Национальный Исследовательский Университет "Высшая Школа Экономики"
факультет математики

На правах рукописи
УДК 512.776, 512.765

Авилов Артем Алексеевич

Автоморфизмы алгебраических многообразий и минимальные модели

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических
наук, профессор Ю. Г. Прохоров

Москва — 2016

Оглавление

Глава 1

Введение

1.1. История вопроса и постановка задачи

Классификация алгебраических многообразий — одна из важнейших задач алгебраической геометрии. Многие известные математики занимались ей с самых ранних работ по алгебраической геометрии конца XIX века. Существует два основных направления классификации — бирегулярная и бирациональная классификация, в которых многообразия классифицируются с точностью до изоморфизма и бирациональной эквивалентности соответственно.

Бирациональная классификация алгебраических кривых устроена достаточно просто: в любом классе бирациональной эквивалентности есть ровно одна неособая проективная кривая, основным инвариантом которой является её род. Следующим шагом является классификация поверхностей. Она была осуществлена в начале XX века усилиями итальянских геометров (Ф. Севери, К. Сегре, Г. Кастельнуово, Ф. Энриквеса и др.), однако зачастую методы, которыми они пользовались, были нестрогими, а доказательства содержали ошибки. В 60-х годах XX века их работы были критически пересмотрены, а утверждения передоказаны с использованием разработанной на тот момент техники Московской Школой алгебраической геометрии (см. [41]). Любая неособая алгебраическая поверхность с помощью стягивания (-1)-кривых может быть приведена к минимальной модели (поверхность называется минимальной, если на ней нет (-1)-кривых), поэтому классифицикация минимальных поверхностей является основной задачей для классификации всех поверхностей. Основным их инвариантом является размерность Кодаиры, которая для поверхностей может принимать значение $-\infty,\ 0,\ 1$ или 2. Поверхности кодаировой размерности $-\infty$ бирационально эквивалентны $\mathbb{P}^1 \times C$, где C — алгебраическая кривая; поверхности кодаировой размерности 0 принадлежат одному из следующих классов: K3, абелевы, биэллиптические или поверхности Энриквеса; поверхности кодаировой размерности 1 являются эллиптическими; поверхности кодаировой размерности 2 называются поверхностями общего типа. Множество результатов имеется на тему дальнейшей классификации поверхностей, не для всех классов существует полная классификация.

В процессе классификации многообразий над алгебраически незамкнутыми полями и при классификации конечных групп бирациональных автоморфизмов естественным образом возникает понятие G-многообразия.

Определение 1.1.1. *G-многообразием* называется многообразие X над полем $\Bbbk$ с действием группы G на $X \otimes \overline{\Bbbk}$.

Впервые понятие G-многообразия было введено Ю. Маниным в работе [48] при изучении рациональных поверхностей над совершенными полями. Техника G-поверхностей была усовершенствована В. Исковских, который классифицировал рациональные G-поверхности в работах [36] и [37]. Наиболее важными случаями G-многообразий являются следующие:

1. алгебраический случай: группа G является группой Галуа поля $\overline{\Bbbk}$ над $\Bbbk$ и действует на $X \otimes \overline{\Bbbk}$ через второй сомножитель;

2. геометрический случай: группа G является конечной группой, действующей $\Bbbk$-автоморфизмами на X.

Первый случай важен для классификации многообразий над алгебраически незамкнутыми полями. Далее мы будем рассматривать только геометрический случай. Одним из важнейших приложений изучения геометрического случая G-многообразий является изучение группы Кремоны.

Определение 1.1.2. *Группа Кремоны* $\mathrm{Cr}_n(\Bbbk)$ ранга n — это группа бирациональных автоморфизмов проективного пространства $\mathbb{P}^n_{\Bbbk}$.

Изучение свойств этих групп также является давней и важной задачей бирациональной геометрии. В дальнейшем в этом параграфе мы будем полагать, что $\Bbbk$ — алгебраически замкнутое поле характеристики 0.

Группа Кремоны ранга 1 устроена очень просто: поскольку бирациональные автоморфизмы неособых кривых совпадают с их бирегулярными автоморфизмами, то $\mathrm{Cr}_1(\Bbbk) = \mathrm{PGL}_2(\Bbbk)$. Если ранг равен 2, то группа Кремоны порождается группой $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2) \simeq \mathrm{PGL}_3(\Bbbk)$ и всего одним дополнительным квадратичным преобразованием, действующим по правилу

$$(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_1x_2 : x_0x_2 : x_0x_1)$$

([56], [68]). Соотношения на её порождающие были впервые найдены М. Гизатуллиным ([29]). Однако, уже начиная с ранга 3, группа Кремоны не обладает хорошим набором порождающих [32], и практически ничего не известно о её структуре. Изучение алгебраических и топологических свойств группы Кремоны ранга 2 и выше над различными полями активно продолжается в настоящее время (см., например, [10], [8], [19]).

Другая классическая задача, связанная с группами Кремоны — классификация их конечных подгрупп с точностью до сопряжения (и, в частности, элементов конечного порядка). Известно, что группы Кремоны ранга 2 и 3 удовлетворяют свойству Жордана — существует такая константа N, что для любой конечной подгруппы группы Кремоны в ней есть нормальная абелева подгруппа индекса не более, чем N (см. [67], [64]). Преположительно этот результат верен в любой размерности (см. [64]). Поэтому можно ожидать, что конечные подгруппы в группе Кремоны малого ранга допускают разумную классификацию.

Изучение конечных подгрупп в группе $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ было начато Бертини [5] и продолжено многими другими математиками: [24], [3], [7]. Классификация конечных подгрупп в $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ была завершена И. Долгачёвым и В. Исковских (не считая некоторых специальных случаев) в работе [22]. Суть метода классификации состоит в следующем. Пусть G — конечная подгруппа в $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$. Тогда действие G регуляризуется, т.е. существует неособое проективное многообразие Z, на котором G действует *бирегулярными* автоморфизмами с G-эквивариантным бирациональным отображением $Z \dashrightarrow \mathbb{P}^2$. После G-эквивариантных стягиваний (-1)-кривых, мы получим G-многообразие X, которое является либо G-расслоением на рациональные кривые над $\mathbb{P}^1$ с $\mathrm{rk}\,\mathrm{Cl}(X)^G = 2$, либо G-минимальной поверхностью дель Пеццо с $\mathrm{rk}\,\mathrm{Cl}(X)^G = 1$. Классифицировав все возможные минимальные группы для расслоений на коники и для поверхностей дель Пеццо (т.е. такие, что $\mathrm{rk}\,\mathrm{Cl}(X)^G = 2$ в случае расслоений на коники и $\mathrm{rk}\,\mathrm{Cl}(X)^G = 1$ в случае поверхности дель Пеццо), Долгачёв и Исковских получили полную классификацию конечных подгрупп в $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ (по модулю некоторых серий). Но довольно часто полученные подгруппы являются сопряжёнными в $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$, поэтому их естественно отождествить. Несложно видеть, что G-многообразия Z_1 и Z_2 дают сопряжённые подгруппы в том и только том случае, когда есть G-эквивариантное бирациональное отображение $Z_1 \dashrightarrow Z_2$.

Поэтому кроме классификации всех рациональных G-расслоений на коники и G-поверхностей дель Пеццо необходимо исследовать также и бирациональные отображения между различными такими G-многообразиями. Есть некоторые частные результаты также для групп Кремоны ранга 2 над полями, отличными от $\mathbb{C}$: см., например, [67], [23], [74], [20].

Новый взгляд на бирациональную классификацию алгебраических многообразий появился с развитием программы минимальных моделей. Она является естественным обобщением процедуры приведения поверхности к минимальной форме путём стягивания (-1)-кривых на многообразия старших размерностей. Она состоит в следующем: любое неособое проективное многообразие с помощью определённых бирациональных преобразований, а именно дивизориальных стягиваний и флипов, можно привести к многообразию одного из следующих типов: либо полученное многообразие имеет численно эффективный антиканонический класс, либо оно допускает структуру расслоения Мори (см. [45], [46]).

Определение 1.1.3. Проективное (G-)многообразие X с (G-эквивариантным) морфизмом $\pi : X \to Y$ называется *(G-)расслоением Мори*, если его особенности не более чем терминальные $\mathbb{Q}$-факториальные (соотв., $G\mathbb{Q}$-факториальные, т.е. любой G-инвариантный дивизор Вейля является дивизором $\mathbb{Q}$-Картье), $\pi_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$, $\dim X > \dim Y$, относительное число Пикара $\rho(X/Y)$ равно 1 (соотв., $\rho(X/Y)^G = 1$, где $\rho(X/Y)^G$ – число Пикара инвариантной относительной группы Пикара) и антиканонический класс $-K_X$ является π-обильным.

Программа минимальных моделей полностью обоснована для трёхмерных многообразий над полями характеристики нуль (см. [50], [49], [42], [71], [45], [46]), а также для некоторых классов многообразий в старших размерностях, например, для рационально связных многообразий (см. [6, Corollary 1.3.3]). В данной ситуации имеется также эквивариантная (например, относительно конечной группы или группы Галуа) и относительная (над произвольным многообразием) программа минимальных моделей. В настоящий момент в обосновании программы минимальных моделей остаются открытые вопросы в случае многообразий размерности выше 4 и промежуточной кодаировой размерности, а также для многообразий над полями положительной характеристики. Ввиду того, что любое многообразие (и G-многообразие) можно компактифицировать и разрешить особенности, программа минимальных моделей даёт первый шаг к полной бирациональной классификации многообразий. Таким образом, классификация G-расслоений Мори является важной задачей для бирациональной классификации многообразий. Среди них выделяется класс многообразий Фано.

Определение 1.1.4. Нормальное проективное G-многообразие X называется *$G\mathbb{Q}$-многообразием Фано*, если его отображение в точку является G-расслоением Мори. Если при этом канонический дивизор K_X является дивизором Картье, то X называется *G-многообразием Фано*.

Классификация (особых) многообразий Фано тривиальна в случае кривых: только $\mathbb{P}^1$ является одномерным многообразием Фано. В случае поверхностей классификация устроена несколько сложнее, но тоже обозримо. Неособые многообразия Фано размерности 2 называются поверхностями дель Пеццо и полностью классифицированы: все они являются либо раздутиями $\mathbb{P}^2$ в не более чем восьми точках в общем положении, либо $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ (см., например, [47]). Поскольку в двумерном случае программа минимальных моделей не выводит из класса неособых многообразий, то с её точки зрения этой классификации достаточно.

В трёхмерном случае уже классификация неособых многообразий Фано является крайне нетривиальной, даже для случая $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}$ (см. [38], [39], [27], [28], [53], [54], [35]). Однако, этого недостаточно для нужд программы минимальных моделей, поскольку в трёхмерном случае минимальным классом многообразий, в котором работает программа, являются многообразия с не более чем терминальными особенностями. Классификация особых многообразий Фано проводится отдельно для горенштейновых и негоренштейновых многообразий различными методами. В случае горенштейновых многообразий с терминальными особенностями известно, например, что они обладают сглаживанием (см. [55]), в частности, они имеют те же когомологические инварианты, что и неособые многообразия. В случае негоренштейновых многообразий наиболее важным результатом является ограниченность трёхмерных многообразий $\mathbb{Q}$-Фано с каноническими особенностями [43]. Имеются отдельные результаты в зависимости от индекса Фано многообразия. Имеются частичные результаты по классификации горенштейновых

G-многообразий Фано (см. [58], [59], [60]).

Так же, как и в двумерном случае, изучение $G\mathbb{Q}$-расслоений Мори помогает в задаче классификации конечных подгрупп в $\mathrm{Cr}_n(\Bbbk)$. Эта программа была реализована в некоторых частных случаях для группы Кремоны ранга 3 над полем $\mathbb{C}$: например, классифицированы простые неабелевы подгруппы ([63], см. также [12], [13], [14]), p-элементарные подгруппы (см. [62], [57]).

Таким образом, классификация рациональных G-расслоений Мори является важной задачей с разных точек зрения.

Большая часть диссертации посвящена классификации конечных групп автоморфизмов трёхмерных многообразий дель Пеццо (см. [26]), изучению их минимальности и бирациональной жёсткости.

Определение 1.1.5. Трёхмерное многообразие X называется *многообразием дель Пеццо*, если оно имеет не более чем терминальные горенштейновы особенности, а его антиканонический класс $-K_X$ является обильным дивизором Картье и делится на 2 в группе Пикара. Если G — такая конечная подгруппа $\mathrm{Aut}(X)$, что $\rho^G(X) = 1$, то будем говорить, что X является *G-минимальным*, а группу G в этом случае будем называть *минимальной*.

Частично трёхмерные $G\mathbb{Q}$-многообразия дель Пеццо были классифицированы Ю. Прохоровым в работе [58] в терминах структуры группы классов дивизоров и действия группы G на ней.

Поскольку нас в основном интересуют приложения к изучению группы Кремоны, мы изучаем следующий вопрос: классифицировать $G\mathbb{Q}$-многообразия дель Пеццо, не допускающие бирациональной перестройки в более простые $G\mathbb{Q}$-многообразия Фано (например, в $\mathbb{P}^3$ или квадрику в $\mathbb{P}^4$), поскольку соответствующие подгруппы в группе Кремоны уже описаны, а также в G-расслоения Мори с базой положительной размерности, поскольку их группы автоморфизмов лучше изучать с других точек зрения. Группы, допускающие перестройку в $\mathbb{P}^3$ мы будем называть *линеаризуемыми*, а группы, допускающие перестройку в расслоение Мори на коники или поверхности дель Пеццо — *расслоенного типа*.

Основным инвариантом многообразия дель Пеццо X является его *степень* $d = (-\frac{1}{2}K_X)^3$, которая может принимать значения от 1 до 8. В случае $d \geqslant 5$ любое G-многообразие является неособым (см. [58]), а такие многообразия и их группы автоморфизмов хорошо изучены.

1.2. Основные результаты диссертации

Диссертация состоит из пяти глав.

Первая глава — введение. В ней формулируется основная задача, изучаемая в этой работе, обсуждается история вопроса, даётся общий обзор хода доказательства, обозначаются дальнейшие направления применения полученных результатов, вводятся используемые обозначения.

Во второй главе даются предварительные сведения, касающиеся понятий, возникающих в работе, и техники работы с ними.

В параграфе 2.1 вводятся базовые понятия теории G-многообразий. Также даются определения многообразий Фано и дель Пеццо, расслоений Мори, в частности, расслоений Мори на коники. В параграфе 2.2 формулируются основные утверждения программы минимальных моделей. В параграфе 2.3 формулируется понятие бирациональной жёсткости, описывается её связь с неканоническими центрами линейных систем и формулируются необходимые теоремы для работы с ними. В параграфе 2.4 приводятся некоторые необходимые факты о структуре и геометрии расслоений на коники. В параграфе 2.5 вводится понятие символа Сегре пересечения двух квадрик и формулируются необходимые утверждения для работы с ним. В параграфе 2.6 приводятся необходимые сведения из геометрии трёхмерных кубических гиперповерхностей, имеющих только обыкновенные двойные точки с качестве особенностей.

Третья глава диссертации посвящена изучению G-расслоений на рациональные кривые. А именно, мы доказываем следующую теорему, которая является обобщением теоремы Саркисова (см. [66, Теорема 1.13]) на случай трёхмерных расслоений над произвольным полем характеристики 0 с действием конечной группы.

Теорема 1.2.1. *Пусть* $\Bbbk$ *— произвольное поле характеристики нуль. Пусть* X *— геометрически неприводимое трёхмерное алгебраическое многообразие над* $\Bbbk$*, и пусть* $f : X \dashrightarrow Y$ *— доминантное рациональное отображение с общим слоем, являющимся рациональной кривой над полем* $\Bbbk(Y)$*. Предположим, что конечная группа* G *действует на* X *и* Y *бирациональными автоморфизмами так, что отображение* f *является эквивариантным. Тогда у* f *существует* стандартная модель*, то есть существует коммутативная* *диаграмма*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed, "f"] & X' \arrow[d, "f'"] \\ Y \arrow[r, dashed] & Y' \end{tikzcd}$$

где X' и Y' — неособые проективные многообразия с действием группы G, отображения $X \dashrightarrow X'$ и $Y \dashrightarrow Y'$ бирациональны, f' — расслоение Мори на рациональные кривые, а все отображения G-эквивариантны.

Таким образом, для бирациональной классификации всех G-расслоений Мори на коники (и, в частности, конечных подгрупп в группе Кремоны, которые соответствуют рациональным G-расслоениям на коники) достаточно классифицировать только неособые расслоения.

Схема доказательства состоит в следующем: с помощью эквивариантной компактификации, разрешения особенностей и программы минимальных моделей, задачу легко свести к случаю G-расслоения Мори. Согласно теореме Ш. Мори и Ю. Прохорова 2.2.8, особенности базы являются дювалевскими особенностями типа A. Далее мы строим линк Саркисова, применение которого частично разрешает особенности базы. Применив его несколько раз, мы сводим задачу к G-расслоению Мори над неособой базой. Анализ локального уравнения этого расслоения показывает, что оно имеет только обыкновенные двойные точки в качестве особенностей. Каждую из этих особенностей мы локально разрешаем некоторым каноническим образом с помощью другого линка Саркисова. Применив полученную конструкцию ко всем особенностям, ввиду каноничности мы получим эквивариантную перестройку в искомое гладкое G-расслоение Мори.

В четвёртой главе мы изучаем трёхмерные G-многообразия дель Пеццо степени 4. Основное поле предполагается алгебраически замкнутым полем характеристики нуль.

Теорема 1.2.2. *Пусть X — трёхмерное G-многообразие дель Пеццо степени 4. Предположим, что X не является G-бирационально эквивалентным $\mathbb{P}^3$ и квадрике в $\mathbb{P}^4$ с регулярным действием группы G, а также G не является группой расслоенного типа. Тогда X изоморфно одному из следующих многообразий:*

1. *пересечение двух квадрик в $\mathbb{P}^5$ с шестью обыкновенными двойными*

точками. Такое многообразие единственно (см. [58]), а его полная группа автоморфизмов изоморфна $(\mathbb{C}^* \rtimes \mathfrak{C}_2)^3 \rtimes \mathfrak{S}_3$*;*

2. *неособое пересечение двух квадрик. В этом случае возможны следующие варианты:*

   (i) $\mathrm{Aut}(X) \simeq \mathfrak{C}_2^5 \rtimes \mathfrak{C}_5$*;*

   (ii) $\mathrm{Aut}(X) \simeq \mathfrak{C}_2^5 \rtimes \mathfrak{D}_{12}$*;*

   (iii) $\mathrm{Aut}(X) \simeq \mathfrak{C}_2^5 \rtimes \mathfrak{D}_6$*;*

   (iv) *группа* $\mathrm{Aut}(X)$ *вкладывается в точную последовательность*

$$0 \to \mathfrak{C}_2^5 \to \mathrm{Aut}(X) \to \mathfrak{S}_4 \to 0.$$

В случаях (2 i), (2 ii) *и* (2 iv) *многообразие* X *единственно с точностью до изоморфизма. В случае* (2 iii) *такие многообразия* X *образуют однопараметрическое семейство.*

Схема доказательства этой теоремы следующая. Любое пересечение двух квадрик однозначно задаётся некоторым комбинаторным объектом — символом Сегре. Изучив все возможные символы Сегре, мы сразу отбрасываем большинство из них, поскольку для них на многообразии имеются инвариантные точки, прямые или плоскости, проекция из которых даёт эквивариантный морфизм на более простое G-многообразие Фано или расслоение Мори. Для оставшихся мы описываем группы автоморфизмов, исходя из свойств их символа Сегре, а также минимальные подгруппы, используя известную геометрию этих многообразий.

Для одного из полученных многообразий мы доказываем бирациональную жёсткость относительно подгруппы полной группы автоморфизмов индекса два, а именно:

Теорема 1.2.3. *Пусть* X *— многообразие из пункта* (2 i) *теоремы 1.2.2, а* $G \simeq \mathfrak{C}_2^4 \rtimes \mathfrak{C}_5$*. Тогда многообразие* X *является* G*-бирационально жёстким, т.е. если есть другое* G*-расслоение Мори* $X' \to Y'$ *с* G*-эквивариантным бирациональным отображением* $X \dashrightarrow X'$*, то* $X' \simeq X$*. Как следствие, любое другое* G*-расслоение Мори даёт нам несопряжённое вложение* $\mathfrak{C}_2^4 \rtimes \mathfrak{C}_5 = G \subset \mathrm{Cr}_3(\Bbbk)$*.*

Доказательство состоит в последовательном исключении всех возможных неканонических центров.

В пятой главе мы изучаем многообразия дель Пеццо степени 3. Основное поле снова предполагается алгебраически замкнутым характеристики нуль. В этом случае X является кубической гиперповерхностью. Мы доказываем следующую теорему.

Теорема 1.2.4. *Пусть $X = X_3 \subset \mathbb{P}^4$ — кубическая гиперповерхность, являющаяся рациональным G-многообразием Фано. Предположим, что G не линеаризуема и не является группой расслоенного типа. Тогда все особенности X являются обыкновенными двойными точками, а X описывается следующей таблицей:*

<table>
<tr><td>type_1</td><td>type_2</td><td>$r(X)$</td><td>$s(X)$</td><td>$\mathrm{Aut}(X)$</td><td>G</td></tr>
<tr><td rowspan="2">J15</td><td rowspan="2">31°</td><td rowspan="2">6</td><td rowspan="2">10</td><td>$\mathfrak{S}_6$</td><td>$\mathfrak{A}_5$, $\mathfrak{S}_5$ (подгруппы $\mathfrak{S}_6$ фиксирующие координату x_i), $\mathfrak{A}_6$, $\mathrm{Aut}(X)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\mathrm{Aut}(X) \simeq \mathfrak{S}_6$ действует перестановкой координат $x_0, \ldots, x_5$ (см. J15 ниже)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">J14</td><td rowspan="2">30°</td><td rowspan="2">5</td><td rowspan="2">9</td><td>$\mathfrak{S}_3^2 \rtimes \mathfrak{C}_2$</td><td>$\mathfrak{S}_3^2$ (подгруппа $\mathrm{Aut}(X)$, действующая транзитивно на множестве координат), $\mathfrak{C}_3^2 \rtimes \mathfrak{C}_4$, $\mathrm{Aut}(X)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\mathrm{Aut}(X) \subset \mathfrak{S}_6$ действует перестановкой координат $x_0, \ldots, x_5$ (см. J14 ниже)</td></tr>
<tr><td>J9a</td><td>28°</td><td>2</td><td>6</td><td>$\mathfrak{S}_5$</td><td>$\mathrm{Aut}(X)$</td></tr>
<tr><td>J9b</td><td>28°</td><td>2</td><td>6</td><td>$\mathfrak{S}_3^2 \rtimes \mathfrak{C}_2$</td><td>$\mathfrak{S}_3^2$ (единственная подгруппа, действующая транзитивно на $\mathrm{Sing}(X)$), $\mathfrak{C}_3^2 \rtimes \mathfrak{C}_4$, $\mathrm{Aut}(X)$</td></tr>
<tr><td>J5a</td><td>27°</td><td>1</td><td>5</td><td>$\mathfrak{S}_5$</td><td>$\mathfrak{C}_5 \rtimes \mathfrak{C}_4$, $\mathfrak{A}_5$, $\mathrm{Aut}(X)$</td></tr>
<tr><td>J5b</td><td>27°</td><td>1</td><td>5</td><td>$\mathfrak{A}_5$</td><td>$\mathrm{Aut}(X)$</td></tr>
</table>

где type_1 *— тип многообразия в терминологии работы [25],* type_2 *— тип многообразия в терминологии работы [58], $r(X)$ — ранг группы классов дивизоров* $\mathrm{Cl}(X)$, *$s(X)$ — количество особенностей многообразия X. Уравнения, задающие X, в этих случаях имеют следующий вид:*

J15: $\left\{\sum_{i=0}^{5} x_i = \sum_{i=0}^{5} x_i^3 = 0\right\} \subset \mathbb{P}^5$, *т.е. X — кубика Сегре;*

J14: $\{x_0x_1x_2 - x_3x_4x_5 = \sum_{i=0}^{5} x_i = 0\} \subset \mathbb{P}^5$;

J9a: $\sum_{i=0}^{4} x_ix_{1+i}x_{2+i} - \sum_{i=0}^{4} x_ix_{1+i}x_{3+i} = 0$ *(мы рассматриваем индексы по модулю* 5*);*

J9b: $x_0x_1x_2 - x_0x_1x_3 + x_0x_1x_4 + x_0x_2x_3 - 3x_0x_2x_4 + x_0x_3x_4 - x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 - x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 0$;

J5a: $\sum_{0 \leqslant i<j<k \leqslant 4} x_ix_jx_k = 0$;

J5b: $\sum_{i=0}^{4} x_ix_{1+i}x_{2+i} - \xi \sum_{i=0}^{4} x_ix_{1+i}x_{3+i} = 0$*, где* ξ *— примитивный корень третьей степени из* 1 *(оба корня дают изоморфные многообразия; мы рассматриваем индексы по модулю* 5*).*

Схема доказательства этой теоремы следующая. Используя то, что группа $\mathrm{Aut}(X)$ не является линеаризуемой или группой расслоенного типа, мы описываем все возможные конфигурации и типы особенностей и их взаимное расположение с плоскостями, лежащими на многообразии X. Всего мы получаем 6 типов принципиально разных многообразий. Исследуя каждый случай по отдельности и используя такие факты, как, например, транзитивность действия группы автоморфизмов на множестве особых точек или на множестве плоскостей, а также отсутствие некоторых типов инвариантных подпространств, мы классифицируем возможные многообразия, а также минимальные подгруппы $G \subset \mathrm{Aut}(X)$, не допускающие эквивариантных перестроек.

Результаты диссертации опубликованы в шести работах, из которых три ([A1], [A2], [A3]) — в изданиях ВАК. Результаты третьей главы содержатся в работах [A1] и [A4]. Результаты четвёртой главы содержатся в работе [A2]. Результаты пятой главы содержатся в работах [A3] и [A5] (полная версия [A3]).

Автор выражает благодарность научному руководителю Ю. Г. Прохорову за постановку задачи и неоценимую помощь в её выполнении и оформлении результатов и К. А. Шрамову и А. С. Трепалину за полезные обсуждения и ценные замечания.

1.3. Обозначения

В этой работе мы будем использовать следующие обозначения:

- $\Bbbk$ обозначает произвольное поле характеристики нуль;
- $\overline{\Bbbk}$ обозначает алгебраическое замыкание поля $\Bbbk$;
- $\overline{X} = X \otimes \overline{\Bbbk}$;
- K_X обозначает канонический дивизор многообразия X;
- $\mathrm{Pic}(X)$ (соответственно $\mathrm{Pic}(X)^G$) обозначает группу Пикара (соотв., G-инвариантную группу Пикара) многообразия X;
- $\mathrm{Cl}(X)$ (соответственно $\mathrm{Cl}(X)^G$) обозначает группу классов дивизоров (соотв., G-инвариантную группу классов дивизоров) многообразия X;
- $\rho(X) = \mathrm{rk}\,\mathrm{Pic}(X)$, $\rho(X)^G = \mathrm{rk}\,\mathrm{Pic}(X)^G$;
- $r(X) = \mathrm{rk}\,\mathrm{Cl}(X)$, $r(X)^G = \mathrm{rk}\,\mathrm{Cl}(X)^G$;
- $\mathfrak{C}_n$ — циклическая группа порядка n;
- $\mathfrak{D}_{2n}$ — диэдральная группа порядка $2n$;
- $\mathfrak{S}_n$ — симметрическая группа степени n;
- $\mathfrak{A}_n$ — знакопеременная группа степени n;
- G^n — прямое произведение n копий группы G.

Глава 2

Предварительные сведения

2.1. Основные понятия

Основным объектом исследования в диссертации являются G-многообразия.

Определение 2.1.1. G-многообразием называется многообразие X над полем $\Bbbk$ с действием группы G на $X \otimes \overline{\Bbbk}$.

В дальнейшем нас будет интересовать геометрический случай действия группы G.

Определение 2.1.2. Пусть X — G-многообразие. Будем говорить, что X имеет *$G\mathbb{Q}$-факториальные особенности*, если любой G-инвариантный дивизор Вейля является дивизором $\mathbb{Q}$-Картье.

Важнейшим классом многообразий для нас являются многообразия, допускающие структуру расслоения Мори:

Определение 2.1.3. Проективное G-многообразие X с эквивариантным морфизмом $\pi : X \to Y$ называется *G-расслоением Мори*, если его особенности не более чем терминальные $G\mathbb{Q}$-факториальные, $\pi_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$, $\dim X > \dim Y$, относительное инвариантное число Пикара $\rho^G(X/Y) = 1$ (группа G при этом называется *минимальной*) и антиканонический класс $-K_X$ является π-обильным.

Определение 2.1.4. G-расслоением Мори на коники (соотв., поверхности дель Пеццо) мы будем называть G-расслоение Мори относительной размерности 1 (соотв., относительной размерности 2).

Определение 2.1.5. Нормальное проективное G-многообразие X называется *$G\mathbb{Q}$-многообразием Фано*, если его отображение в точку является G-расслоением Мори. Если при этом канонический дивизор K_X является дивизором Картье, то X называется *G-многообразием Фано*.

В этой работе мы исследуем некоторый подкласс в многообразиях Фано — многообразия дель Пеццо.

Определение 2.1.6. (G-)многообразие X размерности n называется *(G-)многообразием дель Пеццо*, если оно имеет не более чем терминальные горенштейновы особенности, а его антиканонический класс $-K_X$ является обильным дивизором Картье и делится на $n-1$ в группе Пикара. Число $d(X) = (-\frac{1}{n-1}K_X)^n$ называется *степенью* многообразия X.

Следующая теорема является частичной классификацией (G-)многообразий дель Пеццо:

Теорема 2.1.7 ([34], [70], [27], [28])**.** *Пусть X — трёхмерное многообразие дель Пеццо и $S = -\frac{1}{2}K_X$ — дивизор Картье. Тогда*

1. $\dim |S| = d(X) + 1$*;*

2. *линейная система $|S|$ не имеет базисных точек (соотв., очень обильна) при $d(X) \geqslant 2$ (соотв., $d(X) \geqslant 3$). При $d(X) \geqslant 4$ образ X при вложении с помощью линейной системы $|S|$ является пересечением квадрик;*

3. *при $d(X) = 4$ многообразие X изоморфно пересечению двух квадрик в $\mathbb{P}^5$;*

4. *при $d(X) = 3$ многообразие X изоморфно кубической гиперповерхности в $\mathbb{P}^4$;*

5. *при $d(X) = 2$ линейная система $|S|$ задаёт двулистное накрытие $X \to \mathbb{P}^3$ разветвлённое в поверхности четвёртой степени $B \subset \mathbb{P}^3$, имеющей изолированные особенности. Многообразие X изоморфно гиперповерхности степени 4 в $\mathbb{P}(1^4, 2)$;*

6. *при $d(X) = 1$ линейная система $|S|$ имеет ровно одну базисную точку, являющуюся неособой, и задаёт рациональное отображение $X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$, общий слой которого является эллиптической кривой. Многообразие X является гиперповерхностью степени 6 в $\mathbb{P}(1^3, 2, 3)$.*

Также мы будем использовать следующие понятия, связанные с группами автоморфизмов многообразий:

Определение 2.1.8. Пусть X — произвольное многообразие, а G — конечная подгруппа $\mathrm{Aut}(X)$. Будем говорить, что G *линеаризуема* (соотв., *расслоенного типа*), если существует G-эквивариантное бирациональное отображение на G-многообразие $\mathbb{P}^n$ (соотв., на G-многообразие X', имеющее структуру G-расслоения Мори с базой положительной размерности).

Для проверки того, что группа имеет расслоенный тип, нам будет полезна следующая известная лемма.

Лемма 2.1.9. *Пусть X — трёхмерное G-многообразие, а Y — G-многообразие размерности* 1 *или* 2. *Пусть $X \dashrightarrow Y$ — G-эквивариантное доминантное рациональное отображение, общий слой которого является рациональной кривой или рациональной поверхностью. Тогда существует следующая коммутативная диаграмма:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & X' \arrow[d] \\ Y \arrow[r, dashed] & Y' \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

где $X' \to Y'$ — G-расслоение Мори, все горизонтальные стрелки G-эквивариантны, а $X \dashrightarrow X'$ бирационально.

Доказательство. Заметим, что произвольное G-многообразие S можно эквивариантно компактифицировать, взяв произвольную компактификацию фактора S/G и нормализовав её в поле функций $\Bbbk(S)$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что X и Y проективны. Затем мы применяем экварвиантное разрешение особенностей (см. [1]). Таким образом, можно считать, что $X \dashrightarrow Y$ является G-эквивариантным морфизмом между гладкими многообразиями. Применим затем G-эквивариантную программу минимальных моделей для X над Y (см. 2.2.4). Поскольку все слои морфизма $X \to Y$ рационально связны, в конце мы получим искомое G-расслоение Мори $X' \to Y'$. Это даёт нам искомую коммутативную диаграмму. □

2.2. Программа минимальных моделей

Определение 2.2.1. *Стягиванием* мы будем называть произвольный доминантный морфизм алгебраических многообразий со связными слоями.

Определение 2.2.2. *Экстремальным G-эквивариантным стягиванием Мори* мы будем называть такое проективное G-эквивариантное стягивание $\pi : X \to Y$, что X нормально и имеет не более, чем $G\mathbb{Q}$-факториальные терминальные особенности, антиканонический класс $-K_X$ является π-обильным и все исключительные G-инвариантные кривые численно пропорциональны.

Определение 2.2.3. Экстремальное G-эквивариантное стягивание Мори $f : X \to Y$ называется *G-расслоением Мори*, если $\dim X > \dim Y$, *дивизориальным*, если $\dim X = \dim Y$ и исключительное множество является дивизором и *малым*, если $\dim X = \dim Y$ и исключительное множество имеет коразмерность больше 1.

Теорема 2.2.4. (см. [45, §2.2]) *Пусть X — трёхмерное G-многообразие с не более, чем $G\mathbb{Q}$-факториальными терминальными особенностями, а $f : X \to Y$ — проективный G-эквивариантный морфизм. Тогда с помощью последовательности дивизориальных стягиваний и флипов можно получить G-морфизм $f' : X' \to Y$, где X' также имеет не более, чем $G\mathbb{Q}$-факториальные терминальные особенности, и либо дивизор $K_{X'}$ является относительно численно эффективным, то есть X' является относительно минимальной моделью над Y, либо морфизм f' пропускается через морфизм $g : X' \to Z$, где g — G-расслоение Мори.*

Определение 2.2.5. Линейная система дивизоров Вейля называется *подвижной*, если она не имеет неподвижных компонент. Пусть $\mathcal{L}_i$ — подвижные линейные системы на X и $\mathcal{L} = \sum l_i \mathcal{L}_i$ — их формальная линейная комбинация. Бирациональный морфизм $Y \to X$ называется *лог-разрешением особенностей* пары $(X, \mathcal{L})$, если Y неособо, а прообразы всех линейных систем $\mathcal{L}_i$ не имеют базисных точек. Выберем общие дивизоры $D_i \in \mathcal{L}_i$. Будем говорить, что пара $(X, \mathcal{L})$ имеет *терминальные* (соответственно, *канонические*) особенности, если для любого лог-разрешения особенностей $f : Y \to X$ в формуле

$$K_Y + D_Y = f^*(K_X + D) + \sum \lambda_j E_j,$$

где $D = \sum l_i D_i$, E_j — исключительные дивизоры морфизма f, а D_Y — собственный прообраз D, все $\lambda_j > 0$ (соответственно, все $\lambda_j \geqslant 0$).

Нам понадобится следующая категория, введённая В. Алексеевым в [2].

Определение 2.2.6. Категория $\mathbb{Q}LSc$ состоит из пар $(X, \mathcal{L})$, где X — $\mathbb{Q}$-факториальное многообразие, а $\mathcal{L} = \sum l_i \mathcal{L}_i$ — формальная сумма подвижных линейных систем с неотрицательными кратностями, причём пара $(X, \mathcal{L})$ является канонической, а многообразие X имеет терминальные особенности.

Согласно [2], в случае трёхмерных многообразий в категории $\mathbb{Q}LSc$ верны все основные теоремы и гипотезы программы минимальных моделей (теорема о конусе, теорема о стягивании, гипотеза о существовании флипов и гипотеза об обрыве цепочки флипов). Таким образом, в этой категории работает программа минимальных моделей. Если трёхмерное многообразие X является G-многообразием, а $\mathcal{L}_i$ — линейные G-инвариантные системы, то в категории $\mathbb{Q}LSc$ работает также G-эквивариантная программа минимальных моделей (см. теорему 2.2.4).

Следующая теорема является G-эквивариантной версией частичного крепантного разрешения особенностей пары (см. [16, Proposition 2.10]).

Теорема 2.2.7. *Пусть G-многообразие X имеет $G\mathbb{Q}$-факториальные терминальные особенности, а $\mathcal{H}$ — G-инвариантная подвижная линейная система, имеющая базисные точки. Тогда существует G-многообразие Z с $G\mathbb{Q}$-факториальными терминальными особенностями, G-эквивариантное экстремальное дивизориальное стягивание Мори $p : Z \to X$ и число c такое, что пара $(Z, cp_*^{-1}\mathcal{H})$ имеет канонические особенности и*

$$K_Z + cp_*^{-1}\mathcal{H} \sim p^*(K_X + c\mathcal{H}).$$

Доказательство. Можно подобрать такое положительное число c (оно называется *каноническим порогом*), что пара $(X, c\mathcal{H})$ каноническая, но не терминальная. Рассмотрим для пары $(X, c\mathcal{H})$ её эквивариантное разрешение особенностей $(Y, c\mathcal{H}_Y)$ и применим к паре $(Y, (c+\varepsilon)\mathcal{H}_Y)$ для малого положительного числа ε эквивариантную относительную (для морфизма $Y \to X$) программу минимальных моделей в категории $\mathbb{Q}LSc$. При подходящем выборе ε результатом программы минимальных моделей будет пара $(Y', c\mathcal{H}'_Y)$ такая, что исключительное множество отображения состоит в точности из дивизоров, крепантных для пары $(X, c\mathcal{H})$, причём особенности Y' терминальны. Применив далее эквивариантную относительную программу минимальных моделей для многообразия Y', на последнем шаге мы имеем требуемую пару $(Z, cp_*^{-1}\mathcal{N})$ (детали см. в [2] и [16, Proposition 2.10]). Теорема доказана. □

Также нам потребуется следующая теорема о структуре трёхмерных расслоений Мори с двумерной базой, доказанная Ю. Г. Прохоровым и Ш. Мори.

Теорема 2.2.8. (см. [51, Theorem 1.2.7]) *Пусть $f : X \to Z$ — трёхмерное расслоение Мори над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль с двумерной базой. Тогда Z может иметь только дювалевские особенности типа A.*

Замечание 2.2.9. Теорема 2.2.8 несложно обобщается на случай G-многообразий над произвольным полем характеристики нуль.

2.3. Бирациональная жёсткость и особенности линейных систем

Пусть X — трёхмерное многообразие с не более чем терминальными особенностями, G — конечная группа, действующая на X, причём X является многообразием $G\mathbb{Q}$-Фано. Более того, мы считаем, что канонический дивизор K_X является дивизором Картье (поскольку нам потребуются исключительно приложения к пересечениям двух квадрик и кубическим гиперповерхностям).

Определение 2.3.1. G-многообразие Фано X называется *G-бирационально жёстким*, если для любого G-расслоения Мори $X' \to Y$ такого, что X G-бирационально эквивалентно X', верно, что $X \simeq X'$.

Чтобы понять, как проверять G-бирациональную жёсткость G-многообразия Фано, предположим противное. Пусть $X' \to Y'$ — другое G-расслоение Мори. Предположим, что существует бирациональное G-эквивариантное отображение $f : X \dashrightarrow X'$.

Существует метод, позволяющий разложить f в композицию элементарных отображений, называемых линками Саркисова (подробности см. в [17]). Для этого выберем очень обильный G-инвариантный дивизор M' на X' и положим $\mathcal{M} = f_*^{-1}(|M'|)$. Ввиду того, что X является многообразием $G\mathbb{Q}$-Фано, существует такое рациональное число μ, что $\mathcal{M} \subset |-\mu K_X|$. Если X' не изоморфно X, то неравенства Нётера-Фано-Исковских (см. [17, Theorem 2.4]) дают нам неканоничность пары $(X, \frac{1}{\mu}\mathcal{M})$. Поэтому для доказательства бирациональной жёсткости X достаточно описать все возможные неканонические центры пар вида $(X, \frac{1}{\mu}\mathcal{M})$, и для каждого неканонического центра описать соответствующий линк Саркисова. Если все полученные линки дают многообразие, изоморфное X, то оно является бирационально жёстким. Для описания нульмерных неканонических центров пар нам понадобятся следующие теоремы.

Теорема 2.3.2. (см., например, [17, Lemma 1.10]) *В наших условиях пусть гладкая точка $p \in X$ — центр неканонической особенности пары $(X, \frac{1}{\mu}\mathcal{M})$. Пусть $Z = M_1 \cdot M_2$ — цикл, являющийся пересечением двух общих элементов линейной системы $\mathcal{M}$. Тогда $\operatorname{mult}_p Z > 4\mu^2$.*

Теорема 2.3.3. (см., например, [11, Теорема 1.7.20]) *Пусть $p \in X$ — обыкновенная двойная точка. Пусть D — эффективный $\mathbb{Q}$-дивизор на X, причём пара (X, D) неканонична в точке p. Тогда $\operatorname{mult}_p D > 1$.*

Для изучения неканонических центров, являющихся кривыми, нам понадобится следующее утверждение.

Теорема 2.3.4. (см., например, [18, Exercise 6.18]) *В наших условиях пусть неприводимая кривая C является центром неканонической особенности пары $(X, \frac{1}{\mu}\mathcal{M})$. Тогда кратность $\mathcal{M}$ вдоль кривой C больше μ.*

В случае неканонического центра, являющегося гладкой кривой, для описания связанного с ней линка Саркисова необходима следующая теорема:

Теорема 2.3.5. (см., например, [73, Proposition 1.2]) *Пусть Y и X трёхмерные нормальные многообразия, а $f : Y \to X$ — дивизориальное стягивание неприводимого дивизора $E \subset Y$ на кривую $C \subset X$. Предположим, что $\dim f(Y^{\mathrm{sing}}) = 0$, многообразие X имеет изолированные особенности, а $-E$ является f-обильным. Тогда Y изоморфно раздутию $\operatorname{Proj} \oplus_{d \geqslant 0} \mathcal{I}_{C,X}^{(d)}$.*

В частности, условия теоремы 2.3.5 выполнены в случае, когда многообразия X и Y имеют не более чем терминальные особенности, а f является стягиванием Мори.

2.4. Некоторые факты о геометрии расслоений на коники

Несмотря на то, что в основном нас будут интересовать проективные расслоения Мори на рациональные кривые, нам будет удобно работать в большей категории всех расслоений на рациональные кривые.

Определение 2.4.1. Тройка (X, Y, f), где X — геометрически неприводимое трёхмерное многообразие, Y — геометрически неприводимая поверхность, а $f : X \dashrightarrow Y$ — рациональное отображение, общий слой которого является геометрически неприводимой рациональной кривой над $\Bbbk(Y)$, называется *расслоением на рациональные кривые* над базой Y. Будем называть расслоение (X, Y, f) *расслоением на коники*, если многообразие Y неособо, отображение f является проективным морфизмом, а схемный слой f над произвольной замкнутой точкой Y изоморфен конике в $\mathbb{P}^2$ (возможно, вырожденной).

Определение 2.4.2. Группа G *действует на расслоении* (X, Y, f), если на X и Y заданы структуры G-многообразий, а f является G-эквивариантным отображением. Расслоения с действием группы G будем называть *G-расслоениями.*

Определение 2.4.3. Расслоение на коники (X, Y, f) называется *регулярным*, если отображение f является плоским морфизмом неособых многообразий.

Предложение 2.4.4. (см. [4, Proposition 1.2]) *Пусть $f : X \to Y$ — регулярное расслоение на коники. Тогда верны следующие утверждения:*

1. *Пучок $\mathcal{E} = f_*\mathcal{O}(-K_X)$ является локально свободным пучком ранга 3;*

2. *$\mathcal{O}(-K_X)$ — относительно очень обильный пучок, задающий вложение многообразия X в $\mathbb{P}(\mathcal{E}) = \operatorname{Proj}(S^\bullet\mathcal{E})$, при этом каждый слой является коникой в соответствующей проективной плоскости;*

3. *Существует приведённая (вообще говоря, приводимая) кривая Δ_f со следующими свойствами:*

   - *Δ_f имеет только нормальные пересечения в качестве особенностей;*

   - *Пусть y — замкнутая точка Y, а X_y — слой над ней. Тогда если $y \notin \Delta_f$, то X_y — гладкая коника, если $y \in \Delta_f - \operatorname{Sing}\Delta_f$, то X_y — геометрически приводимая приведённая коника, а если $y \in \operatorname{Sing}\Delta_f$, то X_y — двойная прямая.*

Замечание 2.4.5. В [4] это утверждение доказано для алгебраически замкнутого поля, но общий случай легко сводится к этому частному случаю.

Замечание 2.4.6. Образ вложения $X \subset \mathbb{P}(\mathcal{E})$ из предложения 2.4.4 является вложенным расслоением на коники в смысле определения 2.4.10, и в данном случае кривая вырождения совпадает с дивизором вырождения (см. определение 2.4.12).

Определение 2.4.7. Регулярное расслоение на коники (X, Y, f) с действием группы G называется *стандартным*, если многообразия X и Y проективны, а морфизм f является относительно минимальным, т.е. если для любого G-инвариантного G-неприводимого дивизора $D \subset Y$ прообраз $f^{-1}(D)$ является G-неприводимым дивизором на X (не представляется в виде суммы двух ненулевых эффективных G-инвариантных дивизоров). Это эквивалентно тому, что ранг эквивариантной части относительной группы Пикара $\rho(X/Y)^G$ равен 1.

Определение 2.4.8. G-расслоения на рациональные кривые (X, Y, f) и (X', Y', f') называются *эквивалентными*, если существуют такие бирациональные G-эквивариантные отображения $\lambda : X \dashrightarrow X'$ и $\mu : Y \dashrightarrow Y'$, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "\lambda"] \arrow[d, dashed, "f"] & X' \arrow[d, dashed, "f'"] \\ Y \arrow[r, dashed, "\mu"] & Y' \end{tikzcd}$$

Теорема 2.4.9. (см. [66, Теорема 1.13]) *У любого расслоения на рациональные кривые (X, Y, f) над алгебраически замкнутым полем существует стандартная модель (X', Y', f'), т.е. стандартное расслоение на коники, эквивалентное исходному.*

Определение 2.4.10. Пусть $\mathcal{E}$ — локально свободный пучок ранга 3 на неособой поверхности Y и $\tau : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to Y$ — стандартная проекция. Тогда *вложенным расслоением на коники* называется такой неприводимый приведённый дивизор $X \subset \mathbb{P}(\mathcal{E})$, что общий слой отображения $\tau|_X : X \to Y$ является коникой над $\Bbbk(Y)$ (хотя слои над некоторыми замкнутыми точками могут быть двумерными).

Замечание 2.4.11. Вложенное расслоение на коники не обязательно является расслоением на коники в смысле определения 2.4.1.

Пусть $\mathcal{E}$ — локально свободный пучок ранга 3 на Y, $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$, а $\mathcal{M}$ — некоторый локально свободный пучок на Y ранга 1. Пусть нули сечения $\sigma \in H^0(\mathbb{P}(\mathcal{E}), \mathcal{L}^2 \otimes \tau^*\mathcal{M})$ образуют вложенное расслоение на коники. Ясно, что любое вложенное расслоение коники представляется в таком виде для подходящих $\mathcal{E}$ и $\mathcal{M}$. Кроме того, если (X, Y, f) — регулярное расслоение на коники и $X \subset \mathbb{P}(\mathcal{E})$ — относительно антиканоническое вложение (см. предложение 2.4.4), можно положить $\mathcal{E} = f_*\mathcal{O}_X(-K_X)$, и тогда $\mathcal{M}$ имеет вид $\mathcal{M} = \det(\mathcal{E}^*) \otimes \mathcal{O}_Y(-K_Y)$ (подробности см. в [66]).

Существует естественный изоморфизм

$$H^0(Y, S^2(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{M}) \cong H^0(\mathbb{P}(\mathcal{E}), \mathcal{L}^2 \otimes \tau^*(\mathcal{M})),$$

поэтому буквой σ будем обозначать также сечение пучка $S^2(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{M}$. Ввиду естественного мономорфизма $S^2(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{M} \hookrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{E}^*, \mathcal{E} \otimes \mathcal{M})$, сечение σ определяет морфизм пучков $q(\sigma) : \mathcal{E}^* \to \mathcal{E} \otimes \mathcal{M}$. Морфизм $q(\sigma)$, в свою очередь, определяет морфизм пучков $q_0(\sigma) : \Lambda^3\mathcal{E}^* \to \Lambda^3(\mathcal{E} \otimes \mathcal{M})$.

Определение 2.4.12. Дивизор $C \subset Y$ нулей морфизма расслоений

$$q_0(\sigma) \in H^0(Y, (\det \mathcal{E})^2 \otimes \mathcal{M}^3) \subset H^0(Y, \mathrm{Hom}(\det \mathcal{E}^*, \det(\mathcal{E} \otimes \mathcal{M})))$$

называется *дивизором вырождения* вложенного расслоения на коники.

Замечание 2.4.13. Дивизор вырождения не всегда является приведённым в общем случае, однако он приведён для регулярных расслоений на коники (см. [66, Следствие 1.9]).

Определение 2.4.14. Пусть $f : X \to Y$ — расслоение на рациональные кривые и $U \subset Y$ — открытое подмножество. Пусть $\mathrm{codim}(Y \setminus U, Y) > 1$ и индуцированное расслоение $f_U : X_U \to U$ является регулярным расслоением на коники. Пусть $\Delta \subset U$ — его дивизор вырождения. Тогда замыкание $\overline{\Delta} \subset Y$ будем называть *дивизором вырождения* расслоения $f : X \to Y$.

2.5. Пересечения двух квадрик и символы Сегре

Поле в этом разделе предполагается алгебраически замкнутым характеристики нуль.

Пусть X — трёхмерное многообразие дель Пеццо степени 4 (см. определение 2.1.6). Напомним, что мы предполагаем, что X имеет только терминальные горенштейновы особенности. Согласно теореме 2.1.7, многообразие X является пересечением двух квадрик в $\mathbb{P}^5$. Кроме того, хорошо известно следующее утверждение.

Предложение 2.5.1. (см., например, [40, Example 10.3.1]) *Многообразие дель Пеццо X степени 4 является рациональным.*

Таким образом, для классификации подгрупп в группе Кремоны $\mathrm{Cr}_3(\Bbbk)$ важны все многообразия дель Пеццо степени 4.

Предложение 2.5.2. *Многообразие дель Пеццо X степени 4 является пересечним двух гладких квадрик.*

Доказательство. По теореме 2.1.7 многообразие X является пересечением двух квадрик, обозначим их Q_1 и Q_2. По теореме Бертини общий элемент Q пучка $\langle Q_1, Q_2\rangle$ неособ вне X. Так как $X = Q_1 \cap Q_2$, то Q может иметь особенности только в конечном множестве $\mathrm{Sing}(X)$. Поэтому общий элемент пучка квадрик может быть особым в том и только в том случае, когда Q_1 и Q_2 имеют общую особую точку. В таком случае X является пересечением двух конусов с общей вершиной, поэтому размерность касательного пространства в вершине равна пяти. С другой стороны, размерность касательного пространства в терминальной горенштейновой особой точке на трёхмерном многообразии равна четырём (см. [65, Theorem 1.1]). Противоречие. □

Для описания групп автоморфизмов многообразий дель Пеццо степени 4 нам будет удобно рассмотреть более общую ситуацию пересечения двух квадрик произвольной размерности.

Рассмотрим многообразие $X = Q_1 \cap Q_2 \subset \mathbb{P}^n$, где Q_1 и Q_2 — различные квадрики, причём квадрика Q_2 неособа. Будем обозначать теми же символами квадратичные формы, задающие квадрики (выберем по одной форме произвольным образом). Обозначим через $\mathcal{P}$ пучок квадрик

$$\mathcal{P} = \{Q_{\lambda,\mu} = \lambda Q_1 + \mu Q_2, (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1\}$$

(будем обозначать квадрику и её уравнение, а также матрицу соответствующей квадратичной формы одним символом).

Определение 2.5.3. *Дискриминантом пучка квадрик* $\mathcal{P}$ называется многочлен степени $n+1$ от двух переменных

$$\Delta = \Delta(\lambda,\, \mu) = \det(\lambda Q_1 + \mu Q_2).$$

Дискриминант пучка квадрик зависит от выбора порождающих Q_1 и Q_2, однако его корни (с учётом кратностей) определены однозначно, с точностью до автоморфизма $\mathcal{P} \simeq \mathbb{P}^1$.

Пусть $(\overline{\lambda} : \overline{\mu})$ — корень уравнения $\Delta = 0$. Существует такое целое число $d \geqslant 0$, что зануляются все миноры матрицы $Q_{\overline{\lambda}, \overline{\mu}}$ порядка $n+1-d$, но не все миноры порядка $n-d$. Обозначим через l_i, $i = 0, 1, ..., d$ минимальную кратность корня $(\overline{\lambda} : \overline{\mu})$ в минорах порядка $n+1-i$, тогда $l_i > l_{i+1}$. Пусть $e_i = l_i - l_{i+1}$, где $0 \leqslant i \leqslant d-1$ и $e_d = l_d$.

Определение 2.5.4. Числа e_i называются *характеристическими числами корня* $(\overline{\lambda} : \overline{\mu})$.

Пусть $(\lambda_i : \mu_i)$, $i = 1, 2, ..., r$ — все корни уравнения $\Delta = 0$, и пусть $e^i_j, j = 0, 1, ..., d_i$ — их характеристические числа, причём если $i_1 < i_2$, то $d_{i_1} \geqslant d_{i_2}$, а в случае равенства наборы характеристических чисел упорядочены лексикографически.

Определение 2.5.5. *Символом Сегре* пересечения двух квадрик X (или пучка квадрик $\mathcal{P}$) называется набор чисел

$$\sigma_X = \sigma_{\mathcal{P}} = \left[(e^1_0 ... e^1_{d_1}), (e^2_0 ... e^2_{d_2}), ..., (e^r_0 ... e^r_{d_r})\right].$$

Замечание 2.5.6. Будем опускать скобки в символе Сегре, если в них стоит ровно одно число.

Замечание 2.5.7. Каждому корню дискриминанта (скобке в символе Сегре) соответствует особая квадрика, являющаяся конусом с d-мерной вершиной, где d — количество характеристических чисел, соответствующих данному корню (будем называть это число длиной скобки).

Теорема 2.5.8. ([33, Chapter XIII, §10, Theorem I]) *Два пучка квадрик $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ изоморфны тогда и только тогда, когда существует автоморфизм $\mathbb{P}^1$, переводящий корни $\Delta_{\mathcal{P}_1}$ в корни $\Delta_{\mathcal{P}_2}$, причём наборы характеристических чисел у соответствующих корней совпадают.*

Таким образом, пучок квадрик однозначно определяется конфигурацией корней уравнения $\Delta = 0$ и символом Сегре. Поэтому можно определить нормальную форму пучка квадрик $\mathcal{P}$.

Для произвольного числа e_j^i из символа Сегре многообразия X рассмотрим две $e_j^i \times e_j^i$-матрицы

$$Q_{1,i,j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 1 & -\frac{\mu_i}{\lambda_i} \\ 0 & ... & 1 & -\frac{\mu_i}{\lambda_i} & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & -\frac{\mu_i}{\lambda_i} & 0 & ... & 0 \\ -\frac{\mu_i}{\lambda_i} & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}, \; Q_{2,i,j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ 0 & ... & 0 & 1 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}.$$

Следствие 2.5.9. *Можно выбрать однородные координаты в $\mathbb{P}^5$ таким образом, что в них матрицы Q_1 и Q_2 имеют блочно-диагональный вид*

$$Q_1 = \mathrm{Diag}(Q_{1,1,1}, ..., Q_{1,r,d_r}), \; Q_2 = \mathrm{Diag}(Q_{2,1,1}, ..., Q_{2,r,d_d}).$$

2.6. Трёхмерные кубические гиперповерхности с обыкновенными двойными точками

В этом параграфе мы опишем все особые трёхмерные кубические гиперповерхности, имеющие только обыкновенные двойные точки в качестве особенностей, следуя работе [25].

Пусть X — трёхмерная особая кубическая гиперповерхность, причём все особенности являются обыкновенными двойными точками. Пусть $p = (1:0:0:0:0)$ — особая точка. Тогда X в этой системе координат имеет уравнение

$$x_0 Q(x_1, x_2, x_3, x_4) + C(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

где $Q(x_1, x_2, x_3, x_4)$ — невырожденная квадратическая форма, а $C(x_1, x_2, x_3, x_4)$ — кубический многочлен. Рассмотрим проекцию из этой точки на гиперплоскость $H = \{x_0 = 0\}$, обозначим её через π. Легко видеть, что исключительный дивизор π отображается в кривую Z, заданную уравнениями

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = C(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

в H. Эта кривая является кривой бистепени $(3, 3)$ на гладкой квадрике, заданной уравнением $Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$. Мы имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[r, "\widetilde{\pi}"] \arrow[d, "g"] & \mathbb{P}^3 \\ X & \end{tikzcd}$$

где g — раздутие точки p, а $\pi = \widetilde{\pi} \circ g^{-1}$. Можно показать (см. [25]), что $\widetilde{\pi}$ является раздутием кривой Z. Таким образом, многообразие X однозначно восстанавливается по кривой бистепени $(3, 3)$ на гладкой квадрике. Кроме того, верны следующие факты:

1. кривая Z имеет только ноды в качестве особенностей;
2. особенности многообразия X, за исключением p, взаимно-однозначно отображаются в особенности кривой Z;
3. ранг группы классов дивизоров $\mathrm{Cl}(X)$ совпадает с количеством неприводимых компонент кривой Z;
4. плоскости, лежащие на X, взаимо-однозначно соответствуют кривым бистепени $(1, 0)$, $(0, 1)$ и $(1, 1)$ (возможно, приводимым), состоящим из компонент кривой Z.

Из них несложно вывести следующую теорему.

Теорема 2.6.1. *В наших условиях возможны следующие варианты:*

тип X	неприводимые компоненты Z	$s(x)$	$r(X)$	$p(X)$	наборы особых точек, лежащих на плоскостях
J1	$(3, 3)$	1	1	0	
J2	$(3, 3)$	2	1	0	
J3	$(3, 3)$	3	1	0	
J4	$(3, 3)$	4	1	0	
J5	$(3, 3)$	5	1	0	
J6	$(3, 2) + (0, 1)$	4	2	1	(p_1, p_2, p_3, p_4)
J7	$(3, 2) + (0, 1)$ или $(2, 2) + (1, 1)$	5	2	1	(p_1, p_2, p_3, p_4)
J8	$(3, 2) + (0, 1)$ или $(2, 2) + (1, 1)$	6	2	1	(p_1, p_2, p_3, p_4)

J9	$(2,\,1)+(1,\,2)$	6	2	0	
J10	$(2,\,1)+(1,\,1)+(0,\,1)$ или $(3,\,1)+(0,\,1)+(0,\,1)$	7	3	2	$(p_1,\,p_5,\,p_6,\,p_7)$, $(p_2,\,p_3,\,p_4,\,p_7)$
J11	$(2,\,2)+(1,\,0)+(0,\,1)$	6	3	3	$(p_1,\,p_2,\,p_3,\,p_4)$, $(p_1,\,p_2,\,p_5,\,p_6)$, $(p_3,\,p_4,\,p_5,\,p_6)$
J12	$(2,\,2)+(1,\,0)+(0,\,1)$ или $(1,\,1)+(1,\,1)+(1,\,1)$	7	3	3	$(p_1,\,p_2,\,p_4,\,p_6)$, $(p_1,\,p_3,\,p_5,\,p_6)$, $(p_2,\,p_3,\,p_4,\,p_5)$
J13	$(2,\,1)+(1,\,0)+(0,\,1)+$ $+(0,\,1)$ или $(1,\,1)+$ $+(1,\,1)+(1,\,0)+(0,\,1)$	8	4	5	$(p_1,\,p_2,\,p_6,\,p_8)$, $(p_1,\,p_2,\,p_5,\,p_7)$, $(p_5,\,p_6,\,p_7,\,p_8)$, $(p_3,\,p_4,\,p_5,\,p_6)$, $(p_3,\,p_4,\,p_7,\,p_8)$
J14	$(1,\,1)+(1,\,0)+(1,\,0)+$ $+(0,\,1)+(0,\,1)$	9	5	9	—
J15	$(1,\,0)+(1,\,0)+(1,\,0)+$ $+(0,\,1)+(0,\,1)+(0,\,1)$	10	6	15	—

где тип X — тип многообразия в терминологии работы [25], $s(X)$ — количество особых точек X, $r(X)$ — ранг группы Пикара X, $p(X)$ — число плоскостей, лежащих на X (нумерация особых точек такая же, как в работе [25]).

Замечание 2.6.2. Наборы особых точек, лещажих на плоскостях, в случаях J14 и J15 мы не выписываем, поскольку они занимают много места и не пригодятся нам в дальнейшем.

Глава 3

Стандартные модели G-расслоений на коники

3.1. Доказательство теоремы 1.2.1

Докажем теперь теорему 1.2.1. Напомним её формулировку:

Теорема 3.1.1. *Пусть* $\Bbbk$ *— произвольное поле характеристики нуль. Пусть* X *— трёхмерное алгебраическое многообразие над* $\Bbbk$*,* Y *— поверхность над* $\Bbbk$*,* G *— конечная группа, действующая бирациональными автоморфизмами на* X *и* Y*, и пусть* $f : X \dashrightarrow Y$ *— расслоение на рациональные кривые, причём отображение* f *является* G*-эквивариантным. Тогда* G*-расслоение* (X, Y, f) *имеет стандартную модель, то есть существует стандартное* G*-расслоение на коники, эквивалентное исходному.*

Разобьём доказательство на несколько лемм.

Лемма 3.1.2. *Пусть* G*-расслоение* (X, Y, f) *удовлетворяет условиям теоремы 3.1.1. Тогда существует* G*-расслоение Мори на рациональные кривые* (X', Y', f')*, эквивалентное исходному, где* X' *и* Y' *проективны. При этом особенности* X' *не более, чем терминальные, а особенности* Y' *— дювалевские.*

Доказательство. Перейдя к открытым подмножествам, можно считать, что G действует на X и Y регулярными автоморфизмами, а X и Y нормальны. Таким образом, можно применить лемму 2.1.9. Обозначим полученное расслоение Мори через (X', Y', f'). По соображениям размерности, (X', Y', f') является расслоением Мори на рациональные кривые. Особенности X' не более, чем терминальные, а Y' — поверхность с не более, чем дювалевскими особенностями по теореме 2.2.8 и замечанию 2.2.9. Лемма доказана. □

Таким образом, можно считать, что отображение $f : X \dashrightarrow Y$ из теоремы 3.1.1 является G-расслоением Мори на рациональные кривые. Следующая лемма показывает, как свести теорему 3.1.1 к случаю G-расслоения на рациональные кривые над гладкой базой, причем его дивизор вырождения является приведённым дивизором с простыми нормальными пересечениями.

Лемма 3.1.3. *Пусть (X', Y', f') — G-расслоение Мори над двумерной базой. Тогда оно эквивалентно G-расслоению на рациональные кривые $(\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{f})$, где $\widetilde{Y}$ — гладкая проективная поверхность, $\widetilde{X}$ — проективное многообразие, а все точки, над которыми слои $\widetilde{f}$ не являются гладкими, лежат в некотором дивизоре с простыми нормальными пересечениями.*

Доказательство. Выкинув из Y' конечное число точек, а именно особые точки Y' и образы особых точек X' (особенности X' терминальны, а значит изолированы), мы получаем открытое множество $U \subset Y'$, над которым наше расслоение является регулярным расслоением на коники, поэтому можно определить дивизор вырождения в U. Обозначим через Δ' его замыкание в Y', этот дивизор приведён согласно замечанию 2.4.13. Рассмотрим эквивариантный морфизм $\widetilde{\alpha} : \widetilde{Y} \to Y'$ — эквивариантное разрешение особенностей пары (Y', Δ'). Тогда дивизор $\widetilde{\Delta} = \Delta' + \mathrm{Exc}(\widetilde{\alpha})$ — приведённый дивизор с простыми нормальными пересечениями. Обозначим через $\widetilde{X}$ эквивариантное разрешение особенностей доминантной компоненты $X' \times_{Y'} \widetilde{Y}$ (предварительно нормальзовав её, если нужно), соответствующее отображение $\widetilde{X}$ в $\widetilde{Y}$ обозначим $\widetilde{f}$. Очевидно, что все вырожденные слои могут лежать только над точками кривой $\widetilde{\Delta}$. Лемма доказана. □

Определение 3.1.4. *G-точкой* G-многообразия будем называть G-орбиту некоторой замкнутой точки.

В следующей лемме мы покажем, как, имея G-расслоение Мори на рациональные кривые, построить эквивалентное ему G-расслоение Мори, база которого является частичным крепантным разрешением особенностей базы исходного G-расслоения. Применив несколько раз построенный линк, мы полностью разрешим особенности базы расслоения.

Лемма 3.1.5. *Пусть (W, V, g) — G-расслоение Мори с двумерной базой. Пусть v — особая G-точка поверхности V. Тогда существует эквивалентное ему G-расслоение на рациональные кривые (W', V', g'), являющееся G-расслоением Мори, причём отображение $V' \to V$ является крепантным частичным разрешением особенности в G-точке v, а отображение $W \dashrightarrow W'$ является элементарным преобразованием Саркисова (см.* [46, §13]*).*

Доказательство. Рассмотрим такую линейную систему гиперплоских сечений $\mathcal{H}$ для некоторого подходящего вложения V в проективное пространство, что $\mathrm{Bs}(\mathcal{H})$ совпадает с v, а $\mathcal{H}$ инвариантна относительно действия группы G. Для этого рассмотрим на V очень обильный дивизор D, инвариантный относительно действия группы. Тогда в качестве $\mathcal{H}$ можно рассмотреть подсистему дивизоров, проходящих через G-точку v в полной линейной системе $|nD|$ для достаточно большого n. Пусть $\mathcal{N} = g_*^{-1}(\mathcal{H})$ — прообраз $\mathcal{H}$, а c — канонический порог пары $(W, \mathcal{N})$. По теореме 2.2.7 у пары $(W, c\mathcal{N})$ существует частичное крепантное разрешение особенностей $(\widetilde{W}, c\widetilde{\mathcal{N}})$. Обозначим морфизм $\widetilde{W} \to W$ через π.

Рассмотрим теперь относительную над V эквивариантную программу минимальных моделей для пары $(\widetilde{W}, c\widetilde{\mathcal{N}})$. Все кривые на исключительном дивизоре E отображения π численно пропорциональны и пересекаются с $K_{\widetilde{W}} + c\widetilde{\mathcal{N}}$ по нулю по формуле проекции. Пусть $\widetilde{C}$ — достаточно общий слой отображения $h : \widetilde{W} \to V$, а C — слой отображения $W \to V$ над той же точкой, тогда по формуле проекции

$$\widetilde{C} \cdot (K_{\widetilde{W}} + c\widetilde{\mathcal{N}}) = \widetilde{C} \cdot \pi^*(K_W + c\mathcal{N}) = C \cdot (K_W + c\mathcal{N}) = C \cdot K_W < 0,$$

где последнее равенство следует из выбора линейной системы. Значит, на конусе Мори $\mathrm{NS}(\widetilde{W}/V)^G$ есть ровно один отрицательный экстремальный луч, причём его стягивание даёт либо расслоение на рациональные кривые, либо малое стягивание (на самом деле первый случай невозможен, но это нам неважно).

Во втором случае после последовательности эквивариантных лог-флипов (она не может быть бесконечной, см. [45, §6.3] или [46, §9.2]) мы приходим к G-многообразию $\widetilde{W}'$ с G-эквивариантным морфизмом $h' : \widetilde{W}' \to V$. Относительный G-инвариантный конус Мори $\mathrm{NS}(\widetilde{W}'/V)^G$ порождён двумя лучами, ровно один из которых отрицателен, причём его стягивание является либо дивизориальным стягиванием, либо G-расслоением Мори. Предположим, что имеет место первый случай, тогда после стягивания мы получаем G-многообразие $\widehat{W}$ с морфизмом $\widehat{g} : \widehat{W} \to V$, причём этот морфизм является G-расслоением Мори над поверхностью. Но тогда W и $\widehat{W}$ являются G-расслоениями Мори над общей базой V, причём они изоморфны в коразмерности 1, поэтому на самом деле они изоморфны:

$$W \simeq \mathrm{Proj}\left(\bigoplus \mathcal{O}_W(-nK_W)\right) \simeq \mathrm{Proj}\left(\bigoplus \mathcal{O}_{\widehat{W}}(-nK_{\widehat{W}})\right) \simeq \widehat{W}.$$

Заметим, что исключительным дивизором стягивания может быть только образ дивизора E, поскольку по построению это единственный дивизор в слоях $h' : \widetilde{W}' \to V$. Но тогда с одной стороны дивизор E крепантен для пары $(W, c\mathcal{N})$, а с другой стороны он не является крепантным, поскольку является исключительным дивизором стягивания отрицательного луча. Противоречие.

Значит, возможность дивизориального стягивания исключена, поэтому в любом случае мы получили G-расслоение Мори $\widehat{g} : \widehat{W} = \widetilde{W}' \to \widehat{V}$ с морфизмом $\sigma : \widehat{V} \to V$. По соображениям размерности оно является расслоением на рациональные кривые. Таким образом, имеем следующую коммутативную G-эквивариантную диаграмму, задающую элементарное преобразование Саркисова:

$$\begin{tikzcd}
(W, c\mathcal{N}) \arrow[d, "g"] & (\widetilde{W}, c\widetilde{\mathcal{N}}) \arrow[l] \arrow[r, dashed] & (\widehat{W}, c\widehat{\mathcal{N}}) \arrow[d, "\widehat{g}"] \\
V & & \widehat{V} \arrow[ll]
\end{tikzcd}$$

Более того, $\widehat{V}$ имеет только дювалевские особенности по теореме 2.2.8, а исключительное множество морфизма $\widehat{V} \to V$ состоит из одного G-инвариантного дивизора (исключительный дивизор морфизма $\pi : \widetilde{W} \to W$ не может целиком лежать в слое морфизма $\widehat{g}$). Согласно [52, Theorem 1.4], морфизм $\widehat{V} \to V$ может быть либо композицией взвешенных раздутий гладких точек, либо крепантным частичным разрешением особенностей V. Первый случай невозможен, поскольку исключительный дивизор лежит над особой G-точкой v, а значит поверхность $\widehat{V}$ является крепантным частичным разрешением особенностей поверхности V. Лемма доказана. □

Следствие 3.1.6. *Пусть (W, V, g) — G-расслоение Мори с двумерной базой. Тогда существует эквивалентное ему G-расслоение на рациональные кривые (W', V', g'), являющееся G-расслоением Мори, причём поверхность V' является минимальным разрешением особенностей поверхности V.*

Доказательство. Применив лемму 3.1.5 несколько раз, мы придём к G-расслоению Мори над неособой двумерной базой, поскольку количество крепантных дивизоров на V конечно (все крепантные исключительные дивизоры реализуются на минимальном разрешении особенностей поверхности V). Следствие доказано. □

Лемма 3.1.7. *Пусть расслоение $f : X \dashrightarrow Y$ удовлетворяет условиям теоремы 3.1.1. Тогда существует эквивалентное ему G-расслоение Мори*

$\widehat{f}:\widehat{X}\to\widehat{Y}$ такое, что $\widehat{Y}$ — неособая проективная поверхность, а кривая вырождения является приведённым дивизором с простыми нормальными пересечениями.

Доказательство. Использовав лемму 3.1.2, мы получаем G-расслоение Мори $f':X'\to Y'$, эквивалентное исходному. Затем применим лемму 3.1.3 к G-расслоению $f':X'\to Y'$, имеем G-расслоение на рациональные кривые $\widetilde{f}:\widetilde{X}\to\widetilde{Y}$ такое, что $\widetilde{Y}$ — гладкая поверхность, а все точки, над которыми слои морфизма $\widetilde{f}$ не являются гладкими, лежат в дивизоре с простыми нормальными пересечениями. Применим относительную G-эквивариантную программу минимальных моделей к $\widetilde{X}\to\widetilde{Y}$. Рассуждая так же, как в лемме 3.1.2, получаем, что результатом программы минимальных моделей будет G-расслоение на рациональные кривые $\overline{f}:\overline{X}\to\overline{Y}$, с морфизмом $\overline{\alpha}:\overline{Y}\to\widetilde{Y}$. Особенности $\overline{X}$ будут терминальными, а особенности $\overline{Y}$ — дювалевскими.

Применим следствие 3.1.6 к G-расслоению $\overline{f}:\overline{X}\to\overline{Y}$. Мы получаем G-расслоение Мори $\widehat{f}:\widehat{X}\to\widehat{Y}$ с морфизмом $\widehat{\alpha}:\widehat{Y}\to\overline{Y}$. Возникает следующая коммутативная G-эквивариантная диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, dashed] \arrow[d, "f"] & X' \arrow[d, "f'"] & \widetilde{X} \arrow[l] \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\widetilde{f}"] & \overline{X} \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\overline{f}"] & \widehat{X} \arrow[d, "\widehat{f}"] \\
Y & Y' \arrow[l, dashed] & \widetilde{Y} \arrow[l, "\widetilde{\alpha}"'] & \overline{Y} \arrow[l, "\overline{\alpha}"'] & \widehat{Y} \arrow[l, "\widehat{\alpha}"']
\end{tikzcd}$$

Рассмотрим дивизор $\widehat{\Delta}=(\overline{\alpha}\circ\widehat{\alpha})^*\widetilde{\Delta}+\mathrm{Exc}(\overline{\alpha}\circ\widehat{\alpha})$, где $\widetilde{\Delta}$ — дивизор, построенный в лемме 3.1.3. Тогда $\widehat{\Delta}$ — дивизор с простыми нормальными пересечениями, поскольку таким был дивизор $\widetilde{\Delta}$, а $\overline{\alpha}\circ\widehat{\alpha}$ — морфизм между гладкими проективными поверхностями. Дивизор вырождения G-расслоения $(\widehat{X},\widehat{Y},\widehat{f})$ является приведённым дивизором, все компоненты которого содержатся в $\widehat{\Delta}$. Обозначим этот дивизор вырождения $\widehat{\Delta}'$. Таким образом, $\widehat{\Delta}'$ — приведённый дивизор с простыми нормальными пересечениями. Лемма доказана. $\square$

Таким образом, любое G-расслоение на рациональные кривые эквивалентно G-расслоению Мори на рациональные кривые с гладкой базой и дивизором вырождения, являющимся приведённым дивизором с простыми нормальными пересечениями. В следующих двух леммах мы покажем, что оно является вложенным G-расслоением на коники. Для этого нам потребуется понятие G-пучка.

Определение 3.1.8. *G-пучком* называется квазикогерентный пучок E на G-многообразии Z с набором изоморфизмов пучков $\lambda_g^E : E \to g^*E$, удовлетворяющих соотношениям $\lambda_1^E = \mathrm{Id}_E$ и $\lambda_{g_1 g_2}^E = g_2^*(\lambda_{g_1}^E) \circ \lambda_{g_2}^E$.

Лемма 3.1.9. *Пусть $g : W \to U$ — регулярное G-расслоение на коники, где U — открытое подмножество неособой поверхности V, причём дополнение $V \setminus U$ состоит из конечного числа точек. Тогда существует эквивалентное ему вложенное G-расслоение на коники $g' : W' \to V$, изоморфное исходному над U.*

Доказательство. Обозначим за $j : U \to V$ естественное вложение. Тогда по предложению 2.4.4 антиканонический дивизор $-K_{W_U}$ задаёт вложение W_U в $\mathbb{P}(\mathcal{E}_1)$, где $\mathcal{E}_1 = g_*\mathcal{O}_{W_U}(-K_{W_U})$.

Заметим, что дуализирующий пучок ω_{W_U} имеет естественную структуру G-пучка на W_U, она индуцирует структуру G-пучка на антиканоническом пучке, следовательно на локально свободном пучке $\mathcal{E}$ имеется естественная структура G-пучка. Рассмотрим пучок $\mathcal{E} = (j_*\mathcal{E}_1)^{\vee\vee}$. Он является локально свободным пучком ранга 3 (он рефлексивен, а на неособой поверхности любой рефлексивный пучок является локально свободным, см. [30, Corollary 1.4]) на V, причём на нём также имеется естественная структура G-пучка. Более того, это единственный локально свободный пучок, продолжающий $\mathcal{E}_1$ на всю V. Обозначим через W' замыкание W_U в $\mathbb{P}(\mathcal{E})$. Это вложенное расслоение на коники, на котором определено действие группы G. Лемма доказана. □

Лемма 3.1.10. *Пусть $h : W \to V$ — трёхмерное G-расслоение Мори над двумерной базой, причём V неособо, а дивизор вырождения Δ является приведённым дивизором с простыми нормальными пересечениями. Тогда существует такой локально свободный G-пучок $\mathcal{E}$ ранга 3 на V и такое G-эквивариантное вложение $W \to \mathbb{P}(\mathcal{E})$ над V, что W является вложенным G-расслоением на коники.*

Доказательство. Если W неособо, то утверждение доказано по утверждению 2.4.4. Если же оно особо, то его особенности терминальны. Поскольку трёхмерные терминальные особенности изолированы, можно применить лемму 3.1.9 для U, являющегося дополнением до образа множества особых точек W. Обозначим через $W' \subset \mathbb{P}(\mathcal{E})$ соответствующее вложенное G-расслоение на коники. Поскольку $V \setminus U$ — конечный набор точек, дивизор вырождения G-расслоения на коники (W', V, h') совпадает с Δ.

Проверим, что морфизм h' плоский. Над некоторой окрестностью B произвольной точки $v \in V$ расслоение h' задаётся квадратичной формой

$$Q_B(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} x_i x_j$$

в $\mathbb{P}^2 \times B$, где A_{ij} — функции из $k[B]$. Если ранг этой формы в v равен нулю, то все A_{ij} обнуляются в v, а значит $\det Q_B$ лежит в $\mathfrak{m}_v^3$, где $\mathfrak{m}_v$ — максимальный идеал точки v. Но $\det Q_B$ задаёт дивизор вырождения, а он имеет в точке v не более, чем простое нормальное пересечение, значит ранг формы Q_B не может обнулиться. Многообразие W' является нормальным локально полным пересечением, поэтому из того, что морфизм h' равноразмерный следует, что он плоский. Как следствие, многообразия W и W' изоморфны над V в коразмерности 1. Антиканонические дивизоры $-K_W$ и $-K_{W'}$ обильны, поэтому на самом деле

$$W \simeq \operatorname{Proj}\left(\bigoplus \mathcal{O}_W(-nK_W)\right) \simeq \operatorname{Proj}\left(\bigoplus \mathcal{O}_{W'}(-nK_{W'})\right) \simeq W'.$$

Таким образом, W является вложенным G-расслоением на коники, причём дивизор вырождения приведён и имеет только простые нормальные пересечения в качестве особенностей. Лемма доказана. $\square$

Применив лемму 3.1.7 к произвольному G-расслоению на рациональные кривые (X, Y, f), удовлетворяющему условиям теоремы 3.1.1, мы получаем G-расслоение Мори $\widehat{f} : \widehat{X} \to \widehat{Y}$, причём поверхность $\widehat{Y}$ неособа, а дивизор вырождения $\widehat{\Delta}$ является приведённым дивизором с простыми нормальными пересечениями. По лемме 3.1.10, оно является вложенным (в проективизацию некоторого локально свободного пучка ранга 3) G-расслоением на коники. Если $\widehat{X}$ неособо, то теорема доказана (плоскость морфизма следует из [50, Theorem 3.5]). Пусть теперь $\widehat{X}$ особо. Будем последовательно разрешать его особенности элементарными преобразованиями Саркисова.

Лемма 3.1.11. *Пусть $h : W \to V$ — вложенное расслоение на коники, причём поверхность V неособа (но не обязательно проективна), а дивизор вырождения Γ этого расслоения приведён и имеет только простые нормальные пересечения. Тогда все особые точки W обыкновенные двойные. Более того, если $\pi : \widetilde{W} \to W$ — раздутие максимальных идеалов особых точек, то $\widetilde{W}$ неособо, а антиканонический дивизор $-K_{\widetilde{W}}$ относительно численно эффективен и объёмен.*

Замечание 3.1.12. В этой и следующей лемме мы забываем про действие группы G. Однако, как будет видно далее, из-за каноничнисти производимых локальных преобразований действие группы в итоге сохранится.

Доказательство. Согласно Саркисову (см. [66, Следствие 1.11]) особые точки W лежат в тех слоях расслоения над особыми точками Γ, которые являются геометрически приводимыми кониками. Пусть w — особая точка W, а $v = h(w)$. Покажем, что в некоторой формальной окрестности точки v расслоение $W \to V$ можно задать квадратичной формой

$$Q(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + bx_2^2 + stx_3^2 = 0, \tag{3.1}$$

где s и t — функции, локально задающие компоненты Γ, проходящие через v, а a и b — некоторые ненулевые элементы поля $\Bbbk$.

Рассмотрим такую окрестность U точки v, что над ней тривиально расслоение, в проективизацию которого вложено W, и пересечение $U \cap \Gamma$ состоит из двух компонент, проходящих через v. Тогда над ней W задаётся квадратичной формой

$$Q_U(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij} x_i x_j$$

в $\mathbb{P}^2 \times U$, где A_{ij} — функции из $\Bbbk[U]$. Над точкой v эта квадратичная форма задаёт геометрически приводимую конику, поэтому линейной заменой координат x_i (с коэффициентами из $\Bbbk$) можно добиться того, что

$$A_{11}(v) = a \neq 0, A_{22} = b \neq 0,$$

а все остальные A_{ij} равны нулю в точке v. Приведя после этого квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа и уменьшив окрестность U, если необходимо, получим, что W задаётся в $\mathbb{P}^2 \times U$ квадратичной формой

$$Q'_U(x_1, x_2, x_3) = Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2,$$

где A, B, C лежат в $\Bbbk[U]$, причём $A(v) = a$, $B(v) = b$. Но мы знаем, что $\det Q'_U$ задаёт дивизор Γ в U, значит $C = stC'$, где $C'(v) = 1$. Осталось заметить, что в формальной окрестности из любого ряда со свободным членом, равным 1, можно извлечь квадратный корень. Теперь первое утверждение леммы легко следует из явной формулы (3.1), локально задающей W.

Последнее утверждение локально по базе. Рассмотрим его над окрестностью точки v, не содержащей других точек, в слоях над которыми имеются особенности. Тогда на конусе Мори $\mathrm{NS}(\widetilde{W}/V)$ есть два экстремальных луча R_1 и R_2. Луч R_1 порождён кривой на исключительном дивизоре E морфизма π и пересекается с $K_{\widetilde{W}}$ отрицательно, а R_2 — собственным прообразом $\pi_*^{-1}(l)$ слоя морфизма $W \to V$ над точкой v. Второй луч $K_{\widetilde{W}}$-тривиален:

$$\pi_*^{-1}(l) \cdot K_{\widetilde{W}} = \pi_*^{-1}(l) \cdot (\pi^*(K_W) + E) = l \cdot K_W + \pi_*^{-1}(l) \cdot E = -2 + 2 = 0.$$

Предпоследнее равенство следует из того, что кривая l геометрически приводима, и над алгебраическим замыканием каждая её компонента пересекается с исключительным дивизором трансверсально в одной точке. Таким образом, численная эффективность дивизора $-K_{\widetilde{W}}$ доказана. Его объёмность следует из того, что $-K_{\widetilde{W}}$ обилен на общем слое. Лемма доказана. $\square$

Лемма 3.1.13. *Пусть $h : W \to V$ — вложенное расслоение на коники, причём поверхность V неособа (но не обязательно проективна), дивизор вырождения Γ этого расслоения приведён и состоит из двух гладких неприводимых компонент, пересекающихся трансверсально в одной точке v, а W особо в точке w. Тогда существует и единственна следующая коммутативная диаграмма, задающая элементарное преобразование Саркисова:*

$$\begin{array}{ccccc} W & \longleftarrow & \widetilde{W} & \dashrightarrow & \widehat{W} \\ \big\downarrow h & & & & \big\downarrow \widehat{h} \\ V & \longleftarrow & & & \widehat{V} \end{array}$$

где морфизм $\widetilde{W} \to W$ — раздутие точки w, морфизм $\widehat{V} \to V$ — раздутие точки v, отображение $\widetilde{W} \dashrightarrow \widehat{W}$ — изоморфизм в коразмерности 1, а $\widehat{W} \to \widehat{V}$ — стандартное расслоение на коники.

Доказательство. Пусть H — эффективный очень обильный дивизор на V, проходящий через v. Обозначим через H_n сумму $nh^*(H) - K_W$, где $n \gg 0$, при достаточно большом n этот дивизор будет обилен, поскольку $-K_W$ относительно обилен, а H очень обилен на базе. Существует такое число l, что lH_n очень обилен. Обозначим через $\mathcal{H}$ полную линейную систему дивизоров, эквивалентных lH_n и проходящих через w, а через c — канонический порог пары $(W, \mathcal{H})$. Особенности пары $(W, \mathcal{H})$ разрешаются одним раздутием $p : \widetilde{W} \to W$ из-за выбора линейной системы согласно лемме 3.1.11.

Рассмотрим относительный конус Мори $\mathrm{NS}(\widetilde{W}/V)$. Так же, как и в лемме 3.1.11, он порождён двумя лучами, R_1 порождён кривой на исключительном дивизоре раздутия и пересекается с $p^*(K_W+c\mathcal{H})$ по нулю, а R_2 порождён собственным прообразом слоя $h^{-1}(v)$ и $p^*(K_W+c\mathcal{H})$-отрицателен. Применение программы минимальных моделей в категории $\mathbb{Q}LSc$ к паре $(\widetilde{W}, c\widetilde{\mathcal{H}} = cp_*^{-1}\mathcal{H})$ на первом шаге даёт лог-флип между многообразиями $\widetilde{W} \dashrightarrow \widehat{W}$, через $\widehat{\mathcal{H}}$ обозначим образ линейной системы $\widetilde{\mathcal{H}}$ на $\widehat{W}$. По лемме 3.1.11 этот лог-флип является флопом, а значит сохраняет гладкость (см. [44, Theorem 2.4]).

На втором шаге программы минимальных моделей получаем $K_{\widehat{W}}$-отрицательное стягивание Мори $\widehat{W} \to \widehat{V}$ (дивизоры $K_{\widehat{W}}$ и $K_{\widehat{W}} + \widehat{\mathcal{H}}$ не являются численно эффективными, поскольку отрицательно пересекаются с общим слоем расслоения). Это стягивание не может быть дивизориальным, поскольку единственный дивизор в слоях морфизма $\widehat{W} \to V$ крепантен. Кроме того, это стягивание не может быть малым, поскольку после лог-флипа все $K_{\widehat{W}} + \widehat{\mathcal{H}}$-отрицательные кривые являются $K_{\widehat{W}}$-отрицательными, а на гладком трёхмерном многообразии нет малых экстремальных стягиваний (см. [45, §2.1]). Следовательно, мы получаем неособое расслоение Мори с двумерной базой, которая также неособа, см. [50, Theorem 3.5]. Морфизм между гладкими поверхностями $\widehat{V} \to V$ имеет один исключительный дивизор, который отображается в точку v. Таким образом, нужная диаграмма построена. Её единственность следует из того, что расслоения Мори над общей базой, изоморфные в коразмерности один, на самом деле изоморфны, поскольку они оба изоморфны $\mathrm{Proj}(\bigoplus \mathcal{O}(-nK_{\widehat{W}}))$. Лемма доказана. □

Применив лемму 3.1.13 в окрестности каждой особой точки $\widehat{X}$, мы получаем стандартное расслоение на коники $\widehat{X}' \to \widehat{Y}$, которое, ввиду каноничности построения разрешения в лемме 3.1.13, наследует действие группы, значит, оно является искомым стандартным G-расслоением, эквивалентным исходному. Теорема 3.1.1 доказана.

Глава 4

Трёхмерные пересечения двух квадрик

4.1. Автоморфизмы пересечения двух квадрик

С этого момента основное поле предполагается алгебраически замкнутым характеристики нуль.

В этой главе X — трёхмерное G-многообразие дель Пеццо, являющееся пересечением двух квадрик. Мы знаем (см. предложение 2.5.2), что оно является пересечением двух квадрик, одна из которых неособа, поэтому ему можно сопоставить его символ Сегре (см. определение 2.5.5).

Предложение 4.1.1. *Любая скобка в символе Сегре многообразия X содержит не более двух характеристических чисел, а любая скобка из двух чисел имеет вид $(a, 1)$.*

Доказательство. Действительно, если в какой-то скобке содержится более двух чисел, то квадрика, соответствующая корню дискриминанта с этим набором характеристических чисел, является конусом над коникой с двумерной вершиной. Эта вершина пересекается с другой квадрикой из пучка по кривой особых точек, что противоречит терминальности X.

Любой скобке вида (a, b) соответствует конус над неособой квадратичной поверхностью с одномерной вершиной. Простая проверка (см. следствие 2.5.9) показывает, что если $b > 1$, то эта вершина целиком лежит на X, что даёт прямую особых точек. Это противоречит терминальности многообразия X. □

Замечание 4.1.2. Если же все скобки в символе Сегре многообразия X имеют вид (a) или $(a, 1)$, то несложно проверить, что особыми точками на X будут вершины конусов, соответствующих скобкам вида (a), $a > 1$, и точки пересечения одномерных вершин конусов, соответствующих скобкам длины 2, с другой квадрикой из пучка (для скобок вида $(1, 1)$ пересечение состоит из двух точек, для скобок вида $(a, 1)$, $a > 1$ — из одной). В частности, пересечение двух квадрик неособо тогда и только тогда, когда его символ Сегре равен $[1, 1, 1, 1, 1, 1]$.

Замечание 4.1.3. Кроме того, существует ровно одно многообразие с символом Сегре $[(1,1),(1,1),(1,1)]$. Несложно проверить (например, написав явные уравнения, см. следствие 2.5.9), что оно совпадает с многообразием из пункта 1 теоремы 1.2.2.

Теорема 4.1.4. *Пусть X — трёхмерное многообразие дель Пеццо степени 4. Тогда группа $\mathrm{Aut}(X)$ вкладывается в точную последовательность*

$$0 \to \mathrm{Aut}(X)' \to \mathrm{Aut}(X) \to \mathrm{Aut}(X)'' \to 0,$$

где группа $\mathrm{Aut}(X)'$ действует на $\mathbb{P}^5$, сохраняя каждую квадрику из пучка, а $\mathrm{Aut}(X)''$ — группа автоморфизмов $\mathbb{P}^1$, переводящая каждый корень дискриминанта в корень дискриминанта с тем же набором характеристических чисел.

Доказательство. Это простое следствие из теоремы 2.5.8. □

Далее мы рассмотрим многообразие дель Пеццо X степени 4 с действием G — такой конечной подгруппы $\mathrm{Aut}(X)$, что многообразие X является G-минимальным.

Теорема 4.1.5. *Пусть X — G-многообразие дель Пеццо, причём группа G минимальна. Предположим, что G не является линеаризуемой или расслоенного типа, а кроме того X не является G-бирационально эквивалентным квадрике в $\mathbb{P}^4$. Тогда символ Сегре X равен $[1,1,1,1,1,1]$ или $[(1,1),(1,1),(1,1)]$.*

Доказательство. Согласно утверждению 4.1.1, символ Сегре многообразия X имеет только скобки вида (a) или $(a,1)$.

Лемма 4.1.6. *Если в символе Сегре многообразия X есть ровно одна скобка вида (n), $n > 1$ (соотв., $(n,1)$), то X является G-бирационально эквивалентным квадрике в $\mathbb{P}^4$ (соотв., G-расслоению на коники).*

Доказательство. Рассмотрим случай скобки вида (n). Обозначим соответствующий ей конус через Q_1, а его вершину через p. Тогда точка p является особой G-инвариантной точкой многообразия X. Рассмотрим проекцию из этой точки. Общая прямая, лежащая на Q_1 и проходящая через p, пересекается с другой квадрикой Q_2 (которую можно считать гладкой) в двух точках, одна из которых p. В противном случае, любая образующая конуса либо целиком лежит на Q_2, либо имеет пересечение кратности 2 в точке p. Таким образом, любая образующая конуса Q_1 лежит на касательной плоскости в точке p к Q_2, чего не может быть. Таким образом, проекция из точки p является G-эквивариантным бирациональным отображением на гиперповерхность степени 2 в $\mathbb{P}^4$.

Пусть теперь скобка имеет вид $(n, 1)$. Обозначим соответствующий ей конус через Q_1, а его вершину через l (она является прямой). Рассмотрим проекцию из l. Образом этой проекции будет неособая квадрика $Q_1' \subset \mathbb{P}^3$ — основание конуса Q_1. Общая плоскость, проходящая через l, пересекает Q_2 по неособой конике. Действительно, если бы сечение общей плоскостью имело особенность, то по теореме Бертини это была бы точка пересечения l с Q_2. Тогда общее сечение было бы парой прямых, проходящих через $l \cap Q_2$, а это означает, что Q_2 — конус с вершиной в $l \cap Q_2$. Противоречие. Таким образом, проекция из l даёт нам структуру G-расслоения на коники над Q_1'. Разрешив его особенности и применив G-эквивариантную относительную программу минимальных моделей, мы получаем искомое G-расслоение Мори на коники. Таким образом, в этом случае группа G является группой расслоенного типа.

□

Таким образом, можно считать, что любая скобка кроме (1) либо не входит в символ Сегре, либо входит более одного раза. Перечислим все возможные символы Сегре, удовлетворяющие этому свойству, учитывая, что сумма всех чисел в символе Сегре равна шести:

$$[1,1,1,1,1,1],\ [2,2,1,1],\ [2,2,2],\ [3,3],\ [(1,1),(1,1),1,1],$$

$$[(1,1),(1,1),(1,1)],\ [(2,1),(2,1)].$$

Если символ Сегре многообразия X равен $[2,2,1,1], [3,3]$ или $[(2,1),(2,1)]$, то X содержит ровно две особые точки, причём прямая l, проходящая через них, содержится в X. Действительно, в этом случае X является пересечением конусов с вершинами в двух особых точках X. Обозначим эти конуса через Q_1 и Q_2. Прямая, проходящая через них, целиком содержится в обоих конусах, а значит лежит на их пересечении. Очевидно, что прямая l является G-инвариантной. Проекция из прямой l даёт бирациональное G-отображение на $\mathbb{P}^3$. Действительно, рассмотрим общую плоскость, содержащую l. Её пересечение с Q_i равно $l + l_i$. Для общей плоскости прямые l_1 и

l_2 пересекаются в одной точке, не лежащей на l, что и требовалось доказать. Таким образом, в этом случае группа G линеаризуема.

Если символ Сегре равен $[2,2,2]$, то X содержит ровно три особые точки, причём плоскость, проходящая через них, содержится в X. Действительно, согласно доказанному выше, прямая, проходящая через любую пару особых точек многообразия X, целиком содержится в X. Следовательно, пресечение плоскости, проходящей через три особые точки многообразия X, и любой квадрики из пучка, задающего X, содержит как минимум три прямые, проходящие через пары особых точек. Следовательно, плоскость целиком содержится в любой квадрике из пучка. Таким образом, многообразие X содержит G-инвариантную плоскость и не может быть G-минимальным.

Наконец, если символ Сегре равен $[(1,1),(1,1),1,1]$, то X содержит 4 особые точки. Они не лежат на одной плоскости, что видно из уравнений X, см. следствие 2.5.9. Рассмотрим проекцию из трёхмерного проективного пространства, порождённого этими точками. Мы получаем G-эквивариантное расслоение над $\mathbb{P}^1$ на рациональные поверхности, являющиеся пересечениями двух квадрик. Применив G-эквивариантное разрешение особенностей расслоения, а затем G-эквивариантную относительную программу минимальных моделей, мы получим G-расслоение Мори на коники или поверхности дель Пеццо. Таким образом, в этом случае G имеет расслоенный тип. $\square$

Пусть X — гладкое пересечение двух квадрик. Это равносильно тому, что символ Сегре X равен $[1,1,1,1,1,1]$. В этом случае можно считать, что

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{6} \lambda_i x_i^2, \qquad Q_2 = \sum_{i=1}^{6} x_i^2,$$

где все λ_i различны, а $x_i,\ 1 \leqslant i \leqslant 6$ — некоторая система координат. Группа $\mathrm{Aut}(X)'$ (в обозначениях теоремы 4.1.4) изоморфна $(\mathfrak{C}_2)^5$ и действует обращением знаков у координат $x_1, \ldots, x_5$. Группа $\mathrm{Aut}(X)''$ является группой автоморфизмов $\mathbb{P}^1$, сохраняющих множество из шести точек

$$S = \{(\lambda_i : 1) \mid \ i = 1,\ \ldots, 6\}.$$

В общем случае эта группа тривиальна. Перечислим все случаи (с точностью до автоморфизма $\mathbb{P}^1$), в которых она нетривиальна:

1. $S = \{T_0T_1(T_0^4 - T_1^4) = 0\}$. В этом случае $\mathrm{Aut}(X)'' \simeq \mathfrak{S}_4$;

2. $S = \{T_0^6 + T_1^6 = 0\}$. В этом случае $\mathrm{Aut}(X)'' \simeq \mathfrak{D}_{12}$;

3. $S = \{T_0^6 + aT_0^3T_1^3 + T_1^6 = 0\}, a \neq -2, 0, 2$. В этом случае $\mathrm{Aut}(X)'' \simeq \mathfrak{D}_6$;

4. $S = \{T_0T_1(T_0^4 + aT_0^2T_1^2 + T_1^4) = 0\}, a \neq -2, 0, 2$. В этом случае $\mathrm{Aut}(X)'' \simeq \mathfrak{C}_2^2$;

5. $S = \{T_0(T_0^5 + T_1^5) = 0\}$. В этом случае $\mathrm{Aut}(X)'' \simeq \mathfrak{C}_5$;

6. $S = \{(T_0^2 + T_1^2)(T_0^2 + aT_1^2)(T_0^2 + bT_1^2) = 0\}, a, b \neq -1, 0, 1, a \neq b$. В этом случае $\mathrm{Aut}(X)'' \simeq \mathfrak{C}_2$.

Этот список можно получить из классификации конечных подгрупп $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ и полуинвариантных бинарных форм относительно действия этих групп (см. [22, §5.5]) аналогично [22, §6.4].

Лемма 4.1.7. *В случаях* 4 *и* 6*, а также в случае тривиальной группы* $\mathrm{Aut}(X)''$*, группа* $\mathrm{Aut}(X)$ *является группой расслоенного типа.*

Доказательство. В этих случаях в S есть соответственно одна, две или четыре орбиты, состоящие в совокупности из 4 точек, поэтому в $\mathbb{P}^5$ есть инвариантное трёхмерное подпространство, порождаемое вершинами соответствующих конусов (они имеют координаты $x_i = \delta_i^j$ для различных j). Проекция из него даёт искомое $\mathrm{Aut}(X)$-расслоение. □

Таким образом, для доказательства теоремы 1.2.2 осталось проверить структуру группы $\mathrm{Aut}(X)$ в случаях (2), (3) и (5). Зная уравнения многообразия X, в этих случаях легко явно указать образующие $\mathrm{Aut}(X)$ и проверить, что $\mathrm{Aut}(X) \simeq \mathrm{Aut}(X)' \rtimes \mathrm{Aut}(X)''$. В случае (1) не существует расщепляющего гомоморфизма $\mathrm{Aut}(X)'' \to \mathrm{Aut}(X)$, поскольку можно явно проверить, что у элемента $\mathrm{Aut}(X)''$ порядка 4 не существует прообраза в $\mathrm{Aut}(X)$ порядка 4.

Поскольку ранг группы классов дивизоров $r(X)$ в случае гладкого пересечения двух квадрик равен 1, любая подгруппа группы $\mathrm{Aut}(X)$ является минимальной.

Пусть X — пересечение двух квадрик с символом $[(1,1),(1,1),(1,1)]$. Многообразие такого типа единственно. Можно считать, что X задано уравнениями

$$Q_1 = x_1x_2 + \xi x_3x_4 + \xi^2 x_5x_6 = 0, \qquad Q_2 = x_1x_2 + x_3x_4 + x_5x_6 = 0,$$

где ξ — кубический корень из 1.

Множество особых точек X состоит из шести обыкновенных двойных точек $\{x_i = \delta_i^j\}$ для $j = 1, ..., 6$, $r(X) = 5$, группа $\mathrm{Cl}(X)$ порождается плоскостями, лежащими на X (всего их 8, а их уравнения имеют вид $x_i = x_j = x_k = 0$, где $i \in \{1,2\},\ j \in \{3,4\},\ k \in \{5,6\}$), ранг группы $\mathrm{Cl}(X)$ равен пяти, более того, это единственное пересечение двух квадрик с $\mathrm{rk}\,\mathrm{Cl}(X) \geqslant 5$ (см. [58]).

Рассмотрим точную последовательность

$$0 \longrightarrow \mathrm{Aut}^0(X) \longrightarrow \mathrm{Aut}(X) \longrightarrow \widehat{\mathrm{Aut}}(X) \longrightarrow 0,$$

где $\mathrm{Aut}^0(X)$ — ядро действия на $\mathrm{Cl}(X)$, а группа $\widehat{\mathrm{Aut}}(X)$ действует эффективно на $\mathrm{Cl}(X)$. Группа $\mathrm{Aut}^0(X)$ действует тривиально на множестве плоскостей, а следовательно и на множестве особых точек. Из этого нетрудно вывести, что она является трёхмерным тором. Согласно [58, Corollary 7.4, Corollary 7.5 (i)], группа $\widehat{\mathrm{Aut}}(X)$ содержится в $W(\Delta'') \simeq \mathfrak{C}_2 \times \mathfrak{S}_4$ (где $W(\Delta'')$ — группа Вейля некоторой системы корней, канонически связанной с X, подробности см. в [58]). С другой стороны, группа $\widehat{\mathrm{Aut}}(X)$ содержит элементы, меняющие местами координаты x_{2i-1} и x_{2i}, $1 \leqslant i \leqslant 3$, и элементы

$$h_1 : (x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6) \mapsto (x_3 : x_4 : x_5 : x_6 : x_1 : x_2),$$

$$h_2 : (x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6) \mapsto (x_1 : x_2 : \xi x_5 : \xi x_6 : \xi^2 x_3 : \xi^2 x_4)$$

(где ξ — примитивный кубический корень из единицы), которые в совокупности порождают подгруппу в $\mathrm{Aut}(X)$, изоморфную $\mathfrak{C}_2^3 \rtimes \mathfrak{S}_3 \simeq \mathfrak{C}_2 \times \mathfrak{S}_4$. Таким образом, $\mathrm{Aut}(X) \simeq (\mathbb{C}^*)^3 \rtimes (\mathfrak{C}_2^3 \rtimes \mathfrak{S}_3)$. Для нас будет удобно рассматривать $\widehat{\mathrm{Aut}}(X)$ как подгруппу в $\mathfrak{S}_6$ (группе перестановок x_i) со следующими порождающими:

$$g_1 = (1\ 3\ 2\ 4),\ g_2 = (1\ 2),\ g_3 = (5\ 6),\ g_4 = (1\ 3\ 5)(2\ 4\ 6).$$

Теорема 4.1.8. *Пусть многообразие X является G-минимальным для некоторой конечной подгруппы $\mathrm{Aut}(X)$. Тогда G включается в следующую точную последовательность:*

$$0 \to \mathfrak{C}_k \times \mathfrak{C}_l \times \mathfrak{C}_m \to G \to G' \to 0,$$

где $G' \subset \widehat{\mathrm{Aut}}(X)$ — одна из следующих групп:

$$\mathfrak{C}_4,\ \mathfrak{C}_2^2,\ \mathfrak{C}_2 \times \mathfrak{C}_4,\ \mathfrak{D}_8,\ \mathfrak{C}_2^3,\ \mathfrak{C}_2 \times \mathfrak{D}_8,\ \mathfrak{S}_4,\ \mathfrak{C}_2 \times \mathfrak{A}_4,\ \mathfrak{C}_2 \times \mathfrak{S}_4,$$

$\mathfrak{C}_k \times \mathfrak{C}_l \times \mathfrak{C}_m$ — *подгруппа тора, а* k, l, m — *натуральные числа (возможно, равные единице). Во всех случаях, кроме* $\mathfrak{D}_8$*, группа* G' *единственна с точностью до сопряжения в* $\widehat{\mathrm{Aut}}(X)$*, есть ровно три класса сопряжённости в случае* $G' \simeq \mathfrak{D}_8$*.*

Доказательство. Рассмотрим действие G на множестве плоскостей. Это множество либо состоит из одной орбиты, либо разбивается на две орбиты, состоящие из плоскостей, лежащих в гиперплоскостях $x_{2i-1} = 0$ и $x_{2i} = 0$ соответственно (поскольку сумма плоскостей в каждой орбите должна быть пропорциональна каноническому классу), без ограничения общности можно считать, что $i = 3$.

Рассмотрим отображение $\pi : G \to \widehat{\mathrm{Aut}}(X)$, являющееся ограничением отображения $\mathrm{Aut}(X) \to \widehat{\mathrm{Aut}}(X)$, и обозначим через G' его образ. В ядре отображения π находится конечная подгруппа $(\mathbb{C}^*)^3$, поэтому ядро изоморфно $\mathfrak{C}_k \times \mathfrak{C}_l \times \mathfrak{C}_m$. Группа G' также минимальна, поскольку тор $(\mathbb{C}^*)^3$ действует на группе $\mathrm{Cl}(X)$ тривиально. Классифицируем все возможные минимальные подгруппы $\widehat{\mathrm{Aut}}(X)$ с точностью до сопряжения.

Сначала предположим, что мы в ситуации, когда множество плоскостей разбивается на две орбиты. Тогда G' лежит в $\mathfrak{D}_8$ — подгруппе $\langle g_1, g_2 \rangle \subset \widehat{\mathrm{Aut}}(X)$. Минимальная подгруппа должна иметь порядок 4 или 8. Явной проверкой можно убедиться, что минимальными являются следующие подгруппы:

$$A_1 = \langle g_1 \rangle \simeq \mathfrak{C}_4, \quad A_2 = \langle g_1^2, g_2 \rangle \simeq \mathfrak{C}_2^2, \quad A_3 = \langle g_1, g_2 \rangle \simeq \mathfrak{D}_8.$$

Теперь рассмотрим случай, когда все плоскости лежат в одной орбите, но порядок G' не делится на 3. Тогда без ограничения общности можно считать, что $G' \subset \langle g_1, g_2, g_3 \rangle \simeq \mathfrak{C}_2 \times \mathfrak{D}_8$ (так как все силовские 2-подгруппы сопряжены этой, а нас интересуют подгруппы с точностью до сопряжения). В этом случае G' является одной из следующих групп:

$$A_4 = \langle g_1, g_3 \rangle \simeq \mathfrak{C}_2 \times \mathfrak{C}_4, \quad A_5 = \langle g_1^2, g_2, g_3 \rangle \simeq \mathfrak{C}_2^3, \quad A_6 = \langle g_1, g_2, g_3 \rangle \simeq \mathfrak{C}_2 \times \mathfrak{D}_8,$$

$$A_7 = \langle g_1 g_3, g_2 \rangle \simeq \mathfrak{D}_8, \quad A_8 = \langle g_1, g_2 g_3 \rangle \simeq \mathfrak{D}_8.$$

Теперь рассмотрим случай, когда все плоскости лежат в одной орбите, и порядок G' делится на 3. Тогда либо G' совпадает с $\widehat{\mathrm{Aut}}(X)$, либо является подгруппой индекса 2, поскольку её порядок обязан делиться на 8. Среди трёх подгрупп индекса 2 (одна изоморфна $\mathfrak{S}_4$ и две изоморфны $\mathfrak{C}_2 \times \mathfrak{A}_4$) ровно две являются минимальными:

$$A_9 = \langle g_1, g_2g_3, g_4\rangle \simeq \mathfrak{S}_4, \qquad A_{10} = \langle g_1^2, g_2, g_3, g_4\rangle \simeq \mathfrak{C}_2 \times \mathfrak{A}_4.$$

□

Предложение 4.1.9. *Если в обозначениях теоремы 4.1.8 группа G' не содержит элемента третьего порядка, то группа G имеет расслоенный тип.*

Доказательство. В этом случае G' сопряжена подгруппе A_i для некоторого $i < 9$. Из явного описания этих групп с помощью образующих видно, что множество из четырёх точек

$$(1:0:0:0:0:0),\ (0:1:0:0:0:0),\ (0:0:1:0:0:0),\ (0:0:0:1:0:0)$$

является G-инвариантным. Поэтому проекция из подпространства $\{x_5 = x_6 = 0\}$ задаёт G-эквивариантное расслоение на рациональные поверхности. Применив лемму 2.1.9, мы получаем искомое расслоение. □

Таким образом, если многообразие X является G-бирационально жёстким, то либо G' совпадает с $\widehat{\mathrm{Aut}}(X)$, либо сопряжена A_9 или A_{10}, то есть G принадлежит одному из трёх семейств подгрупп.

Замечание 4.1.10. В этих случаях можно более точно описать группу $G'' = \ker(G \to G')$: для некоторого m имеется вложение $\mathfrak{C}_m^3 \subset G'' \subset \mathfrak{C}_{2m}^3$, причём G'' инвариантна относительно естественного действия группы $\mathfrak{C}_3$. Для каждого m таких подгрупп ровно четыре. Это несложно получить из того, что G'' должна быть инвариантна относительно действия G' сопряжениями.

Остаётся открытым вопрос, для каких именно подгрупп $\mathrm{Aut}(X)$ многообразие X является бирационально жёстким. Например, является ли оно бирационально жёстким относительно всей группы $\mathrm{Aut}(X)$?

4.2. G-бирациональная жёсткость многообразия типа (2 i)

В этом параграфе мы для одного многообразия из теоремы 1.2.2 классифицируем подгруппы в $\mathrm{Aut}(X)$, относительно которых оно является G-бирационально жёстким. Докажем сначала следующую полезную лемму.

Лемма 4.2.1. *Пусть X — гладкое пересечение двух квадрик в $\mathbb{P}^5$. Пусть G — подгруппа* $\mathrm{Aut}(X)$, *имеющая неподвижную точку на X. Тогда X является G-эквивалентным G-расслоению на квадрики.*

Доказательство. Пусть $\pi : \widetilde{X} \to X$ — раздутие X в неподвижной точке. Тогда $\widetilde{X}$ является гладким G-многообразием дель Пеццо степени 3. Действительно, пусть C — произвольная неприводимая кривая на $\widetilde{X}$. Если C лежит на E, то $C \cdot K_{\widetilde{X}} < 0$. В противном случае

$$C \cdot K_{\widetilde{X}} = \pi(C) \cdot K_X + 2C \cdot E = -2 \deg \pi(C) + 2\,\mathrm{mult}_p\, C \leqslant 0.$$

Более того, равенство достигается только в случае, когда $\pi(C)$ — прямая. Таким образом, численная эффективность $-K_{\widetilde{X}}$ доказана, а его объёмность очевидна. Антиканоническая линейная система оботражает $\widetilde{X}$ на кубическую гиперповерхность в $\mathbb{P}^4$, содержащую G-инвариантную плоскость. Проекция из неё даёт искомую структуру G-расслоения на квадрики. $\square$

Разберём теперь подробнее случай (2 i) теоремы 1.2.2. В этом случае X можно задать системой уравнений

$$\omega x_1^2 + \omega^2 x_2^2 + \omega^3 x_3^2 + \omega^4 x_4^2 + x_5^2 = \sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 0,$$

где ω — корень пятой степени из 1. Группа $\mathrm{Aut}(X)$ изоморфна $\mathfrak{C}_2^5 \rtimes \mathfrak{C}_5 \simeq \mathfrak{C}_2 \times (\mathfrak{C}_2^4 \rtimes \mathfrak{C}_5)$, причём $\mathfrak{C}_2^5$ действует сменой знаков у $x_1, ..., x_5$, а $\mathfrak{C}_5$ переставляет эти координаты по циклу.

Предложение 4.2.2. *Группа* $\mathrm{Aut}(X)$ *имеет следующие подгруппы:*

$$\{e\},\ \mathfrak{C}_2,\ \mathfrak{C}_2^2,\ \mathfrak{C}_2^3,\ \mathfrak{C}_2^4,\ \mathfrak{C}_2^5,\ \mathfrak{C}_5,\ \mathfrak{C}_{10},\ \mathfrak{C}_2^4 \rtimes \mathfrak{C}_5,\ \mathfrak{C}_2^5 \rtimes \mathfrak{C}_5.$$

Доказательство. Для произвольной подгруппы $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ положим $G' = G \cap \mathrm{Aut}(X)'$ и $G'' = \pi(G)$, где $\pi : \mathrm{Aut}(X) \to \mathrm{Aut}(X)''$ — стандартная проекция (в обозначениях теоремы 4.1.4). Если G'' тривиальна, то $G = G' \simeq \mathfrak{C}_2^n$.

Предположим теперь, что $G'' = \mathfrak{C}_5$. Рассмотрим произвольный элемент нашей подгруппы порядка 5. Несложно показать, что с помощью сопряжения элементом из $\mathfrak{C}_2^5$ его можно перевести в элемент, переставляющий координаты по циклу без смены знаков. Отождествим группу $\mathfrak{C}_2^5$ с векторным пространством $\mathbb{F}_2^5$ над полем $\mathbb{F}_2$, на этом пространстве задано тавтологическое представление группы $\mathfrak{C}_5$. Подгруппа G' соответствует подпредставлению, которых ровно 4: нульмерное, тривиальное одномерное (порожденное вектором $(1,1,1,1,1)$), ортогональное ему четырёхмерное и пятимерное. Следовательно, с точностью до сопряжения $\mathrm{Aut}(X)$ содержит четыре таких подгруппы: $\mathfrak{C}_5$, $\mathfrak{C}_5 \times \mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_2^4 \rtimes \mathfrak{C}_5$, $\mathrm{Aut}(X)$. Более того, каждая из таких подгрупп ровно одна. $\square$

Предложение 4.2.3. *Пусть X — гладкое пересечение двух квадрик в $\mathbb{P}^5$ с группой автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X) \simeq \mathfrak{C}_2^5 \rtimes \mathfrak{C}_5$. Пусть G — подгруппа $\mathrm{Aut}(X)$, изоморфная $\mathfrak{C}_5$ или $\mathfrak{C}_{10}$. Тогда группа G имеет расслоенный тип.*

Доказательство. Это немедленно следует из леммы 4.2.1, поскольку точка $(1 : \omega : \omega^2 : \omega^3 : \omega^4 : 0)$ является $\mathfrak{C}_{10}$-инвариантной. $\square$

Обозначим подгруппу $\mathfrak{C}_2^4 \rtimes \mathfrak{C}_5 \subset \mathrm{Aut}(X)$ через G, а нормальную подгруппу $\mathfrak{C}_2^4 \subset \mathrm{Aut}(X)$ через G'.

Лемма 4.2.4. *Пусть $Y \subset X$ — сечение X гиперплоскостью $x_6 = 0$, а $Z \subset X$ — сечение X гиперплоскостью $x_i = 0$, $i \neq 6$. Тогда G-орбита точки на Y может иметь длину 16, 20, 40 или 80, а G'-орбита точки на Z состоит из 4, 8 или 16 точек.*

Доказательство. Пусть y — некоторая точка Y, а G_y — её стабилизатор. Если в G_y есть элемент порядка 5, то первые пять координат y ненулевые, поэтому никакой элемент G' в стабилизаторе лежать не может, и орбита y имеет длину 16. Если G_y не содержит элементов порядка 5, то $G_y \subset G'$. Поскольку среди координат y не менее трёх ненулевых, то мощность G_y равна 1, 2 или 4. Вторая часть утверждения доказывается аналогично. $\square$

Теорема 4.2.5. *Пусть X — гладкое пересечение двух квадрик в $\mathbb{P}^5$ с группой автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X) \simeq \mathfrak{C}_2^5 \rtimes \mathfrak{C}_5$. Пусть $G \simeq \mathfrak{C}_2^4 \rtimes \mathfrak{C}_5$ — подгруппа $\mathrm{Aut}(X)$. Тогда X является G-бирационально жёстким.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{H} \subset |-\mu K_X|$ — некоторая G-инвариантная линейная система без неподвижных компонент. Докажем сначала, что точка не пожет быть неканоническим центром пары $(X, \frac{1}{\mu}\mathcal{H})$. Предположим противное — пусть точка

$$p = (p_1 : p_2 : p_3 : p_4 : p_5 : p_6) \in X$$

является неканоническим центром. Из уравнений многообразия X легко выводится, что среди чисел p_i как минимум три не равны нулю. Без ограничения общности можно считать, что p_1, p_2 и $p_3 \neq 0$. Тогда точки

$$(\pm p_1 : \pm p_2 : p_3 : p_4 : p_5 : p_6)$$

лежат в G-орбите p, поэтому тоже являются неканоническими центрами. Все эти 4 точки лежат на двумерной плоскости S, которая не имеет других точек пересечения с X. Рассмотрим общую гиперплоскость H, содержащую S, и два общих элемента линейной системы $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$. Пусть $Z = H_1 \cdot H_2$. Из того, что $S \cap X$ нульмерно следует, что H не содержит компонент Z. Тогда

$$16\mu^2 = H \cdot Z \geqslant 4 \operatorname{mult}_p Z > 16\mu^2,$$

где последнее неравенство следует из теоремы 2.3.2. Полученное противоречие показывает, что точка не может быть неканоническим центром.

Пусть $L = L_1$ — неприводимая кривая, являющаяся неканоническим центром, $d = \deg L_1$ — её степень, а $\{L_i \mid 1 \leqslant i \leqslant r\}$ — её G-орбита. Пусть H — достаточно общее гиперплоское сечение X, а H_1 и H_2 — общие элементы $\mathcal{H}$. Тогда по теореме 2.3.4

$$16\mu^2 = H \cdot H_1 \cdot H_2 \geqslant (\operatorname{mult}_L \mathcal{H})^2 H \cdot L > \mu^2 rd.$$

Из этого следует, что $rd \leqslant 15$. Поскольку r является индексом некоторой подгруппы G, то (см. утверждение 4.2.2) r может быть равным 1, 5 или 10.

Предположим, что $r = 5$. В таком случае кривая L_1 сохраняется группой $G' \simeq \mathfrak{C}_2^4$, а её степень не превосходит 3. Выберем такое $1 \leqslant i \leqslant 5$, что L_1 не лежит в гиперплоскости $\{x_i = 0\}$. Тогда пересечение L_1 с этой гиперплоскостью является множеством из не более чем трёх точек, инвариантным относительно G'. Согласно лемме 4.2.4, такого не может быть. Противоречие.

Пусть $r = 10$. В этом случае $d = 1$. Без ограничения общности можно считать, что L_1 и L_2 образуют G'-орбиту. Найдётся такое i, что L_1 и L_2 не лежат на гиперплоскости $\overline{H} = \{x_i = 0\}$, иначе L_1 или L_2 лежала бы на плоскости $\{x_i = x_j = x_k = 0\}$ для некоторых различных i, j, k, но пересечение этой плоскости с X состоит из 4 точек. Тогда $(L_1 \cup L_2) \cap \overline{H}$ является парой точек, инвариантной относительно G', чего не может быть по лемме 4.2.4.

Остался последний случай $r = 1$. В этом случае L не лежит в гиперплоскости $\{x_1 = 0\}$. Пересечение L с гиперплоскостью $\{x_1 = 0\}$ является

G'-инвариантным множеством, поэтому из леммы 4.2.4 следует, что степень кривой может быть равна 4, 8 или 12. Кроме того, L лежит в гиперплоскости $\overline{H} = \{x_6 = 0\}$, поскольку иначе их пересечение было бы G-инвариантным конечным подмножеством $\overline{H}$, но минимальная мощность орбиты в этом случае равна $16 > d$ (см. лемму 4.2.4). Легко понять, что в подпространстве размерности меньше 4 кривая L не лежит, поскольку соответствующее пятимерное представление G неприводимо. Поэтому кривая L не может иметь степень 4.

Кривая L является G-инвариантной кривой на поверхности дель Пеццо $\overline{H}$. Группа G' действует на множестве (-1)-кривых транзитивно. Действительно, пусть элемент $g \in G'$ сохраняет некоторую (-1)-кривую, которая в нашем случае является прямой в $\mathbb{P}^4$. Элемент g меняет знаки у двух или четырёх координат, во втором случае его неподвижные точки лежат на сечении $\overline{H}$ координатной гиперплоскостью, в первом — на сечении $\overline{H}$ координатным подпространством коразмерности 2. Действие g на прямой имеет две неподвижные точки, поэтому прямая обязана целиком лежать на сечении $\overline{H}$ координатной гиперплоскостью, чего не может быть, поскольку это сечение является неприводимой кривой степени 4.

Таким образом, группа G действует на поверхности $\overline{H}$ минимально. Следовательно,

$$L \sim b \cdot (-K_{\overline{H}}) = -\frac{d}{4} K_{\overline{H}}.$$

Кроме того, мы знаем, что $d = 4$, 8 или 12. Докажем, что в этом случае L является полным пересечением $\overline{H}$ с гиперповерхностью степени $\frac{d}{4}$ в $\mathbb{P}^4$.

Любой дивизор из линейной системы $|-K_{\overline{H}}|$ является гиперплоским сечением, поскольку наше вложение $\overline{H} \subset \mathbb{P}^4$ является антиканоническим. Применив формулу Римана-Роха и теорему Кодаиры об обращении в нуль к дивизорам $-K_{\overline{H}}$, $-2K_{\overline{H}}$ и $-3K_{\overline{H}}$, получаем

$$5 = h^0(-K_{\overline{H}}) = \frac{-K_{\overline{H}} \cdot (-K_{\overline{H}} - K_{\overline{H}})}{2} + \chi(\mathcal{O}) = 4 + \chi(\mathcal{O}),$$

$$h^0(-2K_{\overline{H}}) = \frac{-2K_{\overline{H}} \cdot (-2K_{\overline{H}} - K_{\overline{H}})}{2} + \chi(\mathcal{O}) = 12 + \chi(\mathcal{O}),$$

$$h^0(-3K_{\overline{H}}) = \frac{-3K_{\overline{H}} \cdot (-3K_{\overline{H}} - K_{\overline{H}})}{2} + \chi(\mathcal{O}) = 24 + \chi(\mathcal{O}).$$

Отсюда получаем, что

$$h^0(-2K_{\overline{H}}) = 13, \ h^0(-3K_{\overline{H}}) = 25,$$

что совпадает с размерностями пространств сечений $\overline{H}$ квадратичными и кубическими гиперповерхностями соответственно.

Мы получили, что $L = \overline{H} \cap \{S = 0\}$, где S — квадратичный или кубический многочлен. Напомним, что $\overline{H}$ задано уравнениями

$$Q_1 = \omega x_1^2 + \omega^2 x_2^2 + \omega^3 x_3^2 + \omega^4 x_4^2 + x_5^2 = 0, \qquad Q_2 = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 0.$$

Если многочлен S кубический, то, прибавив к S многочлен вида $Q_1P_1+Q_2P_2$ для некоторых линейных многочленов P_i, можно добиться того, что коэффициенты при мономах $x_i^2 x_{i\pm1}$, $1 \leqslant i \leqslant 5$ (мы отождествляем x_0 с x_5 и x_6 с x_1) обнулятся, причём многочлены P_i единственны (это несложно проверить, написав явные уравнения на неизвестные коэффициенты многочленов P_i). Полученное уравнение является G-полуинвариантным, чего не бывает для кубических многочленов.

Пусть многочлен S квадратичный. В этом случае можно считать, что S полуинвариантен относительно действия группы G (возможно, после прибавления к нему $p_1Q_1+p_2Q_2$ для некоторых p_i). В таком случае легко проверить, что S имеет вид

$$\zeta x_1^2 + \zeta^2 x_2^2 + \zeta^3 x_3^2 + \zeta^4 x_4^2 + x_5^2 = 0,$$

где ζ — корень пятой степени из единицы, отличный от ω. В частности, кривая L неособа. По теореме 2.3.5, соответствующий линк Саркисова происходит из раздутия кривой L. Обозначим это раздутие через $f : \widetilde{X} \to X$, через $\widetilde{H}$ обозначим собственный прообраз $\overline{H}$, а через E — исключительный дивизор. На конусе Мори $\mathrm{NE}(\widetilde{X})$ есть два экстремальных луча, стягивание первого даёт морфизм f, обозначим второй луч через R. Рассмотрим произвольную кривую C на $\widetilde{H}$. Тогда

$$C \cdot K_{\widetilde{X}} = C \cdot (f^*K_X + E) = f(C) \cdot K_X + C \cdot E = -2 \deg C + f(C) \cdot L|_{\overline{H}} = 0.$$

Аналогично показывается, что для произвольной кривой $C \subset \widetilde{X}$ индекс пересечения $C \cdot K_{\widetilde{X}} \leqslant 0$. Таким образом, $K_{\widetilde{X}} \cdot R = 0$, но стягивание R малым не является, поэтому раздутие L не даёт линка Саркисова (см. [17]).

Таким образом, линейная система $\mathcal{H}$ не имеет неканонических центров, и теорема доказана. $\square$

Замечание 4.2.6. Группа G может действовать на других расслоениях Мори, например на $Y \times \mathbb{P}^1$, где Y — поверхность дель Пеццо степени 4 с группой автоморфизмов $\mathfrak{C}_2^4 \rtimes \mathfrak{D}_{10}$ (см. [22, Theorem 6.9]). Таким образом, группа $\mathrm{Cr}_3(\Bbbk)$ содержит как минимум две несопряжённые подгруппы, изоморфные G.

Остаётся открытым вопрос, есть ли в случаях (2 ii)–(2 iv) подгруппы в $\mathrm{Aut}(X)$, относительно которых X является бирационально жёстким? Большую часть подгрупп $\mathrm{Aut}(X)$ можно отбросить, используя леммы 4.1.7 и 4.2.1, но, к сожалению, не все.

Глава 5

Трёхмерные кубические гиперповерхности

В этой главе основное поле предполагается алгебраически замкнутым характеристики нуль.

5.1. Особенности трёхмерных кубических гиперповерхностей

В этом параграфе мы изучим возможности взаимного расположения особенностей трёхмерной кубической гиперповерхности X и их типа при условии, что X не перестраивается $\mathrm{Aut}(X)$-эквивариантно в другое G-расслоение Мори.

Предположение 5.1.1. В этой главе X является особой гиперповерхностью в $\mathbb{P}^4$ с не более чем терминальными особенностями, а G — такая конечная подгруппа $\mathrm{Aut}(X)$, что G минимальна и не является ни линеаризуемой, ни расслоенного типа (как следствие, $\mathrm{Aut}(X)$ также удовлетворяет этим свойствам).

Мы изучаем только особые кубические гиперповерхности, поскольку в основном нас интересуют приложения к изучению группы $\mathrm{Cr}_3(\Bbbk)$, а неособые кубические гиперповерхности нерациональны, см. [15].

Замечание 5.1.2. Поскольку X является $G\mathbb{Q}$-факториальным, G-минимальность X эквивалентна равенству $\mathrm{rk}\,\mathrm{Cl}(X)^G = 1$.

Группа Пикара $\mathrm{Pic}(X)$ порождена классом гиперплоского сечения (см. [31, Corollary 4.3.2]), поэтому действие G на X индуцировано с действия G на $\mathbb{P}^4$.

Следующая простая лемма очень важна для нас.

Лемма 5.1.3. *1. Многообразие X не имеет неподвижных особых точек и инвариантных прямых относительно действия группы G.*

2. Не существует G-инвариантных плоскостей в $\mathbb{P}^4$.

Доказательство. Если X содержит неподвижную особую точку, то проекция из этой точки даёт G-эквивариантное бирациональное отображение на $\mathbb{P}^3$. Таким образом, G линеаризуема в этом случае.

Если X содержит G-инвариантную прямую, то проекция из этой прямой является G-эквивариантным расслоением на рациональные кривые, если же имеется G-инвариантная плоскость в $\mathbb{P}^4$, то проекция из неё даёт G-расслоение на квадратичные или кубические поверхности в $\mathbb{P}^3$ (первый случай реализуется тогда и только тогда, когда плоскость лежит на X). В обоих случаях мы можем применить лемму 2.1.9 и получить, что G имеет расслоенный тип. □

Следствие 5.1.4. *G-орбита особой точки многообразия X имеет мощность не меньше* 4.

Доказательство. В случае, если G-орбита особой точки состоит из одной, двух или трёх точек, имеется неподвижная относительно группы G особая точка, прямая, лежащая на X или плоскость соответственно. В любом случае применение леммы 5.1.3 приводит к противоречию с предположением 5.1.1. □

Определение 5.1.5. Будем говорить, что точки $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{P}^n$ находятся *в общем положении*, если никакие d из них не лежат в подпространстве $\mathbb{P}^{d-2} \subset \mathbb{P}^n$ для любого $d \leqslant n+1$.

Лемма 5.1.6. *G-орбита особой точки многообразия X не может состоять из* 4 *элементов.*

Доказательство. Предположим, что орбита особой точки p состоит из 4 элементов. Если все они лежат на одной плоскости, то она является G-инвариантной, что противоречит лемме 5.1.3. Следовательно, точки из этой орбиты лежат в общем положении. Пусть S — гиперплоское сечение многообразия X, содержащее орбиту точки p. Тогда S — особая кубическая поверхность (возможно, приводимая), имеющая как минимум 4 особые точки в общем положении. Согласно [9] эта поверхность является либо единственной кубической поверхностью с четырьмя обыкновенными двойными точками, либо приводимой. Во втором случае поверхность S является либо объединением трёх плоскостей с единственной общей точкой, либо объединением плоскости и квадратичного конуса, вершина которого является особой точкой многообразия X, иначе особенности X не могут находиться в общем положении. В обоих случаях группа $\mathrm{Aut}(X)$ не может действовать транзитивно на орбите точки p: если S — объединение трёх плоскостей, то либо их общая точка является выделенной особой точкой многообразия X, либо имеется выделенная плоскость, содержащая ровно две особенности многообразия X; если S — объединение плоскости и квадратичного конуса, то вершина конуса — выделенная особая точка многообразия X. Кубическая поверхность с четырьмя особенностями типа A_1 в подходящей системе координат имеет уравнение

$$F(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0x_1x_2 + x_0x_1x_3 + x_0x_2x_3 + x_1x_2x_3 = 0.$$

Имеется естественное отображение $\pi : \mathrm{Aut}(S) \to \mathfrak{S}_4$ — группу перестановок особых точек многообразия S. Легко проверить, что диагональное преобразование координат сохраняет поверхность S в том и только том случае, когда оно тривиально. Поскольку элемент группы $\mathrm{PGL}_4(\Bbbk)$, сохраняющий все особые точки поверхности S, является диагональным преобразованием, отображение π является инъективным. С другой стороны, группа $\mathfrak{S}_4$ действует на S перестановками координат. Следовательно, $\mathrm{Aut}(S) \simeq \mathfrak{S}_4$. Таким образом, имеется $\mathrm{Aut}(S)$-инвариантная плоскость, заданная уравнением

$$\sum_{i=0}^{3} x_i = 0,$$

которая, очевидно, является и G-инвариантной. Это противоречит лемме 5.1.3. □

Следующие факты об особых точках кубических трёхмерных гиперповерхностей хорошо известны.

Лемма 5.1.7. *Пусть $Y \subset \mathbb{P}^4$ — произвольная кубическая гиперповерхность с изолированными особенностями. Тогда*

(i) *никакие три из них не лежат на одной прямой;*

(ii) *если четыре особые точки лежат на плоскости, то эта плоскость содержится в Y, причём она содержит ровно четыре особые точки Y;*

(iii) *если никакие четыре особые точки Y не лежат на одной плоскости, то особые точки Y находятся в общем положении.*

Доказательство. Первое утверждение напрямую следует из того факта, что множество $\mathrm{Sing}(Y)$ является пересечением квадрик (их уравнения являются производными уравнения многообразия X по различным переменным).

Предположим, что четыре особые точки Y лежат на одной плоскости P. Допустим, что P не содержится в Y. Тогда $Y \cap P$ — плоская кубическая кривая с четырьмя особыми точками, причём никакие три из них не лежат на одной прямой. Это невозможно, поэтому P содержится в Y. Вторая часть (ii) также следует из того факта, что множество $\mathrm{Sing}(Y)$ является пересечением квадрик.

Пусть H — гиперплоскость, содержащая как минимум 5 особых точек многообразия Y, причём никакие 4 из них не лежат на одной плоскости. Рассмотрим пересечение $Z = Y \cap H$. Это кубическая поверхность, имеющая как минимум 5 особых точек. Согласно [9], эта поверхность является приводимой. Если Z является объединением квадрики и плоскости, то как минимум 4 особые точки Y лежат на этой плоскости, что противоречит предположению. Если Z является объединением трёх различных плоскостей, то все особые точки $\mathrm{Sing}(X) \cap Z$ лежат на трёх прямых (каждая прямая является пересечением двух из трёх плоскостей, образующих Z). В этом случае мы также видим, что как минимум одна из плоскостей содержит 4 особые точки Y, что противоречит предположению. Если же Z содержит двойную или тройную плоскость, то она является множеством особых точек Z, поэтому содержит как минимум 5 особенностей Y. Это противоречие доказывает (iii). □

Предложение 5.1.8. *Предположим, что все особенности многообразия X обыкновенные двойные. Тогда имеются следующие возможности:*

тип X	J5	J9	J11	J14	J15
$s(X)$	5	6	6	9	10
$p(X)$	0	0	3	9	15
$r(X)$	1	2	3	5	6

где $s(X)$ — количество особых точек X, $p(X)$ — количество плоскостей, содержащихся в X и $r(X)$ — ранг группы $\mathrm{Cl}(X)$.

Доказательство. Случаи J1 —J4 (см. теорему 2.6.1) невозможны, поскольку X имеет по крайней мере 5 особенностей согласно следствию 5.1.4 и лемме 5.1.6. Если многообразие X имеет тип J6, J7 или J8, то X содержит ровно одну плоскость (см. теорему 2.6.1), которая $\mathrm{Aut}(X)$-инвариантна, что невозможно по лемме 5.1.3. Если X имеет тип J10 или J12, то есть выделенная $\mathrm{Aut}(X)$-инвариантная особая точка X (а именно, p_7, см. теорему 2.6.1), что невозможно по лемме 5.1.3. Если X имеет тип J13, то имеется выделенная четвёрка особых точек p_5, p_6, p_7, p_8, которые лежат на одной плоскости (см. теорему 2.6.1), которая, следовательно, $\mathrm{Aut}(X)$-инвариантна, что невозможно по лемме 5.1.3. □

Теперь мы рассмотрим случай, когда не все особенности многообразия X являются обыкновенными двойными точками.

Предложение 5.1.9. *Допустим, что многообразие X содержит особую точку, которая не является обыкновенной двойной. Тогда X имеет ровно 5 особенностей типа cA_1 или cA_2 в общем положении и не имеет других особых точек.*

Доказательство. Мы воспользуемся следующей хорошо известной формулой для степени двойственного многообразия:

$$\deg X^\vee = 3 \cdot 2^3 - \sum_{p \in \mathrm{Sing}(X)} m(p),$$

где $m(p) = \mu(p) + \mu'(p)$ — сумма чисел Милнора особенности (X, p) и её гиперплоского сечения (детали см. в [72]). Очевидно, что $\deg X^\vee \geqslant 3$, поэтому

$$\sum_{p \in \mathrm{Sing}(X)} m(p) \leqslant 21.$$

Если p — cDV особенность типа, отличного от cA_1, то $\mu(p) \geqslant \mu'(p) \geqslant 2$ (это легко получить явным вычислением из определения чисел Милнора), причём правое равенство выполняется в точности для cA_2 особенностей. Таким образом, согласно следствию 5.1.4 и лемме 5.1.6, имеется ровно 5 особенностей типа cA_2. Число оставшихся особенностей не превосходит $\frac{21-5\cdot 4}{2} = \frac{1}{2}$, поэтому других особенностей на X нет.

Предположим, что все особенности X имеют тип cA_1. В некоторой аналитической окрестности их можно задать уравнением $x^2 + y^2 + z^2 + t^n = 0$, $n > 1$. Следовательно, они *rs-невырождены* (определение см. в [58, Definition 10.1, Proposition 10.3]). С другой стороны,

$r(X) = \operatorname{rk}\operatorname{Cl}(X) \leqslant 3$ согласно [58, Theorems 1.7, 7.1, 8.1]. Поэтому мы можем воспользоваться следующей формулой (см. [58, Proposition 10.6]):

$$\sum_{p\in\operatorname{Sing}(X)} \lambda(X,p) \leqslant r(X) - \rho(X) + h^{1,2}(X') - h^{1,2}(\widehat{X}) \leqslant 7, \qquad (5.1)$$

где X' — общая гладкая кубическая трёхмерная гиперповерхность, $\rho(X)$ — число Пикара многообразия X, многообразие $\widehat{X}$ — стандартное разрешение X (см. [58, Definition 10.1]) и $\lambda(X,p)$ — число исключительных дивизоров морфизма $\widehat{X} \to X$ над точкой p. Из (5.1) следует, что $\lambda(X,p) = 1$ для всех особых точек, их не более семи, и все они имеют один и тот же тип по следствию 5.1.4. Проделав несложные вычисления для раздутия, легко видеть, что $\lambda(X,p) > 1$ (т.е. особенность не разрешается одним раздутием) если $n > 3$, поэтому $n = 3$. Предположим, что число особенностей больше пяти. Тогда из формулы (5.1) следует, что $r(x) \geqslant 2$, в частности, многообразие X не $\mathbb{Q}$-факториально. С другой стороны, особенность вида $x^2+y^2+z^2+t^3 = 0$ является $\mathbb{Q}$-факториальной (см. [65, Corollary 1.16]). Противоречие. Поэтому число точек типа cA_1, которые не являются обыкновенными двойными, не превосходит 5.

Общность положения является простым следствием леммы 5.1.7. □

Замечание 5.1.10. Ниже (см. §5.6) мы покажем, что оба случая из предложения 5.1.9 не реализуются.

5.2. Кубика Сегре

В этом параграфе многообразие X является кубической гиперповерхностью в $\mathbb{P}^4$ типа J15, удовлетворяющей предположению 5.1.1, а G — соответствующая минимальная подгруппа $\operatorname{Aut}(X)$, не являющаяся линеаризуемой и группой расслоенного типа. Многообразие такого типа единственно с точностью до изоморфизма. Оно называется *кубикой Сегре* и может быть явно задано следующей системой уравнений:

$$\sum_{i=1}^{6} x_i = \sum_{i=1}^{6} x_i^3 = 0$$

в $\mathbb{P}^5$. Это многообразие имеет много интересных свойств (см., например, [21, §9.4.4]):

- это единственная трёхмерная кубическая гиперповерхность, имеющая десять изолированных особенностей;

- группа автоморфизмов многообразия X изоморфна $\mathfrak{S}_6$ и действует на X перестановками координат;

- многообразие X содержит ровно 15 плоскостей, которые лежат в одной $\mathrm{Aut}(X)$-орбите, одна из них может быть задана следующей системой уравнений:

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = x_5 + x_6 = 0;$$

- особые точки многообразия X образуют $\mathrm{Aut}(X)$-орбиту, одна из них имеет координаты $(1 : 1 : 1 : -1 : -1 : -1)$.

Определение 5.2.1. Подгруппа $\mathfrak{S}_5 \subset \mathfrak{S}_6$ при естественном действии группы $\mathfrak{S}_6$ на множестве из 6 элементов называется *стандартной*, если она является стабилизатором какого-либо элемента. А противном случае подгруппа называется *нестандартной*.

Предложение 5.2.2. *Группа G совпадает с одной из следующих подгрупп* $\mathrm{Aut}(X) \simeq \mathfrak{S}_6$*:*

$$\mathfrak{A}_5,\ \mathfrak{S}_5,\ \mathfrak{A}_6,\ \mathfrak{S}_6,$$

где $\mathfrak{S}_5$ и $\mathfrak{A}_5$ — стандартные подгруппы.

Доказательство. Это несложно показать, используя список подгрупп $\mathfrak{S}_6$ (его несложно построить, используя, например, [75]) и следующие простые факты:

- группа G с естественным действием на координатах не может иметь инвариантной пары координат: иначе имеется G-инвариантная плоскость в $\mathbb{P}^4$;

- группа G не содержится в подгруппе $\mathfrak{S}_3^2 \rtimes \mathfrak{C}_2 \subset \mathrm{Aut}(X)$, поскольку эта подгруппа является стабилизатором особой точки многообразия X (см. [61, p. 252]);

- любая нестандартная подгруппа $\mathfrak{S}_5 \subset \mathrm{Aut}(X)$ имеет орбиту длины 5 на множестве плоскостей, лежащих на X (см. [61, Lemma 3.8]). Сумма всех плоскостей из этой орбиты не может быть пропорциональна каноническому классу многообразия X, поэтому нестандартные подгруппы $\mathfrak{S}_5$ не являются минимальными. Как следствие, G не содержится в нестандартной подгруппе $\mathfrak{S}_5$;

- любая подгруппа $H \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathfrak{C}_2$, действующая транзитивно на множестве координат, является стабилизатором некоторой плоскости, содержащейся в X, поскольку все подгруппы такого типа сопряжены, а стабилизатор плоскости является именно такой подгруппой. Как следствие, G не является подгруппой H.

Используя эти факты, мы исключаем все возможные подгруппы $\mathrm{Aut}(X)$, за исключением тех, которые перечислены в формулировке предложения. С другой стороны, все перечисленные подгруппы действуют транзитивно на множестве плоскостей, поэтому они являются минимальными. $\square$

Замечание 5.2.3. И. Чельцов и К. Шрамов в работе [12] доказали, что кубика Сегре с действием группы $G = \mathfrak{A}_6$ является G-бирационально жёсткой (см. 2.3.1). Таким образом, G-бирациональная жёсткость кубики Сегре со стандартным действием групп $\mathfrak{A}_5$ или $\mathfrak{S}_5$ — единственный открытый вопрос относительно G-жёсткости кубики Сегре.

Далее мы покажем, что если $G \simeq \mathfrak{A}_5$ — стандартная подгруппа $\mathfrak{S}_6 = \mathrm{Aut}(X)$, то многообразие X является G-бирационально жёстким. Без ограничения общности можно считать, что G фиксирует координату x_1. Обозначим гиперплоскость $\{x_1 = 0\}$ через H_0. Пусть $\mathcal{M} \subset |-\mu K_X|$ — некоторая G-инвариантная линейная система без неподвижных компонент.

Лемма 5.2.4. *Если G-орбита гладкой точки состоит не более чем из* 11 *элементов, то либо она совпадает с орбитой точки* $(0:0:0:0:1:-1)$ *и состоит из* 10 *элементов, либо она совпадает с орбитой точки* $(1:a:a:a:b:b)$, *где* $1+3a+2b = 1+3a^3+2b^3 = 0$, *и состоит из* 10 *элементов, либо она совпадает с орбитой точки* $(1:c:c:c:c:d)$, *где* $1+4c+d = 1+4c^3+d^3 = 0$, *и состоит из* 5 *элементов. Прямая, проходящая через любые две точки орбиты из 5 точек, не содержится в многообразии X. В любой другой орбите можно выбрать 6 точек таким образом, что никакие* 3 *не лежат на одной прямой и никакие* 5 *— на одной плоскости.*

Доказательство. Если точка не принадлежит H_0, то можно считать, что $x_0 = 1$. Очевидно, что в этом случае длина её орбиты равна количеству *различных* возможных перестановок координат $x_2, ..., x_6$. Равными эти координаты быть не могут, что несложно видеть из уравнений X. Если все координаты, кроме одной, равны, то орбита состоит из 5 точек. Если три координаты равны и две оставшиется тоже равны, то орбита состоит из $C_5^2 = 10$ точек. В остальных случаях точек больше 11. Если же точка принадлежит H_0, то утверждение следует из [14, Lemma 6.3.12].

Вторая часть утверждения легко проверяется напрямую.

Третья часть утверждения делается явным перебором всех возможных орбит. Рассмотрим, например, общий случай: точка $p = (x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6)$ имеет $x_1 = 1$, а все остальные координаты различны. Рассмотрим точки

$$p = (1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 : x_6),\ p_1 = (1 : x_3 : x_4 : x_2 : x_5 : x_6),$$

$$p_2 = (1 : x_2 : x_4 : x_5 : x_3 : x_6),\ p_3 = (1 : x_2 : x_3 : x_5 : x_6 : x_4),$$

$$p_4 = (1 : x_5 : x_3 : x_4 : x_6 : x_2),\ p_5 = (1 : x_3 : x_6 : x_4 : x_5 : x_2).$$

Очевидно, они лежат в одной G-орбите. Докажем, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Точки p и p_i имеют по три одинаковые координаты для любого i, причем у всех остальных точек эти координаты отличаются (как минимум одна). Значит, на прямой, проходящей через p и p_i, нет других точек из нашего списка. Аналогично показывается, что прямые, проходящие через p_i и p_{i+1} для $i = 1, ..., 4$, а также через p_1 и p_5, тоже не содержат других точек из нашего набора. Из пяти точек p_i невозможно выбрать три точки таким образом, чтобы ни у каких двух не было индексов, отличающихся на 1, и среди них не было пары p_1 и p_5. Таким образом, никакие три точки не лежат на одной прямой.

Легко проверить, что точки p, p_1, p_2, p_3 лежат в общем положении. Если среди наших точек есть пять в общем положении, то никакие пять не могут лежать на одной плоскости. Если же таких точек нет, то заменим p_4 на другую точку из G-орбиты p таким образом, что p, p_1, p_2, p_3, p_4 лежат в общем положении. При этом, очевидно, по-прежнему никакие три точки не будут лежать на одной прямой, а кроме того никакие пять не лежат на одной плоскости.

Остальные случаи рассматриваются аналогичным образом. □

Лемма 5.2.5. *Кривая не может быть центром неканонической особенности пары* $(X, \frac{1}{\mu}\mathcal{M})$.

Доказательство. Пусть C_1 — неприводимая кривая, являющаяся неканоническим центром, $d = \deg C_1$ — её степень, $\{C_i \mid 1 \leqslant i \leqslant r\}$ — её G-орбита, а $C = \sum_{i=1}^{r} C_i$. Пусть H — достаточно общее гиперплоское сечение X, а M_1 и M_2 — общие элементы $\mathcal{M}$. Тогда по теореме 2.3.4

$$12\mu^2 = H \cdot M_1 \cdot M_2 \geqslant (\operatorname{mult}_C \mathcal{M})^2 H \cdot C > \mu^2 rd.$$

Из этого следует, что $rd \leqslant 11$. Поскольку r является индексом некоторой подгруппы G, то r может быть равным 1, 5, 6 или 10.

Рассмотрим сначала случай $C_1 \not\subset H_0$. В этом случае $C_i \not\subset H_0$ для любого i, а $C \cdot H_0 = rd \leqslant 11$. Таким образом, согласно лемме 5.2.4, $C \cdot H_0 = 10 = rd$, поэтому r не может равняться 6.

Пусть $r = 10$. В этом случае кривая C_1 является прямой, а её стабилизатор является подгруппой $\mathfrak{A}_5$ индекса 10, значит он изоморфен $\mathfrak{S}_3$, причём точка пересечения $C_1 \cap H_0$ неподвижна относительно действия стабилизатора. Без ограничения общности можно считать, что эта точка имеет координаты $(0 : 0 : 0 : 0 : 1 : -1)$, а стабилизатор C_1 порождён элементами $(2\,3\,4)$ и $(2\,3)(5\,6)$. Группа $\mathfrak{S}_3$ не может действовать на C_1 эффективно, имея неподвижную точку. Поскольку точки с орбитой длины 10 изолированы (см. лемму 5.2.4), группа $\mathfrak{S}_3$ не может действовать тривиально на C_1. Поэтому ядро действия совпадает с $\mathfrak{C}_3$ и на C_1 есть вторая $\mathfrak{S}_3$-инвариантная точка. Очевидно, она имеет вид $(1 : a : a : a : b : b)$, где $1 + 3a + 2b = 1 + 3a^3 + 2b^3 = 0$. Но прямая, проходящая через точки $(0 : 0 : 0 : 0 : 1 : -1)$ и $(1 : a : a : a : b : b)$ не лежит на X: легко видеть, что точка $(1 : a : a : a : b + 1 : b - 1)$ не удовлетворяет уравнениям многообразия X. Полученное противоречие доказывает, что случай $r = 10$ невозможен.

Допустим теперь, что $r = 5$. В этом случае C_1 является неособой плоской кривой степени 2, инвариантной относительно группы $\mathfrak{A}_4$. Без ограничения общности можно считать, что эта группа фиксирует координаты x_0 и x_1. Поскольку плоскость, содержащая C_1, инвариантна относительно $\mathfrak{A}_4$, то эта группа имеет трёхмерное подпредставление в пятимерном представлении. Легко видеть, что пятимерное представление распадается в прямую сумму двух тривиальных представлений и трёхмерного симплициального представления. Из этого следует, что C_1 содержится в проективизации этого симплициального представления. Соответствующую плоскость можно задать уравнениями $x_0 = x_1 = \sum_{i=0}^{5} x_i = 0$, поэтому $C_1 \subset H_0$. Противоречие.

Рассмотрим теперь случай $r = 1$. В этом случае $C_1 = C$ является G-инвариантной кривой степени 10. Пусть $\widetilde{C}$ — нормализация C. Тогда группа $\mathfrak{A}_5$ действует нетривиально на $\widetilde{C}$ и имеет орбиту длины 10, состоящую из прообразов точек $C \cap H_0$ (эти точки не являются особыми точками кривой C, иначе индекс пересечения C с H_0 был бы выше). Но это невозможно ввиду [14, Lemma 5.1.4]. Полученное противоречие завершает рассмотрение случая $C_1 \not\subset H_0$.

Предположим теперь, что $C_1 \subset H_0$. Заметим, что $H_0 \cap X$ является неособой кубической поверхностью с действием группы $\mathfrak{A}_5$. Такая кубика единственна — она называется *кубикой Клебша*. Согласно [14, Theorem 6.3.18], степень кривой C равна 6. Пусть H — общее гиперплоское сечение X. Поскольку $\mathcal{M}$ не имеет басисных компонент,

$$6\mu = \mathcal{M} \cdot H_0 \cdot H \geqslant \mathrm{mult}_C \cdot \mathcal{M} \cdot C \cdot H > 6\mu.$$

Полученное противоречие завершает доказательство леммы. □

Лемма 5.2.6. *Точка не может быть центром неканонической особенности пары* $(X, \frac{1}{\mu}\mathcal{M})$.

Доказательство. Пусть особая точка p является центром неканонической особенности. Поскольку особые точки образуют одну G-орбиту, все они являются неканоническими центрами. Рассмотрим плоскость S, лежащую на X, и пусть Q — общая коника, проходящая через 4 особые точки многообразия X, лежащие на S. Поскольку линейная система $\mathcal{M}$ не имеет базисных компонент, Q не лежит на общем представителе $M_1 \in \mathcal{M}$. Тогда, согласно теореме 2.3.3,

$$4 = Q \cdot \left(\frac{1}{\mu} M_1\right) \geqslant 4 \cdot \mathrm{mult}_p \mathcal{M} > 4.$$

Противоречие.

Пусть гладкая точка p является центром неканонической особенности. Если орбита точки имеет длину 5, то согласно лемме 5.2.4 прямые, проходящие через пары точек из орбиты точки p, не лежат на X. Таким образом, линейная система кубических гиперповерхностей в $\mathbb{P}^4$, имеющих особенности в орбите точки p, не имеет базисных кривых на X. С другой стороны, пусть M_1 и M_2 — два общих элемента $\mathcal{M}$, а $Z = M_1 \cdot M_2$. Пусть Y — общая кубическая гиперповерхность в $\mathbb{P}^4$, имеющая особые точки в орбите точки p. Тогда по теореме 2.3.2

$$36\mu^2 = M_1 \cdot M_2 \cdot Y = Z \cdot Y > 5 \cdot 4\mu^2 \cdot 2 = 40\mu^2,$$

противоречие.

Во всех остальных случаях по лемме 5.2.4 в орбите точки p можно выбрать 6 точек таким образом, что линейная система квадрик в $\mathbb{P}^5$, проходящих через эти 6 точек, не содержит базисных кривых. Пусть M_1 и M_2 — два общих элемента $\mathcal{M}$, а $Z = M_1 \cdot M_2$. Тогда по теореме 2.3.2 верна формула

$$24\mu^2 = M_1 \cdot M_2 \cdot Y = Z \cdot Y > 6 \cdot 4\mu^2 = 24\mu^2.$$

Полученное противоречие завершает доказательство леммы. □

Теорема 5.2.7. *Кубика Сегре X с действием стандартной подгруппы $G = \mathfrak{A}_5 \subset \mathrm{Aut}(X)$ является G-бирационально жёсткой.*

Доказательство. Доказательство непосредственно следует из лемм 5.2.5 и 5.2.6. □

5.3. Кубические гиперповерхности с девятью особыми точками

В этом параграфе мы рассматриваем случай, когда X является кубической гиперповерхностью в $\mathbb{P}^4$ типа J14, удовлетворяющей предположению 5.1.1, а G — соответствующая минимальная подгруппа $\mathrm{Aut}(X)$. В этом случае X является гиперплоским сечением четырёхмерной кубической гиперповерхности $Z \subset \mathbb{P}^5$, заданной уравнением: $x_1x_2x_3 = y_1y_2y_3$ (см. [69, Prop. 2.2]). Можно показать, что группа $\mathrm{Aut}(Z)$ изоморфна $(\Bbbk^*)^4 \rtimes (\mathfrak{S}_3^2 \rtimes \mathfrak{C}_2)$, где алгебраический тор $(\Bbbk^*)^4$ действует на координатах диагональным образом, а подгруппа $\mathfrak{S}_3^2 \rtimes \mathfrak{C}_2$ действует естественным образом, переставляя координаты (см. [69, Lemma 1.1]). Множество особых точек $\mathrm{Sing}(Z)$ состоит из девяти прямых

$$l_{ij} = \{x_k = y_l = 0,\ k \neq i, l \neq j\},$$

которые пересекают многообразие X в множестве его особых точек. Кроме того, Z содержит девять трёхмерных проективных пространств

$$M_{ij} = \{x_i = y_j = 0\},$$

причём пересечения этих подпространств с X являются плоскостями, лежащими на X. Заметим, что имеется естественная $\mathrm{Aut}(X)$-эквивариантная биекция $l_{ij} \leftrightarrow M_{ij}$ между прямыми особых точек и трёхмерными проективными пространствами на Z.

Предположим, что гиперплоскость, высекающая X, имеет уравнение

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3 = 0.$$

Заметим, что для любого i верно, что $a_i \neq 0$ и $b_i \neq 0$. Действительно, иначе некоторые прямые из $\mathrm{Sing}(Z)$ пересекают X в одной и той же точке, что невозможно по предположению. С помощью диагональной замены координат можно добиться того, что $a_1 = a_2 = a_3 = A,\ b_1 = b_2 = b_3 = 1$ для некоторого A. Легко видеть, что если $A_1^3 = A_2^3$, то соответствующие гиперплоские сечения изоморфны. Заметим, что если $A = -1$, то точка $(1 : 1 : 1 : 1 : 1 : 1)$ является особой точкой многообразия X, и в этом случае X — кубика Сегре. Обратно, если $A^3 \neq -1, 0$, то X содержит ровно 9 обыкновенных двойных точек в качестве особенностей.

Лемма 5.3.1. *Пусть $Y = Z \cap H$ — некоторое гиперплоское сечение многообразия Z, причём множество $\mathrm{Sing}(X)$ состоит из девяти обыкновенных двойных точек. Тогда любой автоморфизм $\sigma \in \mathrm{Aut}(Y)$ индуцирован с автоморфизма $\overline{\sigma} \in \mathrm{Aut}(Z)$.*

Доказательство. Доказательство этого предложения неявным образом содержится в доказательстве [69, Prop. 2.2]. Для удобства мы воспроизведём доказательство здесь.

Пусть σ — некоторый автоморфизм многообразия Y. Тогда существует (не единственный) автоморфизм $\widetilde{\sigma} \in \mathrm{PGL}_6(\Bbbk)$ такой, что $\widetilde{\sigma}|_Y = \sigma$. Пусть $Z' = \widetilde{\sigma}(Z)$. Заметим, что $Z' \cap H = Z \cap H$, где H — гиперплоскость, высекающая Y. Таким образом, нам осталось показать следующий факт: существует такой автоморфизм $\tau \in \mathrm{PGL}_6(\Bbbk)$, что $\tau(Z) = Z'$ и $\tau|_H = \mathrm{Id}$. Обозначим через B подгруппу $\mathrm{PGL}_6(\Bbbk)$, состоящую из всех элементов, действующих тривиально на H. Очевидно, что G действует транзитивно на $\mathbb{P}^5 \setminus H$.

Многообразие Z содержит 9 трёхмерных проективных подпространств M_{ij}. Поэтому Z' тоже удовлетворяет этому свойству. Обозначим трёхмерные подпространства, лежащие на Z, через M'_{ij}. Мы можем считать, что $M_{ij} \cap H = M'_{ij} \cap H$ (поскольку оба множества пересечений состоят из девяти плоскостей на Y). Рассмотрим точку

$$v = (1 : 0 : 0 : 0 : 0 : 0), \ v = \cap_{i \neq 1} M_{ij}.$$

Мы можем считать, что $\cap_{i\neq 1} M_{ij} = \cap_{i \neq 1} M'_{ij}$ (этого всегда можно добиться, применив некоторый автоморфизм $\tau' \in B$). Из того, что $M_{ij} \cap H = M'_{ij} \cap H$ мы получаем в этом случае, что $M_{ij} = M'_{ij}$ если $i \neq 1$. Пусть $F' = 0$ — уравнение Z'. Тогда F' содержится в пересечении идеалов $\cap_{i\neq 1}(x_i, y_j)$. Несложно показать, что это пересечение является идеалом $(x_2x_3, y_1y_2y_3)$, поэтому можно считать, что $F' = lx_2x_3 - y_1y_2y_3$ для некоторого ненулевого полинома l. Предположим, что H имеет уравнение $m = 0$. Мы знаем, что полиномы F' и $x_1x_2x_3 - y_1y_2y_3$ совпадают на H, а многообразие Y неприводимо. Из этого легко вывести, что $m = l - x_1$ и $F' = (x_1 + m)x_2x_3 - y_1y_2y_3$ (после нормировки). Поэтому автоморфизм τ, действующий по правилу

$$x_1 \mapsto x_1 + m, \ x_2 \mapsto x_2, \ x_3 \mapsto x_3, \ y_i \mapsto y_i$$

содержится в B и переводит Z в Z'. Следовательно, композиция $\tau \circ \widetilde{\sigma}$ является требуемым автоморфизмом Z, индуцирующим σ. $\square$

Таким образом, мы получили, что группа $\mathrm{Aut}(X)$ изоморфна $\mathfrak{S}_3^2 \rtimes \mathfrak{C}_2$, если $A^3 = 1$, и $\mathfrak{S}_3^2$, если $A^3 \neq \pm 1, 0$. Но во втором случае имеется $\mathrm{Aut}(X)$-инвариантная плоскость $x_1 = x_2 = x_3$, поэтому группа $\mathrm{Aut}(X)$ имеет расслоенный тип по лемме 5.1.3. Таким образом, мы можем считать, что многообразие X задано системой уравнений

$$\left\{ x_1x_2x_3 - y_1y_2y_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i + \sum_{i=1}^{3} y_i = 0 \right\} \subset \mathbb{P}^5.$$

Теперь мы опишем все возможные минимальные подгруппы $G \subset \mathfrak{S}_3^2 \rtimes \mathfrak{C}_2$. Мы будем рассматривать $\mathfrak{S}_3^2 \rtimes \mathfrak{C}_2$ как подгруппу $\mathfrak{S}_6$ с естественным действием на координатах.

Предложение 5.3.2. *Группа G совпадает с одной из следующих групп:*

$$\mathfrak{S}_3^2, \ \mathfrak{C}_3^2 \rtimes \mathfrak{C}_4, \ \mathfrak{S}_3^2 \rtimes \mathfrak{C}_2,$$

где первая группа действует транзитивно на множестве координат. Обратно, все эти подгруппы минимальны.

Доказательство. Напомним, что имеется естественная биекция $l_{ij} \leftrightarrow M_{ij}$ между прямыми особых точек и трёхмерными пространствами на Z. Эта биекция индуцирует $\mathrm{Aut}(X)$-эквивариантную биекцию между особыми точками и плоскостями на X. Поскольку порядок группы G не делится на 5, G-орбита особой точки не может иметь длину 5. Поэтому группа G действует транзитивно на $\mathrm{Sing}(X)$ по следствию 5.1.4, и, следовательно, все плоскости также лежат в одной G-орбите. Поскольку группа $\mathrm{Cl}(X)$ является свободной абелевой группой, порождённой классами плоскостей (см. [58]), все такие подгруппы минимальны. Подгруппа группы $\mathrm{Aut}(X)$ действует транзитивно на множестве $\mathrm{Sing}(X)$ из девяти точек, следовательно, она содержит силовскую 3-подгруппу $\mathfrak{C}_3^2 \subset \mathrm{Aut}(X)$ (эта подгруппа является нормальной и, следовательно, единственной подгруппой порядка 9). Обратное утверждение проверяется явным образом.

С другой стороны, группа G не может действовать на координатах x_i, $1 \leqslant i \leqslant 3$ и y_i, $1 \leqslant i \leqslant 3$ по отдельности (т.е. сохраняя множество координат x_i), поскольку иначе имеется G-инвариантная плоскость. Кроме того, группа $\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{C}_3$ имеет только одно- и двумерные неприводимые представления, поэтому все подгруппы $\mathrm{Aut}(X)$, изоморфные $\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{C}_3$, имеют трёхмерное подпредставление в нашем пятимерном представлении. Поэтому все такие подгруппы имеют инвариантную плоскость, следовательно они имеют расслоенный тип. Таким образом, G является одной из групп, перечисленных в предложении. $\square$

5.4. Кубические гиперповерхности типа J11

В этом параграфе X является кубической гиперповерхностью в $\mathbb{P}^4$ типа J11, причём X удовлетворяет предположению 5.1.1, а G — соответствующая минимальная подгруппа $\mathrm{Aut}(X)$. В следующем предложении мы покажем, что такой случай не реализуется.

Предложение 5.4.1. *G-многообразие X с такими свойствами не существует.*

Доказательство. Предположим, что G-многообразие X существует. Любое многообразие типа J11 имеет 6 обыкновенных двойных точек и не имеет других особенностей. Кроме того, X содержит три плоскости Π_1, Π_2 и Π_3, каждая плоскость содержит ровно 4 особенности, и каждая особенность лежит ровно на двух плоскостях. Обозначим особые точки многообразия X через $p_1, ..., p_6$. Мы можем считать, что плоскости Π_1, Π_2 и Π_3 содержат (p_1, p_2, p_3, p_4), (p_1, p_2, p_5, p_6) и (p_5, p_6, p_3, p_4) соответственно. В сумме эти плоскости образуют гиперплоское сечение многообразия X и имеют ровно одну общую точку. Обозначим её через p_0. Пусть l_{12} — прямая, проходящая через p_1 и p_2, l_{34} — прямая, проходящая через p_3 и p_4 и l_{56} — прямая, проходящая через p_5 и p_6. Автоморфизм $l_{12} \simeq \mathbb{P}^1$, меняющий местами точки p_1 и p_2 и оставляющий на месте p_0 имеет вторую неподвижную точку, обозначим её через p_{12}. Аналогичным образом определябтся точки $p_{34} \in l_{34}$ и $p_{56} \in l_{56}$. Заметим, что p_{12}, p_{34} и p_{56} образуют $\mathrm{Aut}(X)$-орбиту. Действительно, точка p_{ij} каноничным образом определяется по тройке точек p_0, p_i, $p_j \in l_{ij}$. Поскольку группа $\mathrm{Aut}(X)$ сохраняет точку p_0, прямые l_{ij} и множество точек p_i, $i = 1...6$, множество точек p_{ij} также сохраняется. Эти точки не лежат на одной прямой, поэтому плоскость, проходящая через них, является $\mathrm{Aut}(X)$-инвариантной, что противоречит лемме 5.1.3. Полученное противоречие доказывает утверждение. $\square$

5.5. Кубические гиперповерхности типа J9

В этом параграфе X является кубической гиперповерхностью в $\mathbb{P}^4$ типа J9, причём X удовлетворяет предположению 5.1.1, а G — соответствующая минимальная подгруппа $\mathrm{Aut}(X)$. В этом случае X имеет ровно шесть особенностей, являющихся обыкновенными двойными точками, в общем положении по утверждению 5.1.8 и лемме 5.1.7). Следовательно, группа $\mathrm{Aut}(X)$ естественным образом вложена в группу перестановок особых точек $\mathfrak{S}_6$. Ниже мы рассматриваем группу $\mathrm{Aut}(X)$ как подгруппу в $\mathfrak{S}_6$ и используем соответствующие обозначения для её элементов. Можно считать, что особенности X имеют координаты

$$p_1 = (1:0:0:0:0),\ p_2 = (0:0:1:0:0),\ p_3 = (0:0:0:0:1),$$

$$p_4 = (0:1:0:0:0),\ p_5 = (0:0:0:1:0),\ p_6 = (1:1:1:1:1).$$

Уравнение многообразия X в этой системе координат имеет вид

$$\sum_{0\leqslant i<j<k\leqslant 4} a_{ijk}x_ix_jx_k=0, \tag{5.2}$$

где для любого $0\leqslant t\leqslant 4$ сумма коэффициентов, которые имеют t в качестве одного из индексов, равна нулю (это условие является необходимым и достаточным для наличия особенности в точке p_6). Поскольку группа $\mathrm{Aut}(X)$ не является ни линеаризуемой, ни группой расслоенного типа, она действует транзитивно на множестве $\mathrm{Sing}(X)$ по следствию 5.1.4.

Предложение 5.5.1. *В некоторой системе координат многообразие X имеет уравнение (5.2), причём*

$$a_{024}=A,\ a_{012}=-a_{123}=a_{234}=B,\ a_{014}=-a_{013}=a_{023}=C, \tag{5.3}$$

$$a_{034}=a_{124}=-a_{134}=D,\ A+B+C+D=0,$$

где A,B,C и D — некоторые ненулевые числа. Более того,
(i) если $A=B=-C=-D$, или $A=-B=C=-D$, или $A=-B==-C=D$, то $\mathrm{Aut}(X)\simeq\mathfrak{S}_5$;
(ii) если $B=C=D$, то $\mathrm{Aut}(X)\simeq\mathfrak{S}_3^2\rtimes\mathfrak{C}_2$ и группа $\mathrm{Aut}(X)$ является нормализатором силовской 3-подгруппы группы $\mathfrak{S}_6$;
(iii) если $A=-B$, или $A=-C$, или $A=-D$, то $\mathrm{Aut}(X)\simeq\mathfrak{S}_4$;
(iv) если $C=D$, или $B=C$, или $B=D$, то $\mathrm{Aut}(X)\simeq\mathfrak{D}_{12}$;
(v) во всех остальных случаях $\mathrm{Aut}(X)\simeq\mathfrak{S}_3$.

Доказательство. Заметим, что все коэффициенты a_{ijk} ненулевые. Действительно, предположим, что $a_{012}=0$. Рассмотрим проекцию из точки p_3 на гиперплоскость $x_4=0$. Образом исключительного дивизора этой проекции является персечение квадрики

$$\sum_{0\leqslant i<j\leqslant 3} a_{ij4}x_ix_j=0$$

и кубики

$$a_{013}x_0x_1x_3+a_{023}x_0x_2x_3+a_{123}x_1x_2x_3=0.$$

Но эта кубика приводима, что невозможно, поскольку X имеет тип J9 (детали см. в [25]).

Любая подгруппа группы $\mathfrak{S}_6$, действующая транзитивно на множестве особенностей, содержит элемент порядка 3, действующий с двумя орбитами длины 3 (это несложно видеть, используя таблицу подгрупп $\mathfrak{S}_6$, например, [75]). Без ограничения общности можно считать, что этот элемент имеет вид $(1\,2\,3)(4\,5\,6)$. Более того, мы можем явно записать этот автоморфизм в нашей системе координат:

$$(x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4) \mapsto (x_4 - x_3 : -x_3 : x_0 - x_3 : x_1 - x_3 : x_2 - x_3).$$

Этот автоморфизм отображает X в гиперповерхность с уравнением

$$a_{234}x_0x_1x_2 + a_{134}x_0x_1x_3 + a_{124}x_0x_1x_4 + a_{034}x_0x_2x_3 + a_{024}x_0x_2x_4 +$$

$$+ a_{014}x_0x_3x_4 - a_{012}x_1x_2x_3 - a_{013}x_1x_2x_4 - a_{023}x_1x_3x_4 - a_{123}x_2x_3x_4 = 0.$$

Эта кубика совпадает с X тогда и только тогда, когда выполнено условие (5.3). Более того, автоморфизм $(1\,4)(2\,6)(3\,5)$ в этом случае тоже действует на X. Поэтому если условие (5.3) выполнено, то группа $\mathrm{Aut}(X)$ действует транзитивно на множестве $\mathrm{Sing}(X)$.

Предположим теперь, что группа $\mathrm{Aut}(X)$ содержит группу

$$H = \langle (1\,2\,3)(4\,5\,6), (1\,4)(2\,6)(3\,5) \rangle \simeq \mathfrak{S}_3$$

в качестве собственной подгруппы. Имеется ровно семь групп H' таких, что $H \subsetneq H'$ и не существует промежуточных групп между H и H':

- три группы, изоморфные $\mathfrak{D}_{12}$. Они порождены H и либо $h_{11} = (1\,4\,2\,5\,3\,6)$, либо $h_{12} = (1\,5\,2\,6\,3\,4)$, либо $h_{13} = (1\,6\,3\,2\,5\,4)$ соответственно;

- единственная подгруппа, изоморфная $\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{C}_3$, она порождена H и $h_2 = (1\,2\,3)$;

- три группы, изоморфные $\mathfrak{S}_4$. Они порождены H и либо $h_{31} = (1\,2\,4\,5)$, либо $h_{32} = (1\,2\,5\,6)$, либо $h_{33} = (1\,2\,6\,4)$ соответственно.

Путём явных вычислений, несложно видеть, что

- h_{11} сохраняет $X \iff C = D$;

- h_{12} сохраняет $X \iff B = C$;

- h_{13} сохраняет $X \iff B = D$;

- h_2 сохраняет $X \iff B = C = D$;

- h_{31} сохраняет $X \iff A = -D$;

- h_{32} сохраняет $X \iff A = -B$;

- h_{33} сохраняет $X \iff A = -C$.

Если $B = C = D$, то, очевидно, группа $\mathrm{Aut}(X)$ содержит также элементы $(1\,2)$ и $(4\,5)$ и не содержит элемент h_{31}, поэтому она изоморфна $\mathfrak{S}_3^2 \rtimes \mathfrak{C}_2$.

Предположим теперь, что $\mathrm{Aut}(X) \supsetneq \mathfrak{D}_{12} = \langle H, h_{11}\rangle$ и $\mathrm{Aut}(X)$ не содержит h_2. Тогда имеет место одна из двух возможностей: либо

$$\mathrm{Aut}(X) \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathfrak{C}_2 = \langle \mathfrak{D}_{12}, h_{32}\rangle,$$

либо

$$\mathrm{Aut}(X) \simeq \mathfrak{S}_5 = \langle \mathfrak{D}_{12}, h_{31}\rangle = \langle \mathfrak{D}_{12}, h_{33}\rangle.$$

В первом случае мы имеем

$$C = D,\ A = -B,\ A + B + C + D = 0,$$

поэтому $C = D = 0$, противоречие. Во втором случае

$$A = B = -C = -D.$$

Остальные группы, изоморфные $\mathfrak{D}_{12}$, рассматриваются аналогично.

Предположим теперь, что $\mathrm{Aut}(X) \supsetneq \mathfrak{S}_4 = \langle H, h_{31}\rangle$. Тогда имеет место одна из трёх возможностей: либо

$$\mathrm{Aut}(X) \simeq \mathfrak{S}_4 \times \mathfrak{C}_2 = \langle \mathfrak{S}_4, h_{12}\rangle,$$

либо

$$\mathrm{Aut}(X) \simeq \mathfrak{S}_5 = \langle \mathfrak{S}_4, h_{11}\rangle,$$

либо

$$\mathrm{Aut}(X) \simeq \mathfrak{S}_5 = \langle \mathfrak{S}_4, h_{13}\rangle.$$

Все эти варианты уже были рассмотрены выше. $\square$

Замечание 5.5.2. Несложно показать, что гиперповерхность, заданная уравнением (i) или (ii) из утверждения 5.5.1, имеет тип J9.

Предложение 5.5.3. *В обозначениях утверждения 5.5.1 группа* $\mathrm{Aut}(X)$ *не может быть изоморфна* $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{S}_4$ *или* $\mathfrak{D}_{12}$. *Если* $\mathrm{Aut}(X) \simeq \mathfrak{S}_5$, *то* $G = \mathrm{Aut}(X)$. *Если* $\mathrm{Aut}(X) \simeq \mathfrak{S}_3^2 \rtimes \mathfrak{C}_2$, *то* G *совпадает либо с* $\mathrm{Aut}(X)$, *либо с единственной подгруппой группы* $\mathrm{Aut}(X)$, *изоморфной* $\mathfrak{S}_3^2$ *и действующей транзитивно на* $\mathrm{Sing}(X)$, *либо с* $\mathfrak{C}_3^2 \rtimes \mathfrak{C}_4$.

Доказательство. В доказательстве мы будем использовать обозначения из доказательства утверждения 5.5.1. Предположим, что $\mathrm{Aut}(X)$ равна H или $\mathfrak{D}_{12} = \langle H, h_{11} \rangle$ (последнее равенство мы можем предположить без ограничения общности, поскольку нас интересуют подгруппы с точностью до сопряжения в $\mathfrak{S}_6$). Рассмотрим точку $(1 : -1 : 0 : -1 : 1)$. Тогда $\mathrm{Aut}(X)$-орбита этой точки состоит из трёх элементов

$$(1 : -1 : 0 : -1 : 1), \ (2 : 1 : 2 : 0 : 1), \ (1 : 0 : 2 : 1 : 2).$$

Эти три точки не лежат на одной прямой, поэтому плоскость, проходящая через них, является $\mathrm{Aut}(X)$-инвариантной. В случае $\mathrm{Aut}(X) \simeq \mathfrak{S}_4 = \langle H, h_{31} \rangle$ мы можем рассмотреть точку $(1 : 1 : 1 : 1 : 2)$ с тем же свойством. В любом случае $\mathrm{Aut}(X)$ имеет расслоенный тип по лемме 5.1.3, противоречие.

Обозначим через π проекцию на гиперплоскость $L = \{x_0 = 0\}$ из точки p_1. Образом исключительного дивизора отображения π является пара рациональных кривых Γ_1 и Γ_2, особые точки p_i, $i > 1$ отображаются в пять точек пересечения $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ (подробности см. в [25]). Обозначим $r_i = \pi(p_i)$, $i > 1$. Пусть S_i — прообраз кривой Γ_i. Тогда класс S_1 и $\frac{1}{2}K_X$ порождают $\mathrm{Cl}(X)$ (см. [25]) и $S_1 + S_2 \sim -K_X$.

Замечание 5.5.4. Поверхности S_1 и S_2 зависят от выбора особой точки, из которой осуществляется проекция. Однако их классы в $\mathrm{Cl}(X)$ от выбора точки не зависят.

Предположим, что $\mathrm{Aut}(X) \simeq \mathfrak{S}_5$. Поскольку G действует транзитивно на $\mathrm{Sing}(X)$ и не содержится ни в $\mathfrak{S}_4$, ни в $\mathfrak{D}_{12}$, группа G должна быть равна либо $\mathfrak{A}_5$, либо $\mathfrak{S}_5$. Группа $\mathfrak{A}_5$ не может действовать на решётке $\mathrm{Cl}(X)$ так, что $\mathrm{rk}\,\mathrm{Cl}(X)^G = 1$, следовательно $G = \mathrm{Aut}(X)$. Осталось показать, что группа $\mathrm{Aut}(X)$ минимальна. Пусть $F \simeq \mathfrak{C}_5 \rtimes \mathfrak{C}_4$ — стабилизатор точки p_1. Тогда π является F-эквивариантным отображением. Подгруппа $\mathfrak{C}_5 \subset F$ действует нетривиально на $\mathrm{Sing}(X)$. Поэтому группа F не может действовать на рациональной кривой, и, следовательно, переставляет кривые Γ_i. Таким образом, F переставляет S_1 и S_2, поэтому F, а следовательно и $\mathrm{Aut}(X)$, минимальна.

Наконец, рассмотрим случай $\mathrm{Aut}(X) \simeq \mathfrak{S}_3^2 \rtimes \mathfrak{C}_2$. Стабилизатор точки p_1 изоморфен $\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{C}_2 \simeq \mathfrak{D}_{12}$ и действует точно на $\mathrm{Sing}(X) \setminus \{p_1\}$ с двумя орбитами длины 2 и 3 соответственно. Поэтому стабилизатор точки p_1 не может действовать на Γ_1 и Γ_2 по отдельности, следовательно, группа $\mathrm{Aut}(X)$ минимальна по тем же причинам, что и в предыдущем случае.

Ядро гомоморфизма

$$\mathrm{Aut}(X) \to \mathrm{Aut}(\mathrm{Cl}(X)) \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$$

является подгруппой группы $\mathrm{Aut}(X)$ индекса 2. Группа $\mathrm{Aut}(X)$ имеет ровно три подгруппы индекса 2: группа $G_1 \simeq \mathfrak{S}_3^2$, которая действует нетранзитивно на множестве $\mathrm{Sing}(X)$, группа $G_2 \simeq \mathfrak{S}_3^2$, действующая транзитивно на $\mathrm{Sing}(X)$ и группа $G_3 \simeq \mathfrak{C}_3^2 \rtimes \mathfrak{C}_4$. Первая группа имеет тот же стабилизатор точки p_1, что и $\mathrm{Aut}(X)$, поэтому она не может быть ядром.

Допустим, что $\delta = (1\,4)(2\,6)(3\,5) \in G_2$ действует тривиально на $\mathrm{Cl}(X)$. Несложно показать, что множество δ-инвариантных точек многообразия X состоит из (гладкой) эллиптической кривой и трёх точек. Пусть $\tau : \widetilde{X} \to X$ — δ-эквивариантное малое разрешение особенностей. Тогда стягивание некоторого экстремального луча даёт нам δ-эквивариантное $\mathbb{P}^1$-расслоение над $\mathbb{P}^2$ (см. [58, Theorem 5.2]). Если δ действует тривиально на базе, то имеется дивизор неподвижных точек на $\widetilde{X}$, и то же самое верно для X, поскольку морфизм τ малый. Противоречие. Если δ действует нетривиально на базе, то множество δ-инвариантных точек на $\mathbb{P}^2$ состоит из прямой и точки. Следовательно, имеется две прямые неподвижных точек на $\widetilde{X}$. Эти прямые не могут быть стянуты морфизмом τ, поскольку нет δ-инвариантных особых точек на X. Это невозможно. Следовательно, δ действует нетривиально на $\mathrm{Cl}(X)$. Таким образом, G_3 является искомым ядром.

Группа G является подгруппой $\mathrm{Aut}(X)$, действующей транзитивно на $\mathrm{Sing}(X)$ и не являющейся подгруппой группы $\mathfrak{C}_3^2 \rtimes \mathfrak{C}_4$. кроме того, G не содержится в подгруппе $\mathrm{Aut}(X)$, изоморфной $\mathfrak{D}_{12}$ по той же причине, по какой $\mathrm{Aut}(X) \not\simeq \mathfrak{D}_{12}$. Поэтому либо G сопряжена $\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{C}_3 = \langle H, (1,2,3)\rangle$, либо G совпадает с G_2 или $\mathrm{Aut}(X)$. Но в первом случае G-орбита точки $(\omega : \omega^2 - 1 : -2 : \omega - 1 : \omega^2)$, где ω — кубический корень из единицы, имеет длину 3, что противоречит лемме 5.1.3. □

5.6. Пять особых точек

В этом параграфе X является кубической гиперповерхностью в $\mathbb{P}^4$, имеющей ровно 5 особых точек в общем положении, причём X удовлетворяет предположению 5.1.1, а G — соответствующая минимальная подгруппа $\mathrm{Aut}(X)$.

Предложение 5.6.1. *Многообразие X может быть задано в некоторой системе координат уравнением*

$$(x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_5 + x_4x_5x_1 + x_5x_1x_2)+$$

$$+a(x_1x_2x_4 + x_2x_3x_5 + x_3x_4x_1 + x_4x_5x_2 + x_5x_1x_3) = 0,\ \ a^3 = 1.$$

Группа $\mathrm{Aut}(X)$ *изоморфна* $\mathfrak{S}_5$ *если* $a = 1$ *и* $\mathfrak{A}_5$ *иначе. Группа G изоморфна либо $\mathfrak{S}_5$, либо $\mathfrak{A}_5$, либо $\mathfrak{C}_5 \rtimes \mathfrak{C}_4$.*

Доказательство. Можно считать, что особые точки имеют координаты $p_i = \{x_j = \delta_i^j\}$. Уравнение многообразия X в этой системе координат имеет вид

$$\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant 5} a_{ijk}x_ix_jx_k = 0.$$

Действие $\mathrm{Aut}(X)$ на множестве особых точек X индуцирует гомоморфизм $\mathrm{Aut}(X) \to \mathfrak{S}_5$ с транзитивным образом, поэтому образ содержит элемент порядка 5. Без ограничения общности можно считать, что образ содержит элемент $(1\,2\,3\,4\,5)$. Очевидно, что любой элемент группы $\mathrm{PGL}_5(\Bbbk)$, переставляющий особенности многообразия X по циклу, является композицией циклической перестановки координат и диагонального отображения. Все элементы такого типа сопряжены друг другу с помощью диагонального отображения. Это несложно показать, выписав явные уравнения на элементы соответствующей диагональной матрицы. Таким образом, мы можем считать (применив диагональную замену координат, если необходимо), что $\mathrm{Aut}(X)$ содержит циклическую перестановку координат и

$$a_{123} = a_{234} = a_{345} = a_{145} = a_{125}, \quad a_{124} = a_{235} = a_{134} = a_{245} = a_{135}.$$

Действительно, возможна ситуация, когда

$$a_{123} = \omega a_{234} = \omega^2 a_{345} = \omega^3 a_{145} = \omega^4 a_{125},$$

$$a_{124} = \omega a_{235} = \omega^2 a_{134} = \omega^3 a_{245} = \omega^4 a_{135}$$

для некоторого ω — корня пятой степени из 1. В этом случае диагональная замена координат

$$x_1 \mapsto x_1,\ x_2 \mapsto \omega^2 x_2,\ x_3 \mapsto \omega^4 x_3,\ x_4 \mapsto \omega x_4,\ x_5 \mapsto \omega^3 x_5$$

приводит уравнение многообразия к нужной нам форме. Заметим, что все коэффициенты ненулевые, иначе особенности многообразия X неизолированы. Следовательно, мы можем считать, что $a_{123} = 1$ и $a_{124} = a$ для некоторого ненулевого числа a. Заметим, что диагональное отображение сохраняет X тогда и только тогда, когда оно тривиально. Как следствие, гомоморфизм $\mathrm{Aut}(X) \to \mathfrak{S}_5$ является вложением. Заметим, что если $a = -1$, то X имеет ещё одну особенность в точке $(1 : 1 : 1 : 1 : 1)$, поэтому $a \neq -1$. Очевидно, что $\mathfrak{D}_{10}$ действует на X. С точностью до сопряжения имеется три подгруппы в $\mathfrak{S}_5$, содержащие $\mathfrak{D}_{10}$ в качестве собственной подгруппы: $\mathfrak{C}_5 \rtimes \mathfrak{C}_4$, $\mathfrak{A}_5$ и $\mathfrak{S}_5$. Группа

$$\mathfrak{C}_5 \rtimes \mathfrak{C}_4 = \langle \mathfrak{D}_{10}, (2\,3\,5\,4) \rangle$$

действует на X тогда и только тогда, когда $a = 1$ (это несложно получить, выписав явно условия того, что преобразование, являющееся композицией циклической перестановки координат $(2\,3\,5\,4)$ и диагонального преобразования сохраняет уравнение многообразия X) и, очевидно, в этом случае $\mathrm{Aut}(X) = \mathfrak{S}_5$. Группа $\mathfrak{A}_5 = \langle \mathfrak{D}_{10}, (1\,2\,3) \rangle$ действует на X тогда и только тогда, когда $a^3 = 1$, в этом случае X сохраняется автоморфизмом

$$(x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5) \mapsto (x_2 : ax_3 : a^{-1}x_1 : ax_4 : x_5).$$

Теперь мы предположим, что $a^3 \neq 1$. Рассмотрим точки $(1 : \omega : \omega^2 : \omega^3 : \omega^4)$ и $(1 : \omega^4 : \omega^3 : \omega^2 : \omega)$, где ω — примитивный корень пятой степени из единицы. Они образуют $\mathfrak{D}_{10}$-орбиту и лежат на X. Прямая l, проходящая через них, также лежит на X. Действительно, в противном случае l имеет одинаковые кратности пересечения с X в обеих точках, поэтому имеется третья точка пересечения l и X. Эта точка должна быть инвариантной точкой относительно действия $\mathfrak{D}_{10}$, что может выполняться только для точки $(1:1:1:1:1)$. Но эта точка не лежит на X поскольку $a \neq -1$, противоречие. Следовательно, проекция из прямой l даёт нам расслоение на коники, которое эквивалентно некоторому $\mathfrak{D}_{10}$-расслоению Мори. Таким образом, $a^3 = 1$.

Группа G действует транзитивно на $\mathrm{Sing}(X)$ и не содержится в $\mathfrak{D}_{10}$,поэтому она является одной из групп, выписанных в формулировке утверждения. В обоих случаях ($a = 1$ или a — примитивный корень третьей степени из единицы) X имеет только обыкновенные двойные точки в качестве особенностей, поэтому $\mathrm{Cl}(X)$ порождён классом гиперплоского сечения (см. [25]). Следовательно, все подгруппы группы $\mathrm{Aut}(X)$ автоматически минимальны. $\square$

Публикации по теме диссертации

[A1] А. А. Авилов, “Существование стандартных моделей расслоений на коники над алгебраически незамкнутыми полями”, *Мат. Сб.*, **205(12)** (2014), 3–16.

[A2] А. А. Авилов, “Автоморфизмы трехмерных многообразий, представимых в виде пересечения двух квадрик”, *Мат. Сб.*, **207(3)** (2016), 3-18.

[A3] А. А. Авилов, “Автоморфизмы особых трехмерных кубических гиперповерхностей и группа Кремоны”, *Мат. Зам.*, 2016.

[A4] А. А. Авилов, “О стандартных моделях расслоений на коники”, *Тезисы летней школы-конференции по алгебраической геометрии и комплексному анализу для молодых учёных России, Коряжма*, 2015.

[A5] A. A. Avilov, “Automorphisms of singular three-dimensional cubic hypersurfaces”, *ArXiv e-print*, **1603.04087** (2016).

Список литературы

[1] D. Abramovich, J. Wang, "Equivariant resolution of singularities in characteristic 0", *Math. Res. Lett.*, **4**:2-3 (1997), 427–433.

[2] V. Alexeev, "General elephants on $\mathbb{Q}$-Fano threefolds", *Comp. Math.*, **91**:1 (1994), 91–116.

[3] A. Beauville, "p-elementary subgroups of the Cremona group", *J. of Algebra*, **314** (2007), 553—564.

[4] A. Beauville, "Variétés de Prym et jacobiennes intermédiaires", *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **10** (1977), 304–392.

[5] E. Bertini, "Ricerche sulle trasforormazioni univoche involutorie nel piano", *Annali di Mat.Pura Appl. (2)*, **8** (1877), 254—287.

[6] C. Birkar, P. Cascini, C. D. Hacon, J. McKernan, "Existence of minimal models for varieties of log general type", *J. Am. Math. Soc.*, **23**:2 (2010), 405–468.

[7] J. Blanc, "Finite abelian subgroups of the Cremona group of the plane", *PhD Thesis, Univ. of Geneva*, 2006.

[8] J. Blanc, S. Zimmermann, "Topological simplicity of the Cremona groups", *arXiv e-print*, **1511.08907** (2015).

[9] J.W. Bruce, C.T.C. Wall, "On the classification of cubic surfaces", *J. London Math. Soc.*, **19** (1979), 245–256.

[10] S. Cantat, S. Lamy, "Normal subgroups in the Cremona group", *Acta Mathematica*, **210** (2013), 31–94.

[11] И. А. Чельцов, "Бирационально жесткие многообразия Фано", *УМН*, **60**:5(365) (2005), 71–160.

[12] I. Cheltsov, C. Shramov, "Five embeddings of one simple group", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **366:3** (2014), 1289–1331.

[13] I. Cheltsov, C. Shramov, "Three embeddings of the Klein simple group into the Cremona group of rank three", *Transform. Groups*, **17**:2 (2012), 303-–350.

[14] I. Cheltsov, C. Shramov, *Cremona groups and icosahedron*, CRC Press, 2015.

[15] C.H. Clemens, P.A. Griffiths, "The intermediate Jacobian of the cubic threefold", *Ann. of Math. Second Series*, **95**:2 (1972), 281–356.

[16] A. Corti, "Factoring birational maps of threefolds after Sarkisov", *J. of Alg. Geom.*, **4** (1995), 223–254.

[17] A. Corti, "Singularities of linear systems and 3-fold birational geometry", *L.M.S. Lecture Note Series*, **281** (2000), 259–312.

[18] A. Corti, K.E. Smith, J. Kollar, *Rational and nearly rational varieties*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **92**, Cambridge University Press, 2004.

[19] J. Deserti, "On solvable subgroups of the Cremona group", *arXiv e-print*, **1503.02121** (2015).

[20] I. Dolgachev, "On elements of order p^s in the plane Cremona group over a field of characteristic p", *Multidimensional Algebraic Geometry, Proc. Steklov. Inst. Math.*, **264** (2009), 55–62.

[21] I. Dolgachev, *Classical Algebraic Geometry: a modern view*, Cambrige Univ. Press, 2012.

[22] I. Dolgachev, V. Iskovskikh, "Finite subgroups of the plane Cremona group", *In Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin. Vol. I, Progr. Math.*, **269** (2009), 443–548.

[23] I. Dolgachev and V. Iskovskikh, "On elements of prime order in the plane Cremona group over a perfect field", *Int. Math. Res. Notices*, 2009, 3467–3485.

[24] T. de Fernex, “On planar Cremona maps of prime order”, *Nagoya Math. J.*, **174** (2004), 1–28.

[25] H. Finkelnberg, J. Werner, “Small resolutions of nodal cubic threefold”, *Ind. Math. (Proc.)*, **92**:2 (1989), 185–196.

[26] T. Fujita, “On singular del Pezzo varieties. In Algebraic geometry (L’Aquila, 1988)”, *Lecture Notes in Math.*, **1417** (1990), 117–128.

[27] T. Fujita, “On the structure of polarized manifold with total deficiency one 1. 2 and 3”. *J. Math. Soc. Japan* **32** (1980) 709–725, **33** (1981) 415–434, **36** (1984) 75–89.

[28] T. Fujita, *Classification theories of polarized varieties*, **155**, London Math. Soc. Lect. Notes Series, Cam. Univ Press, 1990.

[29] М. Гизатуллин, “Определяющие соотношения для кремоновой группы плоскости”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **46**:5 (1982), 909–970.

[30] R. Hartshorne, “Stable reflexive sheaves”, *Math. Ann.*, **254** (1980), 121–176.

[31] R. Hartshorne, *Ample subvarieties in algebraic varieties*, Lec. Notes in Math, 156, 1970.

[32] H.P. Hudson, *Cremona Transformations in Plane and Space*, Cambrige Univ. Press, 1927.

[33] W.V.D. Hodge, D. Pedoe, *Methods of Algebraic Geometry, Vol. II*, Cambridge University Press, 1952.

[34] В. А. Исковских, “Антиканонические модели трехмерных алгебраических многообразий”, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат., **12**, 1979, 59–157.

[35] V. Iskovskikh, Yu. Prokhorov, *Fano varieties, Algebraic geometry V, Encyclopaedia Math. Sci.*, Springer, Berlin, 1999.

[36] В. Исковских, “Рациональные поверхности с пучком рациональных кривых”, *Матем. сб.*, **74(116)**:4 (1967), 608–638.

[37] В. А. Исковских, “Рациональные поверхности с пучком рациональных кривых и с положительным квадратом канонического класса”, *Матем. сб.*, **83(125)**:1(9) (1970), 90–119.

[38] В. А. Исковских, “Трехмерные многообразия Фано. I”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **41**:3 (1977), 516–562.

[39] В. А. Исковских, “Трехмерные многообразия Фано. II”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **42**:3 (1978), 506–549.

[40] V. Iskovskikh, Yu. Prokhorov, *Fano varieties, Algebraic geometry V*, Encyclopaedia Math. Sci., Springer, Berlin, 1999.

[41] В. А. Исковских, И. Р. Шафаревич, “Алгебраические поверхности”, *Алгебраическая геометрия — 2*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **35**, ВИНИТИ, М., 1989, 131–263.

[42] Y. Kawamata, “The cone of curves of algebraic varieties”, *Ann. of Math.*, **119** (1984), 603–633.

[43] Y. Kawamata, “Boundness of $\mathbb{Q}$-Fano threefolds”, *Proc. Int. Conf. Algebra. Contemp. Math.*, **131** (1992), 439–445.

[44] J. Kollar, “Flops”, *Nagoya Math. J.*, **113** (1989), 15–36.

[45] J.Kollar, S. Mori, *Birational geometry of algebraic varieties*, **134**, Cambridge Tracts in Math., 1998.

[46] K. Matsuki, *Introduction to the Mori program*, Universitext, Springer-Verlag, 2002.

[47] Ю. Манин, *Кубические формы: алгебра, геометрия, арифметика*, Наука, Москва, 1973.

[48] Ю. Манин, “Рациональные поверхности над совершенными полями II”, *Матем. сб.*, **72(114)**:2 (1967), 161—192.

[49] S. Mori, “Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds”, *J. Amer. Math. Soc.*, **1** (1988), 117–253.

[50] S. Mori, "Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective", *Ann. of Math.*, **116** (1986), 133–176.

[51] S. Mori, Yu. Prokhorov, "On $\mathbb{Q}$-conic bundles", *Publ. RIMS*, **44** (2008), 315–369.

[52] D. Morrison, "The birational geometry of surfaces with rational double points", *Math. Ann.*, **271** (1985), 415–438.

[53] S. Mukai, "Biregular classification of Fano threefolds and Fano manifolds of coindex 3", *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **86** (1989).

[54] S. Mukai, "Fano 3-folds", *Lodon Math. Soc. Lect. Notes Ser.*, **179** (1992), 255–263.

[55] Y. Namikawa, "Smoothing Fano 3-folds", *J. Alg. Geom.*, **6** (1997), 307–324.

[56] M. Noether, "Uber die ein-zweideutigen Ebenentransformationen", *Sitzungberichte der physicmedizin, Soc. zu Erlangen*, 1878.

[57] Yu. Prokhorov, "2-elementary subgroups of the space Cremona group", *Automorphisms in birational and affine geometry*, Springer Proc. in Math. & Stat., **79**, 2014, 215–229.

[58] Yu. Prokhorov, "G-Fano threefolds, I", *Adv. Geom.*, **13**:3 (2013), 389—418.

[59] Yu. Prokhorov, "G-Fano threefolds. II", *Adv. Geom.*, **13**:3 (2013), 419—434.

[60] Ю. Прохоров, "О трехмерных G-многообразиях Фано", *Изв. РАН сер. матем.*, **79**:4 (2015), 159–174.

[61] Yu. Prokhorov, "Fields of invariants of finite linear groups", *Cohomological and geometric approaches to rationality problems, Pr. in Math.*, **282**, 2010, 245–274.

[62] Yu. Prokhorov, "p-elementary subgroups of the Cremona group of rank 3", *Classification of algebraic varieties*, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zurich, 2011, 327–338.

[63] Yu. Prokhorov, "Simple finite subgroups of the Cremona group of rank 3", *J. Algebraic Geom.*, **21**:3 (2012), 563—600.

[64] Yu. Prokhorov, C. Shramov, "Jordan property for Cremona groups", *Compositio Math.*, **150**:12 (2014), 2054–2072.

[65] M. Reid, "Minimal models of canonical threefolds", *Advanced Studies in Pure Mathematics 1, Algebraic Varieties and analytic varieties*, 1983, 131–180.

[66] В. Г. Саркисов, "О структурах расслоений на коники", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **46**:2 (1982), 371—408.

[67] J.-P. Serre, "A Minkowski-style bound for the orders of the finite subgroups of the Cremona group of rank 2 over an arbitrary field", *Mosc. Math. J.*, **9**:1 (2009), 183–198.

[68] Б. Г. Авербух, Ю. Р. Вайнберг, А. Б. Жижченко, Ю. И. Манин, Б. Г. Мойшезон, Г. Н. Тюрина, А. Н. Тюрин, *Алгебраические поверхности*, Тр. МИАН СССР, **75**, ред. И. Р. Шафаревич, И. Г. Петровский, Наука, 1965.

[69] N.I. Shepherd-Barron, "The Hasse principle for 9-nodal cubic 3-folds", *ArXiv e-print*, **1210.5178** (2012).

[70] K.-H. Shin, "3-dimensional Fano varieties with canonical singularities", *Tokyo J. Math.*, **12(2)** (1989), 375-–385.

[71] В. В. Шокуров, "Теорема о необращении в нуль", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **49**:3 (1985), 635—651.

[72] B. Teissier, "Cycle évanéscents, sections planes et conditions de Whitney", *Singularités à Cargèse (Rencontre Singularités Géom. Anal., Inst. Études Sci., Cargèse, 1972), Astérisque 7, 8*, 1973, 285–362.

[73] N. Tziolas, "Terminal 3-fold divisorial contractions of a surface to a curve I", *Comp. Math.*, **139** (2003), 239–261.

[74] E. Yasinsky, "Subgroups of odd order in the real plane Cremona group", *Journal of Algebra*, **461C** (2016), 87–120.

[75] The GAP Group, GAP — Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.8.2; 2016. (http://www.gap-system.org)