпространствах, то такая сумма называется *прямой суммой Минковского.*

Известно, что сумма Минковского выпуклых многогранников является выпуклым многогранником. Сумма Минковского центрально симметричных многогранников также является центрально симметричным многогранником, центр которого является суммой центров слагаемых.

Для прямой суммы $Q := \bigoplus_{i=1}^k Q_i$ известно (см. [15]), что $\dim Q = \sum_{i=1}^k \dim Q_i$, а также, что каждая грань $F \in Q$ является прямой суммой соответствующих граней слагаемых: $F = \bigoplus_{i=1}^k F_i$. В частности, все гиперграни в Q имеют вид $Q_1 \oplus \ldots \oplus F_i \oplus \ldots \oplus Q_k$, где ровно одно из слагаемых Q_i заменено на некоторую свою гипергрань F_i.

Определение 2.11. Многогранник Q, который можно представить в виде прямой суммы многогранников меньшей размерности $Q_1 \oplus Q_2$, называется *разложимым.*

Для определённости, далее будем считать, что центры всех слагаемых и суммарных параллелоэдров находятся в начале координат. Это будет либо явно предполагаться конструкцией, либо легко достигаться параллельным переносом центров всех слагаемых в начало координат.

Предложение 2.6.

1) *Если параллелоэдр P разложим в сумму $P = Q_1 \oplus Q_2$, то многогранники Q_1 и Q_2 также являются параллелоэдрами соответствующей размерности.*

2) *Для всякого параллелоэдра P однозначно (с точностью до порядка слагаемых) определено неприводимое разложение в сумму неразложимых параллелоэдров*
$$P = \bigoplus_{i=1}^{k} P_i,\ k \geqslant 1$$

3) *Пусть P_i — набор параллелоэдров, расположенных в попарно трансверсальных пространствах и задающих решётки центров Λ_i. Тогда $P := \bigoplus_{i=1}^{k} P_i$ является параллелоэдром и задаёт решётку центров $\Lambda = \bigoplus \Lambda_i$.*

Отсюда, в частности, следует, что гиперграни параллелоэдра $P = \bigoplus_{i=1}^{k} P_i$ разбиваются на k семейств $\mathcal{F}_i = \{P_1 \oplus \ldots \oplus F_i \oplus \ldots \oplus P_k\}$, $1 \leq i \leq k$, где грань F_i пробегает множество всех гиперграней d_i-мерного параллелоэдра Q_i.

Множество фацетных векторов, соответствующих гиперграням из $\mathcal{F}_i$ обозначим $\mathcal{V}_i$. Набор внешних нормалей к гиперграням из $\mathcal{F}_i$ будем обозначать $\mathcal{N}_i$. Для произвольного набора векторов $\mathcal{S}$ его линейную оболочку обозначим через $\langle \mathcal{S} \rangle$.

Лемма 2.7. *Если для параллелоэдра P задано разложение $P = \bigoplus_{i=1}^{k} P_i$, то $P \bigcap \langle \mathcal{V}_i \rangle = P_i$ (совпадают с точностью до параллельного переноса).*

Доказательство. Не умаляя общности, центр P и центры всех P_i совпадают с началом координат в $\mathbb{E}^d$. Тогда $P_i = P \bigcap \operatorname{aff}(P_i)$. Из третьего свойства предложения 2.6 имеем, что $\mathcal{V}_i$, как множество направленных отрезков, совпадает с множеством $\mathcal{V}(P_i)$ фацетных векторов параллелоэдра P_i. Поэтому
$$P \bigcap \langle \mathcal{V}_i \rangle = P \bigcap \langle \mathcal{V}(P_i) \rangle = P \bigcap \operatorname{aff}(P_i) = P_i.$$

$\square$

Лемма 2.8. *Пусть $P = \bigoplus_{i=1}^{k} P_i$, тогда для любой пары различных индексов из диапазона $1 \leqslant i, j \leqslant k$ выполнено $\langle \mathcal{N}_i \rangle \perp \langle \mathcal{V}_j \rangle$.*

Доказательство. Рассмотрим некоторую нормаль $\boldsymbol{n}_i \in \mathcal{N}_i$, соответствующую ей гипергрань $P_1 \oplus \ldots \oplus F_i \oplus \ldots \oplus P_k$ и любой индекс $j \neq i, 0 < j \leqslant k$. Имеем $\boldsymbol{n}_i \perp P_1 \oplus \ldots \oplus F_i \oplus \ldots \oplus P_k$, значит $\boldsymbol{n}_i \perp P_j$, то есть $\boldsymbol{n}_i \perp \operatorname{aff}(P_j) = \langle \mathcal{V}_j \rangle$. В частности, $\boldsymbol{n}_i \perp \boldsymbol{f}_j$ для произвольного $\boldsymbol{f}_j \in \mathcal{V}_j$. □

Следующая теорема связывает свойство разложимости параллелоэдра со строением его графа Венкова:

Теорема 2.9 (О разложимости [35]). *Пусть, P является прямой суммой параллелоэдров P_1 и P_2. Пусть V_1 и V_2 — подграфы графа Венкова V_P на вершинах вида $\pm F_1 \oplus P_2$ и $P_1 \oplus \pm F_2$ соответственно, где F_1 — произвольная гипергрань P_1, F_2 — произвольная гипергрань P_2. Тогда*

1) *Отображение из V_{P_i} в V_i, при котором вершина $\pm F_i$ переходит в $\pm F_i \oplus P_j$ является изоморфизмом графов при $\{i, j\} = \{1, 2\}$*

2) *Каждая вершина подграфа V_1 соединена с каждой вершиной подграфа V_2 ребром синего цвета.*

3) *Если граф Венкова V_P несвязен по красным рёбрам, то параллелоэдр P разложим.*

Индукцией по количеству компонент связности подграфа Венкова можно получить обобщение теоремы 2.9:

Предложение 2.10.

1) *Подграф Венкова параллелоэдра P содержит ровно k компонент связности $G_P = \bigsqcup_{i=1}^{k} G_i$ тогда и только тогда, когда P представим в виде суммы k неразложимых параллелоэдров $P = \bigoplus_{i=1}^{k} P_i$.*

2) *Пусть $P = \bigoplus_{i=1}^{k} P_i$. Отображение, переводящее вершину $\pm F_i$ подграфа Венкова G_{P_i} в вершину $P_1 \oplus \ldots \oplus P_{i-1} \oplus \pm F_i \oplus P_{i+1} \oplus \ldots \oplus P_k$ подграфа Венкова G_P, задаёт изоморфизм между графом G_{P_i} и компонентой связности G_i.*

Из этого предложения, в частности, следует, что для данного параллелоэдра такое разложение однозначно с точностью до порядка слагаемых.

Следующая лемма означает, что класс параллелоэдров Вороного замкнут относительно операции прямой суммы в ортогональных подпространствах.

Лемма 2.11. *Пусть для параллелоэдра P задано разложение в прямую сумму $\bigoplus_{i=1}^{k} P_i$ многогранников меньших размерностей. Параллелоэдр P является параллелоэдром Вороного тогда и только тогда, когда каждый из многогранников P_i является параллелоэдром Вороного, а аффинные оболочки слагаемых ортогональны.*

Доказательство. По первому пункту предложения 2.6 все слагаемые P_i данного разложения являются параллелоэдрами.

Докажем лемму в случае $k = 2$, то есть $P = P_1 \oplus P_2$.

Рассмотрим произвольную гипергрань F_1' параллелоэдра P_1 и её фацетный вектор $\boldsymbol{f}_1'$. Ей соответствует гипергрань $F_1 = F_1' \oplus P_2$ параллелоэдра P с фацетным вектором $\boldsymbol{f}_1$. Из третьего пункта предложения 2.6 следует, что $\boldsymbol{f}_1$ и $\boldsymbol{f}_1'$ как направленные отрезки совпадают.

Пусть P является параллелоэдром Вороного, тогда по критерию 2.5 имеем, что все его фацетные вектора являются нормалями к соответствующим гиперграням, то есть $\mathcal{N}_1 = \mathcal{V}_1, \mathcal{N}_2 = \mathcal{V}_2$. Согласно лемме 2.8, нормали к гиперграням одной компоненты ортогональны фацетным векторам другой компоненты, отсюда $\mathcal{V}_1 \perp \mathcal{V}_2$. Так как $\operatorname{aff}(P_1) = \langle \mathcal{V}_1 \rangle, \operatorname{aff}(P_2) = \langle \mathcal{V}_2 \rangle$, то $\operatorname{aff}(P_1) \perp \operatorname{aff}(P_2)$. Ортогональность аффинных оболочек доказана.

Так как $\boldsymbol{f}_1 \perp F_1 = F_1' \oplus P_2$ и $\boldsymbol{f}_1' = \boldsymbol{f}_1$, то $\boldsymbol{f}_1' \perp F_1'$. В силу произвольности выбора фацетного вектора $\boldsymbol{f}_1'$, по критерию 2.5 имеем, что P_1 является параллелоэдром Вороного. Аналогично доказывается, что P_2 — параллелоэдр Вороного.

Обратно, если P_1, P_2 — параллелоэдры Вороного и $\operatorname{aff}(P_1) \perp \operatorname{aff}(P_2)$, то $\boldsymbol{f}_1' \perp F_1'$, $\boldsymbol{f}_1 \perp \langle \mathcal{V}_2 \rangle = \operatorname{aff}(P_2)$, следовательно $\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{f}_1' \perp (F_1' \oplus P_2) = F_1$, то есть $\boldsymbol{f}_1 \perp F_1$. Таким образом все фацетные вектора параллелоэдра P ортогональны соответствующим гиперграням. По критерию 2.5 имеем, что P — параллелоэдр Вороного.

В случае $k = 2$ теорема доказана. Общее доказательство получается применением этого случая к суммам $P_1 \oplus P_2, (P_1 \oplus P_2) \oplus P_3, \ldots, \left(\bigoplus_{i=1}^{k-1} P_i\right) \oplus P_k$.
$\square$

2.4 Критерий аффинной эквивалентности двух параллелоэдров Вороного

В работе [23] (см. также [9]) доказана следующая теорема, которая усиливает результат работы [32].

Теорема 2.12. *Если подграф Венкова G_P параллелоэдра P связен, то аффинный класс $\mathcal{A}(P)$ содержит не более одного, с точностью до подобия, параллелоэдра Вороного.*

То есть, в условиях теоремы 2.12, аффинный класс параллелоэдров Вороного $\mathcal{A}_V(P)$, если не пуст, гомеоморфен $\mathbb{R}_+$ и является одномерным орбифолдом.

Из теоремы 2.12 очевидно следует

Предложение 2.13. *Если два неприводимых параллелоэдра Вороного аффинно эквивалентны и имеют равный объём, то они конгруэнтны.*

Лемма 2.14. *Пусть P и P' — d-мерные параллелоэдры Вороного, а φ — аффинное преобразование переводящее P в P'. Пусть P_i — произвольное неприводимое слагаемое из разложения P в прямую сумму, тогда ограничение $\varphi\big|_{\mathrm{aff}(P_i)}$ является преобразованием подобия.*

Доказательство. Пусть неприводимое разложение для P имеет вид

$$P = \bigoplus_{i=1}^{k} P_i \tag{$*$}$$

Так как φ сохраняет размерность параллелоэдра P, то оно невырождено. Отсюда следует:

$$P' = \varphi(P) = \varphi\left(\bigoplus_{i=1}^{k} P_i\right) = \bigoplus_{i=1}^{k} \varphi(P_i)$$

Согласно лемме 2.11, каждое слагаемое $\varphi\left(P_i\right)$ является параллелоэдром Вороного, и аффинные оболочки любых двух слагаемых взаимно ортогональны. Из предложения 2.10 следует, что данное разложение параллелоэдра P' неприводимо. Из теоремы 2.12 следует, что каждое ограничение $\varphi_i := \varphi\big|_{\mathrm{aff}(P_i)}$ преобразования φ является преобразованием подобия. □

Лемма 2.15. *Пусть $\bigoplus_{i=1}^{k} P_i$ — неприводимое разложение для параллелоэдра Вороного P. Параллелоэдр Вороного P' аффинно эквивалентен P тогда и только тогда, когда его можно представить в виде $\bigoplus_{i=1}^{k} \lambda_i P_i$ для некоторых $\lambda_i > 0$.*

Доказательство. Из леммы 2.11 следует, что $\operatorname{aff}(P_i) \perp \operatorname{aff}(P_j)$ при $i \neq j$. Значит для произвольных положительных λ_i, λ_j выполнено $\operatorname{aff}(\lambda_i P_i) \perp \operatorname{aff}(\lambda_j P_j)$. По обратному утверждению леммы 2.11 отсюда следует, что для любого набора коэффициентов $\lambda_i > 0$ сумма $\bigoplus_{i=1}^{k} \lambda_i P_i$ является параллелоэдром Вороного.

Обратно, пусть $P' = \varphi(P)$ для некоторого невырожденного аффинного преобразования φ. Тогда по лемме 2.14

$$P' = \varphi\left(\bigoplus_{i=1}^{k} P_i\right) = \bigoplus_{i=1}^{k} \varphi(P_i) = \bigoplus_{i=1}^{k} \lambda_i P_i.$$

□

2.5 Доказательство теоремы об аффинном классе параллелоэдров Вороного

Определение 2.12. *Нормированным* назовём такой параллелоэдр Вороного, у которого все слагаемые неприводимого разложения имеют единичный объём (соответствующей размерности).

Лемма 2.16. *Для произвольного параллелоэдра P, если его аффинный класс параллелоэдров Вороного $\mathcal{A}_V(P)$ непуст, то содержит ровно один нормированный параллелоэдр P^*.*

Доказательство. Параллелоэдры из одного аффинного класса имеют изоморфные подграфы Венкова. Подграф G_P содержит k компонент связности, поэтому подграф Венкова для P_V также состоит из k компонент. Согласно предложению 2.10, параллелоэдр P_V распадается в прямую сумму k слагаемых $P_V = \bigoplus\limits_{i=1}^{k} P_i$, $P_i \perp P_j$ при $i \neq j$.

Для каждого индекса i найдётся положительный коэффициент λ_i такой, что объём (соответствующей размерности) слагаемого $P_i^* = \lambda_i P_i$ равняется единице: $Vol_{d_i}(P_i^*) = 1$.

Таким образом, каждое слагаемое P_i^* является нормированным. Очевидно, что параллелоэдр $P^* = \bigoplus_{i=1}^k P_i^*$ принадлежит $\mathcal{A}_V(P)$ и имеет единичный объём. По определению, P^* является нормированным.

Если найдётся другой нормированный параллелоэдр Вороного P° в аффинном классе $\mathcal{A}(P)$, то по лемме 2.15 он представляется в виде $\bigoplus\limits_{i=1}^{k} \gamma_i P_i^*$ для некоторых положительных γ_i.

Из предложения 2.10 следует, что $\gamma_i P_i^*$ — неприводимые слагаемые. Значит, по определению нормированного параллелоэдра Вороного, все $\gamma_i P_i^*$ имеют единичный объём соответствующей размерности, так же как и P_i^*. Значит все коэффициенты γ_i равны 1 и P° конгруэнтен P^*. □

Следующее предложение непосредственно вытекает из лемм 2.15 и 2.16.

Предложение 2.17. *Каждый параллелоэдр P_V из класса $\mathcal{A}_V(P)$ представляется в виде $P_V = \lambda_1 P_1^* \oplus \ldots \oplus \lambda_k P_k^*$ для некоторых положительных коэффициентов λ_i и слагаемых неприводимого разложения нормированного параллелоэдра.*

Таким образом, наборы из k положительных чисел задают параметризацию $\mathcal{A}_V(P)$. Однако, такая параметризация, вообще говоря, неоднозначна: могут существовать 2 различных набора $\left\{\lambda_i^1\right\}$, $\left\{\lambda_j^2\right\}$, которые задают конгруэнтные параллелоэдры.

Определение 2.13. *Приведённым представлением* параллелоэдра назовём представление в виде следующей прямой суммы:

$$P = \bigoplus_{g=1}^{m} \bigoplus_{j=1}^{k_g} P_{g,j} = (P_{1,1} \oplus \ldots \oplus P_{1,k_1}) \oplus \ldots \oplus (P_{m,1} \oplus \ldots \oplus P_{m,k_m})$$

где все слагаемые неприводимы, в каждой группе $\left\{P_{g,1}, \ldots, P_{g,k_g}\right\}$ слагаемые попарно аффинно эквивалентны, слагаемые из разных групп аффинно не эквивалентны.

Лемма 2.18. *Внутри каждой группы слагаемых приведённого представления для нормированного параллелоэдра P^* все слагаемые попарно конгруэнтны.*

Доказательство. Приведённое представление для P^* имеет вид

$$P^* = \bigoplus_{g=1}^{m} \bigoplus_{j=1}^{k_g} P^*_{g,j}$$

Так как параллелоэдры $P^*_{g,j}$ нормированы, то из теоремы 2.12 следует, что произвольные два слагаемых из одной группы данного разложения подобны друг другу, а из предложения 2.13 следует, что они конгруэнтны друг другу. □

Рассмотрим перестановку σ индексов $1, \ldots, k$, которая сохраняет приведённое представление, то есть для любого индекса i слагаемые P_i и $P_{\sigma(i)}$ принадлежат одной и той же группе слагаемых приведённого представления.

Лемма 2.19. *Два набора $\{\lambda_i\}_{i=1}^{k}$, $\left\{\lambda'_j\right\}_{j=1}^{k}$ задают конгруэнтные параллелоэдры Вороного из $\mathcal{A}_V(P)$ тогда и только тогда, когда они получаются друг из друга перестановкой σ, сохраняющей приведённое представление.*

Доказательство. Если два набора коэффициентов отличаются указанной перестановкой, то движение пространства $\mathbb{R}^d$, переставляющее соответствующие подпространства $Aff(P^*_i)$ и $Aff(P^*_{\sigma(i)})$, переводит параллелоэдр с набором $\{\lambda_i\}$ в параллелоэдр с набором $\left\{\lambda'_j\right\}$.

Обратно, если два набора задают конгруэнтные параллелоэдры, то каждому слагаемому $\lambda_i P^*_i$ первого параллелоэдра отвечает конгруэнтное слагаемое $\lambda'_{\sigma(i)} P^*_{\sigma(i)}$ второго параллелоэдра. Таким образом параллелоэдры P^*_i и $P^*_{\sigma(i)}$ гомотетичны друг другу (а так как оба нормированы, то и конгруэнтны). Значит, P^*_i и $P^*_{\sigma(i)}$ принадлежат одной группе слагаемых. Поэтому перестановка σ сохраняет приведённое представление. □

Перестановка σ определяет ортогональное преобразование положительного ортанта $\mathbb{R}^k_+$, параметризованного $\{\lambda_i\}$, в себя, при котором каждая ось Ox_i переходит в соответствующую ось $Ox_{\sigma(i)}$. Такие перестановки образуют группу $N = S_1 \times \ldots \times S_m$, где S_{k_g} — это группа всех перестановок на k_g элементах g-ой группы приведённого представления: $\left\{P_{g,1}, \ldots, P_{g,k_g}\right\}$. Таким образом, множество $\mathcal{A}_V(P)$ гомеоморфно $\mathbb{R}^k_+/N$. Значит множество всех параллелоэдров Вороного из $\mathcal{A}(P)$ является орбифолдом размерности k. □

3 Женератриса разбиения пространства и канонические нормировки

3.1 Канонические нормировки

В данной главе рассматриваются полиэдральные комплексы, заданные в евклидовом пространстве (см., например, [15]). Далее, где явно не указано обратное, к граням полиэдра мы относим виртуальную пустую грань, общую для всех полиэдров, и полную грань — сам полиэдр.

Определение 3.1. *Полиэдральным комплексом* в $\mathbb{E}^d$ называется набор $\mathcal{C}$ полиэдров в $\mathbb{E}^d$ со следующими свойствами:
1) пустой полиэдр принадлежит $\mathcal{C}$;
2) все грани произвольного полиэдра $P \in \mathcal{C}$ также являются полиэдрами из $\mathcal{C}$;
3) пересечение $P \bigcap Q$ любых двух полиэдров $P, Q \in \mathcal{C}$ является гранью каждого из них.

Элементы комплекса $\mathcal{C}$ называются его *гранями*. *Размерностью* комплекса называется наибольшая размерностей полиэдра из $\mathcal{C}$. Множество всех граней из $\mathcal{C}$ размерности k будем обозначать $\mathcal{F}^k(\mathcal{C})$.

Из определения 1.6 следует, что произвольное нормальное разбиение евклидова пространства на полиэдры является полиэдральным комплексом. Другим важным примером полиэдральных комплексов являются остовы нормальных разбиений (см.[36]).

Определение 3.2. *k-мерным остовом* $Sk^k(\mathcal{T})$ разбиения $\mathcal{T} \subset \mathbb{E}^d$ называется множество всех граней из $\mathcal{T}$, размерность которых не превышает k. То есть $Sk^k(\mathcal{T}) = \bigcup\limits_{i \leqslant k} \mathcal{F}^i(\mathcal{T})$.

Для граней полиэдральных комплексов будем использовать термины стандартные для разбиений.

Определение 3.3. В полиэдральном комплексе размерности n грани полной размерности называются *ячейками*, грани размерности $n-1$ — *гипергранями*, а грани размерности $n-2$ — *гиперрёбрами*.

Определение 3.4. *Нормировкой* n-мерного комплекса $\mathcal{C} \subset \mathbb{E}^d$ называется произвольная функция s, определённая на множестве ячеек $\mathcal{F}^n(\mathcal{C})$.

Определение 3.5. *Звездой* $St_{\mathcal{C}}(F)$ грани F комплекса $\mathcal{C}$ называется множество всех граней в $\mathcal{C}$ содержащих F, включая саму грань F и ячейки комплекса. В случае, когда комплекс определён контекстом однозначно, мы будем обозначать звезду как $St(F)$.

Будем говорить, что грани $F_1, F_2, \dots, F_k$ комплекса $\mathcal{C}$ *сходятся* в грани $F \in \mathcal{C}$, если они принадлежат звезде $St(F)$.

Пусть F — $(d-2)$-грань разбиения $\mathcal{T} \subset \mathbb{E}^d$. Рассмотрим проекцию граней из $St(F)$ вдоль $\operatorname{aff}(F)$ в дополнительную к $\operatorname{aff}(F)$ двумерную плоскость α. При этой проекции F перейдёт в точку f, гиперграни из $St(F)$ — в рёбра, выходящие из f, ячейки из $St(F)$ — в двумерные многоугольники с вершиной f.

Определение 3.6. *Циклическим обходом* ячеек разбиения $\mathcal{T} \subset \mathbb{E}^d$ вокруг $(d-2)$-грани F называется такая последовательность $C_1, C_2, \dots, C_k$ всех ячеек, сходящихся в F, что их проекции на двумерную плоскость α образуют (циклический) обход вокруг точки f.

Обходы вокруг точки f в плоскости α делятся на два типа: по ходу часовой стрелки и против хода часовой стрелки. Соответствующие им обходы ячеек $\{C_i\}$ также делятся на два типа. Про ячейки в обходах одного типа говорят, что они следуют в *одном направлении обхода* вокруг F.

Аналогично определяются обход гиперграней, сходящихся в F, и два направления обхода этих гиперграней.

Единичную нормаль к гиперграни можно выбрать двумя противоположными способами.

Определение 3.7. Выбор нормалей $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_k$ к гиперграням разбиения $\mathcal{T} \subset \mathbb{E}^d$ из $St(F)$ называется *согласованным с обходом* ячеек $C_1, \dots, C_k \in St(F)$, если каждая нормаль $\mathbf{n}_i$ к соответствующей гиперграни $C_i \bigcap C_{i+1}$ указывает направление от C_i к C_{i+1} (считая $C_{k+1} := C_1$).

Определение 3.8. Пусть $H_1, H_2, \dots, H_k$ — циклический обход всех гиперграней разбиения $\mathcal{T} \subset \mathbb{E}^d$, содержащих $(d-2)$-грань $F \in \mathcal{T}$, и s — их положительно определённая нормировка. Пусть также $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_k$ — согласованный выбор единичных нормалей к гиперграням H_i. *Кручением* Δ_s нормировки s вокруг гиперребра F называется величина

$$\Delta_s(F) := \sum_{i=0}^{k} s(F_i)\mathbf{n}_i$$

Кручение определено с точностью до знака и, вообще говоря, зависит от выбора направления обхода. Однако нас будет интересовать лишь равенство или неравенство кручения нулю, что от направления обхода не зависит.

Определение 3.9. Пусть задано разбиение $\mathcal{T}$ пространства $\mathbb{E}^d$ на полиэдры и положительная нормировка $s : \mathcal{F}^{d-1}(\mathcal{T}) \to \mathbb{R}_{>0}$ остова $Sk^{d-1}(\mathcal{T})$. s называется *канонической нормировкой разбиения* $\mathcal{T}$, если для всякого гиперребра $F \in \mathcal{F}^{d-2}(\mathcal{T})$ кручение $\Delta_s(F)$ равно нулю.

Замечание. *Согласно определению 3.4, нормировка является функцией на множестве ячеек комплекса. Однако в случае канонических нормировок разбиения в качестве такого комплекса рассматривается* $(d-1)$*-мерный остов разбиения (см. [35]).*

Аналогично можно определить каноническую нормировку подкомплекса $\mathcal{C}$ разбиения $\mathcal{T}$. Однако для этого требуется дополнительное условие. Далее потребуется, чтобы кручения нормировки s подкомплекса $\mathcal{C}$ совпадали с кручениями s для $\mathcal{T}$ (вычисленными для тех же гиперрёбер, что и в $\mathcal{C}$). Отсюда вытекает необходимое ограничение то, какие кручения вычислять в $\mathcal{C}$.

Определение 3.10. Пусть заданы разбиение $\mathcal{T} \subset \mathbb{E}^d$ и его подкомплекс $\mathcal{C}$. $(d-2)$-грань $F \in \mathcal{C}$ будем называть *внутренней (для* $\mathcal{C}$ *относительно* $\mathcal{T}$*)*, если все гиперграни $H_1, H_2, \dots H_k \in \mathcal{T}$, содержащие F, также являются гранями подкомплекса $\mathcal{C}$.

Положительная нормировка $s : \mathcal{F}^{d-1}(\mathcal{C}) \to \mathbb{R}_{>0}$ остова $Sk^{d-1}(\mathcal{C})$ называется *канонической*, елси для любой внутренней (относительно $\mathcal{T}$) $(d-2)$-грани $F \in \mathcal{C}$ кручение $\Delta_s(F)$ равно нулю.

Лемма 3.1. *Всякий* d*-мерный полиэдр* $P \subset \mathbb{E}^d$ *обладает свойством* строгой выпуклости *(в смысле теории многогранников), то есть любые три различные точки его границы, лежащие на одной прямой, принадлежат некоторой его собственной грани.*

Доказательство. Обозначим гиперграни полиэдра P через $H_1, H_2, \dots, H_n$ и содержащие их опорные гиперплоскости через $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_n$. Полупространства, ограниченные этими гиперплоскостями и содержащие P, обозначим $\mathcal{H}_i^+$. Докажем лемму индукцией по n.

При $n = 1$ полиэдр P представляет собой замкнутое полупространство $\mathcal{H}_1^+$. Любые три точки границы принадлежат собственной грани $\mathcal{H}_1$.

Пусть лемма доказана для любого количества гиперграней H_i от 1 до $n-1$, докажем её для n. Тогда $P = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathcal{H}_i^+$. Обозначим полиэдр, заданный всеми теми же гиперплоскостями кроме $\mathcal{H}_n$, как P_{n-1}. Тогда $P = P_{n-1} \bigcap \mathcal{H}_n^+$. По предположению индукции, для P_{n-1} свойство строгой выпуклости выполнено.

Определение 3.11. *Относительной внутренностью* $relint\, S$ множества $S \subset \mathbb{E}^d$ называется внутренность S в аффинной оболочке $\mathrm{aff}\,(S)$ (см. [15]).

Обозначим три различные точки на границе P, лежащие на одной прямой, через A, B, C. Для определённости, будем считать, что B принадлежит отрезку AC. Докажем, что найдётся собственная грань полиэдра P, которой принадлежат все эти три точки.

Если хотя бы две из точек A, B и C принадлежат $\mathcal{H}_n$, то весь отрезок AC принадлежит пересечению $P \bigcap \mathcal{H}_n$, то есть грани H_n.

Если, напротив, ни одна из точек A, B и C не принадлежит $relint\, H_n$, то они все принадлежат границе ∂P_{n-1} полиэдра P_{n-1}. Тогда, по предположению индукции, они принадлежат некоторой собственной грани F в P_{n-1}. Следовательно, эти точки лежат в непустой грани $F \bigcap \mathcal{H}_n^+$ полиэдра P.

Предположим, что предыдущие варианты расположения точек не выполняются для A, B и C. Значит, одна из них принадлежат $relint\, H_n$, а две другие принадлежат $\partial P \setminus H_n$.

Если гипергрань H_n содержит хотя бы ещё одну точку отрезка AC, помимо A, B, C, то $\mathcal{H}_n$ содержит весь отрезок. Значит и H_n содержит весь отрезок AC, что противоречит предположению.

Иначе, H_n пересекается с AC ровно по одной точке. Очевидно, это не может быть внутренняя точка B отрезка, так как иначе точки A и C из P лежали бы по обе стороны от опорной гиперплоскости $\mathcal{H}_n$. Не умаляя общности, $AC \bigcap H_n = A$.

Рассмотрим опорную гиперплоскость $\mathcal{H}$ к P, проходящую через точку B. Такая существует, так как B принадлежит какой-то грани полиэдра. Тогда если $\mathcal{H}$ пересекает отрезок AC трансверсально, то точки A и C полиэдра лежат по разные стороны от опорной гиперплоскости, что невозможно. Иначе $\mathcal{H}$ содержит отрезок AC и содержит внутреннюю точку A гиперграни H_n, чего также не может быть. Противоречие.

Значит последний вариант расположения точек A, B, C невозможен. Для всех остальных вариантов расположения показано, что точки A, B, C принадлежат некоторой собственной грани в P. □

Лемма 3.2. *Пусть гиперребро F разбиения $\mathcal{T} \subset \mathbb{E}^d$ примитивно и принадлежит гиперграням $H_1, H_2, H_3 \in \mathcal{T}$. Пусть $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}'$ — два подкомплекса в $\mathcal{T}$, для каждого из которых F является внутренним гиперребром (см. определение 3.10), и s, s' — канонические нормировки этих подкомплексов. Тогда для любых индексов $i, j : 1 \leqslant i, j \leqslant 3$ выполнено равенство:*

$$\frac{s'(H_i)}{s'(H_j)} = \frac{s(H_i)}{s(H_j)}$$

Доказательство. Если $i = j$, то равенство очевидно. Иначе, не умаляя общности, будем считать $i = 1, j = 2$.

По определению, для канонических нормировок s и s' имеем:

$$s(H_1)\mathbf{n}_1 + s(H_2)\mathbf{n}_2 + s(H_3)\mathbf{n}_3 = s'(H_1)\mathbf{n}_1 + s'(H_2)\mathbf{n}_2 + s'(H_3)\mathbf{n}_3 = 0$$

Из леммы 3.1 следует, что среди H_1, H_2, H_3 не может быть двух параллельных гиперграней. Иначе одна из трёх ячеек в $St_{\mathcal{T}}(F)$ содержала бы две параллельные гиперграни, содержащие общее гиперребро и, следовательно, лежащие в одной гиперплоскости. Для такой ячейки, очевидно, не выполняется свойство строгой выпуклости, которое, по лемме 3.1, должно выполняться для полиэдров нормального разбиения. Противоречие.

Таким образом, $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_3$ не параллельны. Значит, если $\mathbf{n}_2$ раскладывается по этим векторам, то единственным образом. В частности, коэффициент при $\mathbf{n}_1$ в таком разложении определён однозначно. С другой стороны, из выписанных равенств имеем:

$$\mathbf{n}_2 = -\frac{s(H_1)}{s(H_2)}\mathbf{n}_1 - \frac{s(H_3)}{s(H_2)}\mathbf{n}_3 = -\frac{s'(H_1)}{s'(H_2)}\mathbf{n}_1 - \frac{s'(H_3)}{s'(H_2)}\mathbf{n}_3$$

□

3.2 Функция приращения нормировки

Задача построения канонической нормировки разбиения $\mathcal{T}$ пространства $\mathbb{E}^d$ нетривиальна и не всегда имеет решение. Построение канонических нормировок подкомплексов в $\mathcal{T}$ позволяет разбить эту задачу на промежуточные.

Обратная задача нахождения общей нормировки комплекса по нормировкам нескольких подкомплексов $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_k$ также нетривиальна. Могут найтись ячейки, входящие в несколько из этих подкомплексов и которым соответствуют несколько различных нормировочных значений. В таком случае требуется согласование нормировок. Упростить согласование удаётся при помощи функций приращения нормировки.

Определение 3.12. Пусть задана положительная вещественная нормировка s ячеек комплекса $\mathcal{C}^n$. *Приращением* $g(C'; C)$ *нормировки* s от ячейки $C \in \mathcal{C}^n$ к ячейке $C' \in \mathcal{C}^n$ называется отношение $s(C')/s(C)$.

Очевидно, что приращение определено нормировкой однозначно.

Определение 3.13. Две k-мерные грани n-мерного комплекса будем называть *смежными* если они пересекаются друг с другом по грани размерности $(k-1)$.

Определение 3.14. Пусть задан некоторый n-мерный полиэдральный комплекс $\mathcal{C}^n$. *Цепочкой* в $\mathcal{C}^n$ называется произвольная последовательность (n-мерных) ячеек $C_1, \ldots, C_k$, в которой любые две последовательные ячейки смежны.

Цепочку ячеек $C_1, \ldots, C_k$ будем обозначать $[C_1, \ldots, C_k]$.

Определение 3.15. Пусть на цепочках $[C_1, C_2]$ длины 2 в $\mathcal{C}^n$ определена функция $g : [C_1, C_2] \to \mathbb{R}_+$ такая, что $g[C_1, C_2] \cdot g[C_2, C_1] = 1$. *Приращением* (мультипликативным) вдоль цепочки $[C_1, C_2, \ldots, C_k]$ называется продолжение функции g по естественному правилу

$$g(C_1; C_k) = g[C_1, C_2, \ldots, C_k] = g[C_1, C_2] g[C_2, C_3] \cdot \ldots \cdot g[C_{k-1}, C_k]$$

Легко видеть, что приращение от C_1 к C_k, определённое по приращениям на цепочках длины 2, вообще говоря, определено неоднозначно и зависит от цепочки, вдоль которой оно вычислено.

Если построенная таким образом функция приращений оказалась определена однозначно, то она корректно определяет нормировку ячеек из $\mathcal{C}^n$. Действительно, зафиксируем некоторую ячейку $C_0 \in \mathcal{C}^n$ и положительное значение s_0. Правило $s(C) = s_0 \cdot g(C_0; C) = s_0 \cdot g[C_0, C_1, \ldots, C]$ задаёт положительно определённую нормировку ячеек в $\mathcal{C}^n$ в случае, когда каждая ячейка из $\mathcal{C}^n$ соединена с каждой другой некоторой цепочкой. Если ячейки распадаются на несколько компонент относительно связности по цепочкам, то достаточно повторить такую процедуру отдельно для каждой компоненты.

Аналогично определяются аддитивные приращения для вектор-значных нормировок.

Определение 3.16. Пусть $k \in \mathbb{N}$, и на цепочках $[C_1, C_2]$ длины 2 в $\mathcal{C}^n$ определена функция $g : [C_1, C_2] \to \mathbb{R}^k$ такая, что $g[C_1, C_2] + g[C_2, C_1] = 0$. *Аддитивным приращением* вдоль цепочки $[C_1, C_2, \ldots, C_k]$ называется продолжение функции g по правилу

$$g(C_1; C_k) = g[C_1, C_2, \ldots, C_k] = g[C_1, C_2]g[C_2, C_3] + \ldots + g[C_{k-1}, C_k]$$

Нормировка s ячеек из $\mathcal{C}^n$ однозначно определяет аддитивное приращение от ячейки C_1 к ячейке C_k формулой $g(C_1; C_k) = s(C_k) - s(C_1)$.

Обратно, если функция (аддитивных) приращений задана приращениями на цепочках длины 2 однозначно, то она задаёт нормировку. Объяснение этого дословно повторяет объяснение для мультипликативного случая.

Определение 3.17. Цепочка $[C_1, C_2, \ldots, C_k]$ комплекса $\mathcal{C}^n \subset \mathbb{E}^d$ называется *k-примитивной* в некоторой k-мерной грани Q, если Q является гранью каждой из ячеек C_i.

Очевидно, что нормировка s однозначно определена если и только если приращения вдоль любых двух цепочек с общими началом и концом равны. Проверку этого свойства существенно упрощает теорема С. Рышкова и К. Рыбникова [36] о переносе свойства.

Авторы доказали свою теорему для более широкого класса комплексов, чем требует данная работа, поэтому далее следует упрощённая формулировка:

Теорема 3.3 (О переносе свойства [36]). *Пусть n-мерный комплекс $\mathcal{C}^n \subset \mathbb{E}^d$ является локально конечным нормальным разбиением $\mathbb{E}^d$, либо остовом размерности $n \geqslant 2$ такого разбиения. Пусть выбрана некоторая ячейка $C_0 \in \mathcal{C}^n$, фиксировано значение s_0 на ней ($s_0 \in \mathbb{R}_+$ или $\mathbb{R}^k$), и на всех цепочках длины 2 в $\mathcal{C}^n$ заданы приращения $g[C_1, C_2]$ (либо все из $\mathbb{R}_{>0}$, либо все из $\mathbb{R}^k$).*

Эти условия однозначно задают нормировку s комплекса $\mathcal{C}^n$ тогда и только тогда, когда приращение вдоль всех $(n-2)$-примитивных циклов в $\mathcal{C}^n$ равно 1 в случае мультипликативных приращений, либо равно 0 в случае аддитивных приращений.

3.3 Женератриса разбиения

Пусть $\mathcal{T}$ – разбиение пространства $\mathbb{E}^d$ на полиэдры. Напомним, что все рассматриваемые в работе разбиения предполагаются нормальными и локально-конечными разбиениями на полиэдры. В этом и последующих параграфах главы 3 считаем, что данное $\mathbb{E}^d$ вложено в $\mathbb{E}^{d+1}$ как гиперплоскость $\{x^{d+1} = 0\}$. Единичную нормаль $(0, \ldots, 0, -1)$ к $\mathbb{E}^d$ обозначим как $\mathbf{n}_0$.

Лемма 3.4. *Пусть заданы разбиение $\mathcal{T}$ пространства $\mathbb{E}^d$ и выпуклая, кусочно-линейная, линейная на каждой ячейке из $\mathcal{T}$ функция $G: \mathbb{E}^d \to \mathbb{R}$. Тогда надграфик $\operatorname{epi} G$ является квази-полиэдром (см. определение 1.5).*

Замечание. *Такая функция G также будет непрерывна на $\mathbb{E}^d$. Действительно, во внутренних точках ячеек G линейна и, следовательно, непрерывна. В произвольной точке x^* некоторой грани меньшей размерности, из-за локальной конечности, сходится конечное количество ячеек $C_1, \ldots, C_k$. Ячейки замнуты. Значение $G(x^*)$ в данной точке определено и является пределом $\lim\limits_{x \in C_i, x \to x^*} G(x)$ ограничения функции G на произвольную ячейку C_i. Отсюда очевидно следует непрерывность функции G в x^* и на всём пространстве $\mathbb{E}^d$.*

Доказательство. Занумеруем ячейки $C_1, C_2, \ldots$ разбиения $\mathcal{T}$. Очевидно, их не более, чем счётное количество, поэтому нумерация существует.

Обозначим через $G(C_i)$ график ограничения функции $G(x)$ на ячейку C_i. Так как, по условию, G линейна на полиэдре C_i, то $\operatorname{aff}(G(C_i))$ — d-мерная плоскость в $\mathbb{E}^{d+1}$, а $G(C_i)$ — d-мерный полиэдр в ней.

Гиперплоскость $\mathrm{aff}\,(G(C_i))$ разбивает пространство $\mathbb{E}^{d+1}$ на два полупространства. Замкнутое полупространство, ограниченное этой гиперплоскостью, и содержащее луч с направляющим вектором $\mathbf{e}_{d+1} = (0, \ldots, 0, 1)$, будем называть "верхним" полупространством и обозначать $\mathcal{H}^+(C_i)$. Дополнительное к нему открытое полупространство будем называть "нижним" и обозначать $H^-(C_i)$.

Выпуклость функции G эквивалентна выпуклости надграфика $epi\,G$. Из выпуклости G следует, что гиперплоскость $\mathrm{aff}\,(G(C_i))$ является опорной для $epi\,G$. Действительно, если найдётся точка L надграфика $epi\,G$, расположенная в $H^-(C_i)$, то легко построить точку $K \in epi\,G$ "над" $G(C_i)$ такую, что отрезок KL пересекает $G(C_i)$ и содержит точки из подграфика. Для выпуклого надграфика это невозможно.

Таким образом, $\mathcal{H}^+(C_i)$ содержит $epi\,G$. Более того, над ячейкой C_i они совпадают. Следовательно, $epi\,G = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^+(C_i)$.

Рассмотрим произвольный выпуклый многогранник $M \subset \mathbb{E}^{d+1}$. Покажем, что его пересечение с $epi\,G$ также является выпуклым многогранником. Рассмотрим ортогональную проекцию M в $\mathbb{E}^{d+1}$. Эта проекция является выпуклым многогранником в $\mathbb{E}^d$. Из локальной конечности $\mathcal{T}$ следует, что данная проекция пересекает лишь конечное число граней из $\mathcal{T}$. В частности, пересекает лишь конечное количество ячеек из $\mathcal{T}$.

Обозначим данные ячейки как $P_1, \ldots, P_k$. Многогранник M не пересекает полиэдров вида $G(C_i)$ отличных от $G(P_j)$, $1 \leqslant j \leqslant k$, так как их проекции M и таких полиэдров на $\mathbb{E}^d$ не пересекаются.

Значит пересечение M с $epi\,G$ ограничено гиперплоскостями, содержащими гиперграни M, и гиперплоскостями $\mathrm{aff}\,(G(P_j))$ — всего конечным количеством гиперплоскостей. По определению, данные гиперплоскости задают полиэдр. Так как он содержится в M и ограничен, то является выпуклым многогранником. По определению, $epi\,G$ является квази-полиэдром. $\square$

Определение 3.18. *Граничным комплексом* n-мерного квази-полиэдра (полиэдра, многогранника) называется комплекс, образованный гранями размерности меньше n данного квази-полиэдра (полиэдра, многогранника).

Определение 3.19. Полиэдральный комплекс $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ в $\mathbb{E}^{d+1}$ называется *женератрисой* нормального разбиения $\mathcal{T}$ пространства $\mathbb{E}^d$ на полиэдры, если

1) существует выпуклая, кусочно-линейная, линейная на каждой ячейке из $\mathcal{T}$ функция $G: \mathbb{E}^d \to \mathbb{R}$, для надграфика $epi\, G$ которой $\mathcal{G}_\mathcal{T}$ является граничным комплексом;
2) грани комплекса $\mathcal{G}_\mathcal{T}$ взаимно однозначно переходят в грани той же размерности разбиения $\mathcal{T}$ при ортогональной проекции на $\mathbb{E}^d$.

Такая функция $G(x)$ также называется *женератрисой* разбиения $\mathcal{T}$.

Замечание. *Из условия 1), согласно лемме 3.4, следует, что надграфик $epi\, G$ является квази-полиэдром. В частности, для него определён граничный комплекс.*

Второе условие исключает ситуацию, когда гипергрань комплекса $\mathcal{G}_\mathcal{T}$ "составлена" из нескольких полиэдров вида $G(C_i)$, где C_i — ячейки разбиения $\mathcal{T}$.

Теорема 3.5. *Женератриса нормального разбиения $\mathcal{T}$ евклидова пространства $\mathbb{E}^d$ существует тогда и только тогда, когда существует каноническая нормировка данного разбиения.*

Доказательство. Пусть для $\mathcal{T}$ определена женератриса $\mathcal{G}_\mathcal{T}$. Докажем, что существует каноническая нормировка для $\mathcal{T}$.

Из определения женератрисы 3.19 следует, что нормали к ячейкам из $\mathcal{G}_\mathcal{T}$ не параллельны $\mathbb{E}^d$. Значит для каждой ячейки $P_i \in \mathcal{G}_\mathcal{T}$ найдётся нормаль $\mathbf{h}(P_i)$ с $(d+1)$-ой координатой равной -1.

Для произвольной гиперграни $P_i \bigcap P_j$ разбиения, где P_i, P_j — некоторые смежные ячейки из $\mathcal{T}$, определим нормировку

$$s(P_i \bigcap P_j) := |\mathbf{h}(P_i) - \mathbf{h}(P_j)|\,.$$

Такая нормировка является канонической, так как кручение Δ_s вокруг произвольного гиперребра F равно

$$(\mathbf{h}(P_2) - \mathbf{h}(P_1)) + (\mathbf{h}(P_3) - \mathbf{h}(P_2)) + \ldots + (\mathbf{h}(P_1) - \mathbf{h}(P_k)) = 0,$$

где $P_1, \ldots, P_k$ — это циклический обход ячеек вокруг гиперребра F.

Обратное утверждение теоремы, что из существования канонической нормировки следует существование женератрисы разбиения, менее тривиально. Оно следует из теоремы 3.8, доказательству которой посвящены параграфы 3.5 – 3.7 данной главы. $\square$

3.4 Согласованный подъём смежных ячеек

Определение 3.20. *Подъёмом* k-мерного полиэдра C из разбиения $\mathcal{T} \subset \mathbb{E}^d$ называется такой k-мерный полиэдр $\widetilde{C}$ в расширенном пространстве $\mathbb{E}^{d+1}$, что его ортогональная проекция на гиперплоскость $\mathbb{E}^d$ совпадает с C. Также подъёмом называется процедура построения такого полиэдра $\widetilde{C}$ по полиэдру C.

Под *подъёмом разбиения* мы будем подразумевать женератрису этого разбиения.

Определение 3.21. Если грань P полиэдрального комплекса $\mathcal{C} \subset \mathbb{E}^d$ содержит подгрань $Q \in \mathcal{C}$ (возможно, несобственную), то это отношение обозначается $Q \prec P$, а грани P и Q называются *инцидентными*.

Замечание. *Отношение $\prec$ является отношением частичного порядка (см. [15]).*

Из равенства размерностей подъёма $\widetilde{C}$ и его проекции следует, что $\operatorname{aff}\left(\widetilde{C}\right)$ не перпендикулярно данному $\mathbb{E}^d$. Отсюда вытекает, что при ортогональной проекции также сохраняется размерность произвольной l-грани $\widetilde{F} \prec \widetilde{C}$, и что существует соответствующая l-грань $F \prec C$, для которой $\widetilde{F}$ является подъёмом.

Таким образом, ортогональная проекция $\widetilde{C}$ на $C \subset \mathbb{E}^d$ сохраняет инцидентности граней полиэдра $\widetilde{C}$, сохраняя при этом порядок их включения.

Определение 3.22. Пусть F_1, F_2 — две пересекающиеся грани разбиения $\mathcal{T} \subset \mathbb{E}^d$. Подъёмы $\widetilde{F}_1, \widetilde{F}_2 \subset \mathbb{E}^{d+1}$ этих граней будем называть *согласованным* (друг с другом), если их пересечение $\widetilde{F}_1 \bigcap \widetilde{F}_2$ является подъёмом грани $F_1 \bigcap F_2$.

Лемма 3.6. *Если подъёмы $\widetilde{F}_1$ и $\widetilde{F}_2$ согласованы, то пересечение $\widetilde{F}_1 \bigcap \widetilde{F}_2$ является гранью каждого из них.*

Доказательство. Подъём $\widetilde{F}_1$ содержит некоторую грань $\widetilde{F}_{1,2}$, которая является подъёмом грани $F_1 \bigcap F_2 \prec F_1$. Аналогично, $\widetilde{F}_2$ содержит грань $\widetilde{F}_{2,1}$, которая является подъёмом грани $F_1 \bigcap F_2 \prec F_2$.

Пусть подъёмы $\widetilde{F}_1$ и $\widetilde{F}_2$ согласованы. Из биективности соответствующих ортогональных проекций на $\mathbb{E}^d$ следует, что $\widetilde{F}_1 \bigcap \widetilde{F}_2 = \widetilde{F}_{1,2} \bigcap \widetilde{F}_{2,1}$. Это пересечение является подмножеством в $\widetilde{F}_{1,2}$. Если оно является собственным подмножеством (то есть не совпадает с $\widetilde{F}_{1,2}$), то проекция пересечения $\widetilde{F}_{1,2} \bigcap \widetilde{F}_{2,1}$ на $\mathbb{E}^d$ является собственным подмножеством $F_1 \bigcap F_2$, что противоречит условию.

Следовательно, $\widetilde{F}_1 \bigcap \widetilde{F}_2 = \widetilde{F}_{1,2} \bigcap \widetilde{F}_{2,1} = \widetilde{F}_{1,2}$, то есть пересечение $\widetilde{F}_1 \bigcap \widetilde{F}_2$ является гранью $\widetilde{F}_{1,2}$ подъёма $\widetilde{F}_1$. Аналогично, $\widetilde{F}_1 \bigcap \widetilde{F}_2$ является гранью подъёма $\widetilde{F}_2$. $\square$

Лемма 3.7. *Пусть P_1, P_2 — две смежные (d-мерные) ячейки разбиения $\mathcal{T} \subset \mathbb{E}^d$, и вектор $\mathbf{n} \in \mathbb{E}^d$ — нормаль к их общей $(d-1)$-грани H. Пусть $\widetilde{P}_1 \subset \mathbb{E}^{d+1}$ — произвольный подъём ячейки P_1, и $\mathbf{n}_1 \in \mathbb{E}^{d+1}$ — нормаль к $\operatorname{aff}\left(\widetilde{P}_1\right)$. Тогда существует единственный подъём $\widetilde{P}_2$ ячейки P_2 согласованный с $\widetilde{P}_1$ и ортогональный вектору $\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}$.*

Доказательство. Обозначим через Pr_1 ограничение $\mathrm{Pr}\,|_{\operatorname{aff}(\widetilde{P}_1)} : \operatorname{aff}\left(\widetilde{P}_1\right) \to \mathbb{E}^d$ проекции $\mathrm{Pr} : \mathbb{E}^{d+1} \to \mathbb{E}^d$. Ядро отображения Pr_1 нулевое, значит Pr_1 биективно переводит k-мерные грани полиэдра $\widetilde{P}_1$ в k-мерные грани полиэдра P_1 для произвольного $0 \leqslant k \leqslant d$.

Обозначим через $\widetilde{H}$ прообраз $(d-1)$-грани H при проекции Pr_1. Покажем, что вектор $\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}$ ортогонален $\operatorname{aff}\left(\widetilde{H}\right)$.

Так как $\mathbf{n}_1 \perp \operatorname{aff}\left(\widetilde{P}_1\right) \supset \operatorname{aff}\left(\widetilde{H}\right)$, то $\mathbf{n}_1 \perp \operatorname{aff}\left(\widetilde{H}\right)$.

Вектор $\mathbf{n}_0 \in \mathbb{E}^{d+1}$ — нормаль к $\mathbb{E}^d$, значит $\ker \mathrm{Pr} = \langle \mathbf{n}_0 \rangle$. Так как $\mathrm{Pr}\left(\operatorname{aff}\left(\widetilde{H}\right)\right) = \operatorname{aff}(H)$, то $\operatorname{aff}\left(\widetilde{H}\right) \subset \operatorname{aff}(H) \times \langle \mathbf{n}_0 \rangle$. По условию $\mathbf{n} \perp \operatorname{aff}(H)$ и $\mathbf{n} \perp \mathbf{n}_0$ так как $\mathbf{n} \in \mathbb{E}^d \perp \mathbf{n}_0$. Следовательно $\mathbf{n} \perp \operatorname{aff}(H) \times \langle \mathbf{n}_0 \rangle$, откуда имеем $\mathbf{n} \perp \operatorname{aff}\left(\widetilde{H}\right)$.

Каждый из векторов $\mathbf{n}, \mathbf{n}_1$ ортогонален $\operatorname{aff}\left(\widetilde{H}\right)$, следовательно $\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}$ также ортогонален $\operatorname{aff}\left(\widetilde{H}\right)$.

Пусть A — произвольная точка подъёма $\widetilde{H}$, а Γ_2 — такая d-мерная плоскость, что содержит A и ортогональна вектору $\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}$. Так как $\operatorname{aff}\left(\widetilde{H}\right) \perp (\mathbf{n}_1 + \mathbf{n})$ и также содержит точку A, то $\operatorname{aff}\left(\widetilde{H}\right) \subset \Gamma_2$. Отсюда следует, что гиперплоскость Γ_2 не зависит от выбора точки A в $\widetilde{H}$ и однозначно определяется вектором нормали $\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}$.

Обозначим ограничение проекции Pr на Γ_2 как $\mathrm{Pr}_2 := \mathrm{Pr}\,|_{\Gamma_2} : \Gamma_2 \to \mathbb{E}^d$. Гиперплоскость Γ_2 не ортогональна $\mathbb{E}^d$, так как $(\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}) \not\parallel E^d$. Значит Pr_2 является невырожденным аффинным преобразованием. В частности, для него однозначно определено обратное аффинное преобразование $\mathrm{Pr}_2^{-1} : \mathbb{E}^d \to \Gamma_2$.

Очевидно, что $\mathrm{Pr}_2^{-1}(P_2)$ является подъёмом для P_2. Докажем, что он согласован с $\widetilde{P_1}$. По определению, это равносильно тому, что $\mathrm{Pr}_2^{-1}(P_2) \bigcap \widetilde{P_1} = \widetilde{H}$.

d-мерные гиперплоскости Γ_2 и $\mathrm{aff}\left(\widetilde{P}_1\right)$ содержат $(d-1)$-подпространство $\mathrm{aff}\left(\widetilde{H}\right)$. Также Γ_2 и $\mathrm{aff}\left(\widetilde{P}_1\right)$ не параллельны, так как не параллельны их нормали $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_1+\mathbf{n}$. Следовательно, аффинные подпространства $\Gamma_2 \bigcap \mathrm{aff}\left(\widetilde{P}_1\right)$ и $\mathrm{aff}\left(\widetilde{H}\right)$ совпадают.

Отсюда вытекает, что отображения Pr_1^{-1} и Pr_2^{-1} совпадают на $\mathrm{aff}\,(H)$. В частности, $\mathrm{Pr}_1^{-1}(H) = \mathrm{Pr}_2^{-1}(H) = \widetilde{H}$. Следовательно, $\widetilde{H}$ является гранью подъёма $\mathrm{Pr}_2^{-1}(P_2)$ и $\mathrm{Pr}_2^{-1}(P_2) \bigcap \widetilde{P_1} = \widetilde{H}$.

Доказано, что существует подъём ячейки P_2 согласованный с $\widetilde{P}_1$ и ортогональный вектору $\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}$. Однозначность такого подъёма следует из того, что гиперплоскость $\mathrm{aff}\left(\widetilde{P}_2\right)$ содержит произвольную точку $A \in \widetilde{H}$ и ортогональна $\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}$, следовательно совпадает с Γ_2. □

3.5 Алгоритм построения женератрисы

Для произвольных смежных ячеек $P_i, P_j \in \mathcal{T}$ через $\mathbf{n}_{i,j}$ будем обозначать единичную нормаль к гиперграни $P_i \bigcap P_j$, направленную от P_i к P_j.

Определение 3.23. Пусть для разбиения $\mathcal{T}$ пространства $\mathbb{E}^d$ существует каноническая нормировка s. Выберем произвольную ячейку $P_0 \in \mathcal{T}$. Определим набор d-мерных полиэдров $\mathcal{G}\,(\mathcal{T}, s, P_0)$ в $\mathbb{E}^{d+1}$ по следующим правилам:
1) Каждый полиэдр из $\mathcal{G}\,(\mathcal{T}, s, P_0)$ является подъёмом некоторой ячейки $P \in \mathcal{T}$ и занумерован при помощи некоторой цепочки $[P_0, P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}, P]$ (d-мерных) ячеек в $\mathcal{T}$. Такой полиэдр в $\mathcal{G}\,(\mathcal{T}, s, P_0)$ обозначается $L\,[P_0, P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}, P]$.

Полиэдры $L\,[P_0, P_{i_1}, \ldots, P_{i_m}]$ и $L\,[P_0, P_{j_1}, \ldots, P_{j_n}]$ считаются совпадающими, если они совпадают как точечные множества в $\mathbb{E}^{d+1}$. В частности, необходимое условие $P_{i_m} = P_{j_n}$.
2) Для каждого полиэдра $L\,[P_0, P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}, P]$ фиксирована нормаль к его

аффинной оболочке в $\mathbb{E}^{d+1}$. Эта нормаль обозначается $\mathbf{h}\left[P_0, P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}, P\right]$.
3) $L\left[P_0\right]$ совпадает с ячейкой P_0. Нормаль $\mathbf{h}\left[P_0\right]$ полагается равной $\mathbf{n}_0$.
4) Подъём $L\left[P_0, P_{i_1}, \ldots, P_{i_{k-1}}, P_{i_k}\right]$ ячейки P_{i_k} согласован с подъёмом $L\left[P_0, P_{i_1}, \ldots, P_{i_{k-1}}\right]$, и $\mathbf{h}\left[P_0, P_{i_1}, \ldots, P_{i_{k-1}}, P_{i_k}\right] = \mathbf{h}\left[P_0, P_{i_1}, \ldots, P_{i_{k-1}}\right] + s(P_{i_{k-1}} \bigcap P_{i_k}$
$\mathbf{n}_{i_{k-1}, i_k}$ для произвольной цепочки $\left[P_0, P_{i_1}, \ldots, P_{i_{k-1}}, P_{i_k}\right]$ в $\mathcal{T}$.

Теорема 3.8. *Пусть для нормального разбиения $\mathcal{T}$ пространства $\mathbb{E}^d$ на полиэдры существует каноническая нормировка s. Тогда для произвольной ячейки $P_0 \in \mathcal{T}$ набор полиэдров $\mathcal{G}\left(\mathcal{T}, s, P_0\right)$, заданный определением 3.23, является набор всех ячеек некоторой женератрисы разбиения $\mathcal{T}$.*

Доказательство этой теоремы представлено в данном, а также последующих параграфах 3.6 и 3.7. План доказательства следующий.

В лемме 3.11 параграфа 3.6 доказано, что проекция построенного набора полиэдров $\mathcal{G}\left(\mathcal{T}, s, P_0\right)$, как подмножества в $\mathbb{E}^{d+1}$, на гиперплоскость $\mathbb{E}^d$ однозначно и покрывает всю гиперплоскость.

Из этого следует, что множество $\mathcal{G}\left(\mathcal{T}, s, P_0\right)$ можно рассматривать как график некоторой непрерывной, кусочно-линейной, линейной на каждой ячейке из $\mathcal{T}$ функции $G(x)$ (лемма 3.13).

В лемме 3.17 параграфа 3.7 доказано, что функция $G(x)$ выпукла. Откуда, по лемме 3.4, надграфик $epi\, G$ является квази-полиэдром. В лемме 3.18 доказано, что построенный комплекс $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ является граничным комплексом для $epi\, G$, что завершает доказательство теоремы.

Лемма 3.9. *Все d-полиэдры из набора $\mathcal{G}\left(\mathcal{T}, s, P_0\right)$, являющиеся подъёмами одной и той же ячейки $P \in \mathcal{T}$, параллельны друг другу.*

Замечание. *Под параллельностью двух подмножеств M_1, M_2 евклидова пространства $\mathbb{E}^n$ здесь и далее понимается параллельность их аффинных оболочек* $\operatorname{aff}\left(M_1\right)$ *и* $\operatorname{aff}\left(M_2\right)$.

Аналогично, под ортогональностью подмножеств $M_1, M_2 \subset \mathbb{E}^n$ далее понимается ортогональность их аффинных оболочек: $\operatorname{aff}\left(M_1\right) \perp \operatorname{aff}\left(M_2\right)$.

Доказательство. Рассмотрим приращения нормали в пункте 4) определения набора $\mathcal{G}\left(\mathcal{T}, s, P_0\right)$ как аддитивные приращения на цепочках длины 2. Воспользуемся аддитивной версией теоремы 3.3, чтобы проверить, что приращения задают однозначную функцию $\mathbf{n}\left(P_i\right)$ нормали.

Достаточно проверить, что приращение вдоль любого $(d-2)$-примитивного цикла $\left[P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_{t+1}} = P_{i_1}\right]$ равно нулю. То есть проверить условие

$$\sum_{j=1}^{t} s\left(P_{i_j} \bigcap P_{i_{j+1}}\right) \mathbf{n}_{i_j, i_{j+1}} = \mathbf{0}.$$

Данный цикл $(d-2)$-примитивен, значит все его элементы содержат общую $(d-2)$-грань $F \prec \mathcal{T}$. Отметим, что приращение на произвольном участке вида $[P_i, P_j, P_i]$ в цепочке равно нулю. Отсюда очевидно, что полное приращение равно приращению при обходе вокруг F, умноженному на индекс цепочки относительно такого обхода. Индекс определяется как количество раз, которое была пройдена произвольная гипергрань $P_i \bigcap P_{i+1}$ данного цикла, при этом проходы в одном направлении обхода вокруг F считаем со знаком плюс, в обратном — со знаком минус.

Приращение при обходе вокруг F равно кручению нормировки s вокруг F и равно нулю по определению канонической нормировки. Значит полное приращение также равно нулю. Таким образом, функция $\mathbf{n}(P_i)$ определена однозначно, нормали всех подъёмов полиэдра P_i в $\mathcal{G}(\mathcal{T}, s, P_0)$ равны, а сами подъёмы — параллельны друг другу. $\square$

Следствие 3.10. *Два подъёма $\widetilde{P}, \widetilde{P'} \in \mathcal{G}(\mathcal{T}, s, P_0)$ одной и той же ячейки $P \in \mathcal{T}$ совпадают тогда и только тогда, когда имеют хотя бы одну общую точку.*

3.6 Ортогональная проекция множества $\mathcal{G}(\mathcal{T}, s, P_0)$

Два d-полиэдра из набора $\mathcal{G}(\mathcal{T}, s, P_0)$ будем называть *смежными*, если их можно представить в виде последовательных подъёмов $L\left[P_0, P_{i_1}, \ldots, P_{i_{k-1}}\right]$ и $L\left[P_0, P_{i_1}, \ldots, P_{i_{k-1}}, P_{i_k}\right]$ для некоторой цепочки $\left[P_0, P_{i_1}, \ldots, P_{i_{k-1}}, P_{i_k}\right]$ ячеек в $\mathcal{T}$.

Из определения 3.22 следует, что смежные d-полиэдры из $\mathcal{G}(\mathcal{T}, s, P_0)$ являются согласованными подъёмами и пересекаются по $(d-1)$-мерной грани.

Такое определение смежности d-полиэдров в $\mathcal{G}(\mathcal{T}, s, P_0)$ позволяет ввести на них структуру полиэдрального комплекса специального вида. Такие комплексы рассмотрены в работе [1] для случая, когда все d-полиэдры набора являются (выпуклыми ограниченными) многогранниками и, кроме того, каждый из них изометричен одному из конечного числа “эталонных” многогранников.

Лемма 3.11. *Ортогональная проекция $\mathcal{G}(\mathcal{T}, s, P_0)$ на $\mathbb{E}^d$ однозначна и покрывает всё $\mathbb{E}^d$.*

Доказательство. Выберем внутри каждой ячейки $P_k \in \mathcal{T}$ точку p_k. Пусть P_{k-1}, P_k — две смежные ячейки в $\mathcal{T}$, $\widetilde{P}_{k-1}, \widetilde{P}_k \in \mathcal{G}(\mathcal{T}, s, P_0)$ — их согласованные подъёмы, а $\widetilde{p}_{k-1} \in \widetilde{P}_{k-1}, \widetilde{p}_k \in \widetilde{P}_k$ — точки этих подъёмов, переходящие в p_{k-1} и p_k при ортогональной проекции на $\mathbb{E}^d$.

Убедимся, что вектор $\widetilde{p_{k-1}p_k} := \overrightarrow{\widetilde{p}_{k-1}\widetilde{p}_k}$ однозначно определён лишь выбором ячеек P_{k-1} и P_k. Действительно, если $\overline{P}_{k-1}, \overline{P}_k \in G(\mathcal{T}, s, P_0)$ — два других согласованных подъёма ячеек P_{k-1} и P_k, то по лемме 3.9, имеем $\widetilde{P}_{k-1} \parallel \overline{P}_{k-1}$, $\widetilde{P}_k \parallel \overline{P}_k$. Отсюда очевидно, что точечное множество $\overline{P}_{k-1} \bigcup \overline{P}_k$ в $\mathbb{E}^{d+1}$ является параллельным переносом точечного множества $\widetilde{P}_{k-1} \bigcup \widetilde{P}_k$ вдоль нормали $\mathbf{n}_0 \perp \mathbb{E}^d$. Следовательно, соответствующий вектор $\overline{p_{k-1}p_k}$ равен своему параллельному переносу $\widetilde{p_{k-1}p_k}$.

Таким образом, определены векторные приращения $\mathbf{v}\left[P_{k-1}, P_k\right] = \widetilde{p_{k-1}p_k}$ на парах смежных ячеек разбиения $\mathcal{T}$.

Рассмотрим цикл $\left[P_{i_{k+1}}, \ldots, P_{i_{k+m}} = P_{i_{k+1}}\right]$, примитивный в некоторой $(d-2)$-грани $F \prec \mathcal{T}$. Представим его как часть некоторой цепочки $\left[P_0, P_{i_1}, \ldots, P_{i_{k+m}}\right]$ в $\mathcal{T}$.

Обозначим через $\widetilde{P}_{i_{k+j}} := L\left[P_0, P_{i_1}, \ldots, P_{i_{k+1}}, \ldots, P_{i_{k+j}}\right], 1 \leqslant j \leqslant m$ соответствующие d-полиэдры из $\mathcal{G}(\mathcal{T}, s, P_0)$. По лемме 3.6, полиэдры $\widetilde{P}_{i_{k+j}}$ и $\widetilde{P}_{i_{k+j+1}}$ являются смежными и пересекаются по $(d-1)$-грани с проекцией $P_{i_{k+j}} \bigcap P_{i_{k+j+1}}$.

Обозначим через $\widetilde{F}$ грань полиэдра $\widetilde{P}_{i_{k+1}}$, которая соответствует грани $F \prec P_{i_{k+1}}$. Из примитивности цикла в грани F следует, что $(d-1)$-грань $P_{i_{k+1}} \bigcap P_{i_{k+2}} \prec P_{i_{k+1}}$ также содержит F как подгрань. Следовательно, $\widetilde{P}_{i_{k+1}} \bigcap \widetilde{P}_{i_{k+2}} \prec \widetilde{P}_{i_{k+1}}$ содержит $\widetilde{F}$ как подгрань. Отсюда следует, что и $\widetilde{P}_{i_{k+2}}$ содержит $\widetilde{F}$ как подгрань.

Рассуждая аналогично, получаем, что все полиэдры $\widetilde{P}_{i_{k+j}}$ содержат $\widetilde{F}$ как подгрань. В частности, $\widetilde{P}_{i_{k+j}}$ содержит $\widetilde{F}$. Тогда, по следствию 3.10, грани $\widetilde{P}_{i_{k+1}}$ и $\widetilde{P}_{i_{k+m}}$ совпадают. Следовательно, совпадают и соответствующие точки $\widetilde{p}_{i_1}$ и $\widetilde{p}_{i_m}$.

Приращение вдоль данного $(d-2)$-примитивного цикла $\left[P_{i_{k+1}}, \ldots, P_{i_{k+m}}\right]$ равно $\mathbf{v}\left[P_{i_{k+1}}, P_{i_{k+2}}\right] + \mathbf{v}\left[P_{i_{k+2}}, P_{i_{k+3}}\right] + \ldots + \mathbf{v}\left[P_{i_{k+m-1}}, P_{i_{k+m}}\right] = \overrightarrow{p_{i_{k+1}} \widetilde{p_{i_{k+2}}}} + \ldots + \overrightarrow{p_{i_{k+m-1}} \widetilde{p_{i_{k+m}}}} = \overrightarrow{\widetilde{p}_{i_{k+1}} \widetilde{p}_{i_{k+2}}} + \ldots + \overrightarrow{\widetilde{p}_{i_{k+m-1}} \widetilde{p}_{i_{k+m}}} = \overrightarrow{\widetilde{p}_{i_{k+1}} \widetilde{p}_{i_{k+m}}} = 0$.

Согласно теореме 3.3, данные приращения $v\left[P_i, P_j\right]$ на парах смежных ячеек P_i и P_j в $\mathcal{T}$ корректно задают вектор-функцию $v\left(P\right)$, определённую однозначно, с точностью до выбора значения на одной произвольной ячейке.

Зададим значение $v\left(P_0\right) = p_0$. Тогда $v\left(P_k\right) = v\left(P_0\right) + \mathbf{v}\left[P_0, \ldots, P_k\right] = p_0 + \overrightarrow{\widetilde{p}_0 \widetilde{p}_1} + \ldots + \overrightarrow{\widetilde{p}_{k-1} \widetilde{p}_k}$. Тут $\widetilde{p}_i$ — это точка с проекцией p_i, которая лежит в ячейке $\widetilde{P}_i \in \mathcal{G}(\mathcal{T}, s, P_0)$, поднятой вдоль цепочки $[P_0, \ldots, P_k]$, и $\widetilde{p}_0 = p_0$. Таким образом $v\left(P_k\right) = p_0 + \overrightarrow{p_0 \widetilde{p}_k} = \widetilde{p}_k \in \widetilde{P}_k$.

Таким образом, все подъёмы ячейки P_k, принадлежащие $\mathcal{G}(\mathcal{T}, s, P_0)$, содержат общую точку $v(P_k)$. Согласно предложению 3.10, все эти подъёмы совпадают и являются одной и той же ячейкой из $\mathcal{G}(\mathcal{T}, s, P_0)$. Отсюда, в частности, следует, что ортогональная проекция $\mathcal{G}(\mathcal{T}, s, P_0)$ на $\mathbb{E}^d$ покрывает всё это пространство.

Предположим, ортогональная проекция $\mathcal{G}(\mathcal{T}, s, P_0)$ на $\mathbb{E}^d$ не однозначна. Значит, найдётся точка $p \in \mathbb{E}^d$, у которой при этой проекции более одного прообраза. Из доказанного следует, что p не может быть внутренней точкой никакой ячейки $P_i \in \mathcal{T}$. Значит, p принадлежит некоторым различным ячейкам $P_{i_{k+1}}$ и $P_{i_{k+m}}$ в $\mathcal{T}$.

Легко видеть, что для пересекающихся по некоторой грани $F \ni p$ ячеек $P_{i_{k+1}}$ и $P_{i_{k+m}}$ найдётся соединяющая их, примитивная в F, цепочка $\left[P_{i_{k+1}}, \ldots, P_{i_{k+m}}\right]$.

Для произвольной ячейки $P_i \in \mathcal{T}$ обозначим через $\widetilde{P}_i$ её подъём в $\mathcal{G}(\mathcal{T}, s, P_0)$, через $\widetilde{p}$ — точку в $\widetilde{P}_{i_{k+1}}$, которая при ортогональной проекции на $\mathbb{E}^d$ переходит в p. Аналогично рассуждениям выше, получаем, что точка $\widetilde{p}$ принадлежит пересечению $\widetilde{P}_{i_{k+1}} \bigcap \widetilde{P}_{i_{k+2}}$, а значит и полиэдру $\widetilde{P}_{i_{k+2}}$. Аналогично, получаем, что $\widetilde{p}$ принадлежит $\widetilde{P}_{i_{k+m}}$.

Полиэдр $\widetilde{P}_{i_{k+m}}$ является подъёмом ячейки $P_{i_{k+m}} \in \mathcal{T}$, значит может содержать не более одного прообраза точки p при ортогональной проекции на $\mathbb{E}^d$. Значит, точка $\widetilde{p}$ является единственным таким прообразом в $\widetilde{P}_{i_{k+m}}$, что противоречит предположению, что прообразы p в $\widetilde{P}_{i_{k+1}}$ и в $\widetilde{P}_{i_{k+m}}$ различны. Значит, ортогональная проекция $\mathcal{G}(\mathcal{T}, s, P_0)$ на $\mathbb{E}^d$ однозначна. □

Следствие 3.12. *Множество d-полиэдров $\mathcal{G}(\mathcal{T}, s, P_0)$, вместе с множеством всех их граней, задаёт d-мерный полиэдральный комплекс в $\mathbb{E}^{d+1}$ по* *отношению включения граней как точечных множеств.*

Этот комплекс будем обозначать через $\mathcal{G}_{\mathcal{T},s,P_0}$ или просто $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$.

Определение 3.24. *Телом* полиэдрального комплекса $\mathcal{C}$ в евклидовом пространстве называется объединение всех граней этого комплекса. Тело комплекса $\mathcal{C}$ обозначается $|\mathcal{C}|$.

Лемма 3.13. *Тело комплекса $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ является графиком некоторой непрерывной кусочно-линейной, линейной на каждой ячейке из $\mathcal{T}$ функции $G : \mathbb{E}^d \to \mathbb{R}$.*

Доказательство. Так как проекция тела комплекса $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ однозначна и покрывает всё пространство $\mathbb{E}^d$, то существует однозначное обратное отображение G из $\mathbb{E}^d$ в $|\mathcal{G}_{\mathcal{T}}|$.

Проекция d-мерных ячеек из $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ в d-мерные ячейки из $\mathcal{T}$ — невырожденное линейное преобразование ранга d. Значит обратное преобразование также является невырожденным линейным преобразованием ранга d. То есть G линейна на каждой ячейке из $\mathcal{T}$.

Непрерывность во внутренних точках ячеек $\mathcal{T}$ следует из однозначности проекции и кусочной линейности. Непрерывность в произвольной другой точке p из $\mathbb{E}^d$ следует из того, что G линейно на каждой (замкнутой) ячейке P_i, содержащей p. Следовательно, ограничение $G|_{x\in P_i}$ функции G на каждую из этих (конечного количества) ячеек P_i, непрерывно в точке p. При этом значения всех ограничений $G|_{x\in P_i}$ в точке p совпадают в силу однозначности проекции. □

3.7 Выпуклость функции $G(x)$

Лемма 3.14. *Пусть P — произвольная ячейка разбиения $\mathcal{T}$, $[P_0, \ldots, P_k = P]$ — некоторая цепочка, соединяющая начальную ячейку P_0 комплекса $\mathcal{G}_{\mathcal{T},s,P_0}$ с P. Для любой пары точек $x_1, x_2 \in P$ выполнено*

$$G(x_1) - G(x_2) = (x_1 - x_2)^T \sum_{i=0}^{k-1} s\left(P_i \bigcap P_{i+1}\right) \mathbf{n}_{i,i+1}$$

Доказательство. По определению функции $G(x)$, точки комплекса $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ над ячейкой P имеют вид $(x, G(x))\,, x \in P$. По определению $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$, эти точки лежат в d-мерной плоскости с нормалью $\mathbf{n}_0 + \sum\limits_{i=0}^{k-1} s\left(P_i \bigcap P_{i+1}\right)\mathbf{n}_{i,i+1}$, где $\mathbf{n}_0 = (0,\ldots,0,-1)^T \in \mathbb{E}^{d+1}$, $\mathbf{n}_{i,i+1} \parallel \mathbb{E}^d$. Из ортогональности имеем:

$$0 = ((x_1, G(x_1)) - (x_2, G(x_2)))^T \cdot \left(\sum_{i=0}^{k-1} s\left(P_i \bigcap P_{i+1}\right)\mathbf{n}_{i,i+1} + \mathbf{n}_0\right) =$$

$$= (x_1 - x_2)^T \cdot \sum_{i=0}^{k-1} s\left(P_i \bigcap P_{i+1}\right)\mathbf{n}_{i,i+1} + (G(x_1) - G(x_2)) \cdot (-1).$$

При переносе слагаемого $(G(x_1) - G(x_2)) \cdot (-1)$ в другую часть равенства получается требуемое. $\square$

Следствие 3.15. *Пусть задана точка $x \in P \in \mathcal{T}$. Пусть также $[P_0, P_1, \ldots, P_k$ — произвольная цепочка, соединяющая начальную ячейку P_0 комплекса $\mathcal{G}_\mathcal{T} = \mathcal{G}_{\mathcal{T},s,P_0}$ с P, а точки $x_1, \ldots, x_k$ выбраны так, что x_i принадлежит гиперграни $P_{i-1} \bigcap P_i \in \mathcal{T}$. Тогда*

$$G(x) = x^T \sum_{i=0}^{k-1} s\left(P_i \bigcap P_{i+1}\right)\mathbf{n}_{i,i+1} - \sum_{i=0}^{k-1} x_{i+1}^T s\left(P_i \bigcap P_{i+1}\right)\mathbf{n}_{i,i+1}$$

Доказательство. По определению, P_0 лежит в гиперплоскости $x^{d+1} = 0$ в пространстве $\mathbb{E}^{d+1}$. Значит $G(x_1) = 0$. Тогда $G(x) = G(x) - G(x_1) = (G(x) - G(x_k)) + \sum\limits_{i=1}^{k-1} (G(x_{i+1}) - G(x_i))$. Подставим выражения для этих разностей из леммы 3.14 и приведём подобные. $\square$

Лемма 3.16. *Двугранный угол при произвольной $(d-1)$-грани надграфика $epi\, G$ меньше развёрнутого.*

Доказательство. Каждая ячейка $\widetilde{P} \in \mathcal{G}_\mathcal{T}$ задаёт разбиение $\mathbb{E}^{d+1}$ на d-мерную плоскость $\operatorname{aff}\left(\widetilde{P}\right)$ и два открытых полупространства, ограниченных этой гиперплоскостью. Ровно одно из этих двух полупространств содержит луч вида $p + \lambda(0,\ldots,0,1)^T, p \in \widetilde{P}$, так как, по определению подъёма, $\operatorname{aff}\left(\widetilde{P}\right)$ не перпендикулярно $\mathbb{E}^d = \left\{x^{d+1} = 0\right\}$. Назовём это (замкнутое) полупространство *верхним* относительно $\widetilde{P}$ и обозначим $\mathcal{H}^+(\widetilde{P})$.

Рассмотрим произвольный двугранный угол надграфика, образованный смежными подъёмами $\widetilde{P}, \widetilde{P'} \in \mathcal{G}_\mathcal{T}$ ячеек $P, P' \in \mathcal{T}$. Надграфик $epi\, G(x)$, по определению, это множество точек в $\mathbb{E}^{d+1}$, лежащих не ниже $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ (в смысле сравнения по $(d+1)$-ой координате). Отсюда следует, что двугранный угол в $epi\, G$ при $(d-1)$-грани $\widetilde{P} \bigcap \widetilde{P}'$ меньше развёрнутого тогда и только тогда, когда $\widetilde{P}' \setminus \widetilde{P}$ принадлежит открытому полупространству $\mathcal{H}^+(\widetilde{P}) \setminus \operatorname{aff}\left(\widetilde{P}\right)$.

Рассмотрим произвольный отрезок $x_0x_2 \subset \mathbb{E}^d$ такой, что $x_0 \in Int\,(P)$, $x_2 \in Int\,(P')$ и отрезок x_0x_2 пересекает гипергрань $P \bigcap P'$ в точке x_1. По лемме 3.14 имеем

$$G(x_1) - G(x_0) = (x_1 - x_0)^T(\mathbf{h}_P - \mathbf{n}_0).$$

Очевидно, что уравнение $y - G(x_0) = (x - x_0)^T(\mathbf{h}_P - \mathbf{n}_0)$ задаёт d-плоскость $\operatorname{aff}\left(\widetilde{P}\right)$. Значит для точки $(x_2, y_2) \in \operatorname{aff}\left(\widetilde{P}\right)$ имеем $y_2 - G(x_0) = (x_2 - x_0)^T(\mathbf{h}_P - \mathbf{n}_0)$. Вычитая из этого равенства предыдущее, имеем $y_2 - G(x_1) = (x_2 - x_1)^T(\mathbf{h}_P - \mathbf{n}_0)$.

Также из леммы 3.14 следует, что $G(x_2) - G(x_1) = (x_2 - x_1)^T(\mathbf{h}_P - \mathbf{n}_0 + s\,(P \bigcap P')\,\mathbf{n}')$, где $\mathbf{n}'$ — единичная нормаль к $P \bigcap P'$, направленная от P к P'. Следовательно, $G(x_2) = y_2 + (x_2 - x_1)^T s\,(P \bigcap P')\,\mathbf{n}'$.

Вектор $(x_2 - x_1)$ пересекает гипергрань $P \bigcap P' \in \mathcal{T}$ и направлен строго внутрь P', нормаль $\mathbf{n}'$ к $P \bigcap P'$ также направлена внутрь P', $s\,(P \bigcap P') > 0$. Значит, $(x_2 - x_1)^T s\,(P \bigcap P')\,\mathbf{n}' > 0$ и $G(x_2) > y_2$. Таким образом, точка $(x_2, G(x_2)) \in \widetilde{P}'$ лежит выше точки $(x_2, y_2) \in \operatorname{aff}\left(\widetilde{P}\right)$ и лежит в открытом верхнем полупространстве $\mathcal{H}^+(\widetilde{P}) \setminus \operatorname{aff}\left(\widetilde{P}\right)$.

Гиперплоскость $\operatorname{aff}\left(\widetilde{P}\right)$ содержит $(d-1)$-грань $\widetilde{P} \bigcap \widetilde{P}'$, но не содержит $\widetilde{P}'$. Значит, $\operatorname{aff}\left(\widetilde{P}\right)$ является опорной гиперплоскостью (в $\mathbb{E}^{d+1}$) для $\widetilde{P}'$. Так как точка $(x_2, G(x_2))$ из $\widetilde{P}'$ принадлежит открытому верхнему полупространству, то $\widetilde{P}' \setminus \widetilde{P}$ также принадлежит $\mathcal{H}^+(\widetilde{P}) \setminus \operatorname{aff}\left(\widetilde{P}\right)$. Следовательно, двугранный угол в $epi\, G$ при гиперребре $\widetilde{P} \bigcap \widetilde{P}'$ меньше развёрнутого. $\square$

Лемма 3.17. *Функция $G(x) : \mathbb{E}^d \to \mathbb{R}$, график которой совпадает с телом комплекса $\mathcal{G}_{\mathcal{T},s,P_0}$, является выпуклой.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную пару точек $x, y \in \mathbb{E}^d$. Докажем, что для любого малого $\varepsilon > 0$ в ε-окрестности точек x и y найдутся, соответственно, точки x' и y', которые лежат строго внутри некоторых ячеек разбиения $\mathcal{T}$, прямая $x'y'$ не пересекает $(d-2)$-остов $Sk^{d-2}(\mathcal{T})$ разбиения $\mathcal{T}$, а гиперграни пересекает не более чем по одной точке.

В $(\varepsilon/2)$-окрестностях точек x и y найдутся точки x''' и y''', не принадлежащие множеству $\mathcal{F}^{d-1}(\mathcal{T})$ гиперграней разбиения $\mathcal{T}$, так как $\mathcal{F}^{d-1}(\mathcal{T})$ является объединением множеств меры нуль в $\mathbb{E}^d$. Из локальной конечности $\mathcal{F}^{d-1}(\mathcal{T})$ следует, что для точек x''' и y''' существует такое $\delta < \varepsilon/2$, что δ-окрестности точек x''' и y''' не пересекают $\mathcal{F}^{d-1}(\mathcal{T})$, то есть состоят из внутренних точек ячеек.

Направления прямых (линейные части прямых) в $\mathbb{E}^d$ взаимно однозначно соответствуют точкам $(d-1)$-мерного проективного пространства $P\mathbb{R}^d$. Направления прямых, параллельных произвольной гиперплоскости $\Gamma \subset \mathbb{E}^d$, соответствуют некоторому $(d-2)$-мерному подпространству $P\mathbb{R}^{d-1} \subset P\mathbb{R}^d$.

В $(\delta/2)$-окрестностях точек x''' и y''' существуют такие точки x'' и y'', не принадлежащие $\mathcal{F}^{d-1}(\mathcal{T})$, что направление $x''y''$ не параллельно ни одной гиперграни разбиения $\mathcal{T}$. Это следует из того, что гиперграней счётное количество, каждая из них “запрещает” для $x''y''$ направления, соответствующие некоторому проективному подпространству $P\mathbb{R}^{d-1}$ в $P\mathbb{R}^d$. По теореме Бэра, объединение счётного числа таких подмножеств меры нуль в $P\mathbb{R}^d$ не покрывает никакое открытое множество в $P\mathbb{R}^d$. Значит любая окрестность направления $x'''y'''$ содержит направления, не параллельные гиперграням из $\mathcal{T}$.

Докажем, что в $(\delta/2)$-окрестностях точек x'' и y'' найдутся искомые точки x' и y'. Спроектируем все грани $(d-2)$-остова $Sk^{d-2}(\mathcal{T})$ вдоль направления $x''y''$ в дополнительное $(d-1)$-подпространство Γ (дополнительное к прямой $x''y''$ в $\mathbb{E}^d$). Грани остова перейдут в счётное число многогранников размерности не более $(d-2)$, то есть множеств меры нуль в Γ. Объединение этих множеств не покрывает $(\delta/2)$-окрестности точки из Γ, в которую проектируется прямая $x''y''$. Значит, найдётся параллельный перенос прямой $x''y''$ на вектор длины не более $(\delta/2)$, который не пересекает $Sk^{d-2}(\mathcal{T})$. Образы точек x'' и y'' при этом переносе примем в качестве точек x' и y'.

Расстояние xx' не превосходит $xx'''+x'''x''+x''x' < (\varepsilon/2)+(\delta/2)+(\delta/2) < \varepsilon$, то есть x' лежит в ε-окрестности точки x. Аналогично, расстояние $x'''x' < \delta$ и, по выбору величины δ, точка x' не принадлежит $\mathcal{F}^{d-1}$. Аналогично $yy' < \varepsilon$ и y' не принадлежит $\mathcal{F}^{d-1}$. По выбору, $x'y' || x''y''$ и не параллельны гиперграням из $\mathcal{T}$. Кроме того, по выбору, прямая $x'y'$ не пересекает остов $Sk^{d-2}(\mathcal{T})$.

Таким образом, точки x' и y' — искомые.

Рассмотрим двумерную плоскость $\pi \in \mathbb{E}^{d+1}$, которая содержит прямую $x'y'$ и ортогональна $\mathbb{E}^d$. Для любой точки z прямой $x'y'$, соответствующая точка графика $(z, G(z))$ функции $G(x)$ также принадлежит π. По построению, π пересекает только d и $(d-1)$-мерные грани $\mathcal{T}$, причём $(d-1)$-мерные — только в одной точке. Отсюда следует, что то же самое верно и для пересечения π с $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$.

Множество M называется *локально выпуклым* в точке x, если найдётся такое открытое множество $U \ni x$, что $M \bigcap U$ выпукло. Покажем, что надграфик $epi\, G|_{x'y'}$ функции $G(x)$, ограниченной на прямую $x'y'$, является локально выпуклым. Для внутренних точек надграфика и внутренних точек одномерных рёбер надграфика это очевидно.

Вершины $epi\, G|_{x'y'}$ — пересечение π с внутренностью $(d-1)$-мерных граней $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$. Согласно лемме 3.16, двугранный угол в $(d-1)$-гранях $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ меньше развёрнутого. Отсюда следует, что надграфик $epi\, G$ локально выпуклый во внутренних точках $(d-1)$-граней: достаточно рассмотреть шаровую окрестность соответствующей точки, не пересекающую других граней $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$. Таким образом $epi\, G|_{x'y'}$ в любой своей вершине является пересечением локально выпуклого в этой точке $epi\, G$ и выпуклой двумерной плоскости. Отсюда $epi\, G|_{x'y'}$ также является локально выпуклым в вершинах, а значит и во всех своих точках.

Воспользуемся теоремой Бёрдона [2, Теорема 7.5.1] о том, что замкнутое линейно-связное локально выпуклое подмножество двумерной плоскости является выпуклым. Из теоремы следует, что $epi\, G|_{x'y'}$ выпуклый. Значит ему принадлежит весь отрезок соединяющий $(x', G(x'))$ и $(y', G(y'))$. Значит этот отрезок также принадлежит надграфику $epi\, G$.

Так как G непрерывна, а точки x', y' можно выбрать сколь угодно близко к x, y, то отрезок, соединяющий $(x, G(x))$ и $(y, G(y))$, также принадлежит $epi\, G$. Так как выбор x, y в $epi\, G$ был произволен, то функция $G(x)$ выпукла. $\square$

Доказательство теоремы 3.8 завершает следующая лемма.

Лемма 3.18. *Надграфик $epi\, G$ является квази-полиэдром, и комплекс $\mathcal{G}_{\mathcal{T},s,P_0}$ является его граничным комплексом.*

Доказательство. Функция G линейна на ячейках $\mathcal{T}$. Так как, по доказанному выше, она выпукла, то по лемме 3.4, $epi\, G$ является квази-полиэдром.

Рассмотрим произвольную d-мерную ячейку в $\mathcal{G}_{\mathcal{T}} = \mathcal{G}_{\mathcal{T},s,P_0}$. Она имеет вид $G(P_i)$, для некоторой ячейки $P_i \in \mathcal{T}$. Из выпуклости G следует, что гипергрань $\operatorname{aff}(G(P_i))$ является опорной к $epi\, G$ в $\mathbb{E}^{d+1}$.

Докажем, что $epi\, G \bigcap \operatorname{aff}(G(P_i)) = G(P_i)$. Пусть $P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_k}$ — все смежные с P_i ячейки из $\mathcal{T}$. По лемме 3.16, точечное множество $G(P_{i_j}) \setminus G(P_i \bigcap P_{i_j})$ не пересекает $\operatorname{aff}(G(P_i))$. Опорная к $epi\, G$ гиперплоскость $\operatorname{aff}\big(G(P_{i_j})\big)$ пересекает $\operatorname{aff}(G(P_i))$ по $(d-1)$-мерному подпространству $\mathcal{L}_j$.

Подпространство $\mathcal{L}_j$ является опорной гиперплоскостью к $G(P_i)$ в d-мерном пространстве $\operatorname{aff}(G(P_i))$ и содержит его гипергрань $G(P_i \bigcap P_{i_j})$. Подпространства $\mathcal{L}_j$, построенные для всех ячеек $P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_k}$, ограничивают в $\operatorname{aff}(G(P_i))$ многогранник $G(P_i)$ (так как содержат все его гиперграни).

Все опорные гиперплоскости к $epi\, G$ ограничивают в $\operatorname{aff}(G(P_i))$ подмножество того, что ограничивают лишь опорные гиперплоскости вида $\operatorname{aff}\big(G(P_{i_j})\big)$. Следовательно, $\operatorname{aff}(G(P_i)) \bigcap epi\, G \subset G(P_i)$. Однако, по построению, $\operatorname{aff}(G(P_i)) \bigcap e$
$G(P_i)$.

Таким образом, $\operatorname{aff}(G(P_i)) \bigcap epi\, G = G(P_i)$. Следовательно, множество d-мерных ячеек комплекса $\mathcal{G}_{\mathcal{T}}$ совпадает с множеством d-мерных ячеек граничного комплекса $\partial\, epi\, G$. Данные комплексы вложены в $\mathbb{E}^{d+1}$ и все инцидентности их граней определяются пересечениями ячеек, то есть грани меньших размерностей и инцидентности граней этих комплексов также совпадают. □

Теорема 3.8 доказана.

Следствие 3.19. *Функция женератрисы $G(x)$ неотрицательна на $\mathbb{E}^d$.*

Доказательство. По доказанному, надграфик $epi\, G$ пересекает гиперплоскость $\operatorname{aff}(P_0) = \big\{x^{d+1} = 0\big\}$ по грани P_0. Остальные точки надграфика, в том числе, $\partial\, epi\, G = \mathcal{G}_{\mathcal{T}}$, лежат выше данной гиперплоскости. То есть значения $G(x)$ в точках $x \in \mathbb{E}^d \setminus P_0$ больше нуля, в точках $x \in P_0$ — равны нулю. □

3.8 Трансляционно инвариантная каноническая нормировка разбиения на параллелоэдры

Рассмотрим разбиение $\mathcal{T}_P$ евклидова пространства $\mathbb{E}^d$, соответствующее d-мерному параллелоэдру P.

Из третьего условия Минковского-Делоне-Венкова (см. параграф 1.1) следует, что в произвольном гиперребре $F \in \mathcal{T}_P$ сходятся 3 или 4 ячейки разбиения. Если в F сходятся 4 ячейки, то легко видеть, что F представляется в виде пересечения некоторых двух из них, то есть, по определению 1.7, является стандартной гранью разбиения $\mathcal{T}_P$. В [8] доказано, что стандартные грани разбиения на параллелоэдры центрально симметричны, и их центры являются центрами симметрии всего разбиения. Отсюда следует известное предложение:

Предложение 3.20. *Для произвольного гиперребра F разбиения $\mathcal{T}_P$ выполнено одно из двух условий:*
a) F является примитивным и принадлежит трём гиперграням разбиения;
b) F является стандартным и принадлежит четырём гиперграням H_1, H_2, H_3, H_4, для которых выполнено $H_1||H_3$ и $H_2||H_4$.

Определение 3.25. Пусть гиперграни H_1, H_2 принадлежат одной ячейке P_0 в $\mathcal{T}_P$ и смежны по гиперребру F. Обозначим через H_1' образ H_1 при симметрии относительно центра гиперграни H_2. Так как центры гиперграней являются центрами симметрии всего разбиения (см. [8]), то H_1' также является гипергранью в $\mathcal{T}_P$.

Пару гиперграней H_1 и H_1' будем называть *накрест лежащими* относительно H_2.

Отметим, что H_1' и H_2 также смежны и принадлежат параллелоэдру $P_0' = Sym_{c(H_2)}(P_0)$ данного разбиения, где $c(H_2)$ обозначает центр гиперграни H_2, а $Sym_{c(H_2)}$ — симметрию относительно этой точки.

Лемма 3.21. *Пусть задана каноническая нормировка s разбиения $\mathcal{T}_P$, и $[H_1, H_2, \ldots, H_6]$ — произвольный 6-пояс ячейки $P_0 \in \mathcal{T}_P$. Обозначим через H_0 третью гипергрань в $\mathcal{T}_P$, содержащую гиперребро $H_2 \bigcap H_3$, помимо гиперграней H_2 и H_3. Тогда*

1) *нормировки на антиподальных гипергранях из 6-пояска равны,*
2) *нормировки на накрест лежащих гипергранях H_1 и H_0 равны.*

Доказательство. Докажем сначала пункт 2. H_1 и H_0 — накрест лежащие гиперграни относительно H_2. Применим к разбиению $\mathcal{T}_P$ симметрию относительно $c(H_2)$. При этом гиперграни H_1 и H_0 поменяются местами, а сама гипергрань H_2 и разбиение $\mathcal{T}_P$ перейдут в себя. Нормировка s при этой симметрии перейдёт в некоторую нормировку s' разбиения $\mathcal{T}_P$, причём $s'(H) = s\left(Sym_{c(H_2)}\, H\right)$. Очевидно, нормировка s' также является канонической.

Из леммы 3.2 и симметрии имеем $\frac{s(H_1)}{s(H_2)} = \frac{s'(H_1)}{s'(H_2)} = \frac{s(H_0)}{s(H_2)}$. Значит $s(H_1) = s(H_0)$ и пункт 2 доказан. Согласно этому пункту также верно $s(H_4) = s(H_0)$. Значит $s(H_4) = s(H_1)$ и пункт 1 также доказан. □

Из предложения 3.20 и определения 3.9 канонической нормировки следует предложение:

Предложение 3.22. *Если гиперребро F разбиения $\mathcal{T}_P$ стандартно, то нормировка s четырёх содержащих его гиперграней $H_1||H_3$ и $H_2||H_4$ является канонической тогда и только тогда, когда выполняются равенства*

$$s(H_1) = s(H_3) > 0,\ s(H_2) = s(H_4) > 0$$

Определение 3.26. Каноническая нормировка s разбиения $\mathcal{T}_P$ пространства $\mathbb{E}^d$ называется *трансляционно инвариантной* тогда и только тогда, когда она сохраняется при параллельных переносах $\mathbb{E}^d$, сохраняющих разибение $\mathcal{T}_P$.

Доказательство следующей леммы было предложено А. Гарбером в личных обсуждениях.

Лемма 3.23. *Если для данного разбиения $\mathcal{T}_P$ существует некоторая каноническая нормировка s, то существует и трансляционно инвариантная каноническая нормировка данного разбиения.*

Доказательство. Выберем произвольный параллелоэдр P_0 данного разбиения. Пусть нормировки на какой-то паре его противоположных гиперграней H и H' не равны. Тогда все гиперрёбра в H стандартны, иначе есть хотя бы один 6-пояс, содержащий H и H', и согласно лемме 3.21, $s(H) = s(H')$, что неверно.

Заменим нормировки всех гиперграней в $\mathcal{T}_P$ параллельных H на $s(H)$. Легко видеть, что все такие гиперграни получаются из H параллельным переносом, сохраняющим разбиение $\mathcal{T}_P$. Значит указанная замена нормировки затронет лишь звёзды стандартных гиперрёбер.

Рассмотрим произвольное такое гиперребро F. По предложению 3.20 оно принадлежит четырём гиперграням $H_1||H_3$ и $H_2||H_4$. Не умаляя общности, H_2 и H_4 параллельны гиперграни H. По предложению 3.22, для канонической нормировки s до замены выполнено $s(H_1) = s(H_3)$, $s(H_2) = s(H_4)$. После замены нормировки гиперграней H_2 и H_4 равны $s(H)$ и также равны друг другу. Следовательно, кручение новой нормировки вокруг гиперребра F равно 0. Следовательно, новая нормировка осталась канонической.

Рассмотрим количество пар антиподальных гиперграней H и H' в ячейке P_0, нормировки которых не совпадают. Это количество конечно и уменьшается при описанной замене нормировки. Значит после конечного количества замен, это количество станет равно нулю.

Не умаляя общности, далее считаем, что нормировка s совпадает на антиподальных гипергранях в P_0.

Определим трансляционно инвариантную нормировку s' следующим образом. Для произвольной гиперграни $H \in \mathcal{T}_P$ рассмотрим параллельную ей гипергрань H_0 в P_0. Положим $s'(H) := s(H_0)$. Покажем, что s' также является канонической.

Из трансляционной инвариантности следует, что кручение $\Delta_{s'}(F')$ вокруг произвольного гиперребра из $\mathcal{T}_P$ равно кручению s' вокруг некоторого гиперребра $F \prec P_0$.

Если гиперребро F стандартно, то, как было указано выше, оно принадлежит некоторым четырём гиперграням $H_1||H_3$ и $H_2||H_4$. Из трансляционной инвариантности s' следует $s'(H_1) = s'(H_3)$ и $s'(H_2) = s'(H_4)$. Следовательно, $\Delta_{s'}(F) = 0$.

Если гиперребро F примитивно, то обозначим через H_2 и H_3 гиперграни P_0, содержащие F. Пусть $[H_1, H_2, \dots, H_6]$ — соответствующий этому гиперребру 6-пояс, H_0 — третья гипергрань из $\mathcal{T}_P$, содержащая F. По лемме 3.21 для нормировки s и накрест лежащих гиперграней H_0 и H_1 выполнено $s(H_1) = s(H_0)$. Из трансляционной инвариантности s' следует $s'(H_0) = s(H_1) = s(H_0)$, $s'(H_2) = s(H_2)$, $s'(H_3) = s(H_3)$. Кручение нормировки s вокруг F равно 0, слагаемые этого кручения в точности равны слагаемым кручения нормировки s' вокруг F. Значит $\Delta_{s'}(F) = \Delta_s(F) = 0$.

Таким образом, построенная нормировка s' — каноническая и трансляционно инвариантная. $\square$

3.9 Вычисление значений женератрисы Вороного

В этом и следующем параграфе считаем заданными разбиение $\mathcal{T}_P$ и его трансляционно инвариантную каноническую нормировку s.

Зафиксируем некоторую ячейку разбиения P_0. Пусть $\{P_1, P_2, \dots P_k\}$ — все ячейки из $\mathcal{T}_P$, смежные с P_0. Центр ячейки P_i обозначим $c(P_i)$. Очевидно, все фацетные вектора разбиения (см. определение 2.9) можно представить в виде $\mathbf{p}_i = c(P_0)c(P_i)$. Также обозначим $\mathbf{m}_i := s(P_0 \bigcap P_i)\mathbf{n}_{0,i}$. Через $P(\mathbf{p})$ будем обозначать параллельную копию параллелоэдра P с центром в точке $\mathbf{p}$.

Лемма 3.24. *Для произвольных индексов i, j выполнено равенство $\mathbf{p}_i^T\mathbf{m}_j = \mathbf{p}_j^T\mathbf{m}_i$.*

Доказательство. Вычислим значение $G(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)$ двумя способами.

Рассмотрим цепочку $[P_0, P(\mathbf{p}_1), P(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)]$. При параллельном переносе на вектор $\mathbf{p}_1$ ячейки P_0 и $P(\mathbf{p}_2)$ переходят, соответственно, в ячейки $P(\mathbf{p}_1)$ и $P(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)$. Гипергрань $P_0 \bigcap P(\mathbf{p}_2)$ при этом параллельном переносе переходит в гипергрань $P(\mathbf{p}_1) \bigcap P(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)$, значит нормали к этим гиперграням параллельны. Из трансляционной инвариантности нормировки следует, что нормировки этих гипеграней также равны.

Рассмотрим точки $x_1 = \frac{\mathbf{p}_1}{2}$, $x_2 = \mathbf{p}_1 + \frac{\mathbf{p}_2}{2}$ и $x = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$. Согласно следствию 3.15 имеем:

$$G(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^T(\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2) - \left(\frac{\mathbf{p}_1}{2}^T\mathbf{m}_1 + \left(\mathbf{p}_1 + \frac{\mathbf{p}_2}{2}\right)^T\mathbf{m}_2\right)$$

Аналогично для цепочки $[P_0, P(\mathbf{p}_2), P(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)]$ имеем $G(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^T(\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2) - \left(\frac{\mathbf{p}_2}{2}^T\mathbf{m}_2 + \left(\mathbf{p}_2 + \frac{\mathbf{p}_1}{2}\right)^T\mathbf{m}_1\right)$.

Вычтем два полученных равенства, приведём подобные и получим требуемое равенство. $\square$

Пусть $\mathcal{P} = (\mathbf{p}_1|\dots|\mathbf{p}_k)$ — это матрица $d \times k$, составленная из всех фацетных векторов параллелоэдра P_0, где i-й столбец представлен вектором $\mathbf{p}_i$.

Матрица $\mathcal{M} = (\mathbf{m}_1|\dots|\mathbf{m}_k)$ — матрица, составленная по тем же правилам из векторов $\mathbf{m}_i$.

Определение 3.23 задаёт в $\mathbb{E}^{d+1}$ набор d-мерных полиэдров $\mathcal{G}(\mathcal{T}_P, s, P_0)$, который по теореме 3.8 является набором d-мерных граней некоторой женератрисы $\mathcal{G}_P$ разбиения $\mathcal{T}_P$. Тело $|\mathcal{G}_P|$ этого комплекса является графиком непрерывной кусочно-линейной функции $G(x)$ (функции женератрисы, см. определение 3.19).

Лемма 3.25. *Для произвольных целых чисел $l_1, \dots, l_k$ и вектора $L = (l_1, \dots, l_k)$ выполнено:*

$$G\left(l_1\mathbf{p}_1 + \ldots + l_k\mathbf{p}_k\right) = \frac{1}{2}\left(l_1\mathbf{p}_1 + \ldots + l_k\mathbf{p}_k\right)^T\left(l_1\mathbf{m}_1 + \ldots + l_k\mathbf{m}_k\right) = \frac{1}{2}L\mathcal{P}^T\mathcal{M}L^T$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательные точки $x_1 = \frac{\mathbf{p}_1}{2}, x_2 = \mathbf{p}_1 + \frac{\mathbf{p}_1}{2}, \dots, x_{l_1} = (l_1 - 1)\mathbf{p}_1 + \frac{\mathbf{p}_1}{2}, x_{l_1+1} = l_1\mathbf{p}_1 + \frac{\mathbf{p}_2}{2}, \dots, x_{\sum l_i} = l_1\mathbf{p}_1 + \ldots + (l_k - 1)\mathbf{p}_k + \frac{\mathbf{p}_k}{2}$. Если некоторое l_i отрицательно, то рассматриваем слагаемое $l_i\mathbf{p}_i$ как $|l_i|(-\mathbf{p}_i)$, так как $(-\mathbf{p}_i)$ также является фасетным вектором для P.

Воспользуемся следствием 3.15. Первое равенство из доказываемой цепочки получается приведением подобных и использованием леммы 3.24. Второе равенство — матричная запись полученного выражения. □

Замечание. *Из следствия 3.15 напрямую вытекает, что вектор $(l_1\mathbf{m}_1 + \ldots + l_k\mathbf{m}_k) = \mathcal{M}L^T$ является градиентом G над ячейкой $P\left(l_1\mathbf{p}_1 + \ldots + l_k\mathbf{p}_k\right)$.*

Элегантное доказательство следующего предложения приведено в [21, Lemma 2]. Вектора t_i и q_j в обозначениях работы [21] соответствуют векторам $\mathbf{p}_i$ и $\mathbf{m}_j$ из диссертации.

Предложение 3.26. *Существует единственная симметричная невырожденная $d \times d$ матрица Q такая, что $\mathcal{M} = Q\mathcal{P}$.*

Следствие 3.27. *Пусть $\mathbf{p}$ — центр произвольной ячейки $P(\mathbf{p})$ разбиения $\mathcal{T}_P$. Тогда $G(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}\mathbf{p}^tQ\mathbf{p}$.*

Доказательство. Центр произвольного параллелоэдра разбиения представляется в виде некоторой целочисленной линейной комбинации $\mathbf{p} = l_1\mathbf{p}_1 +$

$\ldots + l_k\mathbf{p}_k = \mathcal{P}L^T$. По лемме 3.25 $G(\mathbf{p}) = G\left(l_1\mathbf{p}_1 + \ldots + l_k\mathbf{p}_k\right) = \frac{1}{2}L\mathcal{P}^T\mathcal{M}L^T$, что по предложению 3.26 равно $\frac{1}{2}\left(L\mathcal{P}^T\right)Q\mathcal{P}L^T = \frac{1}{2}\mathbf{p}^TQ\mathbf{p}$. □

Обозначим через $Q(x)$ квадратичную форму на $\mathbb{E}^d$, заданную симметричной матрицей Q: $Q(x) = \frac{1}{2}x^tQx$. Непосредственно из определения и следствия 3.27 следует

Предложение 3.28. *Значения $Q(x)$ и $G(x)$ на центрах параллелоэдров разбиения $\mathcal{T}_P$ совпадают.*

Лемма 3.29. *Форма $Q(x)$ положительно определена.*

Доказательство. Докажем сначала, что $Q(x)$ неотрицательно определена. Действительно, если для некоторой точки x^* выполнено $Q(x^*) < 0$, то существует не содержащая нуля шаровая окрестность $B_\delta(x^*)$, на точках которой $Q(x)$ также отрицательна. Значит $Q(x)$ отрицательна на всех точках конуса над $B_\delta(x^*)$ с вершиной в нуле. Этот конус содержит шар сколь угодно большого радиуса, а значит содержит некоторую точку $\mathbf{p}$ решётки $\Lambda^d(P)$. Тогда, с одной стороны, $Q(\mathbf{p}) < 0$, с другой $Q(\mathbf{p}) = G(\mathbf{p}) \geqslant 0$ по следствию 3.19. Противоречие. Значит $Q(x)$ неотрицательна определена. Кроме того, по предложению 3.26, матрица Q невырождена, значит $Q(x)$ положительно определена. □

Теорема 3.30. *График квадратичной формы $Q(x)$ — эллиптический параболоид $\Pi_P \subset \mathbb{E}^{d+1}$. Π_P вписан в женератрису $\mathcal{G}_P$ и касается её над всеми центрами ячеек разбиения $\mathcal{T}_P$.*

Доказательство. Утверждение леммы 3.29 эквивалентно тому, что Π_P является эллиптическим параболоидом.

Рассмотрим центр $\mathbf{p}$ произвольной ячейки $P(\mathbf{p}) \in \mathcal{T}_P$. $\mathbf{p} = l_1\mathbf{p}_1 + \ldots + l_k\mathbf{p}_k$ для некоторых целых коэффициентов l_i. По предложению 3.28, значения $Q(\mathbf{p})$ и $G(\mathbf{p})$ равны.

Согласно замечанию к лемме 3.25, градиент функции $G(x)$ над ячейкой $P(\mathbf{p})$ равен $l_1\mathbf{m}_1 + \ldots + l_k\mathbf{m}_k$. Из предложения 3.26 это выражение равно $l_1Q\mathbf{p}_1 + \ldots + l_kQ\mathbf{p}_k = Q\mathbf{p}$. Градиент $Q(x)$ равен Qx во всех точках. Значит градиенты функций $G(x)$ и $Q(x)$ в точке $\mathbf{p}$ параллельны. Учитывая равенство значений, графики этих функций касаются над точкой $\mathbf{p}$.

По лемме 3.29, квадратичная форма $Q(x)$ положительно определена, значит задаёт выпуклую функцию. Её график лежит в одном полупространстве относительно любой своей касательной гиперплоскости — в том числе, относительно аффинной оболочки произвольной ячейки из $\mathcal{G}_P$. Значит график формы $Q(x)$ вписан в $\mathcal{G}_P$. $\square$

3.10 Вписанный параболоид и аффинное преобразование

По теореме из линейной алгебры, существует невырожденное линейное преобразование $\mathcal{A}_d$, которое переводит положительно определённую квадратичную форму Q в стандартную квадратичную форму с единичной матрицей $I = diag\,(1, 1, \ldots, 1)$. Это означает, что квадратичной форме $Q(x)$ соответствует такая форма $Q_{\mathcal{A}}$, что для всех $x \in \mathbb{E}^d$ верно $Q_{\mathcal{A}}\left(\mathcal{A}_d x\right) = Q(x)$.

Докажем, что линейное преобразование $\mathcal{A}_d$, с точностью до дополнительных параллельных переносов, является искомым аффинным преобразованием, переводящим исходный параллелоэдр P в некоторый параллелоэдр Вороного.

Отображение $\mathcal{A}_d : \mathbb{E}^d \to \mathbb{E}^d$ продолжается до невырожденного линейного преобразования $\mathcal{A}_{d+1} : \mathbb{E}^{d+1} \to \mathbb{E}^{d+1}$ по правилу $\mathcal{A}_{d+1} : \binom{x}{x^{d+1}} \mapsto \binom{\mathcal{A}_d x}{x^{d+1}}$, для произвольных точек $x \in \mathbb{E}^d$ и $x^{d+1} \in \mathbb{R}$. Тогда $\mathcal{A}_d = \mathcal{A}_{d+1}|_{x^{d+1}=0}$.

Отображение $\mathcal{A}_d$ переводит разбиение $\mathcal{T}_P$ пространства $\mathbb{E}^d$ в разбиение $\mathcal{A}_d\mathcal{T}_P$, ячейки которого совмещаются каждая с каждой при помощи подходящего параллельного переноса. Значит многогранник $\mathcal{A}_d P$ также является параллелоэдром и $\mathcal{A}_d\mathcal{T}_P = \mathcal{T}_{\mathcal{A}_d P}$.

Лемма 3.31. *Отображение $\mathcal{A}_{d+1}$ переводит параболоид Π_P в стандартный параболоид $\Pi_I = \left\{ y = \left(y^1, \ldots, y^{d+1}\right)^T \mid y^{d+1} = \sum_{i=1}^{d} \left(y^i\right)^2 \right\}$, женератрису $\mathcal{G}_P$ — в женератрису $\mathcal{G}_{\mathcal{A}_d P}$ разбиения $\mathcal{T}_{\mathcal{A}_d P}$. При этом Π_I вписан в $\mathcal{G}_{\mathcal{A}_d P}$, а проекции точек касания суть центры параллелоэдров разбиения $\mathcal{T}_{\mathcal{A}_d P}$.*

Доказательство. По определению $\mathcal{A}_{d+1}\binom{x}{Q(x)} = \binom{\mathcal{A}_d x}{Q(x)} = \binom{\mathcal{A}_d x}{Q_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}_d x)}$. Значит $\mathcal{A}_{d+1}\Pi_P \subset \Pi_I = \left\{ \binom{y}{Q_{\mathcal{A}}(y)} \mid y \in \mathbb{E}^d \right\}$. Так как $\mathcal{A}_d$ невырождено, то для произвольного y найдётся прообраз x. Значит $\mathcal{A}_{d+1}\Pi_P = \Pi_I$. Из определения следует, что $\mathcal{A}_{d+1}$ переводит проекции фигур на $\mathbb{E}^d$ в проекции образов этих фигур на $\mathbb{E}^d$. Отсюда следуют остальные утверждения леммы. $\square$

Лемма 3.32. *Разбиение $\mathcal{T}_{\mathcal{A}_d P}$ является разбиением на параллелоэдры Вороного.*

Доказательство. Для стандартного параболоида Π_I рассмотрим фокус F и директрису D: точку $\left(0, \ldots, 0, \frac{1}{4}\right)^T \in \mathbb{E}^{d+1}$ и гиперплоскость $\left\{y^{d+1} = -\frac{1}{4}\right\}$ соответственно. Известный факт, что Π_I — множество точек равноудалённых от F и D.

Пусть точки T_1 и T_2 — точки касания гиперплоскостей H_1 и H_2 с Π_I, точка M — произвольная точка из $H_1 \bigcap H_2$. T_1'', T_2'', M'' — ортогональные проекции соответствующих точек на директрису, а T_1', T_2', M' — их ортогональные проекции на $\mathbb{E}^d = \left\{y^{d+1} = 0\right\}$.

По, так называемому, оптическому свойству параболоида, F и T_1'' симметричны относительно H_1, F и T_2'' симметричны относительно H_2. Так как $M \in H_1 \bigcap H_2$, то $MT_1'' = MF = MT_2''$. Отсюда, очевидно, $M''T_1'' = M''T_2''$. Из параллельности гиперплоскостей $\left\{y^{d+1} = -\frac{1}{4}\right\}$ и $\left\{y^{d+1} = 0\right\}$ следует, что и для проекций на $\mathbb{E}^d$ выполнено $M'T_1' = M'T_2'$. Значит, в силу произвольности выбора M, проекция $H_1 \bigcap H_2$ на $\mathbb{E}^d$ — это $(d-1)$-плоскость, равноудалённая от точек T_1' и T_2', то есть срединный перпендикуляр к отрезку $T_1'T_2'$.

Пусть T_1 и T_2 — точки касания произвольных двух ячеек $\widetilde{P}_1$ и $\widetilde{P}_2 \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}_d P}$ с Π_I. Очевидно, $\widetilde{P}_1$ принадлежит одной из двух полуплоскостей, на которые $H_1 \bigcap H_2$ разбивает H_1. Проекция этой полуплоскости на $\mathbb{E}^d$ — d-полуплоскость, ограниченная срединным перпендикуляром к отрезку $T_1'T_2'$: $\left\{x \in \mathbb{E}^d : \|x - T_1'\| \leqslant \|x - T_2'\|\right\}$.

Пусть точка T_1 фиксирована, а T_2 пробегает все остальные точки касания женератрисы с Π_I. Пересечение построенных полуплоскостей гиперплоскости H_1 равно самой грани $\widetilde{P}_1 \in \mathcal{G}_{\mathcal{A}_d P}$. Проекция данного пересечения, с одной стороны — это

$$\left\{x \in \mathbb{E}^d : \|x - T_1'\| \leqslant \|x - \mathbf{p}\|, \forall \mathbf{p} \in \Lambda^d\left(\mathcal{A}_d P\right)\right\}$$

— параллелоэдр Вороного для решётки $\Lambda^d\left(\mathcal{A}_d P\right)$. С другой стороны — это проекция грани женератрисы, то есть ячейка разбиения $\mathcal{T}_{\mathcal{A}_d P}$. $\square$

Теорема 3.33. *Гипотеза Вороного выполнена для некоторого параллелоэдра P тогда и только тогда, когда существует каноническая нормировка разбиения $\mathcal{T}_P$.*

Доказательство. Из существования канонической нормировки разбиения $\mathcal{T}_P$ следует существование трансляционно инвариантной канонической нормировки (лемма 3.23). Определение 3.23 по этой нормировке корректно задаёт женератрису (теорема 3.8 и следствие 3.12), в которую вписан график соответствующей положительно определённой квадратичной формы Q (из трансляционной инвариантности нормировки и по теореме 3.30). Аффинное преобразование, приводящее график этой формы к виду стандартного параболоида вращения, заданного единичной матрицей, переводит параллелоэдр P в параллелоэдр Вороного (лемма 3.32). В одну сторону теорема доказана.

Для доказательства теоремы в обратную сторону отметим, что для произвольного разбиения на параллелоэдры Вороного существует женератриса: достаточно поднять точки решётки центров $\Lambda^d(P_V)$ на стандартный параболоид Π_I и провести через них касательные плоскости к параболоиду. Эти касательные плоскости ограничивают некоторый $(d+1)$-полиэдр, описанный около Π_I.

Аналогично доказательству леммы 3.32 имеем, что проекция полученного полиэдра — то же самое разбиение на параллелоэдры Вороного, d-мерная граница полиэдра — женератриса разбиения. Значит если нашлось аффинное преобразование, переводящее параллелоэдр в параллелоэдр Вороного, то обратное аффинное преобразование даст женератрису исходного разбиения. Отсюда, согласно теореме 3.5, у исходного разбиения есть каноническая нормировка. □

3.11 Новое доказательство теоремы Житормирского

Лемма 3.34. *Для произвольного $(d-2)$-примитивного параллелоэдра P существует каноническая нормировка соответствующего разбиения $\mathcal{T}_P$.*

Доказательство. Пусть $d = 2$. В этом случае $(d-2)$-примитивными параллелоэдрами будут лишь центрально симметричные выпуклые шестиугольники. Согласно следствию 4.38 из следующего параграфа, существует каноническая нормировка s звезды произвольной вершины v.

Гиперграни звезды $St_{\mathcal{T}_P}(v)$ — это одномерные рёбра e_1, e_2, e_3. Каждому ребру разбиения, параллельному e_1, припишем нормировку $s(e_1)$, ребру параллельному e_2 — нормировку $s(e_2)$, ребру параллельному e_3 — $s(e_3)$. Очевидно, что все кручения в таком случае равны, с точностью до знака, кручению вокруг v, то есть равны 0. Значит построенная нормировка является канонической.

Далее считаем $d \geqslant 3$. По условию, данное разбиение $(d-2)$-примитивно. Для произвольного гиперребра $F \in \mathcal{T}_P$, согласно тому же следствию 4.38 (также следует из теоремы 4.42), существует каноническая нормировка s_F подкомплекса $St_{\mathcal{T}_P}(F)$. Эта нормировка задаёт приращения $g_F[H_i, H_j] = s_F(H_j)/s_F(H_i)$ на парах гиперграней из $\mathcal{T}_P$ смежных по F.

Рассмотрим (мультипликативные) приращения на упорядоченных парах смежных гиперграней H_i, H_j в $\mathcal{T}_P$. Пусть эти приращения заданы правилом $g[H_i, H_j] = g_{H_i \cap H_j}[H_i, H_j]$. Определение 3.15 задаёт по ним функцию приращений g на всех цепочках в $\mathcal{T}_P$. Покажем, что g задаёт некоторую каноническую нормировку гиперграней из $\mathcal{T}_P$.

Рассмотрим произвольный $(d-3)$-примитивный цикл $g[H_1, \ldots, H_n, H_1]$ в $(d-1)$-остове $Sk^{d-1}(\mathcal{T}_P)$. По теореме 4.42, для $St_{\mathcal{T}_P}(F^{d-3})$ существует каноническая нормировка s_l. По лемме 3.2, имеем $g[H_i, H_{i+1}] = g_{H_i \cap H_{i+1}}[H_i, H_{i+1}] = s_l(H_{i+1})/s_l(H_i)$ (полагаем $H_{n+1} := H_1$). Поэтому приращение g вдоль рассматриваемого $(d-3)$-примитивного цикла равно

$$g[H_1, \ldots, H_n, H_1] = \frac{s_l(H_2)}{s_l(H_1)} \frac{s_l(H_3)}{s_l(H_2)} \cdot \ldots \cdot \frac{s_l(H_1)}{s_l(H_n)} = 1$$

По теореме 3.3 о переносе свойства, функция приращения g задаёт некоторую нормировку s гиперграней из $\mathcal{T}_P$. По построению, для всякого гиперребра $F \in Sk^{d-1}(\mathcal{T}_P)$ нормировка s пропорциональна нормировке s_F. Отсюда для кручений нормировок имеем $\Delta_s(F) = k \cdot \Delta_{s_F}(F) = k \cdot 0 = 0$. То есть s — каноническая нормировка для $\mathcal{T}$. □

Следствие 3.35 (Теорема Житомирского). *Всякий $(d-2)$-примитивный параллелоэдр P аффинно эквивалентен некоторому параллелоэдру Вороного.*

Доказательство. По лемме 3.34 для разбиения $\mathcal{T}_P$ существует каноническая нормировка, значит по теореме 3.33 для P верна гипотеза Вороного. □

4 Тесные веера

4.1 Многогранные веера. Веера граней

Данная глава состоит из трёх частей. Первая часть (параграфы 4.1 – 4.5) посвящена новой конструкции тесного веера в $\mathbb{E}^d$. Тесные веера строятся на основе конструкции стандартно-симметричной грани разбиения, которая обобщает понятие стандратной грани разбиения на параллелоэдры (см. [8]). В результате этого исследования доказаны теорема 4.19 (параграф 4.4) о классификации трёхмерных тесных вееров и теорема 4.30 (параграф 4.5) о политопальности таких вееров.

Вторая часть данной главы (параграфы 4.6 – 4.7) посвящена доказательству теоремы 4.39, связывающей канонические нормировки разбиений со свойством политопальности веера.

В третьей части главы (параграф 4.8) доказана теорема 4.40 о том, что веера схождений в гранях разбиения на параллелоэдры являются тесными. Это позволяет применить результаты предыдущих параграфов главы к разбиениям на параллелоэдры.

Напомним, что в данной главе, и во всей работе, под полиэдром в $\mathbb{E}^d$ (см. определение 1.1) мы понимаем пересечение конечного числа замкнутых полупространств в $\mathbb{E}^d$. В частности, все полиэдры выпуклы. Частным случаем полиэдров являются полиэдральные конусы (см. определение 1.8).

Под многогранником в $\mathbb{E}^d$ мы понимаем ограниченный полиэдр. То есть, по определению, рассматриваемые в работе многогранники выпуклы и компактны.

Все рассматриваемые разбиения на полиэдры являются нормальными (грань-в-грань, см. определение 1.6) и локально-конечными (то есть любой шар в $\mathbb{E}^d$ пересекает не более, чем конечное количество граней такого разбиения).

Эти условия подразумеваются выполненными в формулировках всех утверждений данной главы, даже если это не указано явно.

Определение 4.1. *Конической оболочкой* (с вершиной $v \in \mathbb{E}^d$) множества $M \subset \mathbb{E}^d$ называется множество неотрицательных конечных линейных комбинаций $cone_v(M) = \left\{ v + \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{vp_i} |\ \alpha_i \geqslant 0, p_i \in M \right\}$.

Иными словами, коническая оболочка M является является объединением всех полиэдральных конусов вида $\{v+\alpha_1\overrightarrow{vp_1}+\ldots+\alpha_k\overrightarrow{vp_k}, \alpha_i \geqslant 0, p_i \in M\}$ (см. определение 1.8). В частности, отсюда следует, что коническая оболочка множества выпукла. Если множество M является многогранником, то $cone_v(M)$ — полиэдральный конус (см. [15]).

Определение 4.2. *Веером граней* $\mathcal{F}_{v,M}$ выпуклого d-мерного многогранника $M \subset \mathbb{E}^d$ называется набор конических оболочек с общей вершиной $v \in Int\,(M)$ всех собственных граней многогранника M:

$$\mathcal{F}_{v,M} = \{cone_v(F)|\ \text{ для всех собственных граней } F \in M\}\,.$$

Таким образом, веер граней, по определению 1.9, действительно является веером, то есть конечным набором конусов в евклидовом пространстве, которые все имеют общую грань и образуют полиэдральный комплекс. Веер граней является полным полиэдральным веером, в частности, является разбиением.

Веер в $\mathbb{E}^d$, который является веером граней некоторого многогранника, называется *политопальным* (polytopical).

Определение 4.3. Веер называется *заострённым*, если минимальная по включению грань этого веера является вершиной.

Легко видеть, что веер граней является полным заострённым веером.

Возникает естественное соответствие между множеством граней выпуклого многогранника M и множеством граней его веера граней $\mathcal{F}_{v,M}$: произвольная k-грань $F \prec M$ $(0 \leqslant k \leqslant d-1)$ соответствует $(k+1)$-мерному конусу $\widetilde{F} = cone_v(F) \prec \mathcal{F}_{v,M}$. Будем считать, что, по определению, пустая грань $\emptyset$ многогранника M соответствует вершине v данного веера, то есть $\widetilde{\emptyset} = v$.

Очевидно, что данное соответствие сохраняет инцидентности граней. В частности, непересекающиеся грани многогранника соответствуют конусам веера граней, общая грань которых — вершина v.

Легко видеть, что для всякого выпуклого многогранника M существует много различных вееров граней, зависящих от выбора вершины v внутри M. При этом не всякий даже полный веер в $\mathbb{E}^d$ является веером граней некоторого многогранника. Примеры полных неполитопальных вееров можно найти в [15, 26, 18].

Такие примеры существуют уже в размерности 3. В размерности 2 для произвольного полного заострённого веера легко построить порождающий многоугольник, откуда следует известное предложение:

Предложение 4.1. *Любой полный заострённый веер на плоскости политопален.*

4.2 Веера схождений

Определение 4.4. Пусть F — произвольная собственная грань d-мерного полиэдра $P \subset \mathbb{E}^d$. Рассмотрим все опорные к P гиперплоскости $\mathcal{H}_i, 1 \leqslant i \leqslant k$, которые содержат гиперграни из P инцидентные F. Обозначим через $\mathcal{H}_i^+$ замкнутые полупространства, ограниченные данными гиперплоскостями, которые содержат полиэдр P.

Пересечение $\bigcap\limits_{i=1}^{k} \mathcal{H}_i^+$ назовём *конусом опорным к P в грани F*. Будем обозначать его $cone_F(P)$.

В случае, если P имеет размерность меньше d, опорный конус $cone_F(P)$ определяется как опорный конус в подпространстве $\mathrm{aff}\,(P)$.

Отметим, что опорный конус к полиэдру ограничен набором гиперграней, проходящих через одну точку — произвольную внутреннюю точку грани F. Такое определение отличается от определения 1.8 полиэдрального конуса как множества неотрицательных линейных комбинаций фиксированного конечного набора векторов. Однако оба этих определения стандартны и эквивалентны (см. [15]).

Из определения следует, что произвольный опорный к P конус $cone_F(P)$ содержит P.

Определение 4.5. Будем говорить, что некоторое свойство *выполняется локально* в окрестности точки p евклидова пространства $\mathbb{E}^d$, если найдётся такое $\delta > 0$, что данное свойство выполняется в шаре $\mathcal{B}_\delta(p) \subset \mathbb{E}^d$ с центром p и радиусом δ, а также внутри любого шара с тем же центром и радиусом $\varepsilon, 0 < \varepsilon \leqslant \delta$.

Лемма 4.2. *Пусть F — произвольная собственная грань d-полиэдра $P \subset \mathbb{E}^d$. Тогда P и $cone_F(P)$ локально совпадают в окрестности произвольной внутренней точки $p \in relint\,F$.*

Доказательство. Согласно определению 4.5, необходимо показать, что для некоторого $\delta > 0$ и произвольного $\varepsilon : 0 < \varepsilon \leqslant \delta$, выполнено $P \bigcap \mathcal{B}_\varepsilon(p) = cone_F(P) \bigcap \mathcal{B}_\varepsilon(p)$.

По определению, полиэдр ограничен конечным числом гиперплоскостей в $\mathbb{E}^d$ (см. определение 1.1). Пусть $H_1, \ldots, H_n$ — все гиперграни полиэдра P, а $\mathcal{H}_i = \mathrm{aff}\,(H_i)$ их несущие гиперплоскости.

Для всякой гиперплоскости $\mathcal{H}_i$, не содержащей точку p, расстояние от p до $\mathcal{H}_i$ определено и положительно. Следовательно, существует такой положительный радиус r, что шар $\mathcal{B}_r(p)$ пересекает лишь те гиперплоскости $\mathcal{H}_i$, что содержат p. Соответствующие им гиперграни H_i, очевидно, также содержат точку p, а также всю грань F, для которой $p \in relint\, F$.

Пусть $H_1, \ldots, H_k$ — все гиперграни из P, которые содержат грань F. Произвольная гипергрань $H_i, 1 \leqslant i \leqslant k$, определяется пересечением своей гиперплоскости $\mathcal{H}_i$ с другими гиперплоскостями набора $\{\mathcal{H}_j\}$. Как было показано, гиперплоскости $\mathcal{H}_j$, не содержащие грани F, не пересекают шар $\mathcal{B}_r(p)$, так же как и произвольный шар $\mathcal{B}_\varepsilon(p), 0 < \varepsilon \leqslant r$.

Значит, внутри шара $\mathcal{B}_\varepsilon(p)$ полиэдр P ограничен теми же гиперплоскостями $\mathcal{H}_i$, что содержат F. То есть гиперплоскостями, которые задают $cone_F(P)$. Также, по определению, P и $cone_F(P)$ лежат в одних и тех же полупространствах $\mathcal{H}_i^+$, заданных этими гиперплоскостями. □

Напомним, что конусы $cone_F(P)$ и $cone_p(P)$ получены в результате совершенно разных конструкций: $cone_F(P)$ определён, как конус ограниченный некоторым набором опорных гиперплоскостей (общих с P), $cone_p(P)$ определён как множество неотрицательных линейных комбинаций векторов с началом в точке p и концом в грани P. Тем не менее, эти конусы оказываются совпадающими.

Лемма 4.3. *Конусы $cone_F(P)$ и $cone_p(P)$ совпадают для произвольной внутренней точки $p \in relint\, F$ грани F полиэдра P.*

Доказательство. Если грань F является вершиной полиэдра P, то F совпадает с p. По теореме о двойственном представлении полиэдральных конусов (см. [15]), конусы $cone_F(P)$ и $cone_p(P)$ можно представить в виде неотрицательной линейной комбинации направляющих векторов своих одномерных рёбер. Однако при $p = F$ их одномерные рёбра, очевидно, совпадают. Значит и конусы в этом случае совпадают.

Если размерность F больше 0, то все гиперграни, задающие $cone_F(P)$ содержат аффинную оболочку $\mathrm{aff}\,(F)$. Значит, $\mathrm{aff}\,(F)$ является минимальной по включению гранью в данном конусе и содержится во всякой его грани. Однако то же самое верно и для $cone_p(P)$, так как p внутренняя точка грани F, и подмножество $cone_p(F)$ совпадает со всем подпространством $\mathrm{aff}\,(F)$. Проекцией конусов в дополнительное к $\mathrm{aff}\,(F)$ пространство общий случай сводится к уже разобранному случаю, когда F является вершиной P. □

Из лемм 4.2 и 4.3 вытекает следствие:

Следствие 4.4. *Для произвольной внутренней точки $p \in relint\,F$, $F \prec P$, полиэдр P и конус $cone_p(P)$ локально совпадают в окрестности точки p.*

Определение 4.6. *Веером схождений* $\mathcal{F}_{v,\mathcal{T}}$ в вершине v нормального локально конечного разбиения $\mathcal{T}$ называется набор конусов следующего вида:

$$\mathcal{F}_{v,\mathcal{T}} = \{cone_v(F)|\ F \succ v, F \in \mathcal{T}\}$$

Лемма 4.5. *Веер схождений $\mathcal{F}_{v,\mathcal{T}}$ в вершине $v \in \mathcal{T}$ локально совпадает в окрестности точки v с исходным разбиением $\mathcal{T}$.*

Доказательство. Из следствия 4.4 вытекает, что для каждой грани $F \in \mathcal{T}$, которая содержит вершину v, найдётся шар $\mathcal{B}_{\varepsilon_F}(v)$, внутри которого F совпадает с $cone_v(F)$. Так как число граней F конечно, то среди радиусов ε_F существует минимальный ε^*. В шаре $\mathcal{B}_{\varepsilon^*}(v)$ все грани веера $\mathcal{F}_{v,\mathcal{T}}$ совпадают с соответствующими гранями разбиения $\mathcal{T}$. □

Замечание. *Из лемм 4.5 и 3.1 вытекает, что $\mathcal{F}_{v,\mathcal{T}}$ является заострённым веером.*

Аналогичная конструкция для произвольной грани $V \in \mathcal{T}$ определена, но неудобна: все грани опорного конуса $cone_V(F)$ содержат аффинное подпространство $\mathrm{aff}\,(V)$. Естественно профакторизовать всю конструкцию по подпространству $\mathrm{aff}\,(V)$.

Определение 4.7. Пусть заданы локально-конечное нормальное разбиение $\mathcal{T} \subset \mathbb{E}^d$ и n-мерная грань $V \in \mathcal{T}$. Рассмотрим произвольную внутреннюю точку $v \in relint\,V$ и подпространство S дополнительное к $\mathrm{aff}\,(V)$ в $\mathbb{E}^d$ и содержащее v.

Сечением разбиения $\mathcal{T}$ в грани V будем называть полиэдральный комплекс $\widehat{\mathcal{T}}(V,S) \ := \ \mathcal{T}\bigcap S = \{F\bigcap S \mid F\in\mathcal{T}, relint\, F\bigcap S\neq\emptyset\}$.

Из определения следует, что подпространство S пересекает грань V в единственной точке v, а любую k-грань, содержащую V, пересекает по выпуклому многограннику размерности $k-n$ с вершиной v. То есть, пересечение S с $\mathcal{T}$ является нормальным $(d-n)$-мерным разбиением подпространства S (см. [31]). Очевидно, что при переходе от $\mathcal{T}$ к $\widehat{\mathcal{T}}$ сохраняются инцидентности граней из $\mathcal{T}$, содержащих V.

Определение 4.8. *Реализацией веера схождений в грани V* в подпространстве S называется веер схождений $\mathcal{F}_{v,\widehat{\mathcal{T}}(S)}$ в вершине v сечения $\widehat{\mathcal{T}}(V,S)$.

Веером схождений $\mathcal{F}_{V,\mathcal{T}}$ в грани V будем называть множество всех реализаций веера схождений в сечениях разбиения $\mathcal{T}$ в грани V.

Лемма 4.6. *Любые две реализации $\mathcal{F}_{V,\mathcal{T}}(S_1)$ и $\mathcal{F}_{V,\mathcal{T}}(S_2)$ веера схождений в грани V в сечениях разбиения $\mathcal{T}$ соответствующими подпространствами S_1 и S_2 аффинно эквивалентны.*

Доказательство. Пусть S_1 и S_2 проходят через внутренние точки $v_1, v_2 \in relint\, V$. Из леммы 4.2 следует, что локально S_1 и S_2 (в окрестностях точек v_1 и v_2 соответственно) пересекают одни и те же гиперграни из $\mathcal{T}$ — гиперграни содержащие V. Все эти гиперграни содержат аффинное подпространство $\mathrm{aff}\,(V)$.

Следовательно, если подпространства S_1 и S_2 параллельны друг другу, то соответствующие сечения разбиения $\mathcal{T}$ локально являются параллельными переносами друг друга на вектор $\overrightarrow{v_1v_2}$ (или $-\overrightarrow{v_2v_1}$), который параллелен $\mathrm{aff}\,(V)$. То есть для параллельных S_1 и S_2 реализации $\mathcal{F}_{V,\mathcal{T}}(S_1)$ и $\mathcal{F}_{V,\mathcal{T}}(S_2)$ конгруэнтны и, в частности, аффинно эквивалентны.

Если S_1 и S_2 не параллельны, то рассмотрим сечение разбиения подпространством S_2' параллельным S_2 и проходящим через точку v_1. Тогда $\mathcal{F}_{V,\mathcal{T}}(S_1)$ переходит в $\mathcal{F}_{V,\mathcal{T}}(S_2')$ при проекции вдоль $\mathrm{aff}\,(V)$, а по доказанному, $\mathcal{F}_{V,\mathcal{T}}(S_2')$ конгруэнтно $\mathcal{F}_{V,\mathcal{T}}(S_2)$. □

Следствие 4.7. *Веер схождений в грани нормального разбиения определён однозначно с точностью до аффинной эквивалентности.*

Таким образом, локальные свойства разбиений, которые сохраняются при аффинных преобразованиях, можно изучать при помощи любой удобной реализации веера схождений в грани.

Лемма 4.8. *Свойство политопальности веера инвариантно относительно невырожденных аффинных преобразований пространства.*

Доказательство. Пусть два полных заострённых d-мерных веера $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ аффинно эквивалентны (относительно некоторого невырожденного аффинного преобразования φ).

Пусть один из этих вееров, не умаляя общности — веер $\mathcal{F}_1$, политопален. Значит, $\mathcal{F}_1$ представляется в виде веера граней некоторого выпуклого многогранника M. Но тогда $\mathcal{F}_2$ является веером граней многогранника $\varphi(M)$ и тоже политопален. □

4.3 Тесные веера, их редукция и разложимость.

Определение 4.9. Два полиэдра P_1 и P_2 в $\mathbb{E}^d$, имеющие общую грань F, называются *локально симметричными* F, если они локально симметричны относительно некоторой внутренней точки $p \in relint\, F$.

Согласно определению 4.5 локальных свойств, полиэдры P_1 и P_2 локально симметричны в точке p, если для некоторого $\delta > 0$ и произвольного $\varepsilon : 0 < \varepsilon \leqslant \delta$, P_1 и P_2 симметричны относительно p внутри шара $\mathcal{B}_\varepsilon(p)$. То есть если пересечения $P_1 \bigcap \mathcal{B}_\varepsilon(p)$ и $P_2 \bigcap \mathcal{B}_\varepsilon(p)$ симметричны относительно p.

Если P_1 и P_2 симметричны относительно p внутри шара $\mathcal{B}_\delta(p)$, то, очевидно, они симметричны относительно p и внутри любого меньшего шара с тем же центром. Отсюда вытекает следующее предложение. Оно упрощает проверку свойства локальной симметричности в грани.

Предложение 4.9. *Полиэдры P_1 и P_2 в $\mathbb{E}^d$ локально симметричны относительно точки p тогда и только тогда, когда найдётся шар с центром p, внутри которого P_1 и P_2 симметричны относительно p.*

Лемма 4.10. *Свойство локальной симметричности полиэдров P_1 и P_2 в грани F не зависит от выбора внутренней точки $p \in relint\, F$.*

Доказательство. Пусть P_1 и P_2 локально симметричны в некоторой точке $p \in relint\, F$. Согласно предложению 4.9, это равносильно тому, что найдётся шар $\mathcal{B}_\delta(p)$ с центром p, внутри которого P_1 и P_2 симметричны относительно p. Внутри этого шара выполнено $\mathrm{aff}\,(P_1) = \mathrm{aff}\,(P_2)$. Но тогда $\mathrm{aff}\,(P_1) = \mathrm{aff}\,(P_2)$ верно во всём пространстве.

Не умаляя общности можно считать, что P_1 и P_2 имеют полную размерность, иначе их можно рассмотреть в подпространстве $\mathrm{aff}\,(P_1) = \mathrm{aff}\,(P_2)$.

Рассмотрим произвольную другую точку $p_1 \in relint\, F$. Найдётся такой радиус $\gamma, 0 < \gamma \leqslant \delta$, что шары $\mathcal{B}_\gamma(p)$ и $\mathcal{B}_\gamma(p_1)$ пересекают те и только те грани из P_1 и P_2, которые содержат грань F.

Полиэдр P_1 внутри $\mathcal{B}_\gamma(p)$ ограничивают те же гиперплоскости, что и внутри $\mathcal{B}_\gamma(p_1)$ — гиперплоскости, ограничивающие опорный конус $cone_F(P_1)$. Все эти гиперплоскости содержат аффинное подпространство $\mathrm{aff}\,(F)$. Поэтому пересечения $P_1 \bigcap \mathcal{B}_\gamma(p)$ и $P_1 \bigcap \mathcal{B}_\gamma(p_1)$ совмещаются параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{pp_1}$.

Аналогично пересечения $P_2 \bigcap \mathcal{B}_\gamma(p)$ и $P_2 \bigcap \mathcal{B}_\gamma(p_1)$ совмещаются параллельным переносом на тот же вектор $\overrightarrow{pp_1}$.

Так как $P_1 \bigcap \mathcal{B}_\gamma(p)$ и $P_2 \bigcap \mathcal{B}_\gamma(p)$ симметричны относительно p, то результаты их параллельного переноса на вектор $\overrightarrow{pp_1}$ симметричны друг другу относительно точки p_1. То есть P_1 и P_2 симметричны относительно точки p_1 внутри шара $\mathcal{B}_\gamma(p_1)$. $\square$

Определение 4.10. Нормальное разбиение $\mathcal{T}$ пространства $\mathbb{E}^d$ называется *локально симметричным* в грани F, если оно локально симметрично в некоторой внутренней точке $p \in relint\, F$.

Согласно определению 4.5, локальная симметричность разбиения $\mathcal{T}$ в точке p означает, что для некоторого $\delta > 0$ и произвольного $\varepsilon : 0 < \varepsilon \leqslant \delta$ разбиение $\mathcal{T}$ симметрично в шаре $\mathcal{B}_\varepsilon(p)$.

Под симметричностью относительно p внутри шара $\mathcal{B}_\varepsilon(p)$ здесь понимается центральная симметричность набора $\mathcal{T} \bigcap \mathcal{B}_\varepsilon(p) = \{F \bigcap \mathcal{B}_\varepsilon(p) |\ F \in \mathcal{T}\}$.

Аналогично случаю локальной симметрии двух полиэдров, проверку локальной симметричности разбиения можно упростить:

Предложение 4.11. *Разбиение $\mathcal{T}$ локально симметрично относительно точки p тогда и только тогда, когда найдётся шар с центром в p, внутри которого $\mathcal{T}$ симметрично относительно p.*

Так как рассматриваемые разбиения локально конечны, то из леммы 4.10 для пар локально симметричных полиэдров вытекает аналогичное утверждение для разбиений.

Лемма 4.12. *Определение 4.10 корректно, то есть локальная симметричность нормального разбиения $\mathcal{T} \subset \mathbb{E}^d$ в грани F не зависит от выбора внутренней точки $p \in relint\, F$.*

Лемма 4.13. *Пусть полиэдры P_1 и P_2 в $\mathbb{E}^d$ локально симметричны в общей грани F, тогда $P_1 \bigcap P_2 = F$.*

Доказательство. По определению грани, для полиэдра P_1 существует такая опорная гиперплоскость $\alpha \in \mathbb{E}^d$, что $P_1 \bigcap \alpha = F$. Из следствия 4.4 вытекает, что для произвольной точки $p \in relint\, F$ найдётся шар $\mathcal{B}_\varepsilon(p)$, внутри которого P_1 симметрично P_2, а также $P_1 \bigcap \mathcal{B}_\varepsilon(p) = cone_p(P_1) \bigcap \mathcal{B}_\varepsilon(p)$.

Внутри данного шара гиперплоскость α является опорной для $cone_p(P_1)$. Конус $cone_p(P_1)$ и гиперплоскость α инвариантны относительно гомотетий с центром p и положительным коэффициентом. Следовательно, α является опорной гиперплоскостью для $cone_p(P_1)$ в любом шаре $\mathcal{B}_R(p)$, а значит и во всём пространстве.

По выбору ε, при центральной симметрии в точке p пересечение $P_1 \bigcap \mathcal{B}_\varepsilon(p)$ переходит в пересечение $P_2 \bigcap \mathcal{B}_\varepsilon(p)$. Гиперплоскость α при этой симметрии переходит в себя. Следовательно, α является опорной гиперплоскостью для P_2 в $\mathcal{B}_\varepsilon(p)$. Аналогично заключаем, что α является опорной гиперплоскостью для $cone_p(P_2)$.

Таким образом, $cone_p(P_1)$ и $cone_p(P_2)$ лежат в разных замкнутых полупространствах относительно α. Отсюда следует

$$P_1 \bigcap P_2 \subset (cone_p(P_1) \bigcap cone_p(P_2)) \subset \alpha.$$

Значит $P_1 \bigcap P_2 = (P_1 \bigcap P_2) \bigcap \alpha = (P_1 \bigcap \alpha) \bigcap (P_2 \bigcap \alpha) = F \bigcap F = F$. $\square$

Определение 4.11. Стандартную грань F разбиения $\mathcal{T}$ (см. определение 1.7) будем называть *стандартно симметричной* в $\mathcal{T}$, если:

1) любые две ячейки $C_i, C_j \in \mathcal{T}$, для которых $F = C_i \bigcap C_j$, локально симметричны в F;

2) разбиение $\mathcal{T}$ локально симметрично в F.

Замечание. *Отметим, что лишь второго условия в данном определении недостаточно. Если рассмотреть полный веер на плоскости, состоящий из шести симметричных в общей вершине плоских углов, то второе условие для вершины выполняется, а первое – нет.*

Определение 4.12. *Тесным веером* называется такой полный заострённый n-мерный веер $\mathcal{F}$ в $\mathbb{E}^n$, что произвольная его стандартная грань является также стандартно симметричной в $\mathcal{F}$.

Полные веера являются разбиениями пространства. Далее мы докажем несколько утверждений для разбиений более общего вида. Из определений легко выводится следующее предложение.

Предложение 4.14. *Следующие свойства отдельных полиэдров и разбиений на полиэдры сохраняются при невырожденных аффинных преобразованиях евклидова пространства:*

- *инцидентности полиэдров и их граней;*
- *свойство грани разбиения быть стандартной гранью;*
- *локальная симметричность полиэдров в грани;*
- *стандартная симметричность в стандартной грани разбиения;*
- *свойство веера быть тесным.*

Предложение 4.14 и следствие 4.7 вместе означают, что для вееров схождений в грани разбиения (см. определение 4.8) свойства из 4.14 выполняются (или не выполняются) одновременно для всех реализаций. То есть они являются свойствами веера схождений в грани, а не конкретной его реализации.

Лемма 4.15. *Пусть F — непустая общая подгрань граней F_1 и F_2 нормального разбиения $\mathcal{T} \subset \mathbb{E}^d$. Пусть этим граням соответствуют грани f_1 и f_2 веера схождений $\mathcal{F}_{F,\mathcal{T}}$ в грани F. Тогда F_1 и F_2 локально симметричны в некоторой грани $G \in \mathcal{T}$ тогда и только тогда, когда f_1 и f_2 локально симметричны в соответствующей грани $g \in \mathcal{F}_{F,\mathcal{T}}$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную реализацию веера схождений $\mathcal{F}_F = \mathcal{F}_{F,\mathcal{T}}$ как сечение разбиения $\mathcal{T}$ подпространством L дополнительным к $\mathrm{aff}\,(F)$ и проходящим через точку $f \in relint\,F$.

Отметим, что если грани F_1 и F_2 локально симметричны в грани G, то, по лемме 4.13, $F_1 \bigcap F_2 = G$. Следовательно, G в этом случае содержит F как подгрань, ей соответствует грань g веера схождений в f.

Если же грани f_1 и f_2 из $\mathcal{F}_F$ симметричны в грани g, то $g = f_1 \bigcap f_2$ и ей также соответствует грань $G \in \mathcal{T}$, $G = F_1 \bigcap F_2$, содержащая грань F.

По определению 4.6 веера схождений в вершине разбиения, $f_i = cone_f(F_i \bigcap L)$ и $g = cone_f(G \bigcap L)$.

Всякая опорная гиперплоскость $\mathcal{L}$ (в подпространстве aff (f_1)) к f_1, содержащая грань g, является сечением опорной гиперплоскости (в подпространстве aff (F_1)) $\mathcal{L} \oplus lin\,(F)$ к F_1, которая, очевидно, содержит грань G. Следовательно, для их опорных конусов выполнено $cone_g(f_1) = cone_G(F_1) \bigcap L$. Аналогично, $cone_g(f_2) = cone_G(F_2) \bigcap L$.

Обратно, всякая опорная гиперплоскость $\mathcal{H}$ к F_1 (в подпространстве aff (F_1)), содержащая грань G, имеет вид $\mathcal{L} \oplus lin\,(F)$, для опорной гиперплоскости $\mathcal{L}$ (в подпространстве aff (f_1)) к f_1, содержащей грань g. При этом $\mathcal{L} = \mathcal{H} \bigcap L$. Следовательно, $cone_G(F_1) = cone_g(f_1) \oplus lin\,(F)$. Аналогично, $cone_G(F_2) = cone_g(f_2) \oplus lin\,(F)$.

Пусть F_1 и F_2 локально симметричны в грани $G \in \mathcal{T}$. Докажем, что f_1 и f_2 локально симметричны в грани g веера $\mathcal{F}_F$.

Для произвольной внутренней точки $p \in relint\, g = relint\, G \bigcap L$ полиэдры F_1 и F_2 локально симметричны относительно p. Согласно следствию 4.4, в окрестности p полиэдры F_1 и F_2 совпадают с конусами $cone_p(F_1)$ и $cone_p(F_2)$ соответственно. Следовательно, эти конусы локально симметричны в точке p. Так как p является их вершиной, то $cone_p(F_1)$ и $cone_p(F_2)$ симметричны в точке p и в общем смысле.

Согласно лемме 4.3, выполнено $cone_p(F_i) = cone_G(F_i)$. Следовательно, $cone_g(f_1) = cone_G(F_1) \bigcap L = cone_p(F_1) \bigcap L$ симметрично в точке p (так как $p \in L$) пересечению $cone_p(F_2) \bigcap L = cone_G(F_2) \bigcap L = cone_g(f_2)$. Отсюда, $cone_p(f_1) = cone_g(f_1)$ симметричен в точке p конусу $cone_p(f_2) = cone_g(f_2)$. Следовательно, f_1 и f_2 локально симметричны в грани g.

Пусть f_1 и f_2 локально симметричны в грани g. По определению, это означает, что для произвольной точки $p \in relint\, g$ полиэдры f_1 и f_2 локально симметричны в p. Как было показано выше, отсюда вытекает, что $cone_p(f_1)$ симметричен $cone_p(f_2)$ в общем смысле. Следовательно, $cone_g(f_1) = cone_p(f_1)$ симметричен $cone_g(f_2) = cone_p(f_2)$ относительно точки p.

Так как линейное подпространство $lin\,(F)$ содержит точку 0 и симметрично относительно неё, то суммы $cone_g(f_1) \oplus lin\,(F)$ и $cone_g(f_2) \oplus lin\,(F)$ содержат точку $p = p \oplus 0$ и симметричны относительно неё. Как показано выше, эти суммы равны, соответственно, $cone_G(F_1)$ и $cone_G(F_2)$. Так как $p \in relint\, g \subset relint\, G$, то F_1 локально симметрично F_2 в грани G. □

Следующие две теоремы задают правила сведения тесных вееров к тесным веерам меньшей размерности.

Теорема 4.16. *Пусть задан тесный веер $\mathcal{F}$ и f — некоторая его грань, тогда веер схождений $\mathcal{F}_{f,\mathcal{F}}$ в грани f также является тесным.*

Доказательство. Пусть h — произвольная стандартная грань веера $\mathcal{F}_f = \mathcal{F}_{f,\mathcal{F}}$. Покажем, что h является стандартно-симметричной.

Пусть грани h соответствует грань H веера $\mathcal{F}$. Рассмотрим произвольную такую пару ячеек c_i, c_j из $\mathcal{F}_f$, что $c_i \bigcap c_j = h$. Тогда им соответствуют ячейки C_i, C_j из $\mathcal{F}$, для которых $C_i \bigcap C_j = H$.

По условию, $\mathcal{F}$ — тесный. Следовательно, C_i и C_j локально симметричны в H. Тогда, по лемме 4.15, c_i и c_j локально симметричны в h. Первое условие стандартной симметричности веера $\mathcal{F}_f$ доказано.

Кроме того, из определения тесного веера следует, что веер $\mathcal{F}$ локально симметричен в H. Следовательно, все ячейки из $\mathcal{F}$, содержащие H, разбиваются на пары локально симметричных в H. Значит, также по лемме 4.15, получаем, что все ячейки из $\mathcal{F}_f$ тоже разбиваются на пары локально симметричных в h.

Выберем произвольную точку $p \in relint\, h$. Тогда, по доказанному, все ячейки из $\mathcal{F}_f$, содержащие h, разбиваются на пары локально симметричных относительно точки p. Так как ячеек из $\mathcal{F}_f$, содержащих h, конечное количество, то найдётся шар $\mathcal{B}_\varepsilon(p)$, внутри которого $\mathcal{F}_f$ симметричен относительно p. Значит, веер $\mathcal{F}_f$ локально симметричен в грани h. Второе условие стандартной симметричности веера $\mathcal{F}_f$ также доказано. □

Определение 4.13. *Прямой суммой вееров* (см. [15]) $\mathcal{F}_1 \subset \mathbb{E}^{k_1}$ и $\mathcal{F}_2 \subset \mathbb{E}^{k_2}$ называется следующий набор конусов в $\mathbb{E}^{k_1} \times \mathbb{E}^{k_2}$:

$$\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2 := \left\{ C_1 \oplus C_2 \subset \mathbb{E}^{k_1} \times \mathbb{E}^{k_2} : C_1 \in \mathcal{F}_1, C_2 \in \mathcal{F}_2 \right\},$$

где C_1, C_2 — грани соответствующих вееров, а $\oplus$ — прямая сумма Минковского подмножеств евклидова пространства (см. определение 2.10).

Легко видеть, что прямая сумма полных заострённых вееров также будет полным заострённым веером.

Теорема 4.17. *Пусть задан тесный веер $\mathcal{F}$, который представляется в виде прямой суммы вееров $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2$. Тогда $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ — полные, заостроённые и тесные веера.*

Доказательство. Веера $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ должны быть полными, иначе прямая сумма не совпадает с $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2}$. Кроме того, грани суммарного веера равны сумме граней, значит вершина могла получиться только как сумма нульмерных вершин. Значит, слагаемые прямой суммы — заострённые веера.

Рассмотрим произвольную k_2-мерную ячейку C_2 веера $\mathcal{F}_2$. Конусы множества $\mathcal{L} = \{C_1 \oplus C_2 | \ C_1 \text{ — грань в } \mathcal{F}_1\}$ суть все конусы из веера $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2$, которые содержат k_2-грань $v_1 \oplus C_2$ (тут v_1 — вершина $\mathcal{F}_1$).

Произвольное трансверсальное сечение к этой грани, проведённое через её внутреннюю точку $v_1 \oplus p, p \in Int\,(C_2)$, локально является веером схождений в $v_1 \oplus C_2$ и аффинно-эквивалентно вееру $\mathcal{F}_1$.

С другой стороны, по теореме 4.16, веер схождений в грани $v_1 \oplus C_2$ тесного веера $\mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2$ также является тесным. Значит и веер $\mathcal{F}_1$ тесный, так как локальные симметрии в гранях сохраняются при аффинных преобразованиях. Аналогично, веер $\mathcal{F}_2$ также тесный. $\square$

Далее мы даём классификацию тесных вееров размерности 2.

Лемма 4.18. *Существует 2 различных комбинаторных типа тесных вееров в размерности 2: разбиение плоскости тремя лучами с общей вершиной и углами между ними меньше развёрнутого; разбиение плоскости двумя пересекающимися прямыми.*

Доказательство. Ячейки полных заострённых вееров размерности 2 — это плоские углы меньшие развёрнутого. Значит, плоский веер содержит не менее трёх углов.

Плоский веер с тремя углами (меньшими развёрнутого) является тесным, так как пересечение любых двух из этих углов — луч. Как легко проверить, два плоских угла веера всегда локально симметричны в луче пересечения.

Иначе веер содержит $k \geqslant 4$ углов. Обозначим эти углы $A_1, A_2, \ldots, A_k$, занумерованные против часовой стрелки. Тогда A_i для всякого $0 \leqslant i \leqslant k$, пересекается с A_{i-1} и A_{i+1} по лучу, с остальными углами — лишь по общей вершине. Так как веер тесный, то угол A_i локально симметричен каждому из углов $A_{i+2}, A_{i+3}, \ldots, A_{i-2}$ в общей вершине. Очевидно, это невозможно, если от A_{i+2} до A_{i-2} углов более одного, то есть при $k > 4$.

При $k = 4$ получаем, что A_1 локально симметричен A_3 в общей вершине. Значит, эти углы являются вертикальными и образованы пересечением двух прямых. $\square$

4.4 Комбинаторная классификация тесных вееров размерности 3.

В этом параграфе приводится доказательство классификации трёхмерных тесных вееров. Теорему 4.19 другим методом доказал А. Магазинов в [12][1]

Теорема 4.19. *Произвольный трёхмерный тесный веер комбинаторно эквивалентен вееру граней одного из 5 типов трёхмерных многогранников: октаэдр, четырёхугольная пирамида, куб, тетраэдр, бипирамида над треугольником.*

Замечание. *Теорема 4.19 не гарантирует, что трёхмерный тесный веер можно реализовать в виде веера граней некоторого многогранника. Это утверждение будет доказано отдельно.*

Определение 4.14. Пусть задан k-мерный конус $C \subset \mathbb{E}^d$ с вершиной в точке v. Рассмотрим $(d-1)$-мерную сферу единичного радиуса $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1^{d-1}(v) \subset \mathbb{E}^d$ с центром в точке v. Конусу C однозначно соответствует выпуклый сферический многогранник $\widetilde{C} = C \bigcap \mathcal{S}$. Такой многогранник $\widetilde{C}$ будем называть *сферическим образом* конуса C.

Очевидно, что $C = cone_v(\widetilde{C})$.

Определение 4.15. Пусть задан полный заострённый d-мерный веер $\mathcal{F} \subset \mathbb{E}^d$ с вершиной v. Множество сферических образов граней из $\mathcal{F}$

$$\left\{ \widetilde{f} = f \bigcap \mathcal{S} \;\middle|\; f \in \mathcal{F} \right\}$$

[1] Доказательства были получены приблизительно одновременно при совместных исследованиях авторов в Queen's University, г. Кингстон, Канада.

задаёт разбиение $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ сферы $\mathcal{S}$ на выпуклые сферические многогранники.

Соответствие $f \leftrightarrow \widetilde{f}$ между гранями комплексов $\mathcal{F}$ и $\mathcal{S}_{\mathcal{F}}$ будем называть *сферическим соответствием.*

Замечание. *Определения разбиения* $(d-1)$*-мерной сферы на выпуклые многогранники и сферического комплекса дословно повторяют соответствующие определения 1.6 и 3.1 для евклидова пространства с заменой* $\mathbb{E}^d$ *на* $\mathcal{S}^{d-1}$ *и термина* полиэдр *на* выпуклый сферический многогранник.

Определение 4.16. Рассмотрим такую циклическую последовательность попарно различных ячеек $C_1, C_2, \ldots, C_k$ полного заострённого веера $\mathcal{F} \in \mathbb{E}^3$ с вершиной v, что $C_i \bigcap C_{i+1}$ — грань из $\mathcal{F}$ размерности больше 0 для всех $i = 1, \ldots, k$ (по определению, $C_{k+1} := C_1$).

Рассмотрим такую последовательность точек p_i на сфере $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1^2(v)$, что $p_{2i} \in Int\left(\widetilde{C}_i\right), p_{2i-1} \in relint\left(\widetilde{C}_{i-1} \bigcap \widetilde{C}_i\right)$ для всех $1 \leqslant i \leqslant k$ (по определению, $C_0 := C_k$).

Замкнутую сферическую ломаную $p_1, p_2, \ldots, p_{2k}, p_1$ (где каждый $p_i p_{i+1}$ — это сферический отрезок, то есть дуга центрального сечения $\mathcal{S}$ двумерной плоскостью) будем называть *направляющим путём* последовательности ячеек $C_1, \ldots, C_k \in \mathcal{F}$.

Определение 4.17. Пусть $\Gamma = p_1, \ldots, p_{2k}$ — направляющий путь для последовательности ячеек $C_1, \ldots, C_k \in \mathcal{F} \subset \mathbb{E}^3$. Если Γ — самонепересекающаяся ломаная, то Γ делит сферу $\mathcal{S}$ на три части: Γ и две открытые сферические области H_1 и H_2.

Все ячейки $C_i \in \mathcal{F}$, сферический образ $\widetilde{C}_i$ которых принадлежит замыканию $\overline{H}_1 = H_1 \bigcup \Gamma$, назовём *северным множеством конусов* в $\mathcal{F}$ относительно последовательности $C_1, \ldots, C_k$. Все ячейки $C_j \in \mathcal{F}$, сферический образ $\widetilde{C}_j$ которых принадлежит замыканию $\overline{H}_2$, назовём *южным множеством конусов.*

Лемма 4.20. *Если для последовательности ячеек* $C_1, \ldots, C_k$ *полного заострённого веера* $\mathcal{F} \subset \mathbb{E}^3$ *нашёлся самонепересекающийся направляющий путь* Γ, *то северное* $\mathfrak{N}$ *и южное* $\mathfrak{S}$ *множества конусов определены корректно, с точностью до переименования южного на северное и наоборот. При этом множество всех ячеек из* $\mathcal{F}$ *совпадает с объединением* $\mathfrak{N} \bigcup \mathfrak{S} \bigcup \left\{ \bigcup\limits_{i=1}^{k} C_i \right.$

Доказательство. Так как ломаная Γ — самонепересекающаяся замкнутая кривая на $\mathcal{S}$, то $\mathcal{S} = \Gamma \bigcup H_1 \bigcup H_2$, где H_1, H_2 — открытые сферические области.

По построению, $\Gamma \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} \widetilde{C}_i$, где $\widetilde{C}_i$ — сферический образ ячейки C_i. Поэтому для любой ячейки $C_j \neq C_i$ при $i = 1, \ldots, k$, сферический образ $\widetilde{C}_j$ может пересекать Γ лишь точками границы. Значит, $\widetilde{C}_j$ принадлежит либо $\overline{H}_1$, либо $\overline{H}_2$. Отсюда для заданного Γ следует однозначность определения южного и северного множеств конусов, и то, что объединение $\mathfrak{N}_\Gamma \bigcup \mathfrak{S}_\Gamma \bigcup \left\{ \bigcup\limits_{i=1}^{k} C_i \right\}$ совпадает с множеством ячеек из $\mathcal{F}$.

Остаётся заметить, что произвольная другая направляющая ломаная Γ_1 для $C_1, \ldots, C_k$ непрерывно гомотопна на $\bigcup_{i=1}^{k} C_i$ ломаной Γ. При любом значении параметра гомотопии t путь $\Gamma(t)$ пересекает по внутренним точкам только ячейки $C_1, \ldots, C_k$. Следовательно, для произвольного t область $H_1(t)$ содержит один и тот же набор ячеек $\widetilde{C}_j$, так же как и $H_2(t)$. Значит северное и южное множества не зависят от выбора направляющего пути Γ для заданной последовательности $C_1, \ldots, C_k$. □

Лемма 4.21. *Пусть задана цепочка различных ячеек $[C_1, \ldots, C_k]$ полного заострённого веера $\mathcal{F} \subset \mathbb{E}^3$, причём $C_1 \bigcap C_k$ имеет размерность 1 или 2. Тогда для этой цепочки корректно и однозначно заданы северное и южное множества конусов.*

Доказательство. Докажем, что направляющий путь Γ цепочки $\mathcal{C} = [C_1, \ldots, C_k]$ не имеет самопересечений. Предположим противное, то есть у некоторого направляющего пути $\Gamma = p_1 p_2 \ldots p_{2k} p_1$ есть точки самопересечения.

Пусть кривая $\Gamma = \Gamma(t)$ параметризована натуральным параметром $0 \leqslant t \leqslant s$, где $\Gamma(0) = \Gamma(s) = p_1$. По предположению, есть два различных значения $0 \leqslant a < b < s$, для которых $\Gamma(a) = \Gamma(b)$.

Рассмотрим значения параметров t_i такие, что $p_i = \Gamma(t_i)$ для всех $1 \leqslant i \leqslant 2k+1$, где $p_{2k+1} := p_1$. По построению, произвольная двухзвенная ломаная $p_{2i-1} p_{2i} p_{2i+1}$ лежит внутри ячейки $\widetilde{C}_i$ (за исключением конечных точек p_{2i-1} и p_{2i+1}) и не имеет самопересечений.

Если $\Gamma(a)$ является внутренней точкой такой двухзвенной ломаной, то $t_{2i-1} < a < t_{2i+1} < b$. Тогда точка b лежит на одной из последующих двухзвенных ломаных такого вида: $t_{2j-1} \leqslant b < t_{2j+1}$, где $i < j$. Значит $\Gamma(b) \in \widetilde{C}_j$.

Из условия следует, что $\widetilde{C}_i \neq \widetilde{C}_j$ при $i < j$. С другой стороны, $\widetilde{C}_j$ содержит внутреннюю точку ячейки $\widetilde{C}_i$, чего не может быть, так как это ячейки комплекса.

Аналогично показывается, что $\Gamma(a)$ не может быть внутренней точкой рёбер вида $\widetilde{C}_i \bigcap \widetilde{C}_{i+1}$ для смежных ячеек цепочки. Это означает, что a не равно t_{2i+1} при $1 \leqslant i \leqslant k$. Значит a может равняться только t_1 (и только в случае, когда $C_k \bigcap C_1$ одномерно). Однако то же самое верно и для b. Следовательно, $a = t_1 = b$ — противоречие с предположением. $\square$

Определение 4.18. Пусть $\mathcal{C} = [C_1, \dots, C_k]$ — цепочка различных ячеек в полном заострённом веере $\mathcal{F} \subset \mathbb{E}^3$ и размерность $C_1 \bigcap C_k$ больше 0. Пусть оба множества конусов — северное и южное относительно $\mathcal{C}$ — в $\mathcal{F}$ непусты.

Если размерность $C_1 \bigcap C_k$ равна 2, то цепочка $\mathcal{C}$ называется *разделяющей*. Если размерность $C_1 \bigcap C_k$ равна 1, то $\mathcal{C}$ называется *частично разделяющей*.

Далее в параграфе рассматриваются трёхмерные тесные веера $\mathcal{F} \subset \mathbb{E}^3$.

Лемма 4.22. *Если цепочка $\mathcal{C} = [C_1, \dots, C_k]$ в тесном веере $\mathcal{F} \subset \mathbb{E}^3$ является разделяющей, то его вершина v стандартна, $\mathcal{C}$ симметрична себе в v, и дополнение к $\mathcal{C}$ в $\mathcal{F}$ состоит ровно из двух симметричных друг другу в точке v конусов.*

Доказательство. Выберем произвольную ячейку U_1 из северного множества относительно цепочку $\mathcal{C}$ и произвольную ячейку U_2 из южного множества. Сферические образы $\widetilde{U}_1, \widetilde{U}_2$ не пересекаются, значит ячейки U_1, U_2 пересекаются по общей вершине v. Значит v стандартна, и ячейки U_1 и U_2 в ней симметричны.

Если южное множество содержит ещё хотя бы одну ячейку U_3, то аналогично U_1 и U_3 симметричны в v. Это невозможно, так как U_2 и U_3 различны по выбору. Аналогично, в северном множестве не может быть других ячеек кроме U_1.

Множество ячеек цепочки состоит из множества всех ячеек веера без подмножества $\{U_1, U_2\}$. Оба эти множества симметричны в v, значит цепочка также симметрична в v. $\square$

Так как симметричная цепочка содержит чётное число конусов, то верно следующее следствие.

Следствие 4.23. *Тесный веер не содержит разделяющего цикла нечётной длины.*

Лемма 4.24. *Пусть цепочка $\mathcal{C} = [C_1, \dots, C_k]$ в тесном веере $\mathcal{F} \subset \mathbb{E}^3$ является частично разделяющей, ячейка $U_1 \in \mathcal{F}$ принадлежит северному множеству, ячейка $U_2 \in \mathcal{F}$ — южному относительно $\mathcal{C}$. Тогда U_1 и U_2 пересекаются либо по вершине, либо по ребру.*

Доказательство. Из определения частично разделяющей цепочки следует, что сферические образы $\widetilde{U}_1$ и $\widetilde{U}_2$ разделены направляющим путём Г. Следовательно, $\widetilde{U}_1$ и $\widetilde{U}_2$ либо не пересекаются, либо пересекаются по точке $C_1 \bigcap C_k \bigcap \mathcal{S}^2_1(v)$. Значит пересечение U_1 с U_2 — либо вершина $v \in \mathcal{F}$, либо одномерное ребро $cone_v(C_1 \bigcap C_k \bigcap \mathcal{S}^2_1(v))$. □

Лемма 4.25. *Если вершина v трёхмерного тесного веера $\mathcal{F}$ стандартна, а сам веер содержит хотя бы одно стандартное ребро, то $\mathcal{F}$ комбинаторно эквивалентен вееру граней октаэдра.*

Доказательство. Обозначим стандартное ребро как l. По теореме 4.16, двумерный веер схождений $\mathcal{F}_l$ является тесным, а из леммы 4.15 следует, что $\mathcal{F}_l$ стандартно симметричен в l. Из леммы 4.18 следует, что в ребре l сходятся 4 трёхмерные ячейки. Занумеруем их C_1, C_2, C_3, C_4 в порядке циклического обхода вокруг l.

Обозначим через C_i^* ячейку из $\mathcal{F}$ центрально симметричную C_i в вершине v, и ребро симметричное l в v через l^*. Из локальной симметрии в l следует, что двумерные грани $C_2 \bigcap C_3$ и $C_4 \bigcap C_1$ лежат в одной двумерной плоскости, которую обозначим α. Тогда α содержит l и v. При локальной симметрии в $v \in \alpha$ грань $(C_4 \bigcap C_1) \subset \alpha$ переходит (локально) в грань $C_4^* \bigcap C_1^*$. Значит, $C_4^* \bigcap C_1^*$ также лежит в α.

Пересечение $C_1^* \bigcap C_2$ — стандартная грань веера $\mathcal{F}$, не совпадающая с v. Покажем, что эта грань одномерна.

Ячейки C_1 и C_2 лежат в одном полупространстве относительно α, C_3 и C_4 — в другом. Ячейки C_1^* и C_1 симметричны в $v \in \alpha$, следовательно лежат по разные стороны от плоскости α. Отсюда вытекает, что $C_1^* \bigcap C_2 = C_1^* \bigcap C_2 \bigcap \alpha = (C_1^* \bigcap \alpha) \bigcap (C_2 \bigcap \alpha) = (C_4^* \bigcap C_1^*) \bigcap (C_2 \bigcap C_3)$.

Двумерные грани $(C_4^* \bigcap C_1^*)$ и $(C_2 \bigcap C_3)$, очевидно, различны. Следовательно, они пересекаются в грани размерности 0 или 1. С другой стороны, их пересечение — стандартная грань $C_1^* \bigcap C_2$, которая содержит v, но не равна v. Таким образом, C_1^* и C_2 пересекаются по ребру l_2. Легко видеть, что l_2 также принадлежит ячейке C_3.

Аналогично, ячейки C_1^* пересекаются C_4 по ребру l_4, которое также принадлежит ячейке C_3. Следовательно, двумерный угол $\langle l_2, l_4 \rangle$, натянутый на одномерные конусы l_2, l_4, совпадает с пересечением ячеек C_1^* и C_3.

Обозначим через l_2^* и l_4^* образы l_2 и l_4 при симметрии в v. Тогда аналогично имеем $\langle l_2, l_4^* \rangle = C_2 \bigcap C_4^*$, а из симметрии $\langle l_2^*, l_4^* \rangle = C_1 \bigcap C_3^*$ и $\langle l_2^*, l_4 \rangle = C_2^* \bigcap C_4$. Очевидно, все грани веера нами перечислены. Получаем, что данный веер $\mathcal{F}$ равен прямой сумме одномерных вееров $\{l, l^*\}, \{l_2, l_2^*\}$ и $\{l_4, l_4^*\}$ и комбинаторно эквивалентен вееру граней октаэдра. $\square$

По определению, ячейка произвольного трёхмерного конуса является пространственным углом. Следовательно, ячейка C трёхмерного тесного веера ограничена некоторым количеством плоских углов. Это количество не менее 3, иначе конус C с вершиной v не мог бы быть строго выпуклым.

Лемма 4.26. *Если ячейка C трёхмерного тесного веера $\mathcal{F}$ имеет более трёх двумерных граней, то их ровно 4, а ячейки смежные с C либо все одновременно имеют общее ребро, либо никакие две из них не имеют общего ребра.*

Доказательство. Обозначим двумерные грани в C через $H_1, H_2, \ldots, H_k$, в порядке их следования при обходе вокруг вершины. Рассмотрим произвольные две несоседние грани H_i, H_j и ячейки $C_i, C_j \in \mathcal{F}$ данного веера такие, что $C_i \bigcap C = H_i, C_j \bigcap C = H_j$.

Ячейки C_i и C_j не могут пересекаться по грани размерности 2, иначе $[C, C_i, C_j]$ — разделяющий цикл длины 3, что невозможно, согласно лемме 4.23. То есть C_i и C_j пересекаются либо по ребру, либо по вершине.

Пусть C_i и C_j пересекаются по некоторому ребру l. По выбору, H_i и H_j не являются соседними. Из определения 4.18 следует, что $[C, C_i, C_j]$ — частично разделяющий цикл.

Рассмотрим произвольную пару смежных с C ячеек C_m, C_n, из которых одна лежит в северном, другая — в южном множестве относительно частично разделяющей цепочки $[C, C_i, C_j]$. По лемме 4.24, ячейки C_m и C_n пересекаются либо по вершине v, либо по ребру l.

Если C_m и C_n пересекаются по v, то, по определению тесного веера, вершина v стандартна. Ребро l стандартно по определению. Тогда по лемме 4.25 веер $\mathcal{F}$ комбинаторно эквивалентен вееру граней октаэдра. В частности, каждая ячейка в $\mathcal{F}$ имеет три плоские грани. Однако, по условию, C имеет не менее четырёх плоских граней — противоречие. Значит C_m и C_n пересекаются по ребру l.

Мы доказали, что если среди смежных с C ячеек найдутся две, которые пересекаются по ребру, то все смежные с C ячейки имеют общее ребро. Иначе ни одной такой пары нет.

Кроме того, если $k > 4$, то пары ячеек C_1, C_3 и C_1, C_4 пересекаются по одной и той же стандартной грани (либо все по ребру, либо все по вершине). Но тогда C_1 локально симметрично относительно этой грани сразу двум различным ячейкам: C_3 и C_4, что невозможно. □

Лемма 4.27. *Пусть трёхмерный тесный веер $\mathcal{F}$ содержит четырёхгранную ячейку, тогда $\mathcal{F}$ комбинаторно эквивалентен либо вееру граней четырёхугольной пирамиды, либо вееру граней куба.*

Доказательство. Пусть ячейка $C \in \mathcal{F}$ ограничена плоскими углами $H_1, \ldots, H_4$. По лемме 4.26 возможны два случая. В первом случае все ячейки смежные с C содержат общее ребро. Тогда, очевидно, других ячеек, кроме C и смежных с ней, в веере $\mathcal{F}$ нет. Следовательно, $\mathcal{F}$ комбинаторно эквивалентен вееру граней четырёхугольной пирамиды.

Во втором случае вершина v стандартна. Смежные с C ячейки $C_1, \ldots, C_4$, где $H_i = C \bigcap C_i$, делятся на пары симметричных в v. Следовательно, $\mathcal{F}$ не имеет стандартных рёбер, иначе, из леммы 4.25, не содержит четырёхгранных ячеек.

Обозначим общее ребро двумерных граней $H_i, H_{i+1} \in C$ как l_i. По теореме 4.16, веер схождений $\mathcal{F}_{l_i}$ в l_i также тесный. Из классификации двумерных тесных вееров 4.18 следует, что в не стандартной грани l_i сходятся 3 ячейки из $\mathcal{F}$. Значит это ячейки C, C_i, C_{i+1}. Следовательно, C_i смежна с C_{i+1}.

По доказанному, последовательность C_1, C_2, C_3, C_4 является цепочкой. Северное и южное множества конусов в $\mathcal{F}$ относительно этой цепочки непусты, так как одно из них содержит C, а другое содержит ячейку C^*, симметричную C в v. Значит цепочка $[C_1, C_2, C_3, C_4]$ является разделяющей и для неё выполнены условия леммы 4.22. Следовательно, кроме четырёх ячеек цепочки, веер $\mathcal{F}$ содержит ещё две ячейки C и C^*. Веер $\mathcal{F}$ в этом случае комбинаторно эквивалентен вееру граней куба. □

В лемме 4.27 доказана классификация трёхгранных тесных вееров, в которых есть хотя бы одна четырёхгранная ячейка. В остальных случаях трёхмерные тесные веера содержат лишь трёхгранные ячейки (являются трёхмерными симплициальными веерами).

Лемма 4.28. *Если трёхмерный тесный веер $\mathcal{F}$ содержит лишь трёхгранные ячейки, то он комбинаторно эквивалентен вееру граней одного из трёх типов многогранников: тетраэдр, октаэдр, бипирамида над треугольником.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}$ не содержит стандартных рёбер. Выберем произвольную ячейку C и смежные с ней ячейки C_1, C_2, C_3. Так как рёбра веера $\mathcal{F}$ не стандартны, то C_1 и C_2 смежны. Аналогично, смежны пары ячеек C_2, C_3 и C_3, C_1.

Если $\mathcal{F}$ содержит более четырёх ячеек, то $[C_1, C_2, C_3]$ — разделяющая цепочка длины 3, что, по следствию 4.23, невозможно в трёхмерном тесном веере. Следовательно, в этом случае веер $\mathcal{F}$ содержит 4 ячейки, каждая смежна с каждой. Очевидно, $\mathcal{F}$ комбинаторно эквивалентен вееру граней тетраэдра.

Пусть веер содержит стандартное ребро l. Если вершина v веера также стандартна, то, по лемме 4.25, веер $\mathcal{F}$ комбинаторно эквивалентен вееру граней октаэдра.

Остался неразобранным случай, когда вершина v веера $\mathcal{F}$ не стандартна и некоторое ребро l стандартно. Ячейки из $\mathcal{F}$, сходящиеся в ребре l, занумеруем $C_1, \ldots, C_4$ в направлении циклического обхода вокруг l. Обозначим через l_i ребро двумерной грани $C_1 \bigcap C_2$, отличное от l.

Докажем, что среди рёбер $l_1, \ldots, l_4$ есть стандартное. Предположим противное — все рёбра l_i не стандартны. Обозначим как C' ячейку, смежную с C_1 по грани $\langle l_4, l_1 \rangle$. Так как l_1 не стандартно, то в нём сходятся три попарно смежные ячейки. Значит C' смежна с C_2. Следовательно, C' содержит грань $\langle l_1, l_2 \rangle$ и ребро l_2. Аналогично получаем, что C' содержит все рёбра l_i и имеет 4 двумерные грани. Противоречие с условием.

Не умаляя общности, ребро l_4 стандартно. Обозначим через C_1^* и C_4^* ячейки локально симметричные в l_4 соответственно ячейкам C_1 и C_4. Из локальной симметрии в рёбрах l и l_4 следует, что грани $C_3 \bigcap C_2$, $C_4 \bigcap C_1$ и $C_1^* \bigcap C_4^*$ лежат в одной двумерной плоскости α. При этом ячейки C_3, C_4, C_1^* лежат в одном полупространстве относительно α, ячейки C_2, C_1, C_4^* — в другом.

Ячейки C_1^* и C_2 лежат в разных полупространствах относительно α. Следовательно, $v \neq C_1^* \bigcap C_2 = C_1^* \bigcap C_2 \bigcap \alpha = (C_1^* \bigcap \alpha) \bigcap (C_2 \bigcap \alpha) = (C_1^* \bigcap C_4^*) \bigcap (C_2 \bigcap C_3)$. Двумерные грани $C_1^* \bigcap C_4^*$ и $C_2 \bigcap C_3$ веера $\mathcal{F}$ различны, значит их пересечение имеет размерность не более 1. Так как это пересечение содержит v, но не совпадает с ней, то оно одномерно. Так как $C_1^* \bigcap C_2 \prec C_2 \bigcap C_3 = \langle l, l_2 \rangle$ и C_1^* не содержит ребра l, то $C_1^* \bigcap C_2 = l_2$ и l_2, по определению, стандартно.

Таким образом, двумерные грани $C_3 \bigcap C_2$, $C_4 \bigcap C_1$ и $C_1^* \bigcap C_4^*$ равны $\langle l_2, l \rangle$, $\langle l, l_4 \rangle$ и $\langle l_4, l_2 \rangle$ и (вместе со своими гранями) разбивают плоскость α. Если ячейки C_1^*, C_4, C_3 не содержат общего ребра, то образуют разделяющий цикл длины 3, что по следствию 4.23 невозможно. Значит, C_1^*, C_3 и C_4 пересекаются в ребре $l_3 \prec C_3 \bigcap C_4$. Аналогично, ячейки C_4^*, C_1 и C_2 пересекаются в общем ребре l_1.

Объединение ячеек $(\bigcup C_i) \bigcup (\bigcup C_i^*)$ покрывает пространство $\mathbb{E}^3$. Следовательно, $\mathcal{F}$ не содержит других ячеек и комбинаторно эквивалентно бипирамиде над треугольником. $\square$

Теорема 4.19 о комбинаторной классификации трёхмерных тесных вееров доказана. $\square$

Докажем уточнение леммы 4.28:

Лемма 4.29. *Трёхмерный тесный веер $\mathcal{F}$ комбинаторно эквивалентный бипирамиде над треугольником, равен прямой сумме двумерного тесного веера с тремя рёбрами и единственного одномерного тесного веера.*

Доказательство. В обозначениях доказательства леммы 4.28 имеем $l_1 \prec \langle l_1, l_4 \rangle \bigcap \langle l_1, l_2 \rangle$. Следовательно, l_1 лежит в одномерном пересечении двумерных плоскостей $\operatorname{aff}(l_1, l_4)$ и $\operatorname{aff}(l_1, l_2)$. Из локальной симметрии следует, что это те же плоскости, что $\operatorname{aff}(l_3, l_4)$ и $\operatorname{aff}(l_3, l_2)$. Отсюда следует, что объединение лучей l_1 и l_3 является прямой.

Грани $\langle l_2, l \rangle$, $\langle l, l_4 \rangle$ и $\langle l_4, l_2 \rangle, l, l_2, l_4$ и v из $\mathcal{F}$ образуют двумерный тесный веер $\mathcal{F}_2$. Грани l_1, l_3 и v образуют одномерный тесный веер $\mathcal{F}_1$. Легко видеть, что $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \oplus \mathcal{F}_2$. $\square$

4.5 Политопальность трёхмерных тесных вееров.

Как отмечалось ранее, уже в размерности 3 существуют примеры неполитопальных полных заострённых вееров. Классификация трёхмерных тесных вееров в теореме 4.19 представлена через веера граней трёхмерных многогранников. Однако данная классификация была дана с точностью до комбинаторной эквивалентности и, в общем случае, не гарантирует, что трёхмерный тесный веер является веером граней некоторого многогранника. Тем не менее, это верно.

Теорема 4.30. *Каждый трёхмерный тесный веер является веером граней некоторого многогранника.*

Доказательство. В случае тесного веера $\mathcal{F}_T$ комбинаторно эквивалентного вееру граней тетраэдра, достаточно на каждом из четырёх рёбер веера отметить по точке v_i. Их выпуклая оболочка является тетраэдром и порождает $\mathcal{F}_T$.

В случае тесного веера $\mathcal{F}_B$ комбинаторно эквивалентного бипирамиде над треугольником, в лемме 4.29 доказано, что $\mathcal{F}_B = \mathcal{F}^1 \oplus \mathcal{F}^2_P$. Тут $\mathcal{F}^1$ обозначает одномерный тесный веер, $\mathcal{F}^2_P$ обозначает двумерный тесный веер с нестандартной вершиной. Три ребра $l_1, l_2, l_3 \in \mathcal{F}_B$ лежат в двумерной плоскости $\operatorname{aff}\left(0 \oplus \mathcal{F}^2_P\right)$, ещё два ребра l_4 и l_5 дополняют друг друга до прямой $\operatorname{aff}\left(\mathcal{F}^1 \oplus 0\right)$. На каждом ребре l_i выберем произвольную точку $v_i \neq v$. Легко видеть, что выпуклая оболочка $conv\,(v_1, \dots, v_5)$ является бипирамидой над треугольником $conv\,(v_1, v_2, v_3)$ и $\mathcal{F}_B$ является для неё веером граней.

Пусть тесный веер $\mathcal{F}_O$ комбинаторно эквивалентен вееру граней октаэдра. В доказательстве леммы 4.25 показано, что веер $\mathcal{F}_O$ равен прямой сумме трёх одномерных тесных вееров. Значит также $\mathcal{F}_O = \mathcal{F}^1 \oplus \mathcal{F}^2_S$, где $\mathcal{F}^2_S$ — прямая сумма двух одномерных тесных вееров, равная двумерному тесному вееру со стандартной вершиной. Далее доказательство аналогично случаю бипирамиды.

В случае четырёхугольной пирамиды $\mathcal{F}_P$ некоторая одна ячейка C_1 имеет 4 двумерные грани, остальные ячейки — по три. Ячейка C_1 является строго выпуклым конусом с вершиной. Значит, существует опорная плоскость π к C_1, содержащая только вершину. Параллельное к π сечение конуса C_1 пересекает этот конус по четырёхугольнику $v_1 v_2 v_3 v_4$. Выберем на оставшемся ребре веера точку v_5. Веер $\mathcal{F}_P$ является веером граней выпуклой оболочки $conv\,(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$, которая по построению является четырёхугольной пирамидой.

Последний случай — веер $\mathcal{F}_C$ комбинаторно эквивалентен вееру граней куба. Из определения комбинаторной эквивалентности следует, что $\mathcal{F}_C$ содержит 6 четырёхгранных ячеек. Вершина $v \in \mathcal{F}_C$ стандартна, значит $\mathcal{F}_C$ в ней локально симметричен. Следовательно, $\mathcal{F}_C$ также центрально симметричен в v.

Обозначим через r_1, r_2, r_3, r_4 одномерные рёбра некоторой ячейки $C_1 \in \mathcal{F}_C$, идущие в порядке обхода вокруг вершины v на поверхности C_1. Двумерные плоскости $\mathrm{aff}\,(r_1, r_2)$ и $\mathrm{aff}\,(r_3, r_4)$ содержат общую точку v и, очевидно, не совпадают. Значит, их пересечение является прямой, которую обозначим l_1. Аналогично, через l_2 обозначим прямую пересечения плоскостей $\mathrm{aff}\,(r_1, r_4)$ и $\mathrm{aff}\,(r_2, r_3)$.

Плоскость $\mathrm{aff}\,(l_1, l_2)$ является опорной для ячейки C_1 и содержит её вершину v. Рассмотрим сечение C_1 плоскостью $\pi \parallel \mathrm{aff}\,(l_1, l_2)$. Обозначим $\pi \bigcap r_i = v_i$. Покажем, что $v_1v_2v_3v_4$ — параллелограмм. Действительно, $\pi \parallel l_1 \parallel \mathrm{aff}\,(r_1, r_2)$, поэтому $\pi \bigcap \mathrm{aff}\,(l_1, l_2) \parallel l_1$ и $v_1v_2 \parallel l_1$. Аналогично $v_3v_4 \parallel l_1$, $v_1v_4 \parallel l_2 \parallel v_2v_3$.

Рассмотрим точки v_i^*, где $1 \leqslant i \leqslant 4$, симметричные точкам v_i в вершине $v \in \mathcal{F}_C$. Из симметрии следует, что пространственный четырёхугольник $v_1^*v_2^*v_3^*v_4^*$ также является параллелограммом, его вершины лежат на одномерных рёбрах ячейки C_1^* симметричной C_1.

Четырёхугольник $v_1v_2v_4^*v_3^*$ также является параллелограммом, так как $v_1v_2 = v_3v_4 = v_4^*v_3^*$ и $v_1v_2 \parallel v_3v_4 \parallel v_4^*v_3^*$. Эта четвёрка также задаёт ячейку из $\mathcal{F}_C$. Аналогично, остальные 3 ячейки в $\mathcal{F}_C$ заданы параллелограммами $v_2v_3v_1^*v_4^*$, $v_3v_4v_2^*v_1^*$ и $v_4v_1v_3^*v_2^*$. $\square$

4.6 Нормальные веера и полярные многогранники

Полный веер, по определению, задаёт нормальное разбиение пространства на полиэдры. Поэтому корректен вопрос о том, существует каноническая нормировка данного полного веера или нет.

Критерий существования канонической нормировки полного веера в $\mathbb{E}^d$ будет доказан в следующем параграфе. Для этого нам потребуются конструкции полярного многогранника и нормального веера.

Определение 4.19. Выберем произвольную точку p внутри выпуклого d-мерного многогранника $P \subset \mathbb{E}^d$. *Полярным многогранником* для P называется следующее точечное множество:

$$P_p^{\triangle} \ := \ \{c \in \mathbb{E}^d : (c-p)\cdot(x-p) \leqslant 1 \text{ для всех } x \in P\}$$

Точку p будем называть *центром полярности* многогранника $P_p^{\triangle}$.

Когда центр полярности однозначно определён контекстом, традиционно, используется обозначение $P^{\triangle}$.

Хорошо известно, что $P^{\triangle}$ является выпуклым d-мерным многогранником и также содержит точку p внутри. Кроме того, известны следующие важные свойства полярных многогранников [15, Глава 2].

Предложение 4.31. *Пусть точка p лежит внутри d-мерного многогранника $P \subset \mathbb{E}^d$ и является центром полярности для $P^{\triangle}$. Обозначим через $P^{\triangle\triangle}$ многогранник полярный (с центром в p) к $P^{\triangle}$. Тогда выполнены свойства:*

1. $P^{\triangle\triangle} = P$
2. *k-граням многогранника P ($0 \leqslant k \leqslant d-1$) однозначно соответствуют $(d-1-k)$-грани многогранника $P^{\triangle}$. Для грани F соответствующая ей грань в $P^{\triangle}$ обозначается как $F^{\diamond}$.*
3. $F^{\diamond\diamond} = F$
4. *Для двух граней $F, G \prec P$ грань F является гранью G тогда и только тогда, когда грань $F^{\diamond}$ содержит грань $G^{\diamond}$.*

Последнее свойство предложения 4.31 означает, что полярное соответствие граней $\diamond$ сохраняет инцидентности граней многогранника, но меняет порядок их включения.

Определение 4.20. Пусть задана точка $p \in \mathbb{E}^d$ и не содержащая p гиперплоскость $\mathcal{H} \subset \mathbb{E}^d$. *Полюсом* гиперплоскости $\mathcal{H}$ относительно центра p называется такая точка $v_{\mathcal{H}} = v_{p,\mathcal{H}} \in \mathbb{E}^d$, что для любой точки $t \in \mathcal{H}$ выполнено $(v_{\mathcal{H}} - p)\cdot(t-p) = 1$.

Легко видеть, что полюс $v_{p,\mathcal{H}}$ определён однозначно, и что $v_{p,\mathcal{H}}$ лежит на луче, ортогональном гиперплоскости $\mathcal{H}$ и пересекающем её.

В [15, Глава 2] доказано следующее предложение:

Предложение 4.32. *Пусть задан d-мерный многогранник $P \subset \mathbb{E}^d$ и его полярный многогранник $P_p^{\triangle}$. Для произвольной гиперграни $H \prec P$ соответствующая ей вершина $H^{\diamond} \prec P_p^{\triangle}$ совпадает с полюсом $v_{p,\mathrm{aff}(H)}$ аффинной оболочки гиперграни H.*

Полярные многогранники $P_{p_1}^{\triangle}$ и $P_{p_2}^{\triangle}$ многогранника P, при $p_1 \neq p_2$, в общем случае, не являются аффинно эквивалентными. Однако для каждого $P_{p_i}^{\triangle}$ инцидентности его граней однозначно определены инцидентностями граней в P. Значит $P_{p_1}^{\triangle}$ и $P_{p_2}^{\triangle}$ имеют одинаковую комбинаторную структуру, то есть комбинаторно эквивалентны.

Определение 4.21. Два полиэдральных комплекса $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ называются *комбинаторно эквивалентными* если между гранями этих комплексов существует биекция, которая сохраняет размерности и инцидентности.

Комбинаторным типом называется смежные классы по отношению комбинаторной эквивалентности.

Определение 4.22. Пусть задан выпуклый d-мерный многогранник $P \subset \mathbb{E}^d$. *Нормальным веером* $\mathcal{N}(P)$ к P называется веер граней его полярного многогранника $P_p^{\triangle}$ для произвольного центра полярности $p \in Int(P)$.

Согласно данному определению, нормальный веер зависит от выбора центра полярности. Следующее утверждение является фольклорным в теории вееров. Оно обосновывает корректность такого определения. Доказательство этого утверждения приводится здесь для полноты изложения.

Лемма 4.33. *Нормальный веер $\mathcal{N}(P)$ однозначно (с точностью до параллельного переноса) задаётся выпуклым многогранником P.*

Доказательство. Полный заострённый веер однозначно задаётся своими одномерными рёбрами и инцидентностями граней. Для двух различных полюсов $p_1, p_2 \in Int(P)$, соответствующие одномерные рёбра вееров $\mathcal{N}_1(P)$ и $\mathcal{N}_2(P)$ ортогональны одной и той же гиперграни в P и совмещаются параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{p_1p_2}$. Инцидентности граней этих вееров такие же, как у $P_1^{\triangle}$ и $P_2^{\triangle}$ соответственно, а у них инцидентности граней одинаковые. $\square$

Другим стандартным определением нормального веера является определение через линейные функционалы в $\left(\mathbb{E}^d\right)^*$, которое можно найти в [15, Пример 7.3].

Лемма 4.34. *Обозначим через N_F конус нормального веера $\mathcal{N}(P)$, который соответствует произвольной грани $F \subseteq P$ по правилу $N_F \leftrightarrow F^{\diamond} \leftrightarrow F$. Тогда:*

а) Пусть F имеет размерность $k, 0 < k < d$, тогда F ортогональна N_F.

б) Полиэдральный конус $cone_p F$ ортогонален соответствующей грани $F^{\diamond}$ полярного многогранника $P_p^{\triangle}$ для произвольной точки $p \in Int\,(P)$.

Доказательство. Докажем пункт а) леммы. Построим $\mathcal{N}(P)$ как веер граней $P_p^{\triangle}$ для произвольного полюса $p \in Int\,(P)$. Тогда N_F, по определению, совпадает с конусом $cone_p\,(F^{\diamond})$.

Обозначим через $H_1, \ldots, H_n$ все гиперграни P, содержащие F. Тогда по предложению 4.32 имеем $\overrightarrow{pH_i}^{\diamond} \perp H_i \succ F$, откуда $\overrightarrow{pH_i}^{\diamond} \perp \operatorname{aff}(F)$. Остаётся заметить, что

$$N_F = cone_p\,(F^{\diamond}) = cone_p\left(\overrightarrow{pH_1}^{\diamond}, \ldots, \overrightarrow{pH_n}^{\diamond}\right) \perp \operatorname{aff}(F)\,.$$

Пункт б) следует из соотношений $P^{\triangle\triangle} = P, F^{\diamond\diamond} = F$ (предложение 4.31) и того, что $\mathcal{F}_{p,P}$ — веер граней для P — совпадает с $\mathcal{N}\left(P^{\triangle}\right)$, равным, по определению, $\mathcal{F}_{p,P^{\triangle\triangle}}$. $\square$

4.7 Теорема о политопальности вееров, имеющих каноническую нормировку

Теорема 4.35. *Каноническая нормировка полного заострённого веера в $\mathbb{E}^d$ существует тогда и только тогда, когда этот веер политопален.*

Доказательство. Докажем, что из политопальности полного заострённого веера $\mathcal{F}$ следует, что для него существует каноническая нормировка.

Пусть веер $\mathcal{F}$ является веером граней некоторого d-мерного многогранника $P \subset \mathbb{E}^d$, и $v \in Int\,(P)$ — вершина $\mathcal{F}$. Тогда, по определению, каждая

k-мерная грань $f \in \mathcal{F}$ имеет вид $f = cone_v(F)$ для соответствующей $(k-1)$-мерной грани $F \in P$.

Рассмотрим полярный (относительно центра v) многогранник $P^{\triangle}$. Каждая $(d-1)$-грань h_i из веера $\mathcal{F}$ является пересечением ровно двух ячеек $c_{i,1}, c_{i,2} \in \mathcal{F}$. По определению веера граней, $h_i = cone_v(H_i)$, $c_{i,1} = cone_v(C_{i,1})$, $c_{i,2} = cone_v(C_{i,2})$ для некоторого гиперребра H_i и гиперграней $C_{i,1}, C_{i,2}$ в P. Гиперграням $C_{i,1}, C_{i,2}$ соответствуют вершины ${C_{i,1}}^{\diamond}$ и ${C_{i,2}}^{\diamond}$ в $P^{\triangle}$.

Определим нормировку гиперграней веера $\mathcal{F}$. Нормировку $s(h_i)$ гиперграни $h_i \in \mathcal{F}$ положим равной ${C_{i,1}}^{\diamond}{C_{i,2}}^{\diamond}$ — длине ребра ${H_i}^{\diamond}$. Покажем, что эта нормировка является канонической.

Пусть $h_1, \ldots, h_t$ — все гиперграни из $\mathcal{F}$, которые содержат гиперребро $f = f^{d-2} \in \mathcal{F}$, занумерованные в одном из двух направлений обхода вокруг f (см. определение 3.6). Обозначим ячейки $c_i \in \mathcal{F}$, которые содержат f, так, чтобы $h_i = c_i \bigcap c_{i+1}$. По определению считаем $c_{t+1} := c_1$.

Пусть $\mathbf{n}_{i,i+1}$ — единичная нормаль к h_i, направленная от c_i к c_{i+1}. По лемме 4.34 имеем ${C_i}^{\diamond}{C_{i+1}}^{\diamond} = {H_i}^{\diamond} \perp cone_v(H_i) = h_i$. Отсюда получаем, что $\mathbf{n}_{i,i+1} = \dfrac{\overrightarrow{{C_i}^{\diamond}{C_{i+1}}^{\diamond}}}{{C_i}^{\diamond}{C_{i+1}}^{\diamond}}$. Тогда для кручения нормировки s выполнено:

$$\Delta_s(f) = \sum_{i=1}^{t} \mathbf{n}_{i,i+1} s(h_i) = \sum_{i=1}^{t} \frac{\overrightarrow{{C_i}^{\diamond}{C_{i+1}}^{\diamond}}}{{C_i}^{\diamond}{C_{i+1}}^{\diamond}} \cdot {C_i}^{\diamond}{C_{i+1}}^{\diamond} = \sum_{i=1}^{t} \overrightarrow{{C_i}^{\diamond}{C_{i+1}}^{\diamond}} = 0$$

Так как гиперребро f выбрано произвольно, то, по определению, нормировка s каноническая.

Докажем, что из существования канонической нормировки для полного заострённого веера следует его политопальность.

Пусть s — каноническая нормировка веера $\mathcal{F} \subset \mathbb{E}^d$, и $c_1, \ldots, c_m$ — все ячейки этого веера. По теореме 3.8 для каждой ячейки c_i определение 3.23 и следствие 3.12 задают женератрису $\mathcal{G}_{\mathcal{F},s,c_i}$ (полиэдральный комплекс в $\mathbb{E}^{d+1}$), тело которой является графиком (функции) женератрисы $G_i(x)$. По определению, $G_i(x) = 0$ при $x \in c_i$ и $G_i(x) > 0$ при $x \notin c_i$.

Определим функцию $G(x) := \sum\limits_{i=1}^{m} G_i(x)$. Тогда $G(x)$ также линейна на каждой ячейке c_i. Кроме того, $G(v) = \sum G_i(v) = 0$ и $G(x) > 0$ для любой точки $x \neq v$ (так как найдётся ячейка не содержащая x). Легко видеть, что $G(x)$ также женератриса для $\mathcal{F}$. Обозначим женератрису-комплекс, соответствующий функции $G(x)$, через $\mathcal{G}$.

Рассмотрим точечное множество $\widetilde{M} = epi\, G \bigcap \{x_{d+1} = 1\}$ — пересечение надграфика функции $G(x)$ с гиперплоскостью $\{x_{d+1} = 1\}$, параллельной $\mathbb{E}^d$. Так как $c_1, \ldots, c_m$ — это все ячейки разбиения, заданного веером $\mathcal{F}$, то надграфик $epi\, G(x)$ является $(d+1)$-мерным выпуклым конусом. Его вершина v является единственной точкой пересечения $epi\, G$ с опорной гиперплоскостью $\{x_{d+1} = 0\}$. Отсюда следует, что $\widetilde{M}$ является (выпуклым ограниченным) d-многогранником.

Каждой собственной грани $\widetilde{F} \in \widetilde{M}$ соответствует собственная грань $cone_v(\widetilde{F})$ надграфика $epi\, G(x)$. То есть $cone_v(\widetilde{F})$ является гранью женератрисы $\mathcal{G} = \partial(epi\, G)$.

Обозначим через M ортогональную проекцию $\widetilde{M}$ на $\mathbb{E}^d$. Ортогональная проекция $cone_v(\widetilde{F})$ на $\mathbb{E}^d$, с одной стороны, является конусом $cone_v(F)$, где $F \in M$ — это ортогональная проекция $\widetilde{F} \in \widetilde{M}$ на $\mathbb{E}^d$. С другой стороны, по построению, такая проекция является гранью веера $\mathcal{F}$. Следовательно, $\mathcal{F}$ является веером граней многогранника M. $\square$

Следующий результат известен специалистам. В литературе он стандартно доказывается в специальных случаях (см. например [26]). Из теорем 4.35 и 3.5 этот результат следует в общем случае.

Следствие 4.36. *Подъём полного заострённого веера существует тогда и только тогда, когда этот веер политопален.*

Теорему 4.35 можно обобщить на случай произвольных разбиений пространства.

Теорема 4.37. *Пусть заданы нормальное локально конечное разбиение $\mathcal{T}$ пространства $\mathbb{E}^d$ и некоторая его k-грань $F \in \mathcal{T}$. Каноническая нормировка звезды $St_{\mathcal{T}}(F)$ существует тогда и только тогда, когда веер схождений в грани F политопален.*

Доказательство. Согласно определению 4.8, веер схождений в грани определён с точностью до выбора сечения грани дополнительным аффинным подпространством. Однако согласно следствию 4.8, все реализации веера схождений аффинно эквивалентны друг другу. По лемме 4.8, свойство политопальности веера инвариантно относительно невырожденных аффинных преобразований, то есть все реализации веера схождений либо одновременно политопальны, либо все одновременно не политопальны. Следовательно, формулировка теоремы корректна.

Рассмотрим реализацию веера схождений $\mathcal{F}_F = \mathcal{F}(F, \mathcal{T}, \mathcal{S})$ в $(d-k)$-мерной плоскости $\mathcal{S}$, которая ортогональна грани F и проходит через внутреннюю точку $p \in Int\,(F)$. При сечении $(d-k)$-плоскостью $\mathcal{S}$ разбиение $\mathcal{T}$ переходит в разбиение $\widetilde{\mathcal{T}}$ плоскости $\mathcal{S}$, грань F переходит в точку $p = \widetilde{F}$, произвольная n-грань $G \succ F$ переходит в $(n-k)$-грань $\widetilde{G}$, содержащую p как вершину. Определённое таким образом соответствие, очевидно, сохраняет инцидентности граней.

Пусть задана произвольная нормировка s гиперграней из $St(F)$. Определим по s нормировку s' гиперграней из веера схождений $\mathcal{F}_F$. Для произвольной гиперграни $\widetilde{H}$ положим $s'(\widetilde{H}) := s(H)$. Докажем равенство кручений нормировок s и s'.

Рассмотрим произвольное гиперребро $\widetilde{R} = \widetilde{R}^{(d-k)-2}$ в $\mathcal{F}_F$. Его содержат гиперграни $\widetilde{H}_1, \ldots, \widetilde{H}_t$. Единичные нормали $\mathbf{n}_i \in \mathbb{E}^d$ к гиперграням $H_i \in \mathcal{T}$ также ортогональны грани $F \prec H_i$. По выбору, $F \perp \mathcal{S}$ и $\mathcal{S}$ является дополнительной плоскостью к aff (F). Следовательно, $\mathbf{n}_i$ параллельны плоскости $\mathcal{S}$ и также являются единичными нормалями к $\widetilde{H}_i$ в $\mathcal{S}$. Отсюда следует равенство кручений нормировок:

$$\Delta_{s'}(\widetilde{R}) = \sum_{i=1}^{t} s'(\widetilde{H}_i)\mathbf{n}_i = \sum_{i=1}^{t} s(H_i)\mathbf{n}_i = \Delta_s(R)$$

Обратно, по нормировке s', заданной для реализации веера схождений $\mathcal{F}_F$ в $(d-k)$-плоскости $\mathcal{S} \perp F$, правило $s(H) := s'(\widetilde{H})$ задаёт нормировку s гиперграней звезды $St_{\mathcal{T}}(F)$. Очевидно, что в этом случае также выполнено равенство нормировок $\Delta_s(R) = \Delta_{s'}(\widetilde{R})$ для соответствующих друг другу гиперрёбер $R \in \mathcal{T}$ и $\widetilde{R} \in \mathcal{F}_F$.

По определению, нормировка является канонической, когда все соответствующие кручения равны 0. Таким образом, каноническая нормировка звезды $St(F)$ существует тогда и только тогда, когда существует каноническая нормировка полного заострённого веера $\mathcal{F}_F$. По теореме 4.35, каноническая нормировка для $\mathcal{F}_F$ существует тогда и только тогда, когда веер $\mathcal{F}_F$ политопален. $\square$

При помощи доказанных критериев можно доказать существование канонической нормировки для следующих комплексов.

Следствие 4.38. *Пусть нормальное разбиение $\mathcal{T} \subset \mathbb{E}^d$ на полиэдры примитивно в некоторой k-мерной грани F. Тогда существует каноническая нормировка звезды $St_{\mathcal{T}}(F)$.*

Доказательство. По определению 1.4, в примитивной k-мерной грани d-мерного разбиения сходятся $d-k+1$ ячеек $C_1, \ldots, C_{d-k+1} \in \mathcal{T}$.

Известен факт, что все грани разбиения $\mathcal{T}$, содержащие F, также примитивны (для случая разбиения на параллелоэдры см., например [8]). Этот факт следует из наблюдения, что грань $F = F^k$ содержится в последовательности граней возрастающей размерности $F^k \prec F^{k+1} \prec \ldots \prec F^d, F^i \in \mathcal{T}$, где показатель степени i пробегает все значения от k до d. Пересечение всех ячеек из $\mathcal{T}$, содержащих грань F^i, равно грани F^i. Поэтому множество ячеек, содержащих F^i (подмножество в $C_1, \ldots, C_{d-k+1}$), содержит хотя бы на одну ячейку больше, чем аналогичное множество для F^{i+1} для любого $i, k \leqslant i \leqslant d-1$. При этом F^d принадлежит ровно одной ячейке из $\mathcal{T}$ — себе.

Произвольная ячейка из $\mathcal{T}$, содержащая F, содержит не менее $d-k$ граней размерности $k+1$, содержащих F (см. [15]). Значит F содержится не менее, чем в $d-k+1$ грани размерности $k+1$ во всём разбиении. Все такие $(k+1)$-грани G_i из $\mathcal{T}$ представляются в виде пересечения наборов по $d-k$ ячеек: $G_i = \bigcap\limits_{1 \leqslant j \leqslant d-k+1, j \neq i} C_j$. Количество различных пересечений такого вида равно $d-k+1$. Значит F содержится ровно в $d-k+1$ гранях размерности $k+1$, и все пересечения по $d-k$ ячеек из $\mathcal{T}$, содержащих F, имеют размерность $k+1$.

Из определения 4.8 следует, что веер схождений $\mathcal{F}_F = \mathcal{F}_{F,\mathcal{T}} \subset \mathbb{E}^{d-k}$ содержит $d-k+1$ одномерных рёбер g_i, соответствующих граням $G_i \in \mathcal{T}$. Они содержат общую вершину f, соответствующую грани F. При этом каждое g_i содержится в $d-k$ ячейках c_i веера схождений.

Выберем на каждом луче g_i по точке $p_i \neq f$. Тогда все выпуклые оболочки $conv_i := conv\,(p_1 \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots, p_{d-k+1})$ являются симплексами размерности $d-k-1$. Чтобы доказать это, достаточно показать, что все векторы $\overrightarrow{p_j p_1}$ $(j \neq 1, j \neq i)$ линейно независимы.

Предположим, что это не так. Не умаляя общности, считаем $i = d-k+1$ и что f является началом координат. Имеем: $\alpha_2(p_2 - p_1) + \alpha_3(p_3 - p_1) + \ldots + \alpha_{d-k}(p_{d-k} - p_1) = 0$ для некоторых вещественных α_i, не все из которых равны нулю. Но тогда радиус-векторы точек $p_1, \ldots, p_{d-k}$ линейно зависимы: $\alpha_2 p_2 + \ldots + \alpha_{d-k} p_{d-k} = (\alpha_2 + \ldots + \alpha_{d-k}) p_1$. Значит, все одномерные рёбра соответствующей ячейки c_{d-k+1} лежат в гиперплоскости в $\mathbb{E}^{d-k}$, и c_{d-k+1} имеет размерность не более $d-k-1 < d-k$. Противоречие с определением ячейки разбиения.

Таким образом, $conv_i$ являются $(d-k-1)$-мерными симплексами, которые порождают ячейки веера схождений $\mathcal{F}_F$. Аналогично устанавливается, что выпуклая оболочка всех точек p_i — симплекс размерности $d-k$, для которого $\mathcal{F}_F$ является веером граней. То есть $\mathcal{F}_F$ политопален, и по теореме 4.37 существует каноническая нормировка звезды $St_{\mathcal{T}}(F)$. □

Теорема 4.39. *У произвольного тесного веера размерности $d = 2$ или $d = 3$ существует хотя бы одна каноническая нормировка.*

Доказательство. Согласно предложению 4.1 все полные двумерные веера, в том числе и тесные, политопальны. По теореме 4.30, все трёхмерные тесные веера также политопальны. Отсюда, согласно теореме 4.35, все тесные веера размерности 2 и 3 имеют каноническую нормировку. □

4.8 Веера и параллелоэдры

Условия, наложенные на тесные веера, позволяют моделировать геометрию схождений параллелоэдров без использования целочисленных решёток.

Теорема 4.40. *Пусть задан параллелоэдр P и нормальное разбиение $\mathcal{T}_P$ пространства $\mathbb{E}^d$ на его параллельные копии. Веер схождений этого разбиения в произвольной грани является тесным.*

Доказательство. Покажем, что веер схождений $\mathcal{F}_v$ в произвольной вершине v разбиения $\mathcal{T}_P$ является тесным. Рассмотрим произвольную стандартную грань этого веера. По определению 4.6 веера схождений, она имеет вид $cone_v(G)$ для некоторой грани $G \in St(v) \subset \mathcal{T}_P$.

По определению 1.7 стандартной грани, $cone_v(G)$ представляется в виде пересечения двух ячеек веера $\mathcal{F}_v$: $cone_v(G) = cone_v(H_1) \bigcap cone_v(H_2)$ для некоторых ячеек $H_1, H_2 \in \mathcal{T}_P$. По лемме 4.5, $\mathcal{F}_v$ и $\mathcal{T}_P$ совпадают в некоторой окрестности вершины v. Так как эти разбиения нормальны, то $H_1 \bigcap H_2 = G$ и G является стандартной гранью в $\mathcal{T}_P$.

В [8] доказано, что произвольная стандартная грань G_* нормального разбиения на параллелоэдры центрально симметрична, её центр является центром симметрии всего разбиения, а также является центром симметрии любых двух ячеек разбиения, пересекающихся по G_*. Следовательно, разбиение $\mathcal{T}_P$ стандартно-симметрично в грани G (относительно центра $c(G)$, а значит и относительно любой другой точки из $relint\, G$). Из локального совпадения $\mathcal{F}_v$ и $\mathcal{T}_P$ следует, что веер $\mathcal{F}_v$ также стандартно-симметричен в произвольной стандартной грани $cone_v(G)$ и является тесным.

Рассмотрим веер $\mathcal{F}_F$ схождений в грани $F \in \mathcal{T}_P$. Реализация веера $\mathcal{F}_F$ (см. 4.8) задаётся сечением разбиения $\mathcal{T}_P$ подпространством S трансверсальным к $\mathrm{aff}\,(F)$ и проходящим через некоторую точку $p \in relint\, F$. По лемме 4.6, любые две реализации одного веера схождений аффинно эквивалентны друг другу.

Отсюда следует, что веер $\mathcal{F}_F = \mathcal{F}_{F,\mathcal{T}_P}$ аффинно эквивалентен вееру схождений $\mathcal{F}_{cone_v(F),\mathcal{F}_v}$ в грани $cone_v(F)$ веера $\mathcal{F}_v$ для произвольной вершины $v \prec F$. Согласно предложению 4.14, невырожденные аффинные преобразования сохраняют локальные симметрии. По доказанному ранее, веер $\mathcal{F}_v$ является тесным. По теореме 4.16, веер $\mathcal{F}_F$ также является тесным. $\square$

Следствие 4.41 (Теорема Делоне [20])**.** *Существует 5 различных комбинаторных типов схождений d-мерых параллелоэдров в грани коразмерности 3 соответствующего нормального разбиения $\mathcal{T}_P$. Эти типы совпадают с комбинаторными типами трёхмерных тесных вееров: комбинаторные веера граней для тетраэдра, куба, четырёхугольной пирамиды, бипризмы над треугольником и октаэдра.*

Доказательство. По теореме 4.40, веера схождений в гранях нормального разбиения $\mathcal{T}_P$ на параллельные копии параллелоэдра P являются тесными. В теореме 4.19 показано, что трёхмерные тесные веера имеют один из данных пяти комбинаторных типов.

Остаётся проверить, что все эти 5 типов встречаются уже в случае трёхмерных параллелоэдров. Это можно сделать непосредственно по списку трёхмерных параллелоэдров (см., например, [14], [35]). Приведём здесь лишь список соответствий: тип параллелоэдра — типы вееров схождения в вершинах.

Куб — веер граней октаэдра, шестиугольная призма — веер граней бипирамиды над треугольником, ромбододекаэдр — веера граней куба и тетраэдра, "двусторонне заточенный карандаш" — веера граней четырёхугольной призмы и тетраэдра, усечённый октаэдр — веера граней тетраэдра. □

Из теорем 4.40 и 4.39 вытекает следующая теорема.

Теорема 4.42. *Звёзды произвольных* $(d-2)$- *и* $(d-3)$-*граней разбиения на параллелоэдры имеют канонические нормировки (не менее одной).*

Это свойство используется в диссертации для доказательства гипотезы Вороного для односвязной δ-поверхности (см. следующую главу). Если аналогичное утверждение удастся доказать для граней коразмерности 4, то это может существенно упростить доказательство теоремы Ордина о гипотезе Вороного в случае 3-неразложимых параллелоэдров. Политопальности тесных вееров размерности 4 было бы достаточно, чтобы доказать, что условия теоремы 8 в [35] выполнены, откуда следует справедливость гипотезы для 3-неразложимого случая. Доказательства аналогичных утверждений в высших размерностях, по всей видимости, влекут продвижения в случае k-неразложимых параллелоэдров.

5 Параллелоэдры с односвязной δ-поверхностью

5.1 Канонические нормировки δ-поверхности параллелоэдра

Определение 5.1. Пусть задан d-мерный параллелоэдр P и $S_1, S_2, \ldots, S_n$ — все его стандартные (замкнутые) гиперрёбра. *δ-поверхностью* P_δ параллелоэдра P называется часть границы ∂P, которая остаётся после удаления всех стандартных гиперрёбер, то есть $\partial P \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} S_i$.

Лемма 5.1. *δ-поверхность P_δ параллелоэдра P связна тогда и только тогда, когда параллелоэдр P неразложим.*

Доказательство. Компоненты связности в P_δ в точности совпадают с компонентами комбинаторной связности на гипергранях параллелоэдра P, взятыми без границы (см. определение 2.5). Отсюда и из предложения 2.3 следует, что P_δ связна тогда и только тогда, когда подграф Венкова G_P параллелоэдра P содержит ровно одну компоненту связности. Согласно предложению 2.10, это равносильно тому, что представление $P = \bigoplus_{i=1}^{k} P_i$ в виде суммы неразложимых параллелоэдров содержит ровно одно слагаемое, то есть сам параллелоэдр P неразложим. $\square$

Из леммы 2.11 следует, что проверка гипотезы Вороного для P сводится к проверке гипотезы для неразложимых слагаемых P_i. Поэтому далее в этой главе мы считаем P неразложимым, а его δ-поверхность, соответственно, связной.

Определение 5.2. *П-цепочкой* гиперграней параллелоэдра P называется такая цепочка $\Gamma = [H_0, \ldots, H_k]$, что соседние грани H_i и H_{i+1} смежны по примитивному гиперребру.

Если $H_0 = H_k$, то Γ называется *П-циклом.*

Пусть F — произвольное примитивное гиперребро разбиения $\mathcal{T}_P$ и гиперграни $H_1, H_2 \in \mathcal{T}_P$ смежны по F. Согласно лемме 3.2, однозначно определена функция приращения нормировки $g\,[H_1, H_2] = s(H_1)/s(H_2)$, где s — произвольная каноническая нормировка для $St_{\mathcal{T}_P}(F)$. По теореме 4.42, хотя бы одна такая нормировка существует.

Для произвольной П-цепочки $[H_0, \ldots, H_k]$ в $\mathcal{T}_P$ однозначно определена функция приращения нормировки вдоль этой цепочки:

$$g([H_0, \ldots, H_k]) = \prod_{i=1}^{k} g\left[H_{i-1}, H_i\right]$$

Аналогично лемме 3.23 (см. также [28, Лемма 2.4]) доказывается следующее предложение:

Предложение 5.2. *Пусть на гипергранях параллелоэдра P задана некоторая нормировка s. Если для каждой пары гиперграней $H_1, H_2 \prec P$, смежных по примитивному гиперребру, выполнено равенство $s(H_j)/s(H_i) = g[H_j, H_i]$, то существует каноническая нормировка всего разбиения $\mathcal{T}_P$.*

Определение 5.3. Кривая $\gamma \subset P_\delta$ называется *кривой общего положения*, если её концы лежат внутри некоторых гиперграней параллелоэдра, γ не пересекает граней P размерности ниже $(d-2)$, а её пересечения с $(d-2)$-гранями трансверсальны.

Определение 5.4. *Опорной П-цепочкой* для кривой общего положения γ называется П-цепочка, которая состоит из гиперграней покрывающих γ в порядке их следования вдоль γ.

Отметим, что такая цепочка действительно является П-цепочкой, так как, по определению, γ не пересекает граней размерности ниже $(d-2)$, а все $(d-2)$-грани в P_δ, по построению, примитивны. Значит соседние ячейки опорной цепочки смежны лишь по примитивным $(d-2)$-граням.

Определение 5.5. *Приращение $g(\gamma)$ вдоль кривой общего положения γ* определяется как приращение вдоль опорной П-цепочки для γ.

Очевидно, что для объединения кривых $\gamma = \gamma_1 \bigcup \gamma_2$ выполнено $g(\gamma) = g(\gamma_1) \cdot g(\gamma_2)$.

Лемма 5.3. *Гипотеза Вороного для параллелоэдра P со связной δ-поверхностью верна тогда и только тогда, когда $g(\gamma) = 1$ выполнено для любого цикла общего положения на P_δ.*

Доказательство. Пусть $g(\gamma) = 1$ выполняется для любого цикла $\gamma \subset P_\delta$ общего положения. Построим нормировку s гиперграней из P по приращениям g вдоль П-цепочек на поверхности P. Выберем произвольную гипергрань $H \in P$ и положим $s(H) := 1$. Для каждой другой гиперграни $G \in P$ рассмотрим произвольную кривую общего положения γ, которая соединяет центры H и G. Положим $s(G) := g(\gamma)$.

По предположению, P_δ связна. Следовательно, на любой гиперграни G функция s определена. Покажем, что $s(G)$ определена однозначно.

Предположим противное, тогда существуют две различные кривые γ_1, γ_2, ведущие из центра H в центр G и такие, что $g(\gamma_1) \neq g(\gamma_2)$. Через γ^{-1} обозначим кривую γ пройденную в обратном направлении. Тогда для цикла $\gamma = \gamma_1 \bigcup \gamma_2^{-1}$ приращение равно $g(\gamma) = g(\gamma_1) \cdot g(\gamma_2^{-1}) = \frac{g(\gamma_1)}{g(\gamma_2)} \neq 1$. Противоречие. Значит, функция s определена однозначно.

Покажем, что функция s удовлетворяет условию предложения 5.2. Рассмотрим произвольные две гиперграни H_1 и H_2, смежные по примитивному гиперребру. Обозначим произвольную кривую общего положения, соединяющую центры H и H_1, через γ_1, а кривую для H и H_2 — через γ_2. Кроме того, пусть γ_3 — кривая, ведущая из центра H_1 в центр H_2 непосредственно через общее гиперребро. Тогда $1 = g(\gamma_1 \bigcup \gamma_3 \bigcup \gamma_2^{-1}) = g(\gamma_1) \cdot g(\gamma_3)/g(\gamma_2)$.

По определению, $g(\gamma_3) = g[H_2, H_1]$, $g(\gamma_1) = s(H_1)$ и $g(\gamma_2) = s(H_2)$. Следовательно, верно $g[H_2, H_1] = \frac{s(H_2)}{s(H_1)}$, то есть выполнены условия предложения 5.2.

Согласно предложению 5.2, существует каноническая нормировка разбиения $\mathcal{T}_P$. По теореме 3.33 отсюда следует, что для параллелоэдра P верна гипотеза Вороного.

В обратную сторону утверждение тривиально: согласно теореме 3.33, если выполнена гипотеза Вороного, то определена каноническая нормировка разбиения $\mathcal{T}_P$. В частности, определена нормировка s гиперграней параллелоэдра P. По лемме 3.2, на каждой паре гиперграней $H_i, H_j \in P$, смежных по примитивному гиперребру, приращение $g[H_i, H_j]$ определено однозначно и равно $s(H_j)/s(H_i)$. Приращение вдоль произвольного цикла общего положения равно $g(\gamma) = \frac{s(H_1)}{s(H_2)} \cdot \ldots \cdot \frac{s(H_k)}{s(H_1)} = 1$ для соответствующих гиперграней $H_1, \ldots, H_k$. $\square$

5.2 Доказательство гипотезы Вороного для параллелоэдров с односвязной δ-поверхностью

Граница ∂P параллелоэдра P гомеоморфна $(d-1)$-мерной сфере. Произвольная $(d-3)$-грань $G \in P$ имеет коразмерность 2 в граничном комплексе ∂P.

Рассмотрим объединение U_G всех гиперграней $H_i \in P$, содержащих G. Объединение U_G гомеоморфно произведению $G \times D^2$, где D^2 — двумерный диск. Гиперграни H_i можно согласованно представить в виде $G \times S_i \subset G \times D^2$, где S_i — двумерный сектор в D^2, и $\bigcup S_i = D^2$.

Определение 5.6. *Циклом вокруг* G называется цепочка $[H_1, \ldots, H_k]$, состоящая из всех гиперграней параллелоэдра P, которые содержат G и встречаются в цепочке ровно 1 раз.

Очевидно, цикл вокруг G определён однозначно с точностью до выбора одного из двух направлений обхода, заданных обходом секторов S_i в D^2.

Лемма 5.4. *Рассмотрим $(d-3)$-грань G параллелоэдра P. Если все гиперрёбра параллелоэдра P, которые содержат G, примитивны, то цикл вокруг G является П-циклом, приращение вдоль которого равно 1.*

Доказательство. Если все гиперрёбра параллелоэдра P, которые содержат G, примитивны, то по определению цикл вокруг G является П-циклом.

По теореме 4.42, у звезды каждой $(d-3)$-грани разбиения на параллелоэдры есть каноническая нормировка. Для произвольной нормировки s такой звезды приращение g вдоль П-цикла равно

$$g([H_k, H_1, \ldots, H_k]) = \frac{s(H_1)}{s(H_k)} \frac{s(H_2)}{s(H_1)} \cdot \ldots \cdot \frac{s(H_k)}{s(H_{k-1})} = 1$$

где H_i — все гиперграни этого П-цикла. □

Лемма 5.5. *Если два цикла общего положения на δ-поверхности параллелоэдра P гомотопны, то приращения вдоль этих циклов равны: $g(\gamma_1) = g(\gamma_2)$.*

Замечание. *Под гомотопией здесь и далее мы подразумеваем непрерывную гомотопию.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную гомотопию $\mathfrak{H}(t)$ между γ_1 и γ_2: $\mathfrak{H}(0) = \gamma_1, \mathfrak{H}(1) = \gamma_2$. Малым шевелением гомотопии $\mathfrak{H}$ можно получить гомотопию $\mathfrak{G}$ общего положения, для которой выполнено:

• $\mathfrak{G}(0) = \gamma_1, \mathfrak{G}(1) = \gamma_2$;

• Ни для какого параметра t цикл $\mathfrak{G}(t)$ не пересекает граней параллелоэдра P размерности ниже $(d-3)$;

• При любом значении параметра t цикл $\mathfrak{G}(t)$ имеет не более одной точки пересечения с множеством $(d-3)$-граней параллелоэдра P;

• Есть лишь конечное количество значений $t_1, t_2, \ldots, t_n$ при которых цикл $\mathfrak{G}(t)$ пересекает некоторую $(d-3)$-грань G_i^{d-3} параллелоэдра P;

• Есть лишь конечное количество значений $\tau_1, \ldots, \tau_k$ $(t_i \neq \tau_j)$ при которых цикл $\mathfrak{G}(t)$ имеет нетрансверсальное пересечение с некоторым гиперребром F_j параллелоэдра. При этом, для каждого τ_i такое пересечение ровно одно, а при $t \neq \tau_i$ все пересечения $\mathfrak{G}(t)$ с гиперрёбрами параллелоэдра трансверсальны.

Для произвольного $t \in (0,1)$, $t \neq t_i$, $t \neq \tau_j$, цикл $\mathfrak{G}(t)$ находится в общем положении, и определено приращение $g(\mathfrak{G}(t))$. Покажем, что оно не зависит от t.

На каждом отрезке $[a,b] \subset [0,1]$, который не содержит точек t_i, τ_j, функция $g(\mathfrak{G}(t))$ постоянна, так как при $t \in [a,b]$ опорная цепочка для $\mathfrak{G}(t)$ не зависит от t. Докажем, что приращение не меняется при прохождении точек t_i, τ_j.

Если t проходит значение τ_j, то либо опорная П-цепочка для $\mathfrak{G}(t)$ не меняется, либо меняется следующим образом: одна из гиперграней H в опорной цепочке заменяется на участок $[H,G,H]$ (либо наоборот) для некоторых гиперграней H и G с общим примитивным гиперребром. В этом случае g не меняется так как $g([H,G,H]) = 1$.

Если t проходит значение t_j, то либо опорная цепочка не меняется, либо $(d-3)$-примитивная в некоторой грани G^{d-3} часть цепочки $[H_k, H_{k+1}, \ldots, H_l]$ заменяется на другую $(d-3)$-примитивную в той же G^{d-3} цепочку, с тем же началом H_k и тем же концом H_l. В этом случае приращение $g(\mathfrak{G}(t))$ не меняется в силу леммы 5.4.

Таким образом, $g(\mathfrak{G}(t))$ — константа, $g(\gamma_1) = g(\mathfrak{H}(0)) = g(\mathfrak{G}(0)) = g(\mathfrak{G}(1)) = g(\mathfrak{F}(1)) = g(\gamma_2)$. $\square$

Следствие 5.6. *Функция приращения* g *задаёт гомоморфизм фундаментальной группы* $\pi_1(P_\delta)$ *в* $\mathbb{R}_+$.

Теорема 5.7. *Рассмотрим параллелоэдр* P *со связной* δ*-поверхностью. Если группа гомологий* $H_1(P_\delta, \mathbb{Z})$ *тривиальна, в частности, если фундаметальная группа* $\pi_1(P_\delta)$ *тривиальна, то для* P *верна гипотеза Вороного.*

Доказательство. Группа гомологий $H_1(P_\delta, \mathbb{Z})$ изоморфна фактор-группе $\pi_1(P_\delta)/[\pi_1(P_\delta)]$, где $[\pi_1(P_\delta)]$ — коммутант группы $\pi_1(P_\delta)$. Если $H_1(P_\delta, \mathbb{Z})$ тривиальна, то $\pi_1(P_\delta) = [\pi_1(P_\delta)]$. Следовательно, произвольный цикл общего положения $\gamma \subset P_\delta$ можно представить в виде произведения $\gamma = \gamma_1 \cdot \ldots \cdot \gamma_k$, где $\gamma_i = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$ — цикл из коммутанта $[\pi_1(P_\delta)]$.

Так как $\mathbb{R}_+$ — коммутативная группа относительно умножения, то значения g на элементах коммутанта $\gamma_i \in [\pi_1(P_\delta)]$ равны 1. Следовательно, $g(\gamma) = 1$. По лемме 5.3 отсюда следует, что для параллелоэдра P верна гипотеза Вороного. $\square$

Список литературы

[1] Александров А.Д., О заполнении пространства многогранниками. Вестник Ленинградского Университета, сер. мат., физ., хим., 1954. Том 2, 33-43

[2] А. Бердон, Геометрия дискретных групп, пер. с англ. А.С. Солодовникова, "Наука", Москва, 1986.

[3] Б.А. Венков, Об одном классе эвклидовых многогранников. Вестник Ленинградского Университета, сер. мат., физ., хим., 1954. Том 9, 11-31

[4] А.А. Гаврилюк, Тесные веера и их канонические нормировки. Preprint: arXiv:1603.01873, 2016.

[5] А.А. Гаврилюк, Геометрия подъемов разбиений евклидовых пространств, Геометрия, топология и приложения, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения профессора Николая Петровича Долбилина, Тр. МИАН, 288, МАИК, М., 2015, 49–66

[6] А.А. Гаврилюк, "Класс аффинно эквивалентных параллелоэдров Вороного", Матем. заметки, 95:5 (2014), 697–707

[7] В.П. Гришухин, Сумма параллелоэдра и отрезка по Минковскому, Матем. сб., 197:10 (2006), 15–32

[8] Н.П. Долбилин, Свойства граней параллелоэдров. Труды МИАН (2009), 266, 112-126.

[9] Н.П. Долбилин, "Параллелоэдры: ретроспектива и новые результаты", Тр. ММО, 73, № 2, МЦНМО, М., 2012, 259–276

[10] Н.П. Долбилин, В.С. Макаров, "Теорема о продолжении в теории правильных разбиений и ее приложения", Дискретная геометрия и геометрия чисел, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова, Тр. МИАН, 239, Наука, М., 2002, 146–169.

[11] А.Н. Магазинов, "Гипотеза Вороного для удлинений параллелоэдров Вороного", УМН, 69:4(418) (2014), 185–186, doi:10.4213/rm9601

[12] А.Н. Магазинов, “К теореме Делоне о классификации схождений параллелоэдров в гранях коразмерности 3”, Моделирование и анализ информ. систем, 20:4, (2015), 71-80.

[13] Зейферт Г., Трельфалль В. Топология. — Ижевск:РХД, 2001.

[14] Е.С. Фёдоров, Начала учения о фигурах. Санкт-Петербург, 1885

[15] Циглер Г.М., Теория многогранников / Пер. с англ. под ред. Н.П. Долбилина. М.:МЦНМО, 2014.

[16] М.И. Штогрин, Правильные разбиения Дирихле-Вороного для второй триклинной группы, Тр. МИАН СССР, 123(1973), ред. С.М. Никольский, 128 с.

[17] F. Aurenhammer, “A criterion for the Affine Equivalence of Cell Complexes in $\mathbb{R}$ and convex polyhedra in $\mathbb{R}^{d+1}$, Discrete and Computational Geometry, vol.2, p.49-64, 1987

[18] V.M. Buchstaber, T.E. Panov, Toric Topology, AMS Math Surveys and Monographs, 204 (2015).

[19] C. Davis, The set of non-linearity of a convex piecewise-linear function, Scripta Mathematica 24 (1959), 219-228.

[20] Delaunay B.N., Sur lá partition reguliére de l'espace a 4 dimension. Изв. АН СССР, (1929) No 1, 79-110, No 2, 147-164.

[21] Deza M., Grishukhin V., Properties of parallelotopes equivalent to Voronoi's conjecture. Eur. J. of Comb., 25 (2004), 517-533.

[22] N.P. Dolbilin, “The extension theorem”, Discrete Math., 221:1-3, Selected papers in honor of Ludwig Danzer (2000), 43–59

[23] N. Dolbilin, J.-I. Itoh, and C.Nara, “Affine equivalent classes of parallelohedra,” in Lecture Notes in Comput. Sci., Vol. 7033: Computational Geometry, Graphs and Applications (Springer-Verlag, Heidelberg, 2011), pp. 55–60.

[24] H. Edelsbrunner, R. Seidel, “Voronoi Diagrams and Arrangements”, Discrete and Computational Geometry, v.1 n.1, p.25-44, 1986, doi: 10.1007/BF02187681

[25] R. Erdahl, Zonotopes, Dicings, and Voronoi’s Conjecture on Parallelohedra. Eur. J. Comb., 20(6): 527-549 (1999)

[26] W. Fulton, Intorduction to Toric Varieties, Princeton University Press, 1993

[27] Garber A.: On π-surfaces of four-dimensional parallelohedra. http://arxiv.org/abs/1309.7661 (2013)

[28] A. Garber, A. Gavrilyuk, A. Magazinov, The Voronoi conjecture for parallelohedra with simply connected δ-surface. Discrete and Computational Geometry, vol.53 iss.2, p.245-260, 2015, DOI: 10.1007/s00454-014-9660-z

[29] B. Grünbaum, Convex Polytopes. Graduate Texts in Mathematics, vol.221, Springer-Verlag New York, 2003. DOI: 10.1007/978-1-4613-0019-9

[30] P. McMullen, Convex bodies which tile space by translation. Mathematika, 27, pp 113-121 (1980) DOI:10.1112/S0025579300010007

[31] P. McMullen, Duality, sections and projections of certain Euclidean tiliings, Geom. Dedicata 49 (1994), 183-202

[32] L.Michel, S.S. Ryshkov, and M. Senechal, “An extension of Voronoï’s theorem on primitive parallelotopes”, European J. Combin. 16, 59–63 (1995).

[33] H. Minkowski, Allgemeine Leherzätze über konvexe Polyeder. Nach. Ges. Wiss. Göttingen 1897, 198-219

[34] Minkovski, Sur la réduction des formes positives quaternaires, Comptes Rendus, t.96, p.1205

[35] A. Ordine, Proof of the Voronoi conjecture on parallelotopes in a new special case. PhD thesis. Queen’s University, Kingston (2005)

[36] Ryshkov S.S., Rybnikov Jr. K.A., The theory of quality translations with applications to tilings. Eur. J. Comb., 18(4):431-444, 1997.

[37] G.C. Shephard, “Polytopes with centrally symmetric faces”, Canad. J. Math, 19, 1206-1213 (1967)

[38] W. P. Thurston, The Geometry and Topology of Three-Manifolds, in Princeton Univ. Lectures Notes (Princeton Univ. Press, Princeton, 1980).

[39] G. Voronoi, Nouvelles applications des paramétres continus á la theorie des formes quadratiques, II Mémoire: Recherches sur les paralléloédres primitifss. Crelle Journ., 134, 1909; Собрание сочинений, т. II (1952)

[40] O.K. Zhitomirskii, Verschärfung eines Satzes von Woronoi. Leningr. fiz.-math. Obshch. 2(1929), 131-151.