Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук

На правах рукописи
УДК 512.776, 512.765

Авилов Артем Алексеевич

Автоморфизмы алгебраических многообразий и минимальные модели

Специальность:
01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2016

Работа выполнена на факультете математики Национального Исследовательского Университета "Высшая Школа Экономики"

Научный руководитель:

ПРОХОРОВ Юрий Геннадьевич — доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник отдела алгебраической геометрии Федерального государственного бюджетного учреждения науки Математический институт им. В.А.Стеклова Российской академии наук (специальность 01.01.06).

Официальные оппоненты:

КУЗЬМИН Леонид Викторович - доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института информационных технологий Федерального государственного бюджетного учреждения Национальный исследовательский центр «Курчатовский институт» (специальность 01.01.06);

ТРЕПАЛИН Андрей Сергеевич - кандидат физико-математических наук, и.о. научного сотрудника Федерального государственного бюджетного учреждения науки Институт проблем передачи информации им. А.А.Харкевича Российской академии наук (ИППИ РАН), сектор 4.1 "Алгебра и теория чисел"(специальность – 01.01.06).

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых».

Защита диссертации состоится 20 октября 2016 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета Д 002.022.03 при Математическом институте им. В.А. Стеклова Российской академии наук по адресу: 119991, г. Москва, ул. Губкина, д. 8, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук и на сайте МИАН по адресу: http://www.mi.ras.ru/dis/ref16/avilov/dis.pdf

Автореферат разослан __ августа 2016 г. Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по указанному адресу на имя учёного секретаря диссертационного совета.

Учёный секретарь диссертационного совета
Д 002.022.03, доктор физико-математических наук М. А. Королёв

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Классификация алгебраических многообразий – одна из важнейших задач алгебраической геометрии. Многие известные математики занимались ей с самых ранних работ по алгебраической геометрии конца XIX века. Существует два основных направления классификации – бирегулярная и бирациональная классификация, в которых многообразия классифицируются с точностью до изоморфизма и бирациональной эквивалентности соответственно.

Бирациональная классификация алгебраических кривых устроена достаточно просто: в любом классе бирациональной эквивалентности есть ровно одна неособая проективная кривая, основным инвариантом которой является её род. Следующим шагом является классификация поверхностей. Она была осуществлена в начале XX века усилиями итальянских геометров (Ф. Севери, К. Сегре, Г. Кастельнуово, Ф. Энриквеса и др.), однако зачастую методы, которыми они пользовались, были нестрогими, а доказательства содержали ошибки. В 60-х годах XX века их работы были критически пересмотрены, а утверждения передоказаны с использованием разработанной на тот момент техники московской школой алгебраической геометрии[1]. Любая неособая алгебраическая поверхность с помощью стягивания (-1)-кривых может быть приведена к минимальной модели (поверхность называется минимальной, если на ней нет (-1)-кривых), поэтому классифицировать нужно только минимальные поверхности. Основным их инвариантом является размерность Кодаиры, которая для поверхностей может принимать значение $-\infty,\ 0, 1$ или 2. Поверхности кодаировой размерности $-\infty$ бирационально эквивалентны $\mathbb{P}^1 \times C$, где C – алгебраическая кривая; поверхности кодаировой размерности 0 принадлежат одному из следующих классов: K3, абелевы, биэллиптические или поверхности Энриквеса; поверхности кодаировой размерности 1 являются эллиптическими; поверхности кодаировой размерности 2 называются поверхностями общего типа. Множество результатов имеется на тему дальнейшей классификации поверхностей, не все классы классифицированы полностью.

В процессе классификации многообразий над алгебраически незамкну-

[1] В.А. Исковских, И.Р. Шафаревич "Алгебраические поверхности", *Алгебраическая геометрия-2, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления*, **35**, ВИНИТИ, М., (1989), 131–263

тыми полями и при классификации конечных групп бирациональных автоморфизмов естественным образом возникает понятие G-многообразия.

Определение. *G-многообразием* называется многообразие X над полем $\Bbbk$ с действием группы G на $X \otimes \overline{\Bbbk}$.

Впервые понятие G-многообразия было введено Ю.И. Маниным[2] при изучении рациональных поверхностей над совершенными полями. Техника G-поверхностей была усовершенствована В.А. Исковских, который классифицировал рациональные G-поверхности[3][4]. Наиболее важными случаями G-многообразий являются следующие:

1. алгебраический случай: группа G является группой Галуа поля $\overline{\Bbbk}$ над $\Bbbk$ и действует на $X \otimes \overline{\Bbbk}$ через второй сомножитель;

2. геометрический случай: группа G является конечной группой, действующей на X $\Bbbk$-автоморфизмами.

Первый случай важен для классификации многообразий над алгебраически незамкнутыми полями. Далее мы будем рассматривать только геометрический случай. Одним из важнейших приложений изучения геометрического случая G-многообразий является изучение группы Кремоны.

Определение. *Группа Кремоны* $\mathrm{Cr}_n(\Bbbk)$ ранга n – это группа бирациональных автоморфизмов проективного пространства $\mathbb{P}^n_{\Bbbk}$.

Изучение свойств этих групп также является давней и важной задачей бирациональной геометрии. В дальнейшем в этом параграфе мы будем полагать, что $\Bbbk$ – алгебраически замкнутое поле характеристики 0.

Группа Кремоны ранга 1 устроена очень просто: поскольку бирациональные автоморфизмы кривых совпадают с их бирегулярными автоморфизмами, то $\mathrm{Cr}_1(\Bbbk) = \mathrm{PGL}_2(\Bbbk)$. Если ранг равен 2, то группа Кремоны порождается

[2] Ю.И. Манин, “Кубические формы: алгебра, геометрия, арифметика”, *Наука, Москва*, 1987

[3] В.А. Исковских, “Рациональные поверхности с пучком рациональных кривых”, *Матем. Сб.*, **74(116):4** (1967), 608–638

[4] В.А. Исковских, “Рациональные поверхности с пучком рациональных кривых и с положительным квадратом канонического класса”, *Матем. Сб.*, **83(125):1(9)** (1970), 90–119

группой $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2) \simeq \mathrm{PGL}_2(\Bbbk)$ и всего одним дополнительным элементом[5], действующим по правилу

$$(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_1x_2 : x_0x_2 : x_0x_1).$$

Соотношения на её порождающие были впервые найдены М. Гизатуллиным[6]. Однако, уже начиная с ранга 3 группа Кремоны не обладает хорошим набором порождающих[7], и практически ничего не известно о её структуре. Изучение алгебраических и топологических свойств группы Кремоны ранга 2 активно продолжается в настоящее время.

Другая классическая задача, связанная с группами Кремоны – классификация их конечных подгрупп с точностью до сопряжения (и, в частности, элементов конечного порядка). Известно, что группы Кремоны ранга 2 и 3 удовлетворяют свойству Жордана – существует такая константа N, что для любой конечной подгруппы группы Кремоны в ней есть нормальная абелева подгруппа индекса не более, чем N[8][9]. Преположительно этот результат верен в любой размерности. Поэтому можно ожидать, что конечные подгруппы в группе Кремоны малого ранга допускают разумную классификацию.

Изучение конечных подгрупп в группе $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ было начато Бертини[10] и продолжена многими другими математиками. Классификация конечных подгрупп в $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ была завершена И. Долгачёвым и В. Исковских[11] (за исключением некоторых специальных случаев). Суть метода классификации состоит в следующем. Пусть G – конечная подгруппа в $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$. Тогда действие G регуляризуется, т.е. существует неособое проективное многообразие Z, на котором G действует *бирегулярными* автоморфизмами с эквивариантным бирациональным отображением $Z \dashrightarrow \mathbb{P}^2$. После эквивариантных стя-

[5]M. Noether, “Uber die ein-zweideutigen Ebenentransformationen”, *Sitzungberichte der physicmedizin, Soc. zu Erlangen*, 1878

[6]М.Х. Гизатуллин, “Определяющие соотношения для кремоновой группы плоскости”, *Изв. АН СССР, Сер. матем.*, **46:5** (1982), 909–970

[7]H.P. Hudson, “Cremona transformations in plane and space”, *Cambridge Univ. Press*, 1927

[8]Yu. Prokhorov, C. Shramov “Jordan property for Cremona groups”, *Compositio Math.*, **150:12** (2014). 2054-2072

[9]J.-P. Serre, “A Minkowski-style bound for the orders of the finite subgroups of the Cremona group of rank 2 over an arbitrary field”, *Mosc. Math. J.*, **9:1** (2009), 183–198

[10]E. Bertini, “Ricerche sulle trasforormazioni univoche involutorie nel piano”, *Annali di Mat. Pura Appl. (2)*, **8** (1877), 254–287

[11]I. Dolgachev, V. Iskovskikh, “Finite subgroups of the plane Cremona group”, *In Algebra, arithmetic and geometry: in honour of Yu.I. Manin. Vol I, Progr. Math.*, **269** (2009), 443–548

гиваний (-1)-кривых, мы получим G-многообразие, которое является либо G-расслоением на рациональные кривые над $\mathbb{P}^1$ с $\operatorname{rk}\operatorname{Cl}(X)^G = 2$, либо G-минимальной поверхностью дель Пеццо. Классифицировав все возможные минимальные группы для расслоений на коники и для поверхностей дель Пеццо, Долгачёв и Исковских получили полную классификацию конечных подгрупп в $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ (по модулю некоторых серий). Но довольно часто полученные подгруппы являются сопряжёнными в $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$, поэтому их естественно отождествить. Несложно видеть, что G-многообразия Z_1 и Z_2 дают сопряжённые подгруппы в том и только том случае, когда есть G-эквивариантное бирациональное отображение $Z_1 \dashrightarrow Z_2$. Поэтому кроме классификации всех рациональных G-расслоений Мори необходимо исследовать также и бирациональные отображения между различными расслоениями. Есть некоторые частные результаты также для групп Кремоны ранга 2 над полями, отличными от $\mathbb{C}$.

Новый взгляд на бирациональную классификацию алгебраических многообразий появился с развитием программы минимальных моделей. Она является естественным обобщением процедуры приведения поверхности к минимальной форме путём стягивания (-1)-кривых на многообразия старших размерностей. Она состоит в следующем: любое неособое проективное многообразие с помощью определённых бирациональных преобразований, а именно дивизориальных стягиваний и флипов, можно привести к многообразию одного из следующих типов: либо полученное многообразие имеет численно эффективный антиканонический класс, либо оно допускает структуру расслоения Мори[12].

Определение. Проективное (G-)многообразие X с (эквивариантным) морфизмом $\pi : X \to Y$ называется *(G-)расслоением Мори*, если его особенности не более чем терминальные $\mathbb{Q}$-факториальные (соотв., $G\mathbb{Q}$-факториальные, т.е. любой G-инвариантный дивизор Вейля является дивизором $\mathbb{Q}$-Картье), $\pi_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$, $\dim X > \dim Y$, относительное число Пикара $\rho(X/Y)$ равно 1 (соотв., $\rho^G(X/Y) = 1$) и антиканонический класс $-K_X$ является π-обильным.

Программа минимальных моделей полностью обоснована для трёхмерных многообразий над полями характеристики нуль[13], а также для некоторых

[12] K. Matsuki, “Introduction to Mori program”, *Universitext, Springer-Verlag*, 2002

[13] J. Kollar, S. Mori, “Birational geometry of algebraic varieties”, *Cambridge Tracts in Math.*, **134**, 1998

классов многообразий в старших размерностях, например, для рационально связных многообразий[14]. В данной ситуации имеется также эквивариантная (например, относительно конечной группы или группы Галуа) и относительная (над произвольным многообразием) программа минимальных моделей. В настоящий момент в обосновании программы минимальных моделей остаются открытые вопросы в случае многообразий размерности выше 4 и промежуточной кодаировой размерности, а также для многообразий над полями положительной характеристики. В виду того, что любое многообразие (и G-многообразие) можно компактифицировать и разрешить особенности, программа минимальных моделей даёт первый шаг к полной бирациональной классификации многообразий. Таким образом, классификация G-расслоений Мори является важной задачей для бирациональной классификации многообразий. Среди них выделяется класс многообразий Фано.

Определение. Нормальное проективное G-многообразие X называется *$G\mathbb{Q}$-многообразием Фано*, если его отображение в точку является G-расслоением Мори. Если при этом канонический дивизор K_X является дивизором Картье, то X называется *G-многообразием Фано*.

Классификация (особых) многообразий Фано тривиальна в случае кривых: только $\mathbb{P}^1$ является одномерным многообразием Фано. В случае поверхностей классификация устроена несколько сложнее, но тоже обозримо. Неособые многообразия Фано размерности 2 называются поверхностями дель Пеццо и полностью классифицированы: все они являются либо раздутиями $\mathbb{P}^2$ в не более чем восьми точках в общем положении, либо $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Поскольку в двумерном случае программа минимальных моделей не выводит из класса неособых многообразий, то с её точки зрения этой классификации достаточно.

В трёхмерном случае уже классификация неособых многообразий Фано является крайне нетривиальной, даже для случая $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}$[15]. Однако, этого недостаточно для нужд программы минимальных моделей, поскольку в трёхмерном случае минимальным классом многообразий, в котором работает программа, являются многообразия с не более чем терминальными особенно-

[14] C. Birkar, P. Cascini, C.D. Hacon, J. McKernan, “Existence of minimal models for varieties of log general type”, *J. Am. Math. Soc.*, **23:2** (2010), 405–468

[15] V. Iskovskikh, Yu. Prokhorov, “Fano varieties, Algebraic geometry V”, *Encyclopaedia Math. Sci.*,, Springer, Berlin, 1999

стями. Классификация особых многообразий Фано проводится отдельно для горенштейновых и негоренштейновых многообразий различными методами. В случае горенштейновых многообразий с терминальными особенностями известно, например, что они обладают сглаживанием[16], в частности, они имеют те же когомологические инварианты, что и неособые многообразия. В случае негоренштейновых многообразий наиболее важным результатом является ограниченность трёхмерных многообразий $\mathbb{Q}$-Фано с каноническими особенностями[17]. Имеются отдельные результаты в зависимости от индекса Фано многообразия. Имеются частичные результаты по классификации горенштейновых G-многообразий Фано.

Так же, как и в двумерном случае, изучение $G\mathbb{Q}$-расслоений Мори помогает в задаче классификации конечных подгрупп в $\mathrm{Cr}_n(\Bbbk)$. Эта программа была реализована в некоторых частных случаях для группы Кремоны ранга 3 над полем $\mathbb{C}$: например, классифицированы простые неабелевы подгруппы[18], 2-элементарные[19] и p-элементарные подгруппы[20].

Таким образом, классификация рациональных G-расслоений Мори является важной задачей с разных точек зрения.

Большая часть диссертации посвящена классификации конечных групп автоморфизмов трёхмерных многообразий дель Пеццо, изучению их минимальности и бирациональной жёсткости.

Определение. Трёхмерное многообразие X называется *многообразием дель Пеццо*, если оно имеет не более чем терминальные горенштейновы особенности, а его антиканонический класс $-K_X$ является обильным дивизором Картье и делится на 2 в группе Пикара. Если G – такая конечная подгруппа $\mathrm{Aut}(X)$, что $\rho^G(X) = 1$, то будем говорить, что X *G-минимально*, а группу G в этом случае будем называть *минимальной*.

Частично трёхмерные $G\mathbb{Q}$-многообразия дель Пеццо были классифицированы Ю. Прохоровым[21] в терминах структуры группы классов дивизоров

[16] Y. Namikawa, "Smoothing Fano 3-folds", *J. Alg. Geom.*, **6** (1997), 307–324

[17] Y. Kawamata, "Boundness of $\mathbb{Q}$-Fano threefolds", *Proc. Int. Conf. Algebra. Contemp. Math.*, **131** (1992), 439–445

[18] Yu. Prokhorov, "Simple finite subgroups of the Cremona group of rank 3", *J. Algebraic Geom.*, **21:3** (2012), 563–600

[19] Yu. Prokhorov, "2-elementary subgroups of the space Cremona group", *Automorphisms in birational and affine geometry, Springer Proc. in Math. and Stat.* **79** (2014), 215–229

[20] Yu. Prokhorov, "p-elementary subgroups of the Cremona group of rank 3", *Classification of algebraic varieties, EMS Ser. Congr. Rep. Eur. Math. Soc.* (2011), 327–338

и действия группы G на ней.

Поскольку нас в основном интересуют приложения к изучению группы Кремоны, мы изучаем следующий вопрос: классифицировать $G\mathbb{Q}$-многообразия дель Пеццо, не допускающие бирациональной перестройки в более простые $G\mathbb{Q}$-многообразия Фано (например, в $\mathbb{P}^3$ или квадрику в $\mathbb{P}^4$), поскольку соответствующие подгруппы в группе Кремоны уже описаны, а также в G-расслоения Мори с базой положительной размерности, поскольку их группы автоморфизмов лучше изучать с других точек зрения. Группы, допускающие перестройку в $\mathbb{P}^3$ мы будем называть *линеаризуемыми*, а группы, допускающие перестройку в расслоение Мори на коники или поверхности дель Пеццо – *расслоенного типа*.

Основным инвариантом многообразия дель Пеццо X является его *степень* $d = (-\frac{1}{2}K_X)^3$, которая может принимать значения от 1 до 8. В случае $d \geq 5$ любое G-многообразие является неособым[21], а такие многообразия и их группы автоморфизмов хорошо изучены.

Цель работы

Главной целью работы является изучение геометрии трёхмерных G-расслоений на коники и G-многообразий дель Пеццо, а также приложение полученных результатов к изучению трёхмерной группы Кремоны.

Методы исследования

В диссертации используются методы классической алгебраической геометрии и программы минимальных моделей, теории особенностей алгебраических многообразий, теории групп и теории представлений.

Научная новизна

Результаты лиссертации являются полностью новыми. Основные из них состоят в следующем:

1. Доказано, что трёхмерное G-расслоение Мори на коники над произвольным полем характеристики нуль имеет стандартную модель. Таким об-

[21] Yu. Prokhorov, “G-Fano threefolds, I”, *Adv. Geom.*, **13:3** (2013), 389–418

разом, для классификации конечных подгрупп в группе Кремоны достаточно изучать только стандартные G-расслоения на коники.

2. Классифицированы все рациональные G-многообразия дель Пеццо степеней 3 и 4, не допускающие G-эквивариантной бирациональной перестройки в более простые G-многообразия и в G-расслоения Мори с базой положительной размерности. Таким образом, классифицированы все G-многообразия, которые могут быть G-бирационально жёсткими и, следовательно, дают новые подгруппы в группе Кремоны.

3. Доказана бирациональная жесткость некоторых полученных многообразий.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в алгебраической геометрии.

Апробация результатов

Основные результаты диссертации докладывались

- на летней школы-конференции по алгебраической геометрии и комплексному анализу для молодых ученых России (Коряжма, 2015),
- на семинаре «Геометрия алгебраических многообразий» им. В. А. Исковских под руководством Ю. Г. Прохорова, В. В. Пржиялковского, Д. О. Орлова, К. А. Шрамова в МИАН (Москва, 2013),
- на семинаре «Геометрия алгебраических многообразий» им. В. А. Исковских под руководством Ю. Г. Прохорова, В. В. Пржиялковского, Д. О. Орлова, К. А. Шрамова в МИАН (Москва, 2015),

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в трёх единоличных работах из списка ВАК, одном тезисе конференции и одном препринте. Список публикаций приведён в конце автореферата.

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из пяти глав, разбитых на параграфы. В конце приводится список литературы, состоящий из 75 наименований. Общий объём диссертации — 82 страницы.

Краткое содержание работы

Первая глава — введение. В ней формулируется основная задача, изучаемая в диссертации, обсуждается история вопроса, даётся общий обзор хода доказательства, обозначаются дальнейшие направления применения полученных результатов, вводятся используемые обозначения.

Вторая глава содержит предварительные сведения, используемые при доказательстве результатов.

В третьей главе исследуются трёхмерные расслоения на коники.

Основным результатом параграфа 3.1 является следующая теорема, являющаяся обобщением теоремы Саркисова[22] на случай трёхмерных расслоений над произвольным полем характеристики 0 с действием конечной группы:

Теорема. *Пусть $\Bbbk$ – произвольное поле характеристики нуль. Пусть X – геометрически неприводимое трёхмерное алгебраическое многообразие над $\Bbbk$, и пусть $f : X \dashrightarrow Y$ – доминантное рациональное отображение с общим слоем, являющимся рациональной кривой над полем $\Bbbk(Y)$. Предположим, что конечная группа G действует на X и Y бирациональными автоморфизмами так, что отображение f является эквивариантным. Тогда у f существует* стандартная модель, *то есть существует коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed, "f"] & X' \arrow[d, "f'"] \\ Y \arrow[r, dashed] & Y' \end{tikzcd}$$

где X' и Y' – неособые проективные многообразия с действием группы G, отображения $X \dashrightarrow X'$ и $Y \dashrightarrow Y'$ бирациональны, f' – расслоение Мори на

[22]В.Г. Саркисов, “О структурах расслоений на коники”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **46:2** (1982), 371–408

рациональные кривые, а все отображения G-эквивариантны.

Схема доказательства состоит в следующем. Применив эквивариантную компактификацию, эквивариантное разрешение особенностей и эквивариантную относительную программу минимальных моделей, можно считать, что $X \to Y$ является G-расслоением Мори. Далее мы доказываем следующую лемму:

Лемма. *Пусть $W \to V$ – G-расслоение Мори с двумерной базой. Пусть v – особая G-точка поверхности V. Тогда существует эквивалентное ему G-расслоение на рациональные кривые $W' \to V'$, являющееся G-расслоением Мори, причём отображение $V' \to V$ является крепантным частичным разрешением особенности в G-точке v, а отображение $W \dashrightarrow W'$ является элементарным преобразованием Саркисова.*

Для доказательства леммы очень важна следующая теорема[23], доказанная Ю. Г. Прохоровым и Ш. Мори:

Теорема. *Пусть $f : X \to Z$ – трёхмерное расслоение Мори над алгебраически замкнутым полем характеристики нулю с двумерной базой. Тогда Z может иметь только дювалевские особенности типа A.*

Доказательство основано на построении некоторого линка Саркисова, которое бирационально преобразует исходное расслоение Мори в другое расслоение Мори на коники, причём база второго расслоения на коники естественным образом отображается в базу первого, и это отображение имеет единственный G-неприводимый исключительный дивизор. Поскольку обе базы являются поверхностями с дювалевскими особенностями, можно применить теорему о классификации морфизмов между поверхностями с дювалевскими особенностями[24], согласно которой это отображение является либо взвешенным раздутием гладкой точки, либо частичным крепантным разрешением особенностей. Первая возможность исключена по построению линка. Таким образом, применив этот линк несколько раз, мы придем к расслоению Мори с неособой базой.

[23]S. Mori, Yu. Prokhorov, “On $\mathbb{Q}$-conic bundles”, *Publ. RIMS,* **44** (2008), 315–369

[24]D. Morrison, “The birational geometry of surfaces with rational double points”, *Math. Ann.,* **116** (1986), 133–176

Можно считать, что дивизор вырождения полученного расслоения на коники является приведенным дивизором с простыми нормальными пересечениями. Несложно проверить, полученное расслоение на коники в этом случае является вложенным с проективизацию линейного расслоения ранга 3 на базе. В этом случае верна следующая лемма:

Лемма. *Пусть $h : W \to V$ – вложенное расслоение на коники, причём поверхность V неособа (но не обязательно проективна), а дивизор вырождения Γ этого расслоения приведён и имеет только простые нормальные пересечения. Тогда все особые точки W обыкновенные двойные. Более того, если $\pi : \widetilde{W} \to W$ – раздутие максимальных идеалов особых точек, то $\widetilde{W}$ неособо, а антиканонический дивизор $-K_{\widetilde{W}}$ относительно численно эффективен и объёмен.*

Используя эту лемму, мы строим линки Саркисова, которые устраняют особенности расслоения, являющиеся обыкновенными двойными точками:

Лемма. *Пусть $h : W \to V$ – вложенное расслоение на коники, причём поверхность V неособа (но не обязательно проективна), дивизор вырождения Γ этого расслоения приведён и состоит из двух гладких неприводимых компонент, пересекающихся трансверсально в одной точке v, а W особо в точке w. Тогда существует и единственна следующая коммутативная диаграмма, задающая элементарное преобразование Саркисова:*

$$\begin{tikzcd} W \arrow[d, "h"] & \widetilde{W} \arrow[l] \arrow[r, dashed] & \widehat{W} \arrow[d, "\widehat{h}"] \\ V & & \widehat{V} \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

где морфизм $\widetilde{W} \to W$ – раздутие точки w, морфизм $\widehat{V} \to V$ – раздутие точки v, отображение $\widetilde{W} \dashrightarrow \widehat{W}$ – изоморфизм в коразмерности 1, а $\widehat{W} \to \widehat{V}$ – стандартное расслоение на коники.

Применив эту лемму несколько раз, мы получим искомое стандартное расслоение. **Четвёртая глава** посвящена исследованию трёхмерных G-многообразий дель Пеццо степени 4. Основным результатом главы является следующая теорема:

Теорема. *Пусть X – G-многообразие дель Пеццо степени 4. Предположим, что X не является G-бирационально эквивалентным $\mathbb{P}^3$ и квадрике в $\mathbb{P}^4$ с* *регулярным действием группы G, а также G не является группой расслоенного типа. Тогда X является одним из следующих многообразий:*

1. *пересечение двух квадрик в $\mathbb{P}^5$ с шестью обыкновенными двойными точками. Такое многообразие единственно, а его полная группа автоморфизмов изоморфна*
   $(\mathbb{C}^* \rtimes \mathfrak{C}_2)^3 \rtimes \mathfrak{S}_3$;

2. *неособое пересечение двух квадрик. В этом случае возможны следующие варианты:*

   (i) $\mathrm{Aut}(X) \simeq \mathfrak{C}_2^5 \rtimes \mathfrak{C}_5$;

   (ii) $\mathrm{Aut}(X) \simeq \mathfrak{C}_2^5 \rtimes \mathfrak{D}_{12}$;

   (iii) $\mathrm{Aut}(X) \simeq \mathfrak{C}_2^5 \rtimes \mathfrak{D}_6$;

   (iv) *группа* $\mathrm{Aut}(X)$ *вкладывается в точную последовательность*

   $$0 \to \mathfrak{C}_2^5 \to \mathrm{Aut}(X) \to \mathfrak{S}_4 \to 0.$$

   В случаях (2 i), (2 ii) *и* (2 iv) *многообразие X единственно с точностью до изоморфизма. В случае* (2 iii) *такие многообразия X образуют однопараметрическое семейство.*

Доказательство теоремы основано на следующем. Хорошо известно, что многообразие дель Пеццо степени 4 чвляется пересечением двух неособых квадрик. Любому такому пересечению можно сопоставить некоторый комбинаторный инвариант, называемый символом Сегре[25]. Он представляет из себя конечный набор точек из $\mathbb{P}^1$, каждой из которых приписывается набор натуральных чисел. Известно, что пучки квадрик изоморфны в том и только том случае, когда существует автоморфизм $\mathbb{P}^1$, переводящий символ Сегре одного пучка квадрик в символ Сегре другого пучка. Таким образом, символ Сегре однозначно задаёт само многообразие. Используя символ Сегре несложно описать все особенности многообразия и его группу автоморфизмов. Таким образом, перебирая все возможные символы Сегре трехмерных пересечений двух квадрик, можно в каждом случае явно указать $\mathrm{Aut}(X)$-инвариантные перестройки, за исключением двух случаев: гладкого пересечения двух квадрик и пересечения двух квадрик с 6 обыкновенными двойными точками.

Кроме этого, мы доказываем следующую теорему:

[25] W.V.D. Hodge, D. Pedoe, “Methods of Algebraic Geometry, Vol. II”, *Cambridge Univ. Press*, 1952

Теорема. *Пусть X – гладкое пересечение двух квадрик в $\mathbb{P}^5$ с группой автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X) \simeq \mathfrak{C}_2^5 \rtimes \mathfrak{C}_5$. Пусть $G \simeq \mathfrak{C}_2^4 \rtimes \mathfrak{C}_5$ – подгруппа $\mathrm{Aut}(X)$. Тогда X является G-бирационально жёстким.*

Доказательство проводится классическими методами, путем последовательного исключения всех возможных неканонических центров. **Пятая глава** посвящена исследованию трёхмерных рациональных G-многообразий дель Пеццо степени 3. Основным результатом главы является следующая теорема:

Теорема. *Пусть $X = X_3 \subset \mathbb{P}^4$ – кубическая гиперповерхность, являющееся рациональным G-многообразием Фано. Предположим, G не линеаризуема и не является группой расслоенного типа. Тогда все особенности X являются обыкновенными двойными точками, а X описывается следующей таблицей:*

<table>
<tr><td>type_1</td><td>type_2</td><td>$r(X)$</td><td>$s(X)$</td><td>$\mathrm{Aut}(X)$</td><td>G</td></tr>
<tr><td rowspan="2">J15</td><td rowspan="2">31°</td><td rowspan="2">6</td><td rowspan="2">10</td><td>$\mathfrak{S}_6$</td><td>$\mathfrak{A}_5$, $\mathfrak{S}_5$ (подгруппы $\mathfrak{S}_6$ фиксирующие координату x_i), $\mathfrak{A}_6$, $\mathrm{Aut}(X)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\mathrm{Aut}(X) \simeq \mathfrak{S}_6$ действует перестановкой координат $x_0, ..., x_5$ (см. J15 ниже)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">J14</td><td rowspan="2">30°</td><td rowspan="2">5</td><td rowspan="2">9</td><td>$\mathfrak{S}_3^2 \rtimes \mathfrak{C}_2$</td><td>$\mathfrak{S}_3^2$ (подгруппа $\mathrm{Aut}(X)$, действующая транзитивно на множестве координат), $\mathfrak{C}_3^2 \rtimes \mathfrak{C}_4$, $\mathrm{Aut}(X)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\mathrm{Aut}(X) \subset \mathfrak{S}_6$ действует перестановкой координат $x_0, ..., x_5$ (см. J14 ниже)</td></tr>
<tr><td>J9a</td><td>28°</td><td>2</td><td>6</td><td>$\mathfrak{S}_5$</td><td>$\mathrm{Aut}(X)$</td></tr>
<tr><td>J9b</td><td>28°</td><td>2</td><td>6</td><td>$\mathfrak{S}_3^2 \rtimes \mathfrak{C}_2$</td><td>$\mathfrak{S}_3^2$ (единственная подгруппа, действующая транзитивно на $\mathrm{Sing}(X)$), $\mathfrak{C}_3^2 \rtimes \mathfrak{C}_4$, $\mathrm{Aut}(X)$</td></tr>
<tr><td>J5a</td><td>27°</td><td>1</td><td>5</td><td>$\mathfrak{S}_5$</td><td>$\mathfrak{C}_5 \rtimes \mathfrak{C}_4$, $\mathfrak{A}_5$, $\mathrm{Aut}(X)$</td></tr>
<tr><td>J5b</td><td>27°</td><td>1</td><td>5</td><td>$\mathfrak{A}_5$</td><td>$\mathrm{Aut}(X)$</td></tr>
</table>

где type_1 *– тип многообразия в терминологии работы*[26], type_2 *– тип многообразия в терминологии работы*[27], $r(X)$ *– ранг группы классов дивизоров* $\mathrm{Cl}(X)$, $s(X)$ *– количество особенностей многообразия X. Уравнения, задающие X, в этих случаях имеют следующий вид:*

[26] H. Finkelnberg, J. Werner, “Small resolutions of nodal cubic threefold”, *Ind. Math (Proc.),* **92:2** (1989), 185–196

[27] Yu. Prokhorov, “G-Fano threefolds, I”, *Adv. Geom.,* **13:3** (2013), 389–418

J15: $\left\{\sum_{i=0}^{5} x_i = \sum_{i=0}^{5} x_i^3 = 0\right\} \subset \mathbb{P}^5$, *т.е.* X *– кубика Сегре;*

J14: $\{x_0x_1x_2 - x_3x_4x_5 = \sum_{i=0}^{5} x_i = 0\} \subset \mathbb{P}^5$*;*

J9a: $\sum_{i=0}^{4} x_ix_{1+i}x_{2+i} - \sum_{i=0}^{4} x_ix_{1+i}x_{3+i} = 0$ *(мы рассматриваем индексы по модулю 5);*

J9b: $x_0x_1x_2 - x_0x_1x_3 + x_0x_1x_4 + x_0x_2x_3 - 3x_0x_2x_4 + x_0x_3x_4 - x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 - x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 0$*;*

J5a: $\sum_{0\le i<j<k\le 4} x_ix_jx_k = 0$*;*

J5b: $\sum_{i=0}^{4} x_ix_{1+i}x_{2+i} - \xi \sum_{i=0}^{4} x_ix_{1+i}x_{3+i} = 0$*, где* ξ *– примитивный корень третьей степени из 1 (оба корня дают изоморфные многообразия; мы рассматриваем индексы по модулю 5).*

Для доказательства важна следующая простая лемма.

Лемма. *1. Многообразие* X *не имеет неподвижных особых точек и инвариантных прямых относительно действия группы* G.

2. Не существует G*-инвариантных плоскостей в* $\mathbb{P}^4$.

Следствие. G*-орбита особой точки многообразия* X *имеет мощность не меньше* 5.

В случае, если мощность G-орбиты особой точки не превосходит 3, можно напрямую применить предыдущую лемму. В случае орбиты из 4 немложно показать, используя классификацию особых кубических поверхностей[28], что либо эти 4 особые точки лежат на одной плоскости, либо соотвтствующее гиперплоское сечение является кубической поверхностью, группа автоморфизмов которой имеет инвариантную плоскость в $\mathbb{P}^3$. В обоих случаях можно применить предыдущую лемму. Два следующих утверждения позволяют ограничить возможные варианты количества и взаимного расположения особых точек многообразия X:

[28] J.W. Bruce, C.T.C. Wall, “On the classification of cubic surfaces”, *J. London Math. Soc.,* **19** (1979), 245–256

Предложение. *Предположим, что все особенности многообразия X обыкновенные двойные. Тогда имеются следующие возможности:*

тип X	J5	J9	J11	J14	J15
$s(X)$	5	6	6	9	10
$p(X)$	0	0	3	9	15
$r(X)$	1	2	3	5	6

где $s(X)$ – количество особых точек X, $p(X)$ – количество плоскостей, содержащихся в X и $r(X)$ – ранг группы $\mathrm{Cl}(X)$.

Предложение. *Допустим, что многообразие X содержит особую точку, которая не является обыкновенной двойной. Тогда X имеет ровно 5 особенностей типа cA_1 или cA_2 в общем положении, и не имеет других особых точек.*

После этого каждый из этих случаев разбирается по отдельности. При разборе случаев мы используем тот факт, что орбита каждой особой точки состоит не менее чем из 5 точек, а инвариантная группа классов дивизоров одномерна. Это позволяет наложить очень сильные условия на уравнение многообразия X, из чего можно вычислить все возможные группы автоморфизмов и выбрать из них те, которые не допускают эквивариантной перестройки в более простое многообразие Фано или в расслоение Мори.

Кроме этого, мы доказываем следующую теорему:

Теорема. *Кубика Сегре X с действием стандартной подгруппы $G = \mathfrak{A}_5 \subset \mathrm{Aut}(X)$ является G-бирационально жёсткой.*

Доказательство проводится классическими методами, путем последовательного исключения всех возможных неканонических центров.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук профессору Юрию Геннадьевичу Прохорову за постановку задачи и неоценимую помощь при её исследовании и оформлении текстов. Автор сильно признателен кандидатам физико-математических наук Константину Александровичу Шрамову и Андрею Сергеевичу Трепалину за постоянную поддержку, помощь, многочисленные полезные обсуждения и найденные неточночти.

Публикации по теме диссертации

[1] А. А. Авилов, “Существование стандартных моделей расслоений на коники над алгебраически незамкнутыми полями”, *Мат. Сб.*, **205(12)** (2014), 3–16.

[2] А. А. Авилов, “Автоморфизмы трехмерных многообразий, представимых в виде пересечения двух квадрик”, *Мат. Сб.*, **207(3)** (2016), 3–18.

[3] А. А. Авилов, “Автоморфизмы особых трехмерных кубических гиперповерхностей и группа Кремоны”, *Мат. Зам.*, **100**:3 (2016).

[4] А. А. Авилов, “О стандартных моделях расслоений на коники”, *Тезисы летней школы-конференции по алгебраической геометрии и комплексному анализу для моложых учёных России, Коряжма*, 2015.

[5] A. A. Avilov, “Automorphisms of singular three-dimensional cubic hypersurfaces”, *ArXiv e-print*, **1603.04087** (2016).

Подписано в печать: 24.06.2016
Тираж 100 экз. Заказ №.........
Отпечатано в типографии «Реглет»
г. Москва, Ленинградский пр-т., д. 74.
8(495)790-47-77, www.reglet.ru