ФГБУН Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук

На правах рукописи
УДК 510.643

Пахомов
Федор Николаевич

Некоторые алгоритмические вопросы для полимодальных логик доказуемости

Специальность 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
член-корр. РАН Лев Дмитриевич Беклемишев

МОСКВА — 2015

Оглавление

Введение

Диссертация посвящена изучению понятия доказуемости средствами модальной логики. В диссертации исследуются алгоритмические свойства полимодальной логики доказуемости Джапаридзе и ее фрагментов.

Идея изучения свойств доказуемости средствами модальных логик восходит к К. Геделю [20]. Гедель предложил интерпретировать связку модальности $\Box$ как арифметическую формулу Pr_{T}, выражающую доказуемость в данной формальной теории T.

Из результатов Геделя и Леба [25] вытекает, что для перечислимых теорий T, содержащих первопорядковую арифметику Пеано PA, любая теорема модальной логики GL выражает свойство доказуемости в T, которое можно обосновать средствами самой теории T. Логика Геделя-Леба GL формализуется в языке исчисления высказываний, обогащенном связкой $\Box$, и получается добавлением к аксиомам и правилам вывода исчисления высказываний следующих аксиом и правил вывода:

1. $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$;
2. $\Box(\Box\varphi \to \varphi) \to \Box\varphi$ (аксиома Леба);
3. $\dfrac{\varphi}{\Box\varphi}$.

В 1976 году Р.М. Соловей [27] доказал теорему об арифметической полноте логики GL. Модальная формула является теоремой логики GL, если и только если она переводится в теорему PA при любой подстановке арифметических предложений вместо пропозициональных переменных и расшифровке $\Box$ как Pr_{PA}.

С середины 1970-х годов исследованию логики GL и других логик доказуемости было посвящено значительное число работ. В 1986 г.

Г.К. Джапаридзе рассмотрел [2] обобщение GL — логику GLP, в которой вместо одной модальной связки $\Box$ используется занумерованное натуральными числами семейство модальных связок $[0], [1], \ldots, [n], \ldots$ Джапаридзе доказал аналог теоремы Соловея об арифметической полноте, в котором связки $[n]$ интерпретируются как доказуемость из аксиом PA с использованием выводов с ω-правилами с глубиной вложенности ω-правил, не превосходящей n.

В настоящее время логика GLP активно изучается в связи с ее применениями в ординальном анализе арифметических теорий [7]. Вопрос о характеризации формальных теорий ординалами является одним из центральных вопросов в теории доказательств. Исследования такого рода восходят к Г. Генцену [19], который доказал непротиворечивость PA с помощью трансфинитной индукции до ординала ε_0. Применение логики GLP основано на использовании замкнутых формул (формул без пропозициональных переменных) для обозначения арифметических теорий и для построения естественной системы ординальных обозначений для ординала $\varepsilon_0 = \sup\{\underbrace{\omega^{\omega^{\cdots^{\omega}}}}_{n \text{ раз}} \mid n \in \omega\}$.

В диссертации рассматриваются два круга алгоритмических вопросов, связанных с замкнутым фрагментом логики GLP.

1. Алгоритмическая сложность проблемы распознавания выводимости.
2. Разрешимость элементарных теорий алгебр естественных систем ординальных обозначений.

Вопрос об алгоритмической сложности проблемы выводимости для модальных логик изучался Р.Е. Ладнером [24]. Он показал, что многие классические модальные логики, включая S4, K, T, обладают PSPACE-полными проблемами распознавания выводимости формул. Хотя логика GL не была рассмотрена в этой работе Ладнера, но использованный там метод легко позволяет получить аналогичный результат и для нее. В дальнейшем, И.Б. Шапировский доказал, что и логика GLP обладает PSPACE-полной проблемой распознавания выводимости [26].

А.В. Чагровым и М.Н. Рыбаковым рассматривались фрагменты модальных логик с ограничением на число различных пропозициональных переменных в формулах и вопрос об алгоритмической сложности для этих фрагментов [15]. Ими было показано, что даже фрагмент логики GL с одной пропозициональной переменной является PSPACE-полным; там же были получены аналогичные результаты для логик S4 и Grz. При этом они показали, что замкнутый фрагмент логики GL разрешим за полиномиальное время. В то же время замкнутые фрагменты логик K4 и K являются PSPACE-полными. Также Ф. Боу и Й. Йоостен доказали, что замкнутый фрагмент логики интерпретируемости IL, расширяющей GL, является PSPACE-трудным [12].

В диссертации доказана PSPACE-полнота замкнутого фрагмента логики GLP.

Мы обозначаем через GLP_n фрагмент логики GLP с модальностями $[0], [1], \ldots, [n]$. Также доказано, что для всякого натурального n замкнутый фрагмент логики GLP_n разрешим за полиномиальное время.

Перейдем к вопросам разрешимости элементарных теорий алгебр, связанных с конструктивными системами ординальных обозначений. Наиболее известной системой обозначений для ординала ε_0 является так называемая канторовская система. Обозначениями для ординалов в этой системе являются замкнутые термы, составленные из константы 0, функции $+$ и функции $f\colon x \longmapsto \omega^x$. Канторовская система соответствует алгебре $(\varepsilon_0; <, 0, +, f)$; заметим, что в этой алгебре всякий ординал меньший ε_0 равен значению некоторого замкнутого терма. Известно, что элементарная теория модели $(\varepsilon_0; <, 0, +, f)$ является алгоритмически неразрешимой.

Естественный, связанный с ординальным анализом способ обозначения ординалов на основе замкнутого фрагмента логики GLP был предложен Л.Д. Беклемишевым [7]. Ординалы обозначаются формулами вида $\langle n_1\rangle\langle n_1\rangle\dots\langle n_k\rangle\top$, называемыми словами. Мы обозначаем множество всех слов W. Бинарное отношение $<_0$ на словах соответствует порядку на ординалах:

$$\mathsf{A} <_0 \mathsf{B} \stackrel{\text{def}}{\iff} \mathrm{GLP} \vdash \mathsf{A} \to \langle 0\rangle\mathsf{B}.$$

Отношение равенства ординалов соответствует отношению GLP-доказуемой эквивалентности слов $\sim$. Полной системе ординальных обозначений для ординала ε_0 соответствует алгебра $(W/{\sim}; <_0, \top, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \dots, \langle n\rangle, \dots)$. Также мы рассматриваем ряд естественных фрагментов этой системы ординальных обозначений. Обозначим через W_n множество всех слов составленных из $\top$ и $\langle 0\rangle, \dots, \langle n\rangle$; мы называем такие слова GLP_n-словами. Модель $(W_n/{\sim}; <_0, \top, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \dots, \langle n\rangle)$ является системой ординальных обозначений для ординалов ω_{n+1}; здесь

$$\omega_0 = 1, \quad \omega_{n+1} = \omega^{\omega_n}.$$

Отметим, что конъюнкция всяких двух слов GLP-доказуемо эквивалентна некоторому GLP-слову [7]. Это дает возможность естественным образом рассматривать полурешетки $(W/{\sim}; \wedge)$ и $(W_n/{\sim}; \wedge)$.

Е.В. Дашков [1] рассмотрел фрагмент логики GLP, состоящий из импликаций между строго позитивными формулами, то есть между формулами построенными из переменных, $\wedge, \top$ и $\langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \dots \langle n\rangle$. Он показал, что проблема выводимости формул для этого фрагмента лежит в классе PTIME, в противоположность тому, что логика GLP и даже ее замкнутый фрагмент PSPACE-полны. Отметим, что из результата Е.В. Дашкова следует разрешимость за полиномиальное время диаграмм моделей $(W/{\sim}; \wedge, <_0, \top, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \dots, \langle n\rangle, \dots)$ и $(W_n/{\sim}; \wedge, <_0, \top, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \dots, \langle n\rangle)$.

В диссертации доказано, что элементарная теория модели $(W/{\sim}; <_0, \top, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \dots, \langle n\rangle, \dots)$ неразрешима. Доказано, что при всех $n \geq 3$ неразрешимы элементарные теории моделей

$(W_n/{\sim}; <_0, \top, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \ldots, \langle n\rangle)$. При этом показано, что элементарная теория модели $(W_2/{\sim}; <_0, \top, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle)$ разрешима. Доказано, что языка первого порядка в полурешетках $(W/{\sim}; \wedge)$ и $(W_n/{\sim}; \wedge)$ достаточно для выражения всех рассмотренных выше предикатов и функций на тех же носителях, и тем самым на эти структуры переносятся результаты о неразрешимости. Но, более того, доказано, что неразрешима и элементарная теория модели $(W_2/{\sim}; \wedge)$.

Методы исследования. В работе используются методы теории сложности вычислений, модальной логики и теории моделей. Для доказательства PSPACE-полноты замкнутого фрагмента логики GLP строится полиномиальное сведение языка булевых формул с кванторами к искомому. Полиномиальные разрешающие алгоритмы для замкнутых фрагментов GLP_n основаны на эффективном кодировании подмножеств предложенной К.Н. Игнатьевым [22] универсальной модели Крипке для замкнутого фрагмента логики GLP. Мы доказываем неразрешимость элементарных теорий полурешеток GLP-слов, интерпретируя в них неразрешимую [18] слабую монадическую теорию натуральных чисел в сигнатуре, включающей в себя функцию следования и функцию $H(x) = 2x$. Для доказательства разрешимости элементарной теории полурешетки $(W_1/{\sim}; \wedge)$ строится ее интерпретация в теории структуры $(\omega^\omega; <, +)$. Результаты о неразрешимости элементарных теорий системы ординальных обозначений Беклемишева и ее фрагментов доказываются путем погружения теории класса всех пар линейных порядков на конечных множествах. Разрешимость теории элементарной теории модели $(W_2/{\sim}; <_0, \top, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle)$ доказывается при помощи построения ее интерпретации в слабой монадической теории ординала ω^ω, снабженного порядком и предикатом задающим стандартную систему кофинальных последовательностей, разрешимость которой была установлена Л. Бро [13].

Содержание работы

Глава 1 содержит доказательство PSPACE-полноты проблемы распознавания выводимости для замкнутого фрагмента логики GLP и доказательства полиномиальной разрешимости проблем распознавания выводимости для замкнутых фрагментов логик GLP_n.

Основной результат **главы 2** состоит в доказательстве неразрешимости элементарной теории полурешетки GLP-слов. Кроме того, установлено, что элементарная теория полурешетки GLP_n-слов неразрешима, если и только если $n \geq 2$.

Глава 3 посвящена исследованию элементарных теорий систем ординальных обозначений на основе логики GLP. Доказано, что алгебра соответствующая полной системе ординальных обозначений для ординала ε_0 обладает неразрешимой элементарной теорией. Также в главе 3 доказывается, что элементарная теория алгебры, соответствующей системе ординальных обозначений, порождаемой $\langle 0\rangle, \ldots, \langle n\rangle$, неразрешима при $n \geq 3$ и разрешима при $n = 2$.

Язык полимодальной логики доказуемости GLP — это язык исчисления высказываний с пропозициональными константами «истина» $\top$ и «ложь» $\bot$, обогащенный унарными связками $[0], [1], \ldots$. Запись $\langle n\rangle\varphi$ является сокращением для $\neg[n]\neg\varphi$. GLP задается следующими аксиомами и правилами вывода:

0. Аксиомы и правила вывода логики GL для каждой связки $[n]$;
1. $[k]\varphi \to [n]\varphi$, где $k \leq n$;
2. $\langle k\rangle\varphi \to [n]\langle k\rangle\varphi$, где $k < n$.

Мы обозначаем через GLP_n логику, язык которой получается из языка пропозициональной логики обогащением связками $[0], \ldots, [n]$, а теоремами являются все теоремы GLP в этом языке.

В главе 1 доказывается

Теорема 1. *Проблема распознавания выводимости замкнутых формул в логике* GLP *является* PSPACE*-полной.*

Далее в этой главе доказывается, что наличие бесконечного числа различных модальных связок в языке необходимо для получения PSPACE-полноты.

Теорема 2. *При всех n проблема распознавания выводимости замкнутых формул в логике* GLP_n *разрешима за полиномиальное время.*

Для доказательства последней теоремы мы рассматриваем универсальную модель Крипке для замкнутого фрагмента логики GLP. Полиномиальный алгоритм основывается на эффективном задание подмножеств этой модели, определимых замкнутыми GLP_n-формулами.

Одним из центральным для глав 2 и 3 понятием является понятие GLP-слова. Рассматривается множество W всех формул вида $\langle n_1\rangle\langle n_2\rangle\ldots\langle n_k\rangle\top$. Такие формулы называются GLP-*словами* также для краткости в рамках данной диссертации мы называем их просто словами. Для обозначения слов мы используем буквы $\mathsf{A},\mathsf{B},\ldots$.

На множестве всех GLP-формул определим бинарные отношения $<_n$:

$$\varphi <_n \psi \;\stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\; \mathrm{GLP}\vdash \psi \to \langle n\rangle\varphi.$$

Мы обозначаем через $\sim$ отношение GLP-доказуемой эквивалентности на формулах и, в частности, на словах:

$$\varphi \sim \psi \;\stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\; \mathrm{GLP}\vdash \varphi \leftrightarrow \psi.$$

Как было отмечено выше, конъюнкция двух слов в GLP эквивалентна некоторому слову. Тем самым, связки $\langle n\rangle$ и $\wedge$ естественным образом задают функции на классах эквивалентности слов:

$$\langle n\rangle[\mathsf{A}]_\sim = \{\mathsf{B}\mid \mathsf{B}\sim\langle n\rangle\mathsf{A}\},$$

$$[\mathsf{A}]_\sim \wedge [\mathsf{B}]_\sim = \{\mathsf{C}\mid \mathsf{C}\sim \mathsf{A}\wedge\mathsf{B}\}.$$

В главах 2 и 3 мы изучаем разрешимость элементарных теорий моделей $(W/{\sim}; \wedge, <_0, \top, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \ldots, \langle k\rangle, \ldots)$, $(W_n/{\sim}; \wedge, <_0, \top, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \ldots, \langle n\rangle)$ и моделей, получаемых из них опусканием некоторых предикатов и функций. Отметим, что фактически из соображений технического удобства мы работаем не непосредственно с этими моделями, а с изоморфными моделями, носители которых составлены из слов в нормальной форме (канонических представителей классов эквивалентности GLP-слов по отношению $\sim$).

Основной результат главы 2, в которой мы изучаем элементарные теории полурешеток указанного выше вида, состоит в следующем.

Теорема 3. *Элементарная теория нижней полурешетки* $(W/{\sim}; \wedge)$ *неразрешима. При всех* $n \geq 2$ *неразрешимы элементарные теории полурешеток* $(W_n/{\sim}; \wedge)$.

Отметим, что при доказательстве этой теоремы мы устанавливаем, что в $(W/{\sim}; \wedge)$ формулами первого порядка выразимы все бинарные отношения $<_k$ и все функции $\langle k\rangle$. Более того мы доказываем, что для всех натуральных n в $(W_n/{\sim}; \wedge)$ формулами первого порядка выразимы все бинарные отношения $<_k$ и все функции $\langle k\rangle$ при $k \leq n$.

Теорема 4. *Элементарная теория нижней полурешетки* $(W_1/{\sim}; \wedge)$ *разрешима.*

В главе 3 мы изучаем вопрос об разрешимости элементарных теорий моделей с носителями $W/{\sim}$ или $W_n/{\sim}$ и сигнатуре могущей включать лишь предикат $<_0$, константу $\top$ и функции $\langle k\rangle$. Отметим, что модель $(W/{\sim}; <_0, \top, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \ldots, \langle k\rangle, \ldots)$ и $(W_n/{\sim}; <_0, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \ldots, \langle n\rangle)$ являются естественными конструктивными представлениями ординалов ε_0 и ω_{n+1}, соответственно.

Теорема 5. *Пусть* p, q *и* n *— натуральные числа такие, что* $0 < p$ *и* $p + 1 < q \leq n$. *Тогда элементарные теории моделей* $(W/{\sim}; <_0, \langle p\rangle, \langle q\rangle)$ *и* $(W_n/{\sim}; <_0, \langle p\rangle, \langle q\rangle)$ *неразрешимы.*

Модель $(W/{\sim}; <_0, \top, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \ldots, \langle k\rangle, \ldots)$, в силу теоремы 5, имеет неразрешимую элементарную теорию. Также, из этой теоремы следует, что при всех $n \geq 3$ неразрешима элементарная теория модели $(W_n/{\sim}; <_0, \top, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \ldots, \langle n\rangle)$.

Кроме того мы устанавливаем следующие теоремы.

Теорема 6. *Для модели* $(W_n/{\sim}; <_0, \top, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle)$ *элементарная теория разрешима при всех* $n \geq 2$.

Теорема 7. *Элементарная теория модели* $(W/{\sim}; <_0, \top, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle)$ *разрешима. При всех* $n \geq 2$ *элементарная теория модели* $(W_n/{\sim}; <_0, \top, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle)$ *разрешима.*

Для доказательства теоремы 7 мы показываем, что все структуры $(W_n/{\sim}; <_0, \top, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle)$, где $n \geq 3$, и структура $(W/{\sim}; <_0, \top, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle)$ попарно элементарно эквививаленты, а далее применяем теорему 6.

Я выражаю глубокую благодарность своему научному руководителю члену-корреспонденту РАН Л.Д. Беклемишеву за постановку задач и поддержку в работе. Я благодарю участников семинаров «Логические проблемы информатики» и «Алгоритмические проблемы алгебры и логики» за конструктивное обсуждение. Кроме того, я благодарю за полезные замечания анонимных рецензентов своих статей по теме диссертации.

Глава 1

Алгоритмическая сложность замкнутых фрагментов

1.1 Логика GLP и ее замкнутый фрагмент

Логика GLP.

Совокупность всех правильно построенных GLP-формул порождается пропозициональными переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, двуместными пропозициональными связками $\wedge, \vee, \to$, одноместной пропозициональной связкой $\neg$, пропозициональными константами $\top$ (истина), $\bot$ (ложь) и унарными модальными связками $[0], [1], \ldots, [n], \ldots$ Мы вводим связки $\langle n \rangle$ следующим образом:

$$\langle n \rangle \varphi \rightleftharpoons \neg [n] \neg \varphi.$$

Логика GLP задается следующими схемами аксиом и правилами вывода:

1. Схемы аксиом исчисления высказываний в расширенном языке;
2. $[n](\varphi \to \psi) \to ([n]\varphi \to [n]\psi)$;
3. $[n]([n]\varphi \to \varphi) \to [n]\varphi$;
4. $[k]\varphi \to [n]\varphi$, где $k \leq n$;
5. $\langle k \rangle \varphi \to [n]\langle k \rangle \varphi$, где $k < n$;
6. $\dfrac{\varphi \qquad \varphi \to \psi}{\psi}$;
7. $\dfrac{\varphi}{[n]\varphi}$.

Мы называем GLP-формулу замкнутой, если в ней не содержатся пропозициональные переменные.

В этом разделе мы доказываем следующую теорему.

Теорема 1. *Проблема распознавания выводимости в логике* GLP *для замкнутых формул является* PSPACE*-полной.*

Из теоремы Шапировского [26] о PSPACE-полноте проблемы распознавания выводимости в логике GLP следует принадлежность проблемы из теоремы 1 к классу PSPACE. В силу этого, для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что проблема является PSPACE-трудной.

Обозначим через **QBF** проблему распознавания истинности булевых формул с кванторами. Известно, что **QBF** является PSPACE-полной [28]. Для доказательства PSPACE-сложности проблемы распознавания выводимости в GLP замкнутых формул мы строим полиномиальную редукцию проблемы **QBF** к данной.

Пусть имеются формулы

$$\mathsf{Q}_0 x_0 \mathsf{Q}_1 x_1 \ldots \mathsf{Q}_{n-1} x_{n-1} \varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}),$$

где $\mathsf{Q}_i \in \{\forall, \exists\}$, а $\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ — булева формула, переменныеч входящие в которую исчерпываются набором $x_0, \ldots, x_{n-1}$. Мы построим полимодальные формулы η_0 и ψ_0 такие, что булева формула с кванторами

$$\mathsf{Q}_0 x_0 \mathsf{Q}_1 x_1 \ldots \mathsf{Q}_{n-1} x_{n-1} \varphi(x_0, \ldots, x_{n-1})$$

истинна, если и только если

$$\mathrm{GLP} \vdash \eta_0 \leftrightarrow \psi_0.$$

Отметим, что в языке GLP нет связки $\leftrightarrow$, и мы выражаем ее с помощью связок $\wedge$ и $\rightarrow$. Кратко опишем идею построения формулы ψ_0.

1. Мы начинаем со специально подобранных, полностью логически независимых формул $\theta_0, \ldots, \theta_{n-1}$, т.е. таких формул, что для всякой формулы $\xi(x_0, \ldots, x_{n-1})$ языка исчисления высказываний ξ является тавтологей если и только если $\mathrm{GLP} \vdash \xi[\theta_0, \ldots, \theta_{n-1}/x_0, \ldots, x_{n-1}]$.

2. Далее мы рассматриваем формулу

$$\psi_n \rightleftharpoons \varphi[\theta_0, \dots, \theta_{n-1}/x_0, \dots, x_{n-1}].$$

Отметим, что если бы нашей проблемой было сведение проблемы распознавания доказуемости формул в исчислении высказываний к проблеме распознавания доказуемости замкнутых формул в логике GLP, то проделанного было бы достаточно.

3. Наша цель состоит в построении формул $\psi_0, \dots, \psi_{n-1}$. Для каждого i от 1 до n формула ψ_i, в некотором смысле, представляет формулу $\mathsf{Q}_i x_i \dots \mathsf{Q}_{n-1} x_{n-1} \varphi(x_0, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_{n-1})$ с $x_0, \dots, x_{i-1}$ замененными на $\theta_0, \dots, \theta_{i-1}$ соответственно.

4. Мы получаем формулу ψ_i как $\xi[\psi_{i+1}/x]$, где ξ это некоторая короткая формула. Конкретный вид ξ зависит от того, каким именно квантором является Q_i, а также чисел n и i. Кроме того, x является единственной переменной в ξ, при этом x встречается в ξ ровно один раз и при этом позитивно.

5. Оказывается, что имеет место ровно одна из двух альтернатив:

   (a) формула ψ_0 является GLP-опровержимой (т.е. $\mathrm{GLP} \vdash \neg\psi_0$) и

   $$\mathsf{Q}_0 x_0 \mathsf{Q}_1 x_1 \dots \mathsf{Q}_{n-1} x_{n-1} \varphi(x_0, \dots, x_{n-1})$$

   ложна,

   (b) формула ψ_0 оказывается GLP-доказуемо эквивалентной специальной формуле η_0 и

   $$\mathsf{Q}_0 x_0 \mathsf{Q}_1 x_1 \dots \mathsf{Q}_{n-1} x_{n-1} \varphi(x_0, \dots, x_{n-1})$$

   истинна.

Мы определяем следующие формулы

1. $\eta_n \rightleftharpoons \top$;
2. $\eta_i \rightleftharpoons \langle 2i \rangle \langle 4n - 2i - 1 \rangle \top$ для $0 \leq i < n$;
3. $\theta_i \rightleftharpoons \langle 2i + 1 \rangle \langle 4n - 2i - 2 \rangle \top$ для $0 \leq i < n$;

4. $\psi_n \rightleftharpoons \varphi[\theta_0, \dots, \theta_{n-1}/x_0, \dots, x_{n-1}]$;
5. $\psi_i \rightleftharpoons \langle 2i\rangle\langle 4n-2i-1\rangle\langle 2i\rangle\psi_{i+1}$ для $0 \leq i < n$, в случае $\mathsf{Q}_i = \exists$.
6. $\psi_i \rightleftharpoons \eta_i \wedge \neg\langle 2i\rangle\langle 4n-2i-1\rangle\langle 2i\rangle(\eta_{i+1} \wedge \neg\psi_{i+1})$ для $0 \leq i < n$, в случае $\mathsf{Q}_i = \forall$.

Для всякой формулы ξ положим $\xi^\top \rightleftharpoons \xi$ и $\xi^\perp \rightleftharpoons \neg\xi$.

Для каждого $0 \leq k \leq n$ обозначим через Λ_k множество всех функций $\sigma\colon \{0, \dots, k-1\} \to \{\perp, \top\}$ таких, что истинна булева формула с кванторами

$$\mathsf{Q}_k x_k \dots \mathsf{Q}_{n-1} x_{n-1} \varphi(\sigma(0), \dots, \sigma(k-1), x_k, \dots, x_{n-1}).$$

Через Λ_k^- мы обозначим дополнение Λ_k до множества всех функций $\sigma\colon \{0, \dots, k-1\} \to \{\perp, \top\}$. Отметим, что существует единственная функция $\sigma\colon \emptyset \to \{\perp, \top\}$, а следовательно $|\Lambda_0| = 1$, если $\mathsf{Q}_0 x_0 \dots \mathsf{Q}_{n-1} x_{n-1} \varphi(x_0, \dots, x_{n-1})$ истинна и $|\Lambda_0| = 0$, иначе.

Лемма 1.1. *[8, лемма 1] Пусть ξ_1, ξ_2 являются полимодальными формулами и s_1, s_2 натуральными числами такими, что $s_1 < s_2$. Тогда*

1. $\mathrm{GLP} \vdash \langle s_2\rangle(\xi_1 \wedge \langle s_1\rangle\xi_2) \leftrightarrow \langle s_2\rangle\xi_1 \wedge \langle s_1\rangle\xi_2$*;*

2. $\mathrm{GLP} \vdash \langle s_2\rangle(\xi_1 \wedge \neg\langle s_1\rangle\xi_2) \leftrightarrow \langle s_2\rangle\xi_1 \wedge \neg\langle s_1\rangle\xi_2$*.*

Следующая лемма может быть легко получена из следствия 2.7, которое будет доказано позднее:

Лемма 1.2. *Пусть s — натуральное число и формула φ имеет вид $\langle s_1\rangle \dots \langle s_n\rangle\top$, где $s_i < s$ для всех i. Тогда*

$$\mathrm{GLP} \vdash \langle s\rangle\varphi \leftrightarrow \langle s\rangle\top.$$

Замечание 1.3. *Дизъюнкцию пустого множества формул $\bigvee\limits_{\xi\in\emptyset} \xi$ мы считаем равной $\perp$. Конъюнкцию пустого множества формул $\bigwedge\limits_{\xi\in\emptyset} \xi$ мы считаем равной $\top$.*

Лемма 1.4. *Пусть $k \leq n$. Тогда*

$$\mathrm{GLP} \vdash \bigvee_{\sigma\in\Lambda_k} (\eta_k \wedge \bigwedge_{i<k} \theta_i^{\sigma(i)}) \leftrightarrow \psi_k.$$

Доказательство. Мы доказываем лемму индукцией по $n-k$. Формула $\bigvee\limits_{\sigma\in\Lambda_n}(\bigwedge\limits_{i<n} x_i^{\sigma(i)})$ является совершенной дизъюнктивной нормальной формой для φ. Следовательно предположение индукции имеет место для случая $k=n$. Далее мы доказываем переход индукции.

Рассмотрим случай $\mathsf{Q}_k=\exists$. Мы даем последовательность замкнутых формул языка логики GLP и затем показываем, что соседние формулы в этой последовательности GLP-доказуемо эквивалентны:

1. ψ_k;
2. $\langle 2k\rangle\langle 4n-2k-1\rangle\langle 2k\rangle\psi_{k+1}$;
3. $\langle 2k\rangle\langle 4n-2k-1\rangle\langle 2k\rangle(\bigvee\limits_{\sigma\in\Lambda_{k+1}}(\eta_{k+1}\wedge\bigwedge\limits_{i<k+1}\theta_i^{\sigma(i)}))$;
4. $\bigvee\limits_{\sigma\in\Lambda_{k+1}}\langle 2k\rangle\langle 4n-2k-1\rangle\langle 2k\rangle(\eta_{k+1}\wedge\bigwedge\limits_{i<k+1}\theta_i^{\sigma(i)})$;
5. $\bigvee\limits_{\sigma\in\Lambda_{k+1}}(\langle 2k\rangle\langle 4n-2k-1\rangle\langle 2k\rangle(\eta_{k+1}\wedge\theta_k^{\sigma(k)})\wedge\bigwedge\limits_{i<k}\theta_i^{\sigma(i)})$;
6. $\bigvee\limits_{\sigma\in\Lambda_{k+1}}(\langle 2k\rangle\langle 4n-2k-1\rangle\top\wedge\bigwedge\limits_{i<k}\theta_i^{\sigma(i)})$;
7. $\bigvee\limits_{\sigma\in\Lambda_k}(\eta_k\wedge\bigwedge\limits_{i<k}\theta_i^{\sigma(i)})$.

Очевидно, что пары $\langle 1.,2.\rangle$, $\langle 2.,3.\rangle$, $\langle 3.,4.\rangle$ и $\langle 6.,7.\rangle$ являются парами GLP-доказуемо эквивалентных формул. Эквивалентность 4. и 5. может быть обоснована с помощью многократного применения леммы 1.1. Для установления GLP-доказуемой эквивалентности 5. и 6. мы докажем, что

$$\mathrm{GLP}\vdash\langle 4n-2k-1\rangle\langle 2k\rangle(\eta_{k+1}\wedge\theta_k)\leftrightarrow\langle 4n-2k-1\rangle\top, \tag{1.1}$$

$$\mathrm{GLP}\vdash\langle 4n-2k-1\rangle\langle 2k\rangle(\eta_{k+1}\wedge\neg\theta_k)\leftrightarrow\langle 4n-2k-1\rangle\top. \tag{1.2}$$

Из леммы 1.1 следует, что

$$\mathrm{GLP}\vdash\eta_{k+1}\wedge\theta_k\leftrightarrow\langle 2k+2\rangle\langle 4n-2k-3\rangle\langle 2k+1\rangle\langle 4n-2k-2\rangle\top.$$

В силу леммы 1.2

$$\mathrm{GLP}\vdash\langle 4n-2k-1\rangle\langle 2k\rangle\langle 2k+2\rangle\langle 4n-2k-3\rangle\langle 2k+1\rangle\langle 4n-2k-2\rangle\top\leftrightarrow\\ \langle 4n-2k-1\rangle\top.$$

Поэтому эквивалентность (1.1) выполняется.

Докажем, что $\mathrm{GLP} \vdash \neg\langle 2k\rangle\eta_{k+1} \to \neg\theta_k$:

$$\begin{aligned}\mathrm{GLP} \vdash \theta_k &\to \langle 2k\rangle\langle 4n-2k-2\rangle\top \\ &\to \langle 2k\rangle\langle 4n-2k-2\rangle\langle 4n-2k-3\rangle\top \\ &\to \langle 2k\rangle\langle 2k+2\rangle\langle 4n-2k-3\rangle\top \\ &\to \langle 2k\rangle\eta_{k+1}.\end{aligned}$$

Используя аксиому 3 логики GLP, мы выводим

$$\begin{aligned}\mathrm{GLP} \vdash \langle 2k\rangle\eta_{k+1} &\to \langle 2k\rangle(\eta_{k+1} \wedge \neg\langle 2k\rangle\eta_{k+1}) \\ &\to \langle 2k\rangle(\eta_{k+1} \wedge \neg\theta_k).\end{aligned}$$

Поэтому мы имеем

$$\mathrm{GLP} \vdash \langle 4n-2k-1\rangle\langle 2k\rangle\eta_{k+1} \to \langle 4n-2k-1\rangle\langle 2k\rangle(\eta_{k+1} \wedge \neg\theta_k).$$

Следовательно, в силу леммы 1.2 мы имеем

$$\begin{aligned}\mathrm{GLP} \vdash \langle 4n-2k-1\rangle\top &\to \langle 4n-2k-1\rangle\langle 2k\rangle\eta_{k+1} \\ &\to \langle 4n-2k-1\rangle\langle 2k\rangle(\eta_{k+1} \wedge \neg\theta_k)\end{aligned}$$

Следовательно, эквивалентность (1.2) имеет место.

Таким образом, формулы 5. и 6. являются GLP-доказуемо эквивалентными. В результате мы получаем, что формулы 1. и 7. эквивалентны в GLP. Это завершает обоснование перехода индукции в случае $\mathsf{Q}_k = \exists$.

Перейдем к случаю $\mathsf{Q}_k = \forall$. Мы рассматриваем следующую последовательность замкнутых GLP-формул:

1. ψ_k;
2. $\eta_k \wedge \neg\langle 2k\rangle\langle 4n-2k-1\rangle\langle 2k\rangle(\eta_{k+1} \wedge \neg\psi_{k+1})$;
3. $\eta_k \wedge \neg\langle 2k\rangle\langle 4n-2k-1\rangle\langle 2k\rangle(\eta_{k+1} \wedge \neg(\bigvee\limits_{\sigma\in\Lambda_{k+1}} (\eta_{k+1} \wedge \bigwedge\limits_{i<k+1} \theta_i^{\sigma(i)})))$;
4. $\eta_k \wedge \neg\langle 2k\rangle\langle 4n-2k-1\rangle\langle 2k\rangle(\bigvee\limits_{\sigma\in\Lambda_{k+1}^-} (\eta_{k+1} \wedge \bigwedge\limits_{i<k+1} \theta_i^{\sigma(i)}))$;
5. $\eta_k \wedge \neg(\bigvee\limits_{\sigma\in\Lambda_k^-} (\eta_k \wedge \bigwedge\limits_{i<k} \theta_i^{\sigma(i)}))$;
6. $\bigvee\limits_{\sigma\in\Lambda_k} (\eta_k \wedge \bigwedge\limits_{i<k} \theta_i^{\sigma(i)})$.

Для всех пар соседних формул, кроме 4. и 5. очевидно, что эквивалентность имеет место. Последняя эквивалентность обосновывается аналогично эквивалентности между 3. и 7. из доказательства перехода индукции в случае $\mathrm{Q}_k = \exists$. $\square$

По лемме 1.4, мы имеем $\mathrm{GLP} \vdash \eta_0 \leftrightarrow \psi_0$, если формула

$$\mathrm{Q}_0 x_0 \mathrm{Q}_1 x_1 \ldots \mathrm{Q}_{n-1} x_{n-1} \varphi(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$$

истинна, и $\mathrm{GLP} \vdash \bot \leftrightarrow \psi_0$, если формула ложна. Из корректности арифметической семантики [22] для логики GLP легко выводится, что $\mathrm{GLP} \nvdash \eta_0 \leftrightarrow \bot$ (также этот факт легко доказать с помощью модели Игнатьева, чье описание мы приводим в следующем разделе). Следовательно

$$\mathrm{Q}_0 x_0 \mathrm{Q}_1 x_1 \ldots \mathrm{Q}_{n-1} x_{n-1} \varphi(x_0, \ldots, x_{n-1})$$

истинна тогда и только тогда, когда

$$\mathrm{GLP} \vdash \eta_0 \leftrightarrow \psi_0.$$

Несложная проверка показывает, что мы можем получить формулу $\eta_0 \leftrightarrow \psi_0$ за полиномиальное время от длины

$$\mathrm{Q}_0 x_0 \mathrm{Q}_1 x_1 \ldots \mathrm{Q}_{n-1} x_{n-1} \varphi(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Это дает нам требуемое сведение и завершает доказательство теоремы 1.

1.2 Замкнутые фрагменты логик GLP_n

Правильно построенные формулы логики GLP_n — это GLP-формулы, в которых из модальных связок встречаются только $[0], [1], \ldots, [n]$. Исчисление в гильбертовском стиле для логики GLP_n задается теми аксиомами и правилами вывода исчисления для GLP, которые лежат в языке логики GLP_n. Отметим, что множество теорем логики GLP_n совпадает со множеством теорем логики GLP, которые являются GLP_n-формулами [10].

Метод использованный в предыдущем разделе существенно использует бесконечно много модальностей и, тем самым этот метод не может быть использован для доказательства PSPACE-трудности проблемы распознавания выводимости замкнутых формул в логиках GLP_n.

Центральным результатом этого раздела является следующая теорема.

Теорема 2. *При всех натуральных n проблема распознавания выводимости в логике* GLP_n *для замкнутых формул разрешима за полиномиальное время.*

Начнём с плана доказательства. Мы используем модель Крипке (определение понятия модели Крипке см. [11]) $\mathcal{U}^n_{\omega_{n+1}}$ такую, что замкнутый фрагмент логики GLP_n является полным относительно этой модели. Каждой замкнутой GLP_n-формуле мы ставим в соответствие множество миров модели $\mathcal{U}^n_{\omega_{n+1}}$, в которых она выполняется. Полнота замкнутого фрагмента GLP_n относительно модели $\mathcal{U}^n_{\omega_{n+1}}$ означает, что всякая замкнутая GLP_n-формула доказуема в GLP_n тогда и только тогда, когда этой формуле соответствует множество всех миров модели $\mathcal{U}^n_{\omega_{n+1}}$. Отметим, что для всякой замкнутой GLP_n-формулы φ соответствующее ей множество может быть получено интерпретацией пропозициональных констант и пропозициональных связок из φ, как специальных множеств миров $\mathcal{U}^n_{\omega_{n+1}}$ и специальных операций на множествах миров $\mathcal{U}^n_{\omega_{n+1}}$, соответственно.

Мы используем коды из множества $\mathtt{C}^n_{\omega_{n+1}}$ для эффективного представления множеств миров модели $\mathcal{U}^n_{\omega_{n+1}}$ (отметим, что существуют множества миров, которым не соответствует ни одного кода). В разрешающем алгоритме мы используем следующие вычислимые функции (в полном доказательстве у них имеются дополнительные аргументы и параметры):

1. $\mathtt{Intr}\colon \mathtt{C}^n_{\omega_{n+1}} \times \mathtt{C}^n_{\omega_{n+1}} \to \mathtt{C}^n_{\omega_{n+1}}$,
2. $\mathtt{Cmpl}\colon \mathtt{C}^n_{\omega_{n+1}} \to \mathtt{C}^n_{\omega_{n+1}}$,

3. R_0-$\mathtt{Inv}, \ldots, R_n$-$\mathtt{Inv}\colon \mathtt{C}^n_{\omega_{n+1}} \to \mathtt{C}^n_{\omega_{n+1}}$,
4. $\mathtt{IsEmp}\colon \mathtt{C}^n_{\omega_{n+1}} \to \{0,1\}$.

Наш разрешающий алгоритм работает таким образом:

1. Мы получаем на вход замкнутую GLP_n-формулу φ.
2. Мы заменяем ее на формулу φ' такую, что

$$\mathrm{GLP} \vdash \varphi' \leftrightarrow \varphi$$

   и φ' составлена из $\bot, \wedge, \neg, [0], \ldots, [n]$.
3. Мы строим код $\mathtt{c}(\varphi')$ для множества, соответствующего формуле φ'. Для этого мы определяем коды $\mathtt{c}(\psi)$ для всех подформул ψ формулы φ', используя следующие правила:
   (a) $\mathtt{c}(\bot)$ является константой, обозначающей пустое множество;
   (b) $\mathtt{c}(\psi_1 \wedge \psi_2)$ равно $\mathtt{Intr}(\mathtt{c}(\psi_1), \mathtt{c}(\psi_2))$;
   (c) $\mathtt{c}(\neg\psi)$ равно $\mathtt{Cmpl}(\mathtt{c}(\psi))$;
   (d) $\mathtt{c}(\langle k\rangle\psi)$ равно R_k-$\mathtt{Inv}(\mathtt{c}(\psi))$.
4. Мы даем положительный ответ на формулу φ, если и только если функция $\mathtt{IsEmp}$ возвращает 1 на входе $\mathtt{Cmpl}(\mathtt{c}(\varphi'))$.

Теперь опишем наш метод оценки времени работы алгоритма. Мы вводим функции $\mathbf{c}^n_{\omega_{n+1}}$ и $\mathbf{w}^n_{\omega_{n+1}}$ для измерения сложности кодов, переданных на вход. Далее мы получаем оценки времени работы и сложности результирующих кодов для функций $\mathtt{Cmpl}$, $\mathtt{Intr}$, R_0-$\mathtt{Inv}$, R_1-$\mathtt{Inv}$,…, R_n-$\mathtt{Inv}$ в терминах сложности кодов на входе. Это дает нам полиномиальную оценку на сложности используемых кодов, в смысле указанных выше функций, и на время работы разрешающего алгоритма. В большинстве лемм этого раздела мы одновременно даем описание алгоритма и верхнюю оценку на время его работы.

Теперь мы переходим к точному описанию требуемой нам модели Крипке.

Обозначим через On класс всех ординалов.

Теорема Кантора о нормальной форме ординалов утверждает, что каждый ординал $\alpha > 0$ может быть единственным образом представлен в виде суммы

$$\alpha = \omega^{\beta_0} + \cdots + \omega^{\beta_{n-1}}$$

такой, что $\beta_0 \geq \beta_1 \geq \ldots \geq \beta_{n-1}$ и $n \geq 0$.

Пусть $\ell \colon On \to On$ задается, как

- $\ell(0) = 0$;
- $\ell(\alpha) = \beta_{n-1}$, где $\alpha > 0$ и КНФ (канторовская нормальная форма) α равна $\omega^{\beta_0} + \cdots + \omega^{\beta_{n-1}}$.

Определим *модель Игнатьева* $\mathcal{U} = (U, \mathrm{R}_0, \mathrm{R}_1, \ldots, \mathrm{R}_n, \ldots)$ [22]. Множество U является множеством всех последовательностей

$$(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots)$$

таких, что все α_i являются ординалами, $\alpha_0 < \varepsilon_0$ и $\alpha_{i+1} \leq \ell(\alpha_i)$, для всех $i \in \omega$. Для каждого натурального k бинарное отношение R_k задается, как

$$(\alpha_0, \alpha_1, \ldots)\ \mathrm{R}_k\ (\beta_0, \beta_1, \ldots) \overset{\text{def}}{\iff} \beta_k < \alpha_k \wedge \forall i < k(\alpha_i = \beta_i).$$

Модель $\mathcal{U}$ является универсальной моделью для замкнутого фрагмента логики GLP [22, 23, 9]. Это означает, что для всякой замкнутой GLP-формулы φ мы имеем

$$\mathrm{GLP} \vdash \varphi \iff \mathcal{U} \models \varphi \ (\varphi \text{ верна в } \mathcal{U}).$$

Легко видеть, что для всякой последовательности $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots) \in U$ мы имеем $\alpha_i = 0$ для достаточно больших i.

На самом деле, нам потребуются «меньшие» *модели* $\mathcal{U}_\alpha^n = (U_\alpha^n, \mathrm{R}_0, \mathrm{R}_1, \ldots, \mathrm{R}_n)$ для всевозможных $1 \leq \alpha < \varepsilon_0$ и $n \geq -1$. Отметим, что все U_α^{-1} будут моделями исчисления высказываний $\mathrm{PC} = \mathrm{GLP}_{-1}$ с единственным миром и без отношений достижимости. Для $\alpha < \varepsilon_0$ множество $U_\alpha^n \subset U$ является множеством всех последовательностей ординалов

$$(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

таких, что $\alpha_0 < \alpha$ и $\alpha_{i+1} \le \ell(\alpha_i)$ для каждого $i < n-1$. Для каждого $k \le n$ бинарное отношение R_k задается следующим образом:

$$(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\ \mathrm{R}_k\ (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n) \ \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\ \beta_k < \alpha_k \wedge \forall i < k(\alpha_i = \beta_i).$$

Отметим несколько получаемых непосредственной проверкой свойств моделей $\mathcal{U}^n_\alpha$:

Лемма 1.5. *Пусть n — натуральное число, а α — ординал, $0 < \alpha < \varepsilon_0$.*

1. *единственным элементом U^{-1}_α является $()$;*
2. *для всякого α_0 модель $(\{(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n) \in U^n_\alpha \mid \alpha_0 = \beta_0\}, \mathrm{R}_1, \ldots, \mathrm{R}_n)$ изоморфна модели $\mathcal{U}^{n-1}_{\ell(\alpha_0)+1}$;*
3. *для всех k от 1 до $n-1$ и $(\beta_0, \ldots, \beta_n), (\gamma_0, \ldots, \gamma_n) \in U^n_\alpha$ таких, что*

$$(\beta_0, \ldots, \beta_n)\ \mathrm{R}_k\ (\gamma_0, \ldots, \gamma_n),$$

   мы имеем $\beta_0 = \gamma_0$.

Модель $\mathcal{U}^n_{\omega_{n+1}}$ является универсальной моделью для замкнутого фрагмента логики GLP_n [22, 23, 9]; отметим, что логика GLP_{-1} — это просто исчисление высказываний PC. Универсальность здесь означает, что для каждой замкнутой GLP_n-формулы φ мы имеем

$$\mathrm{GLP} \vdash \varphi \iff \mathcal{U}^n_{\omega_{n+1}} \models \varphi.$$

Мы будем использовать модель вычислений RAM (машина с произвольным доступом к памяти). Точнее говоря, мы используем определение RAM из [16] со временем исполнения всех инструкций равным 1. Все ограничения на время исполнения даны для этой модели вычислений. Отметим, что в [16] было показано, что RAM может быть симулирована на многоленточных машинах Тьюринга с не более чем кубическим ростом времени исполнения.

Мы даем эффективное кодирование некоторых подмножеств U^n_α. Для доказательства этого мы используем кодирование ординалов, меньших ε_0, известное как канторовская система ординальных обозначений.

Каждый ординал $\beta < \varepsilon_0$ кодируется, либо символом 0, если он равен 0, либо своей КНФ

$$\omega^{\beta_0} + \cdots + \omega^{\beta_{m-1}},$$

где все β_i даны в виде аналогичных кодов.

Более формально, мы представляем ординал 0 символом 0, а всякий ординал $\beta > 0$ с КНФ $\omega^{\beta_0} + \cdots + \omega^{\beta_{m-1}}$ строкой

$$\omega\,\hat{}\,(\mathtt{s}_0) + \omega\,\hat{}\,(\mathtt{s}_1) + \cdots + \omega\,\hat{}\,(\mathtt{s}_{m-1}),$$

где при каждом i от 0 до $m-1$ строка $\mathtt{s}_i$ представляет ординал β_i. Из технических соображений одновременно со строкой $\mathtt{s}$, представляющей ординал β, мы храним массив $\mathtt{a}$ натуральных чисел такой, что

1. размер $\mathtt{a}$ равен длине $\mathtt{s}$,
2. если имеется открывающаяся (закрывающаяся) скобка на позиции i в строке $\mathtt{s}$, то мы храним позицию соответствующей ей закрывающейся (открывающейся) скобки на позиции i массива $\mathtt{a}$,
3. во всех остальных позициях массива стоит 0.

Ясно, что для строки $\mathtt{s}$, представляющей некоторый ординал, мы можем сконструировать соответствующий ей массив $\mathtt{a}$ за время $\mathcal{O}(|\mathtt{s}|)$. Очевидно, это дает нам код для каждого ординала меньшего ε_0. В силу теоремы Кантора о нормальной форме ординалов этот код единственен. Когда мы говорим о вычислимых функциях от ординалов $\alpha < \varepsilon_0$, мы передаем эти ординалы на вход функции в виде четверок $(\mathit{s}_{\text{link}}, \mathit{a}_{\text{link}}, k_{\text{first}}, k_{\text{last}})$, где s_{link} является ссылкой на строку $\mathtt{s}$, a_{link} является ссылкой на массив $\mathtt{a}$, а пара $\mathtt{s}$ и $\mathtt{a}$ образуют код ординала, $0 \le k_{\text{first}} < k_{\text{last}} \le |\mathtt{s}|$, и подстрока $\mathtt{s}' = \mathtt{s}[k_{\text{first}}]\mathtt{s}[k_{\text{first}}+1]\ldots\mathtt{s}[k_{\text{last}}-1]$ является представлением ординала α. Это соглашение позволяет нам работать с ординалами $\beta = \omega^{\beta_0} + \cdots + \omega^{\beta_{m-1}}$, как с неизменяемыми списками ординалов $(\beta_0, \ldots, \beta_{m-1})$, т.е. мы можем хранить ссылки на β_i в $\mathcal{O}(1)$ памяти, строить ссылки на β_{i+1} и β_{i-1} из ссылки на β_i за $\mathcal{O}(1)$ времени и делать вызовы функции с аргументом β_i за $\mathcal{O}(1)$ (без учета времени работы самой функции), передавая ей ссылку на β_i.

Далее в этом разделе нас будут интересовать только ординалы, меньшие ε_0. В этом разделе мы отождествляем ординалы меньшие ε_0 и и их коды.

Мы определяем функцию $\mathbf{c}\colon \varepsilon_0 \to \omega$. Для ординала $\alpha = \omega^{\beta_0} + \cdots + \omega^{\beta_{n-1}}$ в канторовской нормальной форме мы полагаем

$$\mathbf{c}(\alpha) = 1 + \mathbf{c}(\beta_0) + \cdots + \mathbf{c}(\beta_{n-1}).$$

Кроме того, $\mathbf{c}(0) = 1$. Это дает нам однозначное определение функции $\mathbf{c}$. Отметим, что память, требуемая для хранения ординала α, равна $\mathcal{O}(\mathbf{c}(\alpha))$.

Лемма 1.6. *Можно произвести сравнение ординалов α, β за время $\mathcal{O}(\min(\mathbf{c}(\alpha), \mathbf{c}(\beta)))$.*

Доказательство. Опишем рекурсивный алгоритм. Пусть $\alpha = \omega^{\alpha_0} + \cdots + \omega^{\alpha_{n-1}}$ и $\beta = \omega^{\beta_0} + \cdots + \omega^{\beta_{m-1}}$ — ординалы в КНФ. Начиная с $i = 0$, мы увеличиваем i на 1 до тех пор пока или мы не будем иметь $i \geq \min(n, m)$, или $\alpha_i \neq \beta_i$; мы используем рекурсивные вызовы описываемой функции для сравнения α_i и β_i. Если после этой процедуры оказывается, что $i = n = m$, то мы установили, что $\alpha = \beta$. Если $i = n < m$ или $i < \min(n, m)$ и $\alpha_i < \beta_i$, то мы установили, что $\alpha < \beta$. Иначе, мы установили, что $\alpha > \beta$.

Индукцией по $\mathbf{c}(\alpha) + \mathbf{c}(\beta)$ мы проверяем, что выполняется требуемая верхняя оценка на время работы. $\square$

Лемма 1.7. *Для ординалов α и β мы можем построить ординал $\alpha + \beta$ за время $\mathcal{O}(\mathbf{c}(\alpha) + \mathbf{c}(\beta))$. При этом $\mathbf{c}(\alpha + \beta) \leq \mathbf{c}(\alpha) + \mathbf{c}(\beta)$.*

Доказательство. Случаи $\beta = 0$ и $\alpha = 0$ тривиальны. Далее мы предполагаем, что $\alpha, \beta > 0$. Пусть $\alpha = \omega^{\alpha_0} + \cdots + \omega^{\alpha_{n-1}}$ и $\beta = \omega^{\beta_0} + \cdots + \omega^{\beta_{m-1}}$ — ординалы в КНФ. Мы находим наименьшее $k < n$ такое, что $\alpha_k < \beta_0$. Очевидно, что КНФ $\alpha + \beta$ имеет вид

$$\omega^{\alpha_0} + \cdots + \omega^{\alpha_{k-1}} + \omega^{\beta_0} + \cdots + \omega^{\beta_{m-1}}.$$

Очевидно, имеет место требуемая линейная верхняя оценка на время работы. $\square$

Для ординалов α и β, $\alpha < \beta$ мы кодируем полуинтервал $[\alpha, \beta) = \{\gamma \mid \alpha \leq \gamma < \beta\}$ парой $\langle \alpha, \beta \rangle$. Для полуинтервала $A = [\alpha, \beta)$ мы полагаем

$$\ell(A) = \sup\{\ell(\gamma) + 1 \mid \gamma \in A\}.$$

Например,

$$\ell([\omega^\omega + 1, \omega^\omega + \omega + \omega)) = \ell(\omega^\omega + \omega) + 1 = 2.$$

Лемма 1.8. *Для полуинтервала $A = [\alpha, \beta)$ такого, что $\ell(\alpha) = 0$:*

1. *мы можем найти $\ell(A)$ за время $\mathcal{O}(\mathbf{c}(\alpha) + \mathbf{c}(\beta))$;*
2. *$\mathbf{c}(\ell(A)) \leq \mathbf{c}(\beta)$;*
3. *$[0, \ell(A)) = \{\ell(\gamma) \mid \gamma \in A\}$.*

Доказательство. Пусть ординалы α и β имеют следующую КНФ:

$$\alpha = \omega^{\alpha_0} + \cdots + \omega^{\alpha_{n-1}} \text{ и}$$

$$\beta = \omega^{\beta_0} + \cdots + \omega^{\beta_{m-1}}.$$

Пусть $k = \min(\{n\} \cup \{i \mid \alpha_i < \beta_i\})$. Очевидно, что $k < m$.

Пусть $\zeta = \max(\beta_k, 1)$, если $k = m - 1$ и пусть $\zeta = \beta_k + 1$ иначе.

Докажем, что $\{\ell(\gamma) \mid \gamma \in A)\} = [0, \zeta)$.

Начнем с рассмотрения некоторого $\gamma \in A$ и докажем, что $\ell(\gamma) < \zeta$. КНФ ординала γ равна

$$\gamma = \omega^{\alpha_0} + \cdots + \omega^{\alpha_{k-1}} + \omega^{\gamma_0} + \cdots + \omega^{\gamma_{l-1}},$$

где все $\gamma_i \leq \beta_k$ и если $k = m - 1$, то все $\gamma_i < \beta_k$. Если $l = 0$, то $\alpha = \gamma$ и $\ell(\gamma) = \ell(\alpha) = 0 < \zeta$.

Пусть $l \neq 0$. Тогда мы имеем $\ell(\gamma) = \gamma_{l-1} \leq \beta_k$, если $k < m - 1$ и $\ell(\gamma) = \gamma_{l-1} < \beta_k$, если $k = m - 1$. Следовательно $\ell(\gamma) < \zeta$.

Теперь мы рассматриваем произвольное $\delta \in [0, \zeta)$ и находим $\gamma \in A$ такое, что $\ell(\gamma) = \delta$. Если $\delta = 0$, то мы можем выбрать α в качестве γ. Иначе мы выбираем $\gamma = \alpha + \omega^\delta$; очевидно, что отсюда $\gamma \in A$. Тем самым, $\{\ell(\gamma) \mid \gamma \in A)\} = [0, \zeta)$.

Таким образом, $\ell(A) = \zeta$. Из леммы 1.6 следует, что мы можем найти k за $\mathcal{O}(\mathbf{c}(\alpha)+\mathbf{c}(\beta))$ времени. Таким образом, из леммы 1.7 следует, что ζ может быть найден за время $\mathcal{O}(\mathbf{c}(\alpha)+\mathbf{c}(\beta))$. Несложно видеть, что $\mathbf{c}(\zeta) \leq \mathbf{c}(\beta_k) + 1 \leq \mathbf{c}(\beta)$. $\square$

Для каждого ординала $\alpha > 0$ и целого числа $n \geq -1$ мы определяем множество кодов $\mathtt{C}^n_\alpha$ и функцию оценки $\mathbf{ev}^n_\alpha \colon \mathtt{C}^n_\alpha \to \mathcal{P}(U^n_\alpha)$. Каждое множество $\mathtt{C}^{-1}_\alpha$ — это просто $\{0,1\}$. Мы полагаем $\mathbf{ev}^{-1}_\alpha(0) = \emptyset$ и $\mathbf{ev}^{-1}_\alpha(1) = \{()\}$. Для $n \geq 0$ элементы $\mathtt{C}^n_\alpha$ — это тройки, состоящие из:

1. числа $m > 0$;
2. конечной последовательности $(A_0, \dots, A_{m-1})$, где каждый A_i является непустым полуинтервалом $[\beta_i, \gamma_i)$, представленным в качестве пары $\langle \beta_i, \gamma_i \rangle$; для всех i мы имеем $\beta_i \notin \mathrm{Lim}$, $\bigcup\limits_{i<m} A_i = [0, \alpha)$ и для всех $i < m-1$ мы имеем $\gamma_i = \beta_{i+1}$;
3. $\mathtt{c}_0 \in \mathtt{C}^{n-1}_{\ell(A_0)}, \dots, \mathtt{c}_{m-1} \in \mathtt{C}^{n-1}_{\ell(A_{m-1})}$.

С формальной точки зрения, для $n \geq 0$ элемент $\mathtt{d} \in \mathtt{C}^n_\alpha$ является тройкой $\langle m, \overline{A}, \overline{\mathtt{c}} \rangle$. Зададим отображение $\mathbf{ev}^n_\alpha$ из $\mathtt{C}^n_\alpha$ в $\mathcal{P}(U^n_\alpha)$, как переводящее $\langle m, \overline{A}, \overline{\mathtt{c}} \rangle$ в

$$\bigcup_{i<m} \{(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n) \in U^n_\alpha \mid \beta_0 \in A_i, (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbf{ev}^{n-1}_{\ell(A_i)}(\mathtt{c}_i)\}.$$

Пусть A является подмножеством U^n_α и $\mathtt{c}$ — это элемент $\mathtt{C}^n_\alpha$ такой, что $\mathbf{ev}^n_\alpha(\mathtt{c}) = A$. Тогда мы говорим, что $\mathtt{c}$ является кодом для A.

Для каждого целого числа $n \geq -1$ и ординала $\alpha \in [1, \varepsilon_0)$ мы вводим функцию $\mathbf{w}^n_\alpha \colon \mathtt{C}^n_\alpha \to \omega$, переводящую код в его «ширину» и функцию $\mathbf{oc}^n_\alpha \colon \mathtt{C}^n_\alpha \to \omega$, переводящую код в его «ординальную сложность», для измерения сложности кодов:

1. $\mathbf{w}^0_\alpha(\mathtt{c}) = 1$;
2. $\mathbf{w}^{n+1}_\alpha(\langle m, \overline{A}, \overline{\mathtt{c}} \rangle) = \max(\{m\} \cup \{\mathbf{w}^n_\alpha(\mathtt{c}_i) \mid i < m\})$;
3. $\mathbf{oc}^0_\alpha(\mathtt{c}) = 1$;
4. $\mathbf{oc}^{n+1}_\alpha(\langle m, \overline{A}, \overline{\mathtt{c}} \rangle) = \max\limits_{i<m} \mathbf{c}(\beta_i) \ + \ \max\limits_{i<m} \mathbf{oc}^n_{\ell(A_i)}(\mathtt{c}_i)$.

Пусть далее в этом разделе в формулировках лемм n — это целое число большее или равное -1.

Лемма 1.9. *Пусть* $\mathtt{c} = \langle m, \overline{A}, \overline{\mathtt{d}} \rangle \in \mathcal{C}^n_\alpha$ *и для всех* $i < m$, *полуинтервал* $A_i = [\beta_i, \gamma_i)$. *Тогда для всех* $i < m$ *мы имеем* $\mathbf{c}(\beta_i) \le \mathbf{oc}^n_\alpha(\mathtt{c})$, $\mathbf{c}(\gamma_i) \le \max(\mathbf{c}(\alpha), \mathbf{oc}^n_\alpha(\mathtt{c}))$, $\mathbf{oc}^n_\alpha(\mathtt{d}_i) \le \mathbf{oc}^n_\alpha(\mathtt{c})$ *и* $\mathbf{c}(\ell(A_i)) \le \max(\mathbf{c}(\alpha), \mathbf{oc}^n_\alpha(\mathtt{c}))$.

Доказательство. Мы непосредственной проверкой получаем, что все требуемые неравенства выполнены. Последнее выводится из леммы 1.8. □

Лемма 1.10. *Объем памяти, требуемой для хранения кода* $\mathtt{c} \in \mathcal{C}^n_\alpha$, *оценивается сверху как* $\mathcal{O}((\mathbf{oc}^n_\alpha(\mathtt{c}) + \mathbf{c}(\alpha)) \cdot (\mathbf{w}^n_\alpha(\mathtt{c}))^n)$.

Доказательство. Проведем проверку индукцией по n с использованием леммы 1.9 и того факта, что ординал β можно хранить в $\mathcal{O}(\mathbf{c}(\beta))$ памяти. □

Лемма 1.11. *Имеется вычислимая функция* $\mathtt{IsEmp}_n(\alpha, \mathtt{c})$ *такая, что на аргументах* $0 < \alpha < \varepsilon_0$ *и* $\mathtt{c} \in \mathcal{C}^n_\alpha$:

1. $\mathtt{IsEmp}_n$ *возвращает* 1, *если* $\mathbf{ev}^n_\alpha(\mathtt{c}) = \emptyset$, *и возвращает* 0 *иначе;*
2. *время работы* $\mathtt{IsEmp}_n$ *оценивается как*

$$\mathcal{O}(\max(\mathbf{oc}^n_\alpha(\mathtt{c}), \mathbf{c}(\alpha)) \cdot (\mathbf{w}^n_\alpha(\mathtt{c}))^n).$$

Доказательство. Неформально, идея доказательств состоит в том, чтобы проверить, что все $\mathtt{C}^{-1}_\beta$-коды, используемые в коде $\mathtt{c}$ равны 0.

Мы доказываем лемму индукцией по n. Пусть $n = 0$. Тогда для данного α и $\mathtt{c}$, мы имеем $\mathbf{ev}^n_\alpha(\mathtt{c}) = \emptyset$ в том и только том случае, если $\mathtt{c} = 0$. Это дает нам функцию $\mathtt{IsEmp}_0$.

Теперь мы рассматриваем случай $n > 0$. Из леммы 1.8 (пункт 3) следует, что для данного ординала α и кода $\mathtt{c} = \langle k, \overline{A}, \overline{\mathtt{d}} \rangle$ значение $\mathbf{ev}^n_\alpha(\mathtt{c}) = \emptyset$ в том и только том случае, если для всех $i < k$ мы имеем $\mathbf{ev}^{n-1}_{\ell(A_i)}(\mathtt{d}_i) = \emptyset$. Проверка того, что правая часть требуемой эквивалентности выполнена, может быть проведена за k вызовов функции $\mathtt{IsEmp}_{n-1}$

с верхней оценкой по времени $\mathcal{O}(\max(\mathbf{oc}^n_\alpha(\mathtt{c}), \mathbf{c}(\alpha)) \cdot (\mathbf{w}^n_\alpha(\mathtt{c}))^{n-1})$. Это дает нам IsEmp_n с временем работы $\mathcal{O}(\max(\mathbf{oc}^n_\alpha(\mathtt{c}), \mathbf{c}(\alpha)) \cdot (\mathbf{w}^n_\alpha(\mathtt{c}))^n)$. $\square$

Лемма 1.12. *Имеется вычислимая функция $\mathit{Cmpl}_n(\alpha, \mathtt{c})$ такая, что на аргументах $0 < \alpha < \varepsilon_0$ и $\mathtt{c} \in \mathtt{C}^n_\alpha$ мы имеем:*

1. *$\mathit{Cmpl}_n(\alpha, \mathtt{c}) \in \mathtt{C}^n_\alpha$;*
2. *$\mathbf{ev}^n_\alpha(\mathit{Cmpl}_n(\alpha, \mathtt{c})) = U^n_\alpha \setminus \mathbf{ev}^n_\alpha(\mathtt{c})$;*
3. *$\mathbf{oc}^n_\alpha(\mathit{Cmpl}_n(\alpha, \mathtt{c})) = \mathbf{oc}^n_\alpha(\mathtt{c})$, $\mathbf{w}^n_\alpha(\mathit{Cmpl}_n(\alpha, \mathtt{c})) = \mathbf{w}^n_\alpha(\mathtt{c})$;*
4. *время работы Cmpl_n может быть оценено сверху, как $\mathcal{O}(\max(\mathbf{oc}^n_\alpha(\mathtt{c}), \mathbf{c}(\alpha)) \cdot (\mathbf{w}^n_\alpha(\mathtt{c}))^n)$.*

Доказательство. Неформально, идея работы этой функции состоит в том, чтобы заменить на обратный каждое вхождение $\mathtt{C}^{-1}_\beta$-кодов, имеющееся в коде $\mathtt{c}$ (мы заменяем каждый 0 на 1 и каждую 1 на 0).

Мы доказываем эту лемму индукцией по n.

Рассмотрим случай $n = -1$. Пусть мы получили на вход $(\alpha, \mathtt{c})$. Тогда мы полагаем $\mathit{Cmpl}_{-1}(\alpha, \mathtt{c}) = 0$, если $\mathtt{c} = 1$, и полагаем $\mathit{Cmpl}_{-1}(\alpha, \mathtt{c}) = 1$ иначе. Очевидно, что это дает нам функцию Cmpl_{-1}, которая удовлетворяет всем требуемым условиям.

Теперь мы рассматриваем случай $n \geq 0$. Пусть мы получили на вход $(\alpha, \mathtt{c})$ и $\mathtt{c} = \langle m, \overline{A}, \overline{\mathtt{d}} \rangle$. Мы возвращаем результат $\mathit{Cmpl}_n(\alpha, \mathtt{c}) = \langle m, \overline{A}, \overline{\mathtt{e}} \rangle$, где $\overline{\mathtt{e}}$ — конечная последовательность $(\mathtt{e}_0, \ldots, \mathtt{e}_{m-1})$, и для всех $i < m$ имеем $\mathtt{e}_i = \mathit{Cmpl}_{n-1}(\ell(A_i), \mathtt{d}_i)$. Это дает нам вычислимую функцию Cmpl_n. Очевидно, $\mathbf{oc}^n_\alpha(\mathit{Cmpl}_n(\alpha, \mathtt{c})) = \mathbf{oc}^n_\alpha(\mathtt{c})$ и $\mathbf{w}^n_\alpha(\mathit{Cmpl}_n(\alpha, \mathtt{c})) = \mathbf{w}^n_\alpha(\mathtt{d})$. Покажем, что $\mathbf{ev}^n_\alpha(\mathit{Cmpl}_n(\alpha, \mathtt{c})) = U^n_\alpha \setminus \mathbf{ev}^n_\alpha(\mathtt{c})$. Рассмотрим мир $(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n) \in U^n_\alpha$. Мы находим единственное число i такое, что $\beta_0 \in A_i$. Мы имеем $\beta_1 < \ell(A_i)$ и, следовательно, $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in U^{n-1}_{\ell(A_i)}$. Из предположения индукции мы знаем, что $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbf{ev}^{n-1}_{\ell(A_i)}(\mathit{Cmpl}_n(\ell(A_i), \mathtt{d}_i))$ если и только если $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in U^{n-1}_{\ell(A_i)} \setminus \mathbf{ev}^{n-1}_{\ell(A_i)}(\mathtt{d}_i)$. Таким образом, $(\beta_0, \ldots, \beta_n) \in \mathbf{ev}^n_\alpha(\mathit{Cmpl}_n(\alpha, \mathtt{c}))$ в том и только том случае, если $(\beta_0, \ldots, \beta_n) \in U^n_\alpha \setminus \mathbf{ev}^n_\alpha(\mathtt{c})$. Следовательно, $\mathbf{ev}^n_\alpha(\mathit{Cmpl}_n(\alpha, \mathtt{c})) = U^n_\alpha \setminus \mathbf{ev}^n_\alpha(\mathtt{c})$. Из предположения индукции и леммы

1.9 мы получаем, что для $\mathtt{Cmpl}_n$ выполняется верхняя оценка на время работы 4. $\square$

Очевидно, имеют место следующие леммы:

Лемма 1.13. *Существует вычислимая функция* $\mathtt{EmpS}_n(\alpha)$ *такая, что на ординале* $\alpha > 0$ *она за время* $\mathcal{O}(\mathbf{c}(\alpha))$ *возвращает код* $\mathsf{c} \in \mathcal{C}^n_\alpha$ *такой, что* $\mathbf{ev}^n_\alpha(\mathsf{c}) = \emptyset$, $\mathbf{oc}^n_\alpha(\mathsf{c}) = n$ *и* $\mathbf{w}^n_\alpha(\mathsf{c}) = 1$.

Лемма 1.14. *Если* $n \geq 0$, *то имеется вычислимая функция* $\mathtt{Inf}_n(\alpha, \mathsf{c})$ *такая, что на аргументах* $0 < \alpha < \varepsilon_0$ *и* $\mathsf{c} \in \mathcal{C}^n_\alpha$, $\mathbf{ev}^n_\alpha(\mathsf{c}) \neq \emptyset$:

1. $\mathtt{Inf}_n(\alpha, \mathsf{c})$ *является ординалом;*
2. $\mathtt{Inf}_n(\alpha, \mathsf{c}) = \inf\{\gamma_0 \mid \exists \gamma_1, \ldots, \gamma_n((\gamma_0, \ldots, \gamma_n) \in \mathbf{ev}^n_\alpha(\mathsf{c}))\}$;
3. $\mathbf{c}(\mathtt{Inf}_n(\alpha, \mathsf{c})) \leq \mathbf{oc}(\mathsf{c})$;
4. $\mathtt{Inf}_n$ *на входе* (α, c) *имеет время работы оцениваемое сверху, как* $\mathcal{O}(\max(\mathbf{oc}^n_\alpha(\mathsf{c}), \mathbf{c}(\alpha)) \cdot (\mathbf{w}^n_\alpha(\mathsf{c}))^n)$.

Доказательство. Идея построения функции $\mathtt{Inf}_n(\alpha, \langle m, \overline{A}, \overline{\mathtt{d}}\rangle)$, где $n > 0$, состоит в нахождении первого A_i с непустым $\mathbf{ev}^{n-1}_{\ell(A_i)}(\mathtt{d}_i)$ и затем вычислении

$$\inf\{\gamma_0 \mid \exists \gamma_1, \ldots, \gamma_n((\gamma_0, \ldots, \gamma_n) \in \mathbf{ev}^n_\alpha(\langle m, \overline{A}, \overline{\mathtt{d}}\rangle))\},$$

используя $\mathtt{Inf}_{n-1}(\ell(A_i), \mathtt{d}_i)$.

Мы доказываем лемму индукцией по n. Пусть мы получили на вход $(\alpha, \mathtt{c})$, где $\mathtt{c} = \langle m, \overline{A}, \overline{\mathtt{d}}\rangle \in \mathtt{C}^n_\alpha$, и для всех $i < m$ мы имеем $A_i = [\beta_i, \gamma_i)$. Мы находим минимальное число k такое, что $\mathtt{IsEmp}_n(\mathtt{d}_k) = 0$ (напомним, что отсюда следует, что $\mathbf{ev}^n_\alpha(\mathtt{d}_k) \neq \emptyset$); такое k существует так как $\mathbf{ev}^n_\alpha(\mathtt{c}) \neq \emptyset$.

В случае $n = 0$ мы возвращаем β_k в качестве результата $\mathtt{Inf}_n(\alpha, \mathtt{c})$. Из леммы 1.9 следует, что $\mathbf{c}(\mathtt{Inf}_n(\alpha, \mathtt{c})) \leq \mathbf{oc}^n_\alpha(\mathtt{c})$. Несложно видеть, что требуемая верхняя оценка на время работы имеет место.

Теперь мы рассматриваем случай $n \geq 1$. Положим $\delta = \mathtt{Inf}_{n-1}(\ell(A_k), \mathtt{d}_k)$. Если $\delta = 0$, то мы возвращаем значение $\mathtt{Inf}_n(\alpha, \mathtt{c}) =$

β_k. Иначе мы возвращаем $\mathtt{Inf}_n(\alpha, \mathtt{c}) = \beta_k + \omega^\delta$. Докажем, что такая $\mathtt{Inf}_n$ удовлетворяет свойству 2. Очевидно, $\mathtt{Inf}_n(\alpha, c)$ — минимальный ординал из множества A_k такой, что $\ell(\mathtt{Inf}_n(\alpha, \mathtt{c})) \geq \delta$. Тем самым, для всякого $\zeta_0 \in A_k$, $\zeta_0 < \mathtt{Inf}_n(\alpha, \mathtt{c})$ и некоторых ординалов $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ таких, что $(\zeta_0, \ldots, \zeta_n) \in U^n_\alpha$ мы имеем $\ell(\zeta_1) < \delta$. Поэтому, из предположения индукции 2. следует, что

$$\mathtt{Inf}_n(\alpha, \mathtt{c}) \geq \inf\{\gamma_0 \mid \exists \gamma_1, \ldots, \gamma_n((\gamma_0, \ldots, \gamma_n) \in \mathbf{ev}^n_\alpha(\mathtt{c}))\}.$$

Также из свойства 2. для $\mathtt{Inf}_{n-1}$ следует, что существует последовательность $(\delta, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) \in \mathbf{ev}^{n-1}_{\ell(A_k)}(\mathtt{d}_k)$, а тем самым

$$(\mathtt{Inf}_n(\alpha, c), \delta, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) \in \mathbf{ev}^n_\alpha(\mathtt{c}),$$

и свойство 2. имеет место. Из того, что свойство 4. имеет место для $\mathtt{Inf}_{n-1}$ следует, что 4. выполняется и для $\mathtt{Inf}_n$. По предположению индукции,

$$\begin{aligned}\mathbf{c}(\mathtt{Inf}_n(\alpha, \mathtt{c})) = \mathbf{c}(\beta_k) + \mathbf{c}(\mathtt{Inf}_{n-1}(\ell(A_k), \mathtt{d}_k)) \leq \mathbf{c}(\beta_k) + \mathbf{oc}(\mathtt{d}_k) \\ \leq \max_{i<m} \mathbf{c}(\beta_i) + \max_{i<m} \mathbf{oc}(\mathtt{d}_i) = \mathbf{oc}(\mathtt{c})\end{aligned}$$

□

Лемма 1.15. *Для чисел $0 \leq k \leq n$ существует вычислимая функция R_k-$\mathtt{Inv}_n(\alpha, \mathtt{c})$ такая, что на всяких входах $0 < \alpha < \varepsilon_0$ и $\mathtt{c} \in \mathcal{C}^n_\alpha$ мы имеем:*

1. *R_k-$\mathtt{Inv}_n(\alpha, \mathtt{c})$ элемент $\mathcal{C}^n_\alpha$;*
2. *$\mathbf{ev}^n_\alpha(\mathrm{R}_k\text{-}\mathtt{Inv}_n(\alpha, \mathtt{c})) = \{w \in U^n_\alpha \mid \exists w' \in \mathbf{ev}^n_\alpha(\mathtt{c})(w \mathrel{\mathrm{R}_k} w')\}$;*
3. *$\mathbf{oc}^n_\alpha(\mathrm{R}_k\text{-}\mathtt{Inv}_n(\alpha, \mathtt{c})) \leq \mathbf{oc}^n_\alpha(\mathtt{c}) + n$ и $\mathbf{w}^n_\alpha(\mathrm{R}_k\text{-}\mathtt{Inv}_n(\alpha, \mathtt{c})) \leq \mathbf{w}^n_\alpha(\mathtt{c}) + 1$;*
4. *время работы R_k-$\mathtt{Inv}_n(\alpha, c)$ оценивается как*

$$\mathcal{O}(\max(\mathbf{oc}^n_\alpha(\mathtt{c}), \mathbf{c}(\alpha)) \cdot (\mathbf{w}^n_\alpha(\mathtt{c}))^n).$$

Доказательство. Функция R_0-$\mathtt{Inv}_n$ может быть легко задана с использованием $\mathtt{Inf}_n$. Идея работы функции R_k-$\mathtt{Inv}_n$ для $k > 0$ состоит в применении R_0-$\mathtt{Inv}_{n-k}$ ко всем $\mathtt{C}^{n-k}_\beta$-кодам, наследственно лежащим в данном коде.

Мы доказываем лемму индукцией по k.

Рассмотрим случай $k=0$. Пусть даны ординал α и код $\mathtt{c}\in\mathtt{C}^n_\alpha$. Если $\mathtt{IsEmp}(\alpha,c)=1$, что эквивалентно тому, что $\mathbf{ev}^n_\alpha(c)$ пусто, то мы полагаем

$$\mathrm{R}_k\text{-}\mathtt{Inv}_n(\alpha,\mathtt{c})=\mathtt{EmpS}_n(\alpha).$$

Иначе, мы полагаем

$$\mathrm{R}_k\text{-}\mathtt{Inv}_n(\alpha,\mathtt{c})=\langle 2,(B_0,B_1),(\mathtt{e}_0,\mathtt{e}_1)\rangle,$$

где $B_0=[0,\mathtt{Inf}_n(\alpha,\mathtt{c})+1)$, $B_1=[\mathtt{Inf}_n(\alpha,\mathtt{c})+1,\alpha)$, $\mathtt{e}_0=\mathtt{EmpS}_{n-1}(\ell(B_0))$ и $\mathtt{e}_1=\mathtt{Cmpl}_n(\ell(B_1),\mathtt{EmpS}_{n-1}(\ell(B_1)))$. Свойство 1. очевидно выполнено. 2. и 3. следуют из леммы 1.14. Непосредственной проверкой мы устанавливаем верхнюю оценку на время работы, т.е. свойство 4.

Теперь мы рассматриваем случай $k>0$. Пусть даны ординал $\alpha>0$ и код $\mathtt{c}=\langle m,\overline{A},\overline{\mathtt{d}}\rangle\in\mathtt{C}^n_\alpha$. Для $i<m$ мы полагаем $\mathtt{e}_i=\mathrm{R}_{k-1}$-$\mathtt{Inv}_{n-1}(\ell(A_i),\mathtt{d}_i)$. Мы возвращаем значение R_k-$\mathtt{Inv}_n(\alpha,\mathtt{c})=\langle m,\overline{A},\overline{\mathtt{e}}\rangle$. Свойства 1. и 4. для R_k-$\mathtt{Inv}_n$ следуют из свойств R_{k-1}-$\mathtt{Inv}_{n-1}$ с теми же номерами, имеющимися в силу предположения индукции. Мы выводим свойство 3. из леммы 1.5 и свойства 3. для R_{k-1}-$\mathtt{Inv}_{n-1}$. □

Лемма 1.16. *Имеется вычислимая функция* $\mathtt{Rstr}_n(\alpha,\beta,\mathtt{c})$ *такая, что на аргументах вида* $0<\beta\le\alpha<\varepsilon_0$ *и* $\mathtt{c}\in\mathtt{C}^n_\alpha$ *она обладает следующими свойствами:*

1. $\mathtt{Rstr}_n(\alpha,\beta,\mathtt{c})\in\mathtt{C}^n_\beta$;
2. $\mathbf{ev}^n_\beta(\mathtt{Rstr}_n(\alpha,\beta,\mathtt{c}))=\mathbf{ev}^n_\alpha(\mathtt{c})\cap U^n_\beta$;
3. $\mathbf{oc}^n_\beta(\mathtt{Rstr}_n(\alpha,\beta,\mathtt{c}))\le\mathbf{oc}^n_\alpha(\mathtt{c})$, $\mathbf{w}^n_\beta(\mathtt{Rstr}_n(\alpha,\beta,\mathtt{c}))\le\mathbf{w}^n_\alpha(\mathtt{c})$;
4. $\mathtt{Rstr}_n$ *удовлетворяет верхней оценке на время работы* $\mathcal{O}(\max(\mathbf{oc}^n_\alpha(\mathtt{c}),\mathbf{c}(\alpha),\mathbf{c}(\beta))\cdot(\mathbf{w}^n_\alpha(\mathtt{c}))^n)$.

Доказательство. Мы доказываем лемму индукцией по n. Случай $n=$

-1 тривиален:

$$\mathtt{Rstr}_{-1}\colon (\alpha,\beta,\mathsf{c}) \longmapsto \mathsf{c}.$$

Пусть $n \geq 0$. Рассмотрим вход $(\alpha,\beta,\mathsf{c})$, где $\mathsf{c} = \langle m,\overline{A},\overline{\mathsf{d}}\rangle \in \mathsf{C}^n_\alpha$. Мы выбираем максимальное $k < m$ такое, что A_k меньше, чем β; очевидно, что по крайней мере одно такое k существует. Пусть $A_k = [\gamma,\delta)$. Сейчас мы определим конечные последовательности $\overline{B}$ и $\overline{e}$, элементами которых являются $B_0,\dots,B_k$ и $\mathsf{e}_0,\dots,\mathsf{e}_k$ соответственно. Мы полагаем $B_i = A_i$ и $\mathsf{e}_i = \mathsf{d}_i$ для $i < k$. Положим $B_k = [\gamma,\beta)$ и $\mathsf{e}_k = \mathtt{Rstr}_n(\ell(A_k),\ell([\gamma,\beta)),\mathsf{c})$. Мы возвращаем значение $\mathtt{Rstr}_n(\alpha,\beta,\mathsf{c}) = \langle k+1,\overline{B},\overline{\mathsf{e}}\rangle$. Из предположения индукции мы непосредственно выводим свойства 1., 3. и 4. Для установления свойства 2. мы рассматриваем мир $(\zeta_0,\dots,\zeta_n) \in U^n_\beta$ и доказываем, что

$$(\zeta_0,\dots,\zeta_n) \in \mathbf{ev}^n_\beta(\mathtt{Rstr}_n(\alpha,\beta,\mathsf{c})) \iff (\zeta_0,\dots,\zeta_n) \in \mathbf{ev}^n_\alpha(\mathsf{c}).$$

Случай $\zeta_0 \notin A_k$ тривиален, а случай $\zeta_0 \in A_k$ следует из пункта 2. предположения индукции и леммы 1.5. $\square$

Лемма 1.17. *Существует вычислимая функция $\mathtt{Intr}_n(\alpha,\mathsf{c}_1,\mathsf{c}_2)$ такая, что на аргументах $0 < \alpha < \varepsilon_0$ и $\mathsf{c}_1,\mathsf{c}_2 \in \mathsf{C}^n_\alpha$ она обладает следующими свойствами:*

1. $\mathtt{Intr}_n(\alpha,\mathsf{c}_1,\mathsf{c}_2) \in \mathsf{C}^n_\alpha$;
2. $\mathbf{ev}^n_\alpha(\mathtt{Intr}_n(\alpha,\mathsf{c}_1,\mathsf{c}_2)) = \mathbf{ev}^n_\alpha(\mathsf{c}_1) \cap \mathbf{ev}^n_\alpha(\mathsf{c}_2)$;
3. $\mathbf{oc}^n_\alpha(\mathtt{Intr}_n(\alpha,\mathsf{c}_1,\mathsf{c}_2)) \leq \mathbf{oc}^n_\alpha(\mathsf{c}_1) + \mathbf{oc}^n_\alpha(\mathsf{c}_2)$;
4. $\mathbf{w}^n_\alpha(\mathtt{Intr}_n(\alpha,\mathsf{c}_1,\mathsf{c}_2)) \leq \mathbf{w}^n_\alpha(\mathsf{c}_1) + \mathbf{w}^n_\alpha(\mathsf{c}_2)$;
5. *время работы* $\mathtt{Intr}_n(\alpha,\mathsf{c}_1,\mathsf{c}_2)$ *удовлетворяет верхней оценке* $\mathcal{O}(\max(\mathbf{oc}^n_\alpha(\mathsf{c}_1),\mathbf{oc}^n_\alpha(\mathsf{c}_2),\mathbf{c}(\alpha)) \cdot (\max(\mathbf{w}^n_\alpha(\mathsf{c}_1),\mathbf{w}^n_\alpha(\mathsf{c}_2)))^{n+1})$.

Доказательство. Идея вычисления $\mathtt{Intr}_n(\alpha,\mathsf{c}_1,\mathsf{c}_2)$ такова:

1. найти коды c_1' и c_2' такие, что их $\mathbf{ev}^n_\alpha$-значения совпадают со значениями c_1 и c_2 соответственно и имеют вид $\mathsf{c}_1' = \langle k,\overline{B},\overline{\mathsf{e}^{(1)}}\rangle$ и $\mathsf{c}_2' = \langle k,\overline{B},\overline{\mathsf{e}^{(2)}}\rangle$;

2. получить требуемый код, используя значения $\mathtt{Intr}_{n-1}$ на всех входах вида $(\ell(B_i), \mathtt{e}_i^{(1)}, \mathtt{e}_i^{(2)})$.

Мы доказываем эту лемму индукцией по n. Случай $n = -1$ тривиален. Теперь предположим, что $n \geq 0$. Ниже мы опишем алгоритм работы $\mathtt{Intr}_n$. Пусть нам дана на вход тройка $(\alpha, \mathtt{c}_1, \mathtt{c}_2)$, где код $\mathtt{c}_1 = \langle m_1, \overline{A^{(1)}}, \overline{\mathtt{d}^{(1)}} \rangle \in \mathtt{C}_\alpha^n$ и код $\mathtt{c}_2 = \langle m_2, \overline{A^{(2)}}, \overline{\mathtt{d}^{(2)}} \rangle \in \mathtt{C}_\alpha^n$. Мы рассматриваем все попарные пересечения $A_i^{(1)} \cap A_j^{(2)}$, где $i < m_1$ и $j < m_2$; все пересечения этого вида либо пусты, либо равны $[\beta, \gamma)$ для некоторых ординалов β и γ таких, что $\beta < \gamma$.

Мы рассматриваем все непустые пересечения этого вида (все из которых являются полуинтервалами) и упорядочиваем их в порядке возрастания левых концов; эта процедура дает нам последовательность $B_0, B_1, \ldots, B_{k-1}$. Мы получаем конечную последовательность $\overline{B}$ длины k. Очевидно, что $\bigcup\limits_{i<k} B_i = [0, \alpha)$ и для всех $i < k-1$ правый конец B_i равен левому концу B_{i+1}. Легко видеть, что $k \leq m_1 + m_2$.

Определим конечные последовательности $\overline{\mathtt{e}^{(1)}}$, $\overline{\mathtt{e}^{(2)}}$ и $\overline{\mathtt{e}^{(3)}}$ длины k. Для всех $i < k$ мы находим единственное $j < m_1$ такое, что $B_i \subset A_j^{(1)}$ и полагаем $\mathtt{e}_i^{(1)} = \mathtt{Rstr}_{n-1}(\ell(A_j^{(1)}), \ell(B_i), \mathtt{d}_j^{(1)})$. Аналогично, для всех $i < k$ мы находим единственное $j < m_2$ такое, что $B_i \subset A_j^{(2)}$ и затем полагаем $\mathtt{e}_i^{(2)} = \mathtt{Rstr}_{n-1}(\ell(A_j^{(2)}), \ell(B_i), \mathtt{d}_j^{(2)})$. Для всех $i < k$ мы полагаем $\mathtt{e}_i^{(3)} = \mathtt{Intr}_{n-1}(\ell(B_i), \mathtt{e}^{(1)}, \mathtt{e}^{(2)})$. Мы возвращаем значение $\mathtt{Intr}_n(\alpha, \mathtt{c}_1, \mathtt{c}_2) = \langle k, \overline{B}, \overline{\mathtt{e}^{(3)}} \rangle$.

Из предположения индукции мы заключаем, что свойства 1., 3. и 4 выполняются. Так как мы можем упорядочить полуинтервалы за квадратичное число сравнений ординалов, мы получаем требуемую оценку 5., применяя предположение индукции. Для проверки условия 4. мы рассматриваем мир $(\zeta_0, \ldots, \zeta_n) \in U_\beta^n$ и доказываем, что

$$(\zeta_0, \ldots, \zeta_n) \in \mathbf{ev}_\alpha^n(\mathtt{Intr}_n(\alpha, \mathtt{c}_1, \mathtt{c}_2)) \Longleftrightarrow (\zeta_0, \ldots, \zeta_n) \in \mathbf{ev}_\alpha^n(\mathtt{c}_1) \cap \mathbf{ev}_\alpha^n(\mathtt{c}_2);$$

мы находим пары полуинтервалов $A_i^{(1)}$, $A_j^{(2)}$ таких, что $\zeta_0 \in A_i^{(1)} \cap A_j^{(2)}$, а затем используем имеющееся по предположению индукции свойство 4 для $n-1$, ординала $\ell(A_i^{(1)} \cap A_j^{(2)})$ и кодов $\mathtt{Rstr}_n(\ell(A_i^{(1)}), \ell(A_i^{(1)} \cap A_j^{(2)}), \mathtt{d}_i^{(1)})$, $\mathtt{Rstr}_n(\ell(A_j^{(2)}), \ell(A_i^{(1)} \cap A_j^{(2)}), \mathtt{d}_j^{(2)})$. $\square$

Для всех полимодальных формул φ мы обозначаем через $|\varphi|$ количество связок в φ:

1. $|\top| = |\bot| = |x| = 1$;
2. $|\varphi \wedge \psi| = |\varphi \vee \psi| = |\varphi \to \psi| = |\varphi| + |\psi| + 1$;
3. $|\langle n \rangle \varphi| = |\varphi| + 1$.

Сейчас мы докажем теорему 2.

Доказательство. Рассмотрим замкнутую GLP_n-формулу φ. Очевидно, что за время $\mathcal{O}(|\varphi|)$ мы можем найти замкнутую GLP_n-формулу φ' такую, что

$$\mathrm{GLP} \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi',$$

в φ' используются только связки $\wedge, \neg, [0], \dots, [n]$ и $|\varphi'| = \mathcal{O}(|\varphi|)$. Для всякой подформулы ψ формулы φ' мы найдем код $\mathtt{c}(\psi) \in \mathtt{C}^n_{\omega_{n+1}}$ такой, что $\mathbf{ev}^n_{\omega_{n+1}}(\mathtt{c}(\psi)) = \{w \in U^n_{\omega_{n+1}} \mid \mathcal{U}^n_{\omega_{n+1}}, w \Vdash \psi\}$. Для этого мы рассматриваем все подформулы формулы φ' в таком порядке, что всякая формула ψ рассматривается после всех ее точных подформул ψ'. Если ψ это $\bot$, то положим $\mathtt{c}(\psi) = \mathtt{EmpS}_n(\omega_{n+1})$. Если ψ имеет вид $\neg\psi'$ для некоторого ψ', то положим $\mathtt{c}(\psi) = \mathtt{Cmpl}_n(\omega_{n+1}, \mathtt{c}(\psi'))$. Если ψ имеет вид $[k]\psi'$ для некоторых ψ' и k, то положим

$$\mathtt{c}(\psi) = \mathtt{Cmpl}_n(\omega_{n+1}, \mathrm{R}_k\text{-}\mathtt{Inv}_n(\omega_{n+1}, \mathtt{Cmpl}_n(\omega_{n+1}, \mathtt{c}(\psi'))))$$

. Если ψ имеет вид $\psi' \wedge \psi''$ для некоторых ψ' и ψ'', то положим $\mathtt{c}(\psi) = \mathtt{Intr}_n(\omega_{n+1}, \mathtt{c}(\psi'), \mathtt{c}(\psi''))$. Мы легко доказываем индукцией по длине подформул ψ, что

$$\mathbf{w}^n_{\omega_{n+1}}(\mathtt{c}(\psi)) \le |\psi| \text{ и}$$

$$\mathbf{oc}^n_{\omega_{n+1}}(\mathtt{c}(\psi)) \le n|\psi|.$$

Рассмотрением случаев для внешней связки ψ мы показываем, что вычисление $\mathsf{c}(\psi)$ из кодов ранее рассмотренных формул занимает время $\mathcal{O}(|\varphi'| \cdot |\varphi'|^{n+1})$. Полное вычисление $\mathsf{c}(\varphi')$ занимает $\mathcal{O}(|\varphi'|^{n+3})$ времени.

Очевидно, что $\mathrm{GLP} \vdash \varphi$ тогда и только тогда, когда

$$\mathtt{IsEmp}_n(\omega_{n+1}, \mathtt{Cmpl}_n(\omega_{n+1}, \mathsf{c}(\varphi'))) = 1.$$

Тем самым, мы получаем требуемый алгоритм со временем работы $\mathcal{O}(|\varphi|^{n+3})$. $\square$

Глава 2

Элементарные теории полурешеток GLP-слов

2.1 GLP-слова

В этом разделе мы определяем понятие GLP-слова и изучаем некоторые свойства GLP-слов, которые мы в дальнейшем будем использовать для получения результатов о разрешимости и неразрешимости элементарных теорий структур, определяемых на основе GLP-слов.

Мы рассматриваем множество W всех формул вида $\langle n_1\rangle\langle n_2\rangle\ldots\langle n_k\rangle\top$. Такие формулы называются GLP-*словами*; также для краткости в рамках данной диссертации мы называем их просто словами. Для обозначения слов мы используем буквы $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \ldots$.

Из соображений удобства мы часто будем опускать знаки модальностей и $\top$, записывая слово $\langle n_1\rangle\langle n_2\rangle\ldots\langle n_k\rangle\top$ как $n_1 n_2 \ldots n_k$. Для слов $\mathsf{A} = n_1 n_2 \ldots n_k$ и $\mathsf{B} = m_1 m_2 \ldots m_l$ запись AB означает слово $n_1 n_2 \ldots n_k m_1 m_2 \ldots m_l$. Через W_n мы обозначаем множество всех слов $m_1 m_2 \ldots m_l$, для которых все $m_i \leq n$.

На множестве всех GLP-формул имеются бинарные отношения $<_n$, определяемые следующим образом (см. [7]):

$$\varphi <_n \psi \overset{\text{def}}{\iff} \mathrm{GLP} \vdash \psi \to \langle n\rangle\varphi.$$

Обозначим через S_n множество всех слов, любой символ которых больше или равен n. Мы обозначаем через $\sim$ отношение GLP-доказуемой эквивалентности на формулах и, в частности, на словах:

$$\varphi \sim \psi \stackrel{\text{def}}{\iff} \mathrm{GLP} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi.$$

Отметим, что всякое непустое слово $\mathsf{A} \in S_k$ может быть единственным образом представлено в виде $\mathsf{A} = \mathsf{A}_1 k \mathsf{A}_2 k \dots k \mathsf{A}_n$, где $\mathsf{A}_i \in S_{k+1}$.

Функции $o_n \colon S_n \to On$ одновременно определяются следующими рекуррентными соотношениями:

- $o_n(n^k) = k$;
- $o_n(\mathsf{A}_1 n \mathsf{A}_2 n \dots n \mathsf{A}_k) = \omega^{o_{n+1}(\mathsf{A}_1)} + \omega^{o_{n+1}(\mathsf{A}_2)} + \dots + \omega^{o_{n+1}(\mathsf{A}_k)}$, где $k \geq 1$, $\mathsf{A}_1, \dots, \mathsf{A}_k \in S_{n+1}$ и для некоторого i слово $\mathsf{A}_i \neq \top$.

Нетрудно видеть, что в силу теоремы Кантора о нормальной форме ординалов, каждое отображение o_n является сюръекцией на ординал ε_0.

С помощью леммы 15 следствие 7 из [8] мы получаем следующее предложение.

Предложение 2.1. *Для всякого n и слов $\mathsf{A}, \mathsf{B} \in S_n$, мы имеем*

$$\mathsf{A} \sim \mathsf{B} \iff o_n(\mathsf{A}) = o_n(\mathsf{B}),$$

$$\mathsf{A} <_n \mathsf{B} \iff o_n(\mathsf{A}) < o_n(\mathsf{B}).$$

Мы в данной диссертации используем определение ординалов по фон Нейману и соответственно

$$\alpha = \{\beta \in On \mid \beta < \alpha\}.$$

Тем самым каждая o_n задает изоморфизм $(S_n/{\sim}; <_n)$ и упорядоченного множества $(\varepsilon_0; <)$. Также, отсюда несложно видеть, что для $k, l \leq n$ ограничения бинарных отношений $<_k$ и $<_l$ на множество S_n совпадают.

Определим множество NF всех слов, находящихся в нормальной форме. Зададим принадлежность слов к NF индукцией по длине.

1. $\top \in NF$.

2. Пусть минимальный символ слова $\mathsf{A} \neq \top$ равен k и $\mathsf{A} = \mathsf{A}_1 k \mathsf{A}_2 k \dots k \mathsf{A}_n$, где все $\mathsf{A}_i \in S_{k+1}$. Тогда $\mathsf{A} \in NF$, если и только если $\mathsf{A}_1, \dots, \mathsf{A}_n \in NF$ и $\mathsf{A}_{i+1} \not<_{k+1} \mathsf{A}_i$ при i от 1 до $n-1$.

Для каждого слова A слово $\mathsf{B} \in NF$ называется *нормальной формой* слова A, если $\mathsf{B} \sim \mathsf{A}$.

Предложение 2.2. *[8, следствие 5] Для каждого слова* A *существует единственное эквивалентное ему слово* $\mathsf{B} \in NF$*.*

Приведем здесь без доказательства процедуру приведения слова к нормальной форме, которая является незначительно перестроенной процедурой из доказательства [8, предложение 3]. Будем сводить построение нормальной формы слова к построению нормальных форм слов меньшей длины. Пустое слово уже приведено к нормальной форме. Перейдем к случаю непустого слова A. Пусть минимальный символ слова A равен k и оно имеет вид $\mathsf{A} = \mathsf{A}_1 k \dots k \mathsf{A}_n$, где $\mathsf{A}_1, \dots, \mathsf{A}_n \in S_{k+1}$. Приведем слова A_1 и $\mathsf{A}_2 k \dots k \mathsf{A}_n$ к нормальной форме — это будут слова B_1 и $\mathsf{B}_2 k \dots k \mathsf{B}_m$ соответственно, где $\mathsf{B}_1, \dots, \mathsf{B}_m \in S_{k+1}$. Положим $A = \{s \mid 2 \leq s \leq m, \mathsf{B}_s \not<_{k+1} \mathsf{B}_1\}$. Если множество A непусто, то нормальная форма A равна $\mathsf{B}_1 k \mathsf{B}_l k \dots k \mathsf{B}_m$, где $l = \min(A)$, иначе нормальная форма A равна B_1.

Используя это алгоритм мы непосредственно получаем следующую лемму.

Лемма 2.3. *Если слово принадлежит* S_k*, то и его нормальная форма принадлежит* S_k*.*

Определим функцию $t\colon W \to (\mathbb{N} \cup \{-1\})$, переводящую слово в его первый символ:

1. $t(\top) = -1$;
2. $t(k_1 \dots k_n) = k_1$.

Лемма 2.4. *[8, лемма 1] Пусть слова* A *и* B *таковы, что* $\mathsf{A} \in S_k$ *и* $t(\mathsf{B}) < k$*. Тогда* $\mathrm{GLP} \vdash \mathsf{A} \wedge \mathsf{B} \leftrightarrow \mathsf{AB}$*.*

Обозначим через B_n множество $\{n\mathsf{A} \mid \mathsf{A} \in S_n\} \cup \{\top\}$.

Лемма 2.5. *Пусть* $\mathsf{A} \in B_k$, $\mathsf{B} \in S_k$ *и* $\mathsf{A} <_k \mathsf{B}$. *Тогда* $\mathrm{GLP} \vdash \mathsf{B} \to \mathsf{A}$.

Доказательство. Мы имеем $\mathrm{GLP} \vdash \mathsf{B} \to \langle k \rangle \mathsf{A}$. Искомое мы получаем в силу того, что в GLP для любой φ доказуема формула $\langle k \rangle \langle k \rangle \varphi \to \langle k \rangle \varphi$. □

Так как силу леммы 2.1 всякие два слова из S_k либо эквивалентны, либо одно $<_k$-больше другого, имеет место следствие 2.6.

Следствие 2.6. *Пусть* $\mathsf{A}, \mathsf{B} \in B_k$. *Тогда либо* $\mathrm{GLP} \vdash \mathsf{A} \to \mathsf{B}$, *либо* $\mathrm{GLP} \vdash \mathsf{B} \to \mathsf{A}$. *Кроме того,* $\mathsf{A} <_k \mathsf{B}$ *влечет* $\mathrm{GLP} \vdash \mathsf{B} \to \mathsf{A}$.

Следствие 2.7. *Пусть даны слова* $\mathsf{A} \in S_k$ *и* B *такие, что* $t(\mathsf{B}) \leq k$ *и* $\mathsf{B} <_0 \mathsf{A}$. *Тогда* $\mathrm{GLP} \vdash \mathsf{A} \to \mathsf{B}$.

Доказательство. Используя лемму 2.4 мы получаем слова $\mathsf{B}_0 \in B_0$, $\mathsf{B}_1 \in B_1, \ldots, \mathsf{B}_k \in B_k$ такие, что

$$\mathrm{GLP} \vdash \mathsf{B} \leftrightarrow \mathsf{B}_0 \wedge \ldots \wedge \mathsf{B}_k$$

и все B_i, как слова в алфавите из натуральных чисел, являются подсловами B от первого вхождения i, включительно, до первого вхождения $i-1$, не включая его (до правого конца для $i = 0$). Из определения o_0 видно, что для всех $i \leq k$ мы имеем $o_0(\mathsf{B}_i) \leq o_0(\mathsf{B})$. Тем самым для всех $i \leq k$ $\mathsf{B}_i <_0 \mathsf{A}$, а в силу согласованности $<_0$ и $<_i$ на S_i мы имеем $\mathsf{B}_i <_i \mathsf{A}$. Отсюда $\mathrm{GLP} \vdash \mathsf{A} \to \mathsf{B}_i$ для всех $i \leq k$. Следовательно $\mathrm{GLP} \vdash \mathsf{A} \to \mathsf{B}$. □

Мы обозначаем через W_n, множество всех слов $\mathsf{A} = \langle m_1 \rangle \langle m_2 \rangle \ldots \langle m_k \rangle \top$ для которых все $m_i \leq n$. Для всех ординалов $\alpha \leq \omega$ обозначим через W_α^N множество $W_\alpha \cap NF$.

Несложная проверка показывает, что доказательство леммы 9 из [8] дает следующую лемму.

Лемма 2.8. *Пусть даны ординал* $\alpha \leq \omega$ *число* $k \leq \alpha$. *Тогда для любых слов* $\mathsf{A}, \mathsf{B} \in S_k \cap W_\alpha^N$ *эффективно строится слово* $\mathsf{C} \in S_k \cap W_\alpha^N$ *такое, что* $\mathrm{GLP} \vdash \mathsf{A} \wedge \mathsf{B} \leftrightarrow \mathsf{C}$.

Введем операцию конъюнкции слов. Пусть A и B — слова, а C — единственное слово из NF такое, что $\mathrm{GLP} \vdash \mathsf{A} \wedge \mathsf{B} \leftrightarrow \mathsf{C}$. Положим $\mathsf{A} \sqcap \mathsf{B} = \mathsf{C}$.

Кроме того, для всех натуральных k введем функции $d_k \colon W \to W$. Для всякого слова A мы полагаем $d_k(\mathsf{A})$ равным единственному слову из NF эквивалентному $\langle k \rangle \mathsf{A}$.

Несложно видеть, что для любых $\alpha \leq \omega$ и $n \leq \alpha$, для всякого $\mathsf{A} \in W_\alpha^N$ мы имеем $d_n(\mathsf{A}) \in W_\alpha^N$ и для всяких $\mathsf{A}, \mathsf{B} \in W_\alpha^N$ мы имеем $\mathsf{A} \sqcap \mathsf{B} \in W_\alpha^N$.

Связка $\wedge$ естественным образом задает функцию на классах эквивалентности слов:

$$[\mathsf{A}]_\sim \wedge [\mathsf{B}]_\sim = \{\mathsf{C} \mid \mathsf{C} \sim \mathsf{A} \wedge \mathsf{B}\}.$$

Аналогично, связки $\langle n \rangle$ задают функции на классах эквивалентности слов:

$$\langle n \rangle [\mathsf{A}]_\sim = \{\mathsf{B} \mid \mathsf{B} \sim \langle n \rangle \mathsf{A}\}.$$

Отметим, что если даны слова $\mathsf{A}, \mathsf{B} \in W_n$ такие, что для всякого слова B, если $\mathsf{B} \sim \mathsf{A}$, то $\mathsf{B} \in W_n$. Тем самым $W_n/\sim \subset W/\sim$. Кроме того, очевидно, $W_n/\sim$ замкнуто относительно $\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \ldots, \langle n \rangle$ и $\wedge$.

Как несложно видеть, модель $(W^N; <_0, \top, \sqcap, d_0, d_1, \ldots, d_n, \ldots)$ изоморфна модели $(W/\sim; <_0, \top, \wedge, \langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \ldots, \langle n \rangle, \ldots)$. Аналогично, при всех n модель $(W_n^N; <_0, \top, \sqcap, d_0, d_1, \ldots, d_n)$ изоморфна модели $(W_n/\sim; <_0, \top, \wedge, \langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \ldots, \langle n \rangle)$. Из технических соображений мы в основном используем структуры с носителями W^N и W_n^N.

Центральным предметом нашего рассмотрения в этой главе будут нижние полурешетки $\mathfrak{S}_\alpha = (W_\alpha^N; \sqcap)$ для $\alpha \leq \omega$.

2.2 Некоторые свойства полурешеток слов

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ зададим функцию $h_k \colon W \to S_k$. Заметим, что для всякого слова A существует и единственно его представление в виде $\mathsf{A} =$

BC, где $\mathsf{B} \in S_k$, а $t(\mathsf{C}) < k$. Положим $h_k(\mathsf{A}) = \mathsf{B}$.

Лемма 2.9. *Для всякого слова* A

$$t(\mathsf{A}) = \min(\{k \mid h_k(\mathsf{A}) \sim \top\}) - 1. \tag{2.1}$$

Доказательство. Заметим, что $h_k(\mathsf{A}) \neq \top$ тогда и только тогда, когда $k \leq t(\mathsf{A})$. Также для всякого B:

$$\mathsf{B} = \top \iff \mathsf{B} \sim \top.$$

Отсюда мы получаем тождество (2.1). □

Лемма 2.10. *Пусть слова* A *и* B *таковы, что* $\mathsf{A} \sim \mathsf{B}$. *Тогда для всякого* k *выполняется* $h_k(\mathsf{A}) \sim h_k(\mathsf{B})$.

Доказательство. Докажем, что $h_k(\mathsf{A}) \sim h_k(\mathsf{B})$ индукцией по k. Предположение индукции для $k = 0$ очевидно выполнено; перейдем к случаю $k > 0$.

Предположим, что $h_k(\mathsf{A}) \sim h_k(\mathsf{B})$ и докажем, что $h_{k+1}(\mathsf{A}) \sim h_{k+1}(\mathsf{B})$. Слово $h_k(\mathsf{A})$ имеет вид $h_k(\mathsf{A}) = h_{k+1}(h_k(\mathsf{A}))k\mathsf{A}_1k\mathsf{A}_2k\ldots k\mathsf{A}_n$, где $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_n \in S_{k+1}$. Заметим, что $h_{k+1}(\mathsf{A}) = h_{k+1}(h_k(\mathsf{A}))$ и тем самым $h_k(\mathsf{A}) = h_{k+1}(\mathsf{A})k\mathsf{A}_1k\ldots k\mathsf{A}_n$.

Пусть слово C — нормальная форма слова $h_k(\mathsf{A})$. Рассмотрим построение C по описанной ранее процедуре приведения слова к нормальной форме (см. стр. 38). Пусть нормальная форма $\mathsf{A}_1k\mathsf{A}_2k\ldots k\mathsf{A}_n$ имеет вид $\mathsf{C}_1k\mathsf{C}_2k\ldots k\mathsf{C}_m$, где все $\mathsf{C}_i \in S_{k+1}$, а нормальная форма $h_{k+1}(\mathsf{A})$ равна слову C_0. Исходя из процедуры построения нормальной формы слова мы выводим, что либо $\mathsf{C} = \mathsf{C}_0k\mathsf{C}_lk\ldots k\mathsf{C}_m$ для некоторого положительного натурального числа $l \leq m$, либо $\mathsf{C} = \mathsf{C}_0$. Следовательно, $h_{k+1}(\mathsf{C}) = \mathsf{C}_0 \sim h_{k+1}(\mathsf{A})$.

Проведя аналогичное рассуждение для B и нормальной формы слова $h_k(\mathsf{B})$, равной D, мы получим, что $h_{k+1}(\mathsf{D}) \sim h_{k+1}(\mathsf{B})$. В силу единственности нормальной формы слова и предположения индукции

$\mathsf{C} = \mathsf{D}$. Тем самым $h_{k+1}(\mathsf{A}) \sim h_{k+1}(\mathsf{B})$, что завершает доказательство леммы. $\square$

По лемме 2.10 правая часть равенства (2.1) сохраняет свое значение при замене слова A на эквивалентное, тем самым мы получаем

Следствие 2.11. *Если* $\mathsf{A} \sim \mathsf{B}$, *то* $t(\mathsf{A}) = t(\mathsf{B})$.

Из леммы 2.3 и следствия 2.11 мы выводим

Следствие 2.12. *Если слово* A *принадлежит* B_k, *то и его нормальная форма принадлежит* B_k.

Лемма 2.13. *Для всякого натурального числа* k *и любых слов* A *и* B

$$h_k(\mathsf{A} \sqcap \mathsf{B}) \sim h_k(\mathsf{A}) \sqcap h_k(\mathsf{B}).$$

Доказательство. Найдем такое число $n > k$ и слова $\mathsf{A}_0, \mathsf{B}_0 \in B_0$, $\mathsf{A}_1, \mathsf{B}_1 \in B_1$, ..., $\mathsf{A}_n, \mathsf{B}_n \in B_n$, что $\mathsf{A} = \mathsf{A}_n\mathsf{A}_{n-1}\ldots\mathsf{A}_0$ и $\mathsf{B} = \mathsf{B}_n\mathsf{B}_{n-1}\ldots\mathsf{B}_0$. При i от 0 до n положим $\mathsf{C}_i = \mathsf{A}_i \sqcap \mathsf{B}_i$. Из следствий 2.6 и 2.12 мы для всех C_i получаем, что $\mathsf{C}_i \in B_i$. Используя лемму 2.4 мы получаем соотношения

$$\mathsf{A} \sqcap \mathsf{B} = \mathsf{A}_n \sqcap \ldots \sqcap \mathsf{A}_0 \sqcap \mathsf{B}_n \sqcap \ldots \sqcap \mathsf{B}_0 = \mathsf{C}_n \sqcap \ldots \sqcap \mathsf{C}_0 \sim \mathsf{C}_n \ldots \mathsf{C}_0,$$

$$h_k(\mathsf{A}) \sqcap h_k(\mathsf{B}) = \mathsf{A}_n \sqcap \ldots \sqcap \mathsf{A}_k \sqcap \mathsf{B}_n \sqcap \ldots \sqcap \mathsf{B}_k = \mathsf{C}_n \sqcap \ldots \sqcap \mathsf{C}_k \sim \mathsf{C}_n \ldots \mathsf{C}_k.$$

В силу леммы 2.10

$$h_k(\mathsf{A} \sqcap \mathsf{B}) \sim h_k(\mathsf{C}_n \ldots \mathsf{C}_0) = \mathsf{C}_n \ldots \mathsf{C}_k \sim h_k(\mathsf{A}) \sqcap h_k(\mathsf{B}).$$

$\square$

Следствие 2.14. *Пусть* A *и* B *слова. Тогда* $t(\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}) = \max(t(\mathsf{A}), t(\mathsf{B}))$.

Доказательство. В силу леммы 2.13 при произвольном k:

$$h_k(\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}) \sim \top \iff h_k(\mathsf{A}) \sim \top \text{ и } h_k(\mathsf{B}) \sim \top.$$

Таким образом, искомое следует из леммы 2.9. $\square$

Обозначим через B множество $\bigcup\limits_{n\in\omega} B_n$.

Назовем слово A *разложимым*, если существуют такие слова $\mathsf{B} \not\sim \mathsf{A}$ и $\mathsf{C} \not\sim \mathsf{A}$, что $\mathsf{B} \wedge \mathsf{C} \sim \mathsf{A}$.

Предложение 2.15. *Пусть слово* $\mathsf{A} \in NF$*. Тогда* A *неразложимо, если и только если* $\mathsf{A} \in B$*. При этом, если* $\mathsf{A} \in W_n$ *разложимо, то существуют слова* $\mathsf{B}, \mathsf{C} \in W_n$ *такие, что* $\mathsf{B} \wedge \mathsf{C} \sim \mathsf{A}$*,* $\mathsf{B} \not\sim \mathsf{A}$ *и* $\not\sim \mathsf{A}$.

Доказательство. Пусть $\mathsf{A} \notin B$, докажем, что A разложимо. Представим A в виде $\mathsf{A} = h_{t(\mathsf{A})}(\mathsf{A})\mathsf{B}$, где $\mathsf{B} \neq \top$ и $t(\mathsf{B}) < t(\mathsf{A})$. Рассматривая процедуру приведения слова к нормальной форме (см. стр 38), мы замечаем, что для всякого слова длина его нормальной формы не превосходит его собственной длины. Тем самым нормальные формы слов $h_{t(\mathsf{A})}(\mathsf{A})$ и B не совпадают со словом A. Следовательно, $\mathsf{A} \not\sim h_{t(\mathsf{A})}(\mathsf{A})$ и $\mathsf{A} \not\sim \mathsf{B}$, при том $\mathsf{A} \sim h_{t(\mathsf{A})}(\mathsf{A}) \wedge \mathsf{B}$. Таким образом, A разложимо. Несложно видеть, что если для некоторого n мы имеем $\mathsf{A} \in W_n$, то $h_{t(\mathsf{A})}(\mathsf{A}), \mathsf{B} \in W_n$.

Пусть $\mathsf{A} \in B$, докажем, что A неразложимо. Выберем такое натуральное число k, что $\mathsf{A} \in B_k$. Рассмотрим произвольные слова B и C такие, что $\mathsf{A} \sim \mathsf{B} \wedge \mathsf{C}$. Из леммы 2.13 мы выводим, что $h_k(\mathsf{B}) \wedge h_k(\mathsf{C}) \sim h_k(\mathsf{A}) = \mathsf{A}$. Таким образом, в силу следствия 2.14 мы имеем $t(h_k(\mathsf{B})) \leq k$ и $t(h_k(\mathsf{C})) \leq k$. Следовательно, $h_k(\mathsf{B}) \in B_k$ и $h_k(\mathsf{C}) \in B_k$. Тем самым в силу следствия 2.6 либо $h_k(\mathsf{B}) \wedge h_k(\mathsf{C}) \sim h_k(\mathsf{B})$, либо $h_k(\mathsf{B}) \wedge h_k(\mathsf{C}) \sim h_k(\mathsf{C})$. Без ограничения общности мы будем считать, что $h_k(\mathsf{B}) \wedge h_k(\mathsf{C}) \sim h_k(\mathsf{B})$. Таким образом, мы имеем $\mathrm{GLP} \vdash \mathsf{A} \leftrightarrow h_k(\mathsf{B})$, $\mathrm{GLP} \vdash \mathsf{B} \to h_k(\mathsf{B})$ и $\mathrm{GLP} \vdash \mathsf{A} \to \mathsf{B}$. Следовательно $\mathsf{A} \sim \mathsf{B}$. Последнее, в силу произвольности выбора слов B и C, означает неразложимость слова A. $\square$

Лемма 2.16. *Пусть для пары слов* $\langle \mathsf{A}, \mathsf{B} \rangle$ *выполняются следующие два условия:*

1. $\mathrm{GLP} \nvdash \mathsf{A} \to \mathsf{B}$*;*
2. *для всякого слова* $\mathsf{C} \not\sim \mathsf{A}$ *такого, что* $\mathrm{GLP} \vdash \mathsf{C} \to \mathsf{A}$ *имеет место* $\mathrm{GLP} \vdash \mathsf{C} \to \mathsf{B}$.

Тогда $\mathsf{A} <_0 \mathsf{B}$.

Доказательство. Представим слова A и B в виде $\mathsf{A} = h_1(\mathsf{A})\mathsf{A}_1$, $\mathsf{B} = h_1(\mathsf{B})\mathsf{B}_1$. Заметим, что $\mathsf{A}_1, \mathsf{B}_1 \in B_0$. В силу леммы 2.4 и следствия 2.6 мы имеем

$$\begin{aligned}
\mathrm{GLP} \vdash h_1(\mathsf{A})0\mathsf{A} &\to h_1(\mathsf{A})0h_1(\mathsf{A})\mathsf{A}_1 \\
&\to h_1(\mathsf{A}) \wedge \langle 0\rangle(h_1(\mathsf{A})\mathsf{A}_1) \\
&\to h_1(\mathsf{A}) \wedge \langle 0\rangle(h_1(\mathsf{A}) \wedge \mathsf{A}_1) \\
&\to h_1(\mathsf{A}) \wedge \langle 0\rangle\mathsf{A}_1 \\
&\to h_1(\mathsf{A}) \wedge \mathsf{A}_1 \\
&\to \mathsf{A}.
\end{aligned}$$

Поскольку $o_0(h_1(\mathsf{A})0\mathsf{A}) > o_0(\mathsf{A})$, мы имеем $h_1(\mathsf{A})0\mathsf{A} \nsim \mathsf{A}$. Таким образом, пользуясь условием 2, мы получаем $\mathrm{GLP} \vdash h_1(\mathsf{A})0\mathsf{A} \to \mathsf{B}$. Тем самым мы имеем

$$\begin{aligned}
h_1(\mathsf{A}) \sim h_1(h_1(\mathsf{A})0\mathsf{A}) \sim h_1(h_1(\mathsf{A})0\mathsf{A} \sqcap \mathsf{B}) \sim \\
\sim h_1(h_1(\mathsf{A})0\mathsf{A}) \sqcap h_1(\mathsf{B}) \sim h_1(\mathsf{A}) \sqcap h_1(\mathsf{B}).
\end{aligned}$$

Предположим, что $\mathsf{A} \not<_0 \mathsf{B}$. Так как $\mathsf{A} \nsim \mathsf{B}$ и $<_0$ является отношением строгого линейного порядка мы имеем $\mathsf{B} <_0 \mathsf{A}$. Используя следствие 2.6 и то, что $\mathsf{B}_1 <_0 0\mathsf{B}$ мы получаем $\mathrm{GLP} \vdash \langle 0\rangle\mathsf{B} \to \mathsf{B}_1$. Поскольку $\mathrm{GLP} \vdash \mathsf{A} \to \langle 0\rangle\mathsf{B}$, мы имеем $\mathrm{GLP} \vdash \mathsf{A} \to \mathsf{B}_1$. Кроме того $\mathrm{GLP} \vdash \mathsf{A} \to h_1(\mathsf{A})$ и $\mathrm{GLP} \vdash h_1(\mathsf{A}) \to h_1(\mathsf{B})$, следовательно $\mathrm{GLP} \vdash \mathsf{A} \to h_1(\mathsf{B})$. Так как $\mathsf{B} \sim h_1(\mathsf{B}) \wedge \mathsf{B}_1$, мы имеем $\mathrm{GLP} \vdash \mathsf{A} \to \mathsf{B}$, что противоречит условию 1. Соответственно, $\mathsf{A} <_0 \mathsf{B}$, что и требовалось доказать. □

Лемма 2.17. *Для всякого слова* A *пара* $\langle \mathsf{A}, d_0(\mathsf{A})\rangle$ *удовлетворяет условиям леммы 2.16.*

Доказательство. Докажем, что выполняется условие 1. В самом деле, по иррефлексивности $<_0$ мы имеем $\mathrm{GLP} \nvdash \mathsf{A} \to \langle 0\rangle\mathsf{A}$.

Теперь покажем, что выполняется условие 2. Рассмотрим произвольное слово $\mathsf{C} \nsim \mathsf{A}$, что $\mathrm{GLP} \vdash \mathsf{C} \to \mathsf{A}$ и докажем, что $\mathrm{GLP} \vdash \mathsf{C} \to$

$\langle 0\rangle \mathsf{A}$. Предположим, что $\mathsf{C} <_0 \mathsf{A}$. Отсюда мы получаем

$$\begin{aligned} \mathrm{GLP} \vdash \mathsf{A} &\to \langle 0\rangle \mathsf{C} \\ &\to \langle 0\rangle \mathsf{A}. \end{aligned}$$

Мы показали, что $\mathsf{A} <_0 \mathsf{A}$, а это противоречит иррефлексивности $<_0$. Таким образом, $\mathsf{A} <_0 \mathsf{C}$, что и требовалось доказать. □

Лемма 2.18. *Для любого k и $\mathsf{A} \in S_k$ имеют место следующие факты:*

1. $\mathsf{A} <_0 \langle k\rangle \mathsf{A}$;
2. *если* $\mathsf{A} \in B_k$, *то* $\forall \mathsf{B} \in S_k(\mathsf{A} <_0 \mathsf{B} \;\Rightarrow\; \mathrm{GLP} \vdash \mathsf{B} \to \mathsf{A})$;
3. *если* $\mathrm{GLP} \vdash \langle k\rangle \mathsf{A} \to \mathsf{A}$, *то* $\mathsf{A} \in B_k$.

Доказательство. 1. Очевидно следует из аксиомы 4 логики GLP.

2. Пусть $\mathsf{A} \in B_k$, а B произвольное слово из S_k такое, что $\mathsf{A} <_0 \mathsf{B}$. Докажем, что $\mathrm{GLP} \vdash \mathsf{B} \to \mathsf{A}$. В силу согласованности $<_k$ и $<_0$ на S_k мы имеем $\mathsf{A} <_k \mathsf{B}$. Так как $\mathrm{GLP} \vdash \mathsf{B} \to \langle k\rangle \mathsf{A}$ и $\mathrm{GLP} \vdash \langle k\rangle \mathsf{A} \to \mathsf{A}$ мы имеем требуемое $\mathrm{GLP} \vdash \mathsf{B} \to \mathsf{A}$.

3. Пусть $\mathrm{GLP} \vdash \langle k\rangle \mathsf{A} \to \mathsf{A}$. С помощью следствия 2.14 мы получаем, что $t(\mathsf{A}) \leq t(k\mathsf{A}) = k$. Следовательно либо A начинается с k, либо $\mathsf{A} = \top$. Тем самым $\mathsf{A} \in B_k$. □

2.3 Определимые в полурешетках слов свойства

Напомним, что для $\alpha \leq \omega$ мы обозначаем через $\mathfrak{S}_\alpha = (W^N_\alpha; \sqcap)$. Перед тем, как в следующем разделе перейти к доказательству неразрешимости элементарных теорий моделей $\mathfrak{S}_\alpha$ для $\alpha \geq 2$, мы покажем, что в этих моделях можно выразить многие естественные понятия, относящиеся к словам.

Лемма 2.19. *Пусть* A — *слово, а* k — *натуральное число. Тогда* $\mathsf{A} \in S_k$, *если и только если* $\mathsf{A} <_0 \langle k+1\rangle \top$.

Доказательство. Используя определения функции o, заметим, что наличие в A символов больших k равносильно тому, что $o_0(\mathsf{A}) \geq \omega_{k+1} = o_0(\langle k+1\rangle \top)$. □

Мы обозначаем через $\preccurlyeq$ естественный частичный порядок на словах, для всяких $\mathsf{A}, \mathsf{B} \in W^N$ мы полагаем

$$\mathsf{A} \preccurlyeq \mathsf{B} \overset{\text{def}}{\iff} \text{GLP} \vdash \mathsf{A} \to \mathsf{B}.$$

Отметим, что для всех $\alpha \leq \omega$ этот порядок, будучи ограничен на W_α^N, совпадает с естественным порядком на полурешетке $\mathfrak{S}_\alpha$:

$$\forall \mathsf{A}, \mathsf{B} \in W_\alpha^N (\mathsf{A} \sqcap \mathsf{B} = \mathsf{A} \iff \mathsf{A} \preccurlyeq \mathsf{B}).$$

Мы предполагаем знакомство читателя с понятием определимости в моделях. Отметим, что мы приводим обсуждение моделей и определимости в более широком контексте многосортных моделей в разделе 2.4.

Предложение 2.20. *Пусть $\alpha \leq \omega$. Тогда для всех натуральных $k \leq \alpha$ в модели $\mathfrak{S}_\alpha$ формулами первого порядка определимы следующие функции, бинарные отношения и множества:*

1. *множество $B \cap W_\alpha^N$;*
2. *функция d_0 и бинарное отношение $<_0$;*
3. *множество $B_k \cap W_\alpha^N$;*
4. *функции h_k;*
5. *множество $S_k \cap W_\alpha^N$;*
6. *функции $\langle k \rangle$ и бинарные отношения $<_k$;*
7. *множество W_k.*

Доказательство. 1. Из предложения 2.15 следует, что принадлежность слова $\mathsf{A} \in W_\alpha^N$ к множеству B эквивалентна

$$\forall x \forall y (\mathsf{A} = x \sqcap y \leftrightarrow \mathsf{A} = x \lor \mathsf{A} = y).$$

2. Для всяких слов A и B мы имеем

$$\mathsf{B} \preccurlyeq d_0(\mathsf{A}) \iff \text{GLP} \vdash \mathsf{B} \to \langle 0 \rangle \mathsf{A} \iff \mathsf{A} <_0 \mathsf{B}.$$

Тем самым нам осталось выразить функцию d_0. Для всякого слова A

$$d_0(\mathsf{A}) = \max_{\preccurlyeq}\{x \in W_\alpha^N \mid x \preccurlyeq d_0(\mathsf{A})\} = \max_{\preccurlyeq}\{x \in \mathfrak{S}_\alpha \mid \mathsf{A} <_0 x\}.$$

Зададим формулу $A(x, y)$ языка теории $\mathrm{Th}(\mathfrak{S}_\alpha)$ такую, что всякая пара слов $\langle \mathsf{B}, \mathsf{C} \rangle$ удовлетворяет условию леммы 2.16, если и только если $\mathfrak{S}_\alpha \models A(\mathsf{B}, \mathsf{C})$:

$$A(x, y) \rightleftharpoons x \not\preccurlyeq y \wedge \forall z < x (z \preccurlyeq y).$$

По лемме 2.16 множество $\{y \in \mathfrak{S}_\alpha \mid A(\mathsf{A}, y)\}$ включено в множество $\{y \in \mathfrak{S}_\alpha \mid \mathsf{A} <_0 y\}$. При этом, по лемме 2.17, максимум второго множества содержится в первом. Следовательно, $d_0(\mathsf{A}) = \max_{\preccurlyeq}(\{y \mid A(\mathsf{A}, y)\})$. Таким образом, функция d_0, а тем самым и отношение $<_0$ определимы в модели $\mathfrak{S}_\alpha$.

3. Последовательно, в порядке увеличения k, построим определения множеств $B_k \cap W_\alpha^N$. Пусть построены определения множеств $B_0 \cap W_\alpha^N$, $B_1 \cap W_\alpha^N, \ldots, B_{k-1} \cap W_\alpha^N$. Построим определение множества $B_k \cap W_\alpha^N$. Положим $G_k = \bigcup\limits_{i \geq k} (B_i \cap W_\alpha^N)$. Ясно, что $B_k \cap W_\alpha^N \subset G_k \subset S_k \cap W_\alpha^N$. При том,

$$G_k = ((B \cap W_\alpha^N) \setminus \bigcup_{i, 0 \leq i < k} (B_i \cap W_\alpha^N)) \cup \{\top\}$$

и тем самым множество G_k определимо. Пользуясь леммой 2.18 мы получаем, что

$$\mathsf{A} \in B_k \cap W_\alpha^N \iff \mathsf{A} \in G_k \cap W_\alpha^N \wedge \forall x \in G_k \cap W_\alpha^N (\mathsf{A} <_0 x \to x \preccurlyeq \mathsf{A}).$$

4. Пусть A и B слова из W_α^N. Покажем, что утверждение $h_k(\mathsf{A}) = h_k(\mathsf{B})$ эквивалентно тому, что в $\mathfrak{S}_\alpha$ выполняется предложение:

$$\exists x_0 \in B_0 \cap W_\alpha^N \ldots \exists x_{k-1} \in B_{k-1} \cap W_\alpha^N (\mathsf{A} \sqcap x_{k-1} \sqcap \ldots \sqcap x_0 = \mathsf{B} \sqcap x_{k-1} \sqcap \ldots \sqcap x_0). \tag{2.2}$$

В силу леммы 2.13 и того, что для всякого $i < k$ и $x \in B_i$ имеет место $h_k(x) = \top$, мы получаем, что из предложения (2.2) следует $h_k(\mathsf{A}) = h_k(\mathsf{B})$.

Пусть теперь $h_k(\mathsf{A}) = h_k(\mathsf{B})$. Докажем, что имеет место (2.2). Рассмотрим слова $\mathsf{A}_0, \mathsf{B}_0 \in B_0 \cap W_\alpha^N, \ldots, \mathsf{A}_{k-1}, \mathsf{B}_{k-1} \in B_{k-1} \cap W_\alpha^N$ такие, что $\mathsf{A} = h_k(\mathsf{A})\mathsf{A}_{k-1} \ldots \mathsf{A}_0$, $\mathsf{B} = h_k(\mathsf{B})\mathsf{B}_{k-1} \ldots \mathsf{B}_0$. С помощью следствия 2.12

мы получаем, что $\mathsf{A}_i \sqcap \mathsf{B}_i \in B_i$ при $i < k$. Заметим, что

$$\mathsf{A} \sqcap \bigsqcap_{0 \le i < k} (\mathsf{A}_i \sqcap \mathsf{B}_i) = h_k(\mathsf{A}) \sqcap \bigsqcap_{0 \le i < k} (\mathsf{A}_i \sqcap \mathsf{B}_i) = h_k(\mathsf{B}) \sqcap \bigsqcap_{0 \le i < k} (\mathsf{A}_i \sqcap \mathsf{B}_i) = \mathsf{B} \sqcap \bigsqcap_{0 \le i < k} (\mathsf{A}_i \sqcap \mathsf{B}_i).$$

Тем самым, выбирая $\mathsf{A}_i \sqcap \mathsf{B}_i$ в качестве x_i, мы выводим предложение (2.2). Таким образом, мы доказали требуемую эквивалентность.

Заметим, что $h_k(\mathsf{A}) = \max_{\preccurlyeq}\{x \in W_\alpha^N \mid h_k(x) = h_k(\mathsf{A})\}$. Таким образом, в силу доказанной выше эквивалентности функция h_k определима.

5. Заметим, что для всякого слова $\mathsf{A} \in NF$

$$\mathsf{A} \in S_k \iff \mathsf{A} = h_k(\mathsf{A}).$$

Тем самым, множество $S_k \cap W_\alpha^N$ определимо.

6. Покажем, что выразима функция $x \mapsto d_k(h_k(x))$. Пусть слово $\mathsf{A} \in W_\alpha^N$. Так как $h_k(\mathsf{A}) \in S_k$ и на множестве S_k отношения $<_0$ и $<_k$ совпадают, мы получаем, что

$$d_k(h_k(\mathsf{A})) = \min_{<_0}\{x \in S_k \mid h_k(\mathsf{A}) <_0 x\}.$$

Тем самым, мы показали искомую выразимость.

Пусть слово $\mathsf{A} \in W_\alpha^N$ и слова $\mathsf{A}_0 \in B_0 \cap W_\alpha^N, \ldots, \mathsf{A}_{k-1} \in B_{k-1} \cap W_\alpha^N$ таковы, что $\mathsf{A} = h_k(\mathsf{A}) \sqcap \mathsf{A}_{k-1} \sqcap \ldots \sqcap \mathsf{A}_0$. В силу леммы 1.1 мы имеем $d_k(\mathsf{A}) = d_k(h_k(\mathsf{A}) \sqcap \mathsf{A}_{k-1} \sqcap \ldots \sqcap \mathsf{A}_0) = d_k(h_k(\mathsf{A})) \sqcap \mathsf{A}_{k-1} \sqcap \ldots \sqcap \mathsf{A}_0$. Кроме того заметим, что для данного A существует по крайней мере один набор $\mathsf{A}_0, \ldots, \mathsf{A}_{k-1}$, обладающий указанными выше свойствами. Тем самым мы можем выразить функцию d_k таким образом:

$$\begin{aligned} x = d_k(\mathsf{A}) \iff \exists y_0 \in B_0 \cap W_\alpha^N \ldots \exists y_{k-1} \in B_{k-1} \cap W_\alpha^N(\\ (\mathsf{A} = h_k(\mathsf{A}) \sqcap y_{k-1} \sqcap \ldots \sqcap y_0) \\ \wedge (x = d_k(h_k(\mathsf{A})) \sqcap y_{k-1} \sqcap \ldots \sqcap y_0)). \end{aligned}$$

Порядок $<_k$ определяется через функцию d_k:

$$\mathsf{A} <_k \mathsf{B} \iff \mathsf{B} \preccurlyeq d_k(\mathsf{A}).$$

7. Из пункта 6 этого предложения и леммы 2.19 следует, что в рассматриваемой модели при $k < \alpha$ множество W_k^N может быть определено следующим образом:

$$\mathsf{A} \in W_k^N \iff \mathsf{A} <_0 d_{k+1}(\top).$$

При $k = \alpha$ множество W_k^N определимо так как совпадает со всем универсумом. $\square$

Лемма 2.21. *[9, лемма 3.3] Пусть α, β и γ — ординалы. Если $\beta < \alpha$ и $\gamma < \omega^{\ell(\alpha)}$, то $\beta + \gamma < \alpha$.*

Доказательство. Докажем, что если $\beta < \alpha$, то $\beta + \omega^{\ell(\alpha)} \leq \alpha$ — из этого факта следует искомое. Пусть $\beta < \alpha$ и канторовская нормальная форма α имеет вид $\omega^{\alpha_1} + \dots + \omega^{\alpha_{n-1}} + \omega^{\alpha_n}$. Если $\beta < \omega^{\alpha_1} + \dots + \omega^{\alpha_{n-1}}$, то доказываемое очевидно. Таким образом, мы будем считать, что $\beta = \omega^{\alpha_1} + \dots + \omega^{\alpha_{n-1}} + \gamma$, где ординал γ таков, что $0 < \gamma < \omega^{\alpha_n}$. Пусть канторовская нормальная форма ординала γ имеет вид $\omega^{\gamma_1} + \dots + \omega^{\gamma_m}$. Заметим, что $\gamma_1 < \alpha_n$, а следовательно существует такой ординал $\delta \geq 1$, что $\gamma_1 + \delta = \alpha_n$. Таким образом, имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\gamma + \omega^{\ell(\alpha)} &= \omega^{\gamma_1} + \dots + \omega^{\gamma_m} + \omega^{\gamma_1 + \delta} \leq \omega^{\gamma_1} \cdot m + \omega^{\gamma_1} \cdot \omega^{\delta} \\ &= \omega^{\gamma_1} \cdot (m + \omega^{\delta}) = \omega^{\gamma_1} \cdot \omega^{\delta} = \omega^{\alpha_n},\end{aligned}$$

$$\beta + \omega^{\ell(\alpha)} = \omega^{\alpha_1} + \dots + \omega^{\alpha_{n-1}} + \gamma + \omega^{\ell(\alpha)} \leq \omega^{\alpha_1} + \dots + \omega^{\alpha_{n-1}} + \omega^{\alpha_n} = \alpha.$$

$\square$

Из предложения 2.1 и определения NF вытекает

Лемма 2.22. *Пусть слова $\mathsf{A}_1, \dots, \mathsf{A}_n$ таковы, что $\mathsf{A}_1, \dots, \mathsf{A}_n \in S_{k+1} \cap NF$. Тогда $\mathsf{A}_1 k \mathsf{A}_2 k \dots k \mathsf{A}_n \in NF$, если и только если $o_{k+1}(\mathsf{A}_1) \leq o_{k+1}(\mathsf{A}_2) \leq \dots \leq o_{k+1}(\mathsf{A}_n)$.*

Простой проверкой мы получаем

Лемма 2.23. *Пусть натуральные числа $n \geq 1$, k, слово $\mathsf{A} \in S_k \setminus \{\top\}$ и слова $\mathsf{A}_1 \in S_{k+1}, \ldots, \mathsf{A}_n \in S_{k+1}$ таковы, что $\mathsf{A} = \mathsf{A}_1 k \ldots k \mathsf{A}_n$. Тогда для всякого m от 1 до n имеет место $o_k(\mathsf{A}) = o_k(\mathsf{A}_m k \ldots k \mathsf{A}_n) + \omega^{o_{k+1}(\mathsf{A}_{m-1})} + \cdots + \omega^{o_{k+1}(\mathsf{A}_1)}$.*

Лемма 2.24. *Для всякого ординала $\alpha \leq \omega$ и натурального числа $k < \alpha$ существует формула $In_k^\alpha(x, y)$ языка первого порядка модели $\mathfrak{S}_\alpha$, обладающая следующими свойствами:*

1. *Для всякого $\mathsf{B} \in S_k \cap W_\alpha^N$ существует лишь конечное число $\mathsf{A} \in S_{k+1} \cap W_\alpha^N$, для которых в $\mathfrak{S}_\alpha$ выполняется $In_k^\alpha(\mathsf{A}, \mathsf{B})$.*
2. *Для всякого конечного множества $A \subset S_{k+1} \cap W_\alpha^N$ существует $\mathsf{B} \in S_k \cap W_\alpha^N$ такое, что всякое $\mathsf{A} \in S_{k+1}$ принадлежит A тогда и только тогда, когда $\mathfrak{S}_\alpha \models In_k^\alpha(\mathsf{A}, \mathsf{B})$.*

Доказательство. Определим $In_k^\alpha(x, y)$:

$$In_k^\alpha(x, y) \rightleftharpoons y \neq \top \wedge \exists z \in S_k \cap W_\alpha^N (h_{k+1}(z) = x \wedge z \leq_k y <_k (x \sqcap d_k(z))).$$

Установим, что для всякого слова $\mathsf{B} \in S_k \cap W_\alpha^N$ вида $\mathsf{A}_1 k \ldots k \mathsf{A}_n$, где $\mathsf{A}_i \in S_{k+1} \cap W_\alpha^N$ при i от 1 до n, имеет место равенство $\{\mathsf{A} \in S_{k+1} \cap NF \mid In_k^\alpha(\mathsf{A}, \mathsf{B})\} = \{\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_n\}$. Заметим, что отсюда следует выполнение обоих условий на предикат. Теперь докажем требуемое предложение. Если $\mathsf{B} = \top$, то оба множества пусты. Покажем, что в случае $\mathsf{B} \neq \top$ для всякого $\mathsf{A} \in S_{k+1} \cap W_\alpha^N$ мы имеем

$$\mathsf{A} \in \{\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_n\} \iff \mathfrak{S}_\alpha \models In_k^\alpha(\mathsf{A}, \mathsf{B}).$$

$\Rightarrow$: Пусть $\mathsf{A} \in \{\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_n\}$. Покажем, что $In_k^\alpha(\mathsf{A}, \mathsf{B})$. Пусть m минимальный индекс из $\{1, \ldots, n\}$ такой, что $\mathsf{A} = \mathsf{A}_m$. В качестве слова z, возьмем слово $\mathsf{C} = \mathsf{A}_m k \ldots k \mathsf{A}_n$. Таким образом, требуется доказать, что $h_{k+1}(\mathsf{C}) = \mathsf{A}$, $\mathsf{C} \leq_k \mathsf{B}$ и $\mathsf{B} <_k (\mathsf{A} \sqcap d_k \mathsf{C})$. Выполнение первых двух условий очевидно. В силу леммы 2.22 и минимальности m для всякого i от 1 до $m-1$ мы имеем $o_{k+1}(\mathsf{A}_i) < o_{k+1}(\mathsf{A}_m)$. Следовательно, учитывая лемму 2.21, мы получаем $o_k(\mathsf{B}) = o_k(\mathsf{A}_m k \ldots k \mathsf{A}_n) + \omega^{o_{k+1}(\mathsf{A}_{m-1})} + \cdots + \omega^{o_{k+1}(\mathsf{A}_1)} <$

$o_k(\mathsf{A}_m k \dots k \mathsf{A}_n) + \omega^{o_{k+1}(\mathsf{A}_m)} = o_k(\mathsf{A}_m k \mathsf{C}) = o_k(\mathsf{A} \sqcap d_k(\mathsf{C}))$. Таким образом, выполняется оставшееся условие $\mathsf{B} <_k (\mathsf{A} \sqcap d_k(\mathsf{C}))$.

$\Leftarrow$: Возьмем слово $\mathsf{A} \in (S_{k+1} \cap W_\alpha^N) \setminus \{\mathsf{A}_1, \dots, \mathsf{A}_n\}$ и докажем, что не выполняется $In_k^\alpha([\mathsf{A}]_\sim, [\mathsf{B}]_\sim)$. Предположим противное. Таким образом, существует слово $\mathsf{C} \in S_k \cap W_\alpha^N$ такое, что $h_{k+1}(\mathsf{C}) = \mathsf{A}$, $\mathsf{C} \leq_k \mathsf{B}$ и $\mathsf{B} <_k (\mathsf{A} \sqcap d_k(\mathsf{C}))$. В силу леммы 2.22 существует натуральное число $s \leq n$ такое, что $\forall i \leq s(o_{k+1}(\mathsf{A}_i) < o_{k+1}(\mathsf{A}))$, а $\forall i > s(o_{k+1}(\mathsf{A}_i) > o_{k+1}(\mathsf{A}))$. Поскольку $\mathsf{C} \leq_k \mathsf{B}$ и $o_k(\mathsf{C}) \geq o_k(\mathsf{A})$, мы имеем $o_k(\mathsf{A}) \leq o_k(\mathsf{B})$. Следовательно, $\mathsf{A} \leq_{k+1} \mathsf{A}_n$ и тем самым $s < n$. Разберем возможные варианты сравнения $o_k(\mathsf{C})$ и $o_k(\mathsf{A}_{s+1} k \dots k \mathsf{A}_n)$:

1. $o_k(\mathsf{C}) < o_k(\mathsf{A}_{s+1} k \dots k \mathsf{A}_n)$. Учитывая, что $\ell(o_k(\mathsf{A}_{s+1} k \dots k \mathsf{A}_n)) = o_{k+1}(\mathsf{A}_{s+1})$ и лемму 2.21, мы имеем $o_k(\mathsf{A} \wedge \langle k \rangle \mathsf{C}) = o_k(\mathsf{C}) + \omega^{o_{k+1}(\mathsf{A})} < o_k(\mathsf{A}_{s+1} k \dots k \mathsf{A}_n) \leq o_k(\mathsf{B})$. Тем самым мы пришли к противоречию с условием $\mathsf{B} <_k (\mathsf{A} \sqcap d_k(\mathsf{C}))$.

2. $o_k(\mathsf{C}) = o_k(\mathsf{A}_{s+1} k \dots k \mathsf{A}_n)$. В этом случае мы имеем $\mathsf{A} = h_{k+1}(\mathsf{C}) = h_{k+1}(\mathsf{A}_{s+1} k \dots k \mathsf{A}_n) = \mathsf{A}_{s+1}$, но $\mathsf{A} \in (S_{k+1} \cap W_\alpha^N) \setminus \{\mathsf{A}_1, \dots, \mathsf{A}_n\}$ — противоречие.

3. $o_k(\mathsf{C}) > o_k(\mathsf{A}_{s+1} k \dots k \mathsf{A}_n)$. Учитывая лемму 2.21 и то, что $\ell(o_k(\mathsf{C})) = o_{k+1}(\mathsf{A})$, мы получаем $o_k(\mathsf{B}) = o_k(\mathsf{A}_{s+1} k \dots k \mathsf{A}_n) + \omega^{o_{k+1}(\mathsf{A}_s)} + \dots + \omega^{o_{k+1}(\mathsf{A}_1)} < o_k(\mathsf{C})$, а это противоречит условию $\mathsf{C} \leq_k \mathsf{B}$.

Таким образом, ни один из случаев не возможен и мы пришли к противоречию, что завершает доказательство леммы. □

2.4 Неразрешимые теории

В этом разделе мы докажем неразрешимость элементарных теорий моделей $\mathfrak{S}_\alpha$ для всех ординалов α таких, что $2 \leq \alpha \leq \omega$.

Модели и интерпретации.

Нами будут рассматриваться многосортные модели. Мы полагаем, что *многосортная сигнатура* σ состоит из

1. конечного множества сортов объектов $T = \{t_1, \dots, t_n\}$;

2. множеств предикатных символов $Pred$ и функциональных символов Fun;
3. функции $PType$ сопоставляющей каждому предикатному символу $P \in Pred$ конечную последовательность $(s_1, \dots, s_k)$ элементов T;
4. функции $FType$ сопоставляющей каждому функциональному символу $f \in Fun$ пару $\langle (s_1, \dots, s_k), r \rangle$, первый элемент которой является конечной последовательностью элементов T, а второй элементом T;

Во всех примерах, которые встречаются в этой диссертации сигнатуры счетны и допускают эффективное задание (все множества, о которых идет речь в определение сигнатуры разрешимы, а функции рекурсивны). Поэтому далее мы всегда, рассматривая некоторую сигнатуру, предполагаем, что она эффективно задана ничего дополнительно не оговаривая.

Модель $\mathfrak{A}$ сигнатуры σ состоит из семейства играющих роль предметных областей множеств A_t, где t пробегает T, оценок $I(P)$ предикатных символов $P \in Pred$ и оценок $I(f)$ функциональных символов $f \in Fun$. Пусть $P \in Pred$ и $PType(P) = (s_1, \dots, s_k)$. Тогда $I(P)$ — это подмножество $A_{s_1} \times \ldots \times A_{s_k}$. Пусть $f \in Fun$, $FType(f) = \langle (s_1, \dots, s_k), r \rangle$. Тогда $I(f)$ — это функция $A_{s_1} \times \ldots \times A_{s_k} \to A_r$.

Для каждого сорта $t_i \in T$ мы обозначаем символами $x^{t_i}, y^{t_i}, z^{t_i} \dots$ первопорядковые переменные этого сорта. Естественным образом вводятся многосортные формулы первого порядка с равенством данной многосортной сигнатуры. Также естественным образом вводится понятие истинности этих формул в моделях этой сигнатуры.

Для класса моделей $\mathbf{A}$ некоторой сигнатуры σ мы обозначаем через $\mathrm{Th}(\mathbf{A})$ *элементарную теорию* этого класса моделей — множество всех первопорядковых предложений сигнатуры σ истинных во всех моделях $\mathfrak{A} \in \mathbf{A}$. В этой диссертации мы придерживаемся теоретико-модельного взгляда на теории первого порядка. Мы называем множество формул первого порядка сигнатуры σ *теорией*, если оно является элементарной теорией некоторого класса моделей $\mathbf{A}$ сигнатуры σ. Для модели $\mathfrak{A}$ ее элементарная теория — это теория $\mathrm{Th}(\{\mathfrak{A}\})$.

Мы говорим, что теория *разрешима*, если она является разрешимым множеством формул.

Мы для доказательства ряда фактов о разрешимости и неразрешимости теорий используем метод интерпретаций [30, 3]. Мы в целом следуем терминологии интерпретаций В. Ходжеса [21, глава 5]. Рассматриваемые нами в этом разделе интерпретации отличаются от используемых В. Ходжесом тем, что мы работаем с многосортными моделями и ограничиваемся одномерными интерпретациями. Кратко опишем связанные с этой техникой понятия в требуемом нам случае. Пусть даны сигнатуры σ_1 и σ_2. *Интерпретация* Γ состоит из:

1. функции i, сопоставляющей каждому сорту t из σ_2 сорт $i(t)$ сигнатуры σ_1, в котором будут интерпретироваться объекты сорта t;
2. формул $U_t(x^{i(t)})$ сигнатуры σ_1, задающих области интерпретаций объектов типа t и формул $Eq_t(x^{i(t)}, y^{i(t)})$ сигнатуры σ_1, интерпретирующих равенство для всех сортов t из σ_2;
3. семейства формул $P^I(x_k^{i(s_1)}, \dots, x_k^{i(s_k)})$ сигнатуры σ_1, где P пробегает $Pred_{\sigma_2}$ и $PType_{\sigma_2}(P) = (s_1, \dots, s_k)$;
4. семейства формул $Int_f(x_k^{i(s_1)}, \dots, x_k^{i(s_k)}, y^{i(r)})$ сигнатуры σ_1, где f пробегает Fun_{σ_2} и $FType_{\sigma_2}(P) = \langle (s_1, \dots, s_k), r \rangle$ (допуская вольность, мы будем записывать эти формулы как $f^I(x_k^{i(s_1)}, \dots, x_k^{i(s_k)}) = y^{i(r)}$).

Когда мы строим интерпретации, если мы не оговариваем иного, то мы считаем, что интерпретации равенств $Eq_t(x^{i(t)}, y^{i(t)})$ — это просто $x^{i(t)} = y^{i(t)}$; такие интерпретации равенств мы называем абсолютными. Интерпретация Γ однозначно задает $\mathrm{tr}_\Gamma \colon F \longmapsto F^\star$ — перевод формул сигнатуры σ_2 в формулы сигнатуры σ_1; мы не приводим здесь точного задания tr_Γ, его построение аналогично построению перевода формул из [21, глава 5]. Пусть T_1 теория сигнатуры σ_1 и T_2 теория сигнатуры σ_2. Мы говорим, что Γ является *интерпретацией* T_2 в T_1, если для всякой $F \in \mathrm{T}_2$ мы имеем $F^\star \in \mathrm{T}_1$.

Пусть есть модель $\mathfrak{A}$ с универсумами $A_1, \ldots, A_n$. Мы говорим, что в модели $\mathfrak{A}$ определимо множество $S \subset A_{s_1} \times \ldots \times A_{s_k}$, если имеется формула $F(x_1^{s_1}, x_2^{s_2}, \ldots, x_k^{s_k})$ такая, что

$$\mathfrak{A} \models F(a_1, a_2, \ldots, a_k) \iff (a_1, a_2, \ldots, a_k) \in S;$$

в таком случае мы говорим, что F определяет множество S. Если имеется определимое множество, то мы можем расширить сигнатуру модели $\mathfrak{A}$ новым предикатным символом, оценкой которого будет это множество. При этом стандартным образом строится рекурсивная функция переводящая формулы расширенного языка в эквивалентные им над $\mathfrak{A}$ формулы исходного. В таком случае мы говорим об *определимых предикатах*. Аналогично вводится понятие *определимой функции*.

Пусть даны модель $\mathfrak{A}$ сигнатуры σ_1 и модель $\mathfrak{B}$ сигнатуры σ_2. Интерпретация модели $\mathfrak{B}$ в модели $\mathfrak{A}$ состоит из

1. функции $i(t)$ из сортов сигнатуры σ_2 в сорта сигнатуры σ_1;
2. семейства, проиндексированного сортами t из σ_2, формул $U_t(x^{i(t)})$ сигнатуры σ_1 для всех сортов t из σ_2;
3. семейства, проиндексированного сортами t из σ_2, сюръективных функции p_t из множества всех элементов универсума сорта $i(t)$ модели $\mathfrak{A}$, на которых выполняется U_t в универсум сорта t модели $\mathfrak{B}$ (для каждого объекта a сорта $i(t)$ из области области определения функции p_t мы говорим, что a является интерпретацией $p_t(a)$);
4. дана формула $Eq_t(x^{i(t)}, y^{i(t)})$, определяющая предикат равенства значений функции p_t;
5. для каждого $P \in Pred_{\sigma_2}$, $PType_{\sigma_2}(f) = (s_1, \ldots, s_k)$, в $\mathfrak{A}$ выбрана определяющая формула для множества

$$\{(a_1, \ldots, a_k) \mid \mathfrak{B} \models P(p_{s_1}(a_1), \ldots, p_{s_k}(a_k))\};$$

6. для каждого $f \in Fun_{\sigma_2}$, $FType_{\sigma_2}(f) = \langle (s_1, \ldots, s_k), r\rangle$, в $\mathfrak{A}$ выбрана определяющая формула для множества

$$\{(a_1, \ldots, a_k, b) \mid \mathfrak{B} \models f(p_{s_1}(a_1), \ldots, p_{s_k}(a_k)) = p_r(b)\}.$$

Отметим, что из такого выбора естественным образом извлекается интерпретация Γ, которая является интерпретацией $\mathrm{Th}(\mathfrak{B})$ в $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$. Пусть теперь дана некоторая интерпретация Γ сигнатуры σ_2 в сигнатуре σ_1 такая, что в σ_2 нет функциональных символов и интерпретации равенств в Γ абсолютны. И кроме того, пусть дана модель $\mathfrak{A}$ сигнатуры σ_1. Тогда отсюда естественным образом восстанавливается единственная, с точностью до изоморфизма, модель $\mathfrak{B}$ сигнатуры σ_2 и ее интерпретация в $\mathfrak{A}$ такая, что интерпретация извлекаемая из нее совпадает с Γ. Ясно, что тем самым Γ задает преобразование моделей сигнатуры σ_1 в модели сигнатуры σ_2.

Интерпретации теорий и моделей называются *эффективными*, если рекурсивен соответствующий им перевод формул (для его рекурсивности необходимо и достаточно того, чтобы функция ставящая в соответствие функциональным и предикатным символам их интерпретации оказалась рекурсивной). Все интерпретации, которые встречаются в этой диссертации являются эффективными и их эффективность всегда будет очевидна из их конструкции. В силу этого, мы, ничего дополнительно не оговаривая, говоря об интерпретациях предполагаем, что они эффективны.

С эффективными интерпретациями связаны два хорошо известных утверждения, которые позволяют доказывать результаты о разрешимости и неразрешимости теорий.

Предложение 2.25. *Если теория* T_2 *неразрешима и имеется эффективная интерпретация теории* T_2 *в теории* T_1*, то теория* T_1 *неразрешима.*

Предложение 2.26. *Если теория* T_1 *разрешима и имеется эффективная интерпретация теории* T_2 *в теории* T_1*, то теория* T_2 *разрешима.*

Для всякого множества A мы обозначаем через $\mathcal{P}^{<\omega}(A)$ множество всех его конечных подмножеств. Рассмотрим модель $\mathfrak{A}$ односортного исчисления предикатов с носителем A. Определим модель, расширяющую

$\mathfrak{A}$ дополнительным универсумом. Модель $\mathfrak{A}'$ является расширением $\mathfrak{A}$ дополнительной предметной областью $\mathcal{P}^{<\omega}(A)$ и предикатом $\in$, являющимся ограниченным на $A \times \mathcal{P}^{<\omega}(A)$ бинарным отношением принадлежности. Отметим, что теория $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}')$ называется *слабой монадической теорией* модели $\mathfrak{A}$. Также мы определяем трехсортную модель $\mathfrak{A}''$, расширяющую $\mathfrak{A}'$ дополнительной предметной областью $\mathcal{P}^{<\omega}(\mathcal{P}^{<\omega}(A))$ и предикатом $\in_1$, являющимся ограниченным на $\mathcal{P}^{<\omega}(A) \times \mathcal{P}^{<\omega}(\mathcal{P}^{<\omega}(A))$ бинарным отношением принадлежности.

Хорошо известно, что теория $\mathrm{Th}((\mathbb{N}; S)')$ разрешима [14]. Несложно видеть, что элементарная теория $\mathrm{Th}((\mathbb{N}; S)'')$ неразрешима; ниже приводится простое доказательство этого факта.

В языках теорий $\mathrm{Th}((\mathbb{N}; S)')$ и $\mathrm{Th}((\mathbb{N}; S)'')$ переменные $x, y, z, \ldots$ пробегают множество $\mathbb{N}$, переменные $X, Y, Z, \ldots$ пробегают $\mathcal{P}^{<\omega}(\mathbb{N})$. В языке теории $\mathrm{Th}((\mathbb{N}; S)'')$ переменные $\Gamma, \Delta, \Theta, \ldots$ пробегают множество $\mathcal{P}^{<\omega}(\mathcal{P}^{<\omega}(\mathbb{N}))$.

Лемма 2.27. *Теория* $\mathrm{Th}((\mathbb{N}; S)'')$ *неразрешима.*

Доказательство. Рассмотрим обогащение модели $(\mathbb{N}; S)'$ функцией $H(x) = 2x$. Элементарная теория этой модели, как известно, неразрешима [18]. Построим интерпретацию этой теории в $(\mathbb{N}; S)''$, отсюда мы получим неразрешимость $\mathrm{Th}((\mathbb{N}; S)'')$.

Мы будем считать двоичной записью числа n функцию $\zeta_n \colon \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ такую, что для некоторого k при всех $l > k$ имеет место $\zeta_n(l) = 0$ и $\sum\limits_{i \le k} 2^i \zeta_n(i) = n$. Как несложно видеть, для всякого натурального числа его двоичная запись, в описанном выше смысле, существует и единственна.

Натуральные числа мы будем представлять элементами $\mathcal{P}^{<\omega}(\mathbb{N})$ для каждого натурального числа n мы полагаем его интерпретацию n^I равной

$$n^I = \{k \mid \zeta_n(k) = 1\}.$$

Конечные множества натуральных чисел мы будем представлять множествами, составленными из представлений их элементов:

$$X \mapsto X^I := \{n^I \mid n \in X\}.$$

Несложно видеть, что для построения интерпретации нам осталось определить интерпретации $S^I(X)$ и $H^I(X)$ функций $S(x)$ и $H(x)$ соответственно. Выразим функцию $H^I(X)$:

$$H^I(X) = Y \rightleftharpoons 0 \notin Y \wedge \forall x(x \in X \leftrightarrow S(x) \in Y).$$

Рассмотрим функцию *Tran*: $\mathcal{P}^{<\omega}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}^{<\omega}(\mathbb{N})$, задаваемую следующей эквивалентностью, выполненной для всех натуральных чисел n и k:

$$k \in \mathit{Tran}(n^I) \overset{\text{def}}{\iff} \zeta_n(k) \neq \zeta_{n+1}(k).$$

Заметим, что функция $\mathit{Tran}(X)$ определима в U:

$$\mathit{Tran}(X) = Y \iff 0 \in Y \wedge \forall x(S(x) \in Y \leftrightarrow x \in Y \wedge x \in X).$$

Теперь выразим функцию $S^I(X)$:

$$S^I(X) = Y \rightleftharpoons x \in Y \leftrightarrow (x \in X \wedge x \notin \mathit{Tran}(X)) \vee (x \notin X \wedge x \in \mathit{Tran}(X)).$$

□

Лемма 2.28. *Пусть α ординал такой, что $2 \leq \alpha \leq \omega$. Тогда в модели* $\mathrm{Th}(\mathfrak{S}_\alpha)$ *интерпретируется модель* $\mathrm{Th}((\mathbb{N}; S)'')$.

Доказательство. Сейчас мы построим интерпретацию модели с использованием нетривиальной интерпретации равенства для $\mathcal{P}^{<\omega}(\mathbb{N})$ и $\mathcal{P}^{<\omega}(\mathcal{P}^{<\omega}(\mathbb{N}))$. Поставим в соответствие каждому натуральному числу n элемент $\langle 2\rangle^n\top$. Заметим, что элементу $x \in W_\alpha^N$ соответствует некоторое натуральное число тогда и только тогда, когда $x \in S_2 \cap W_2^N$. Предикат равенства для натуральных чисел интерпретируется равенством для классов эквивалентности слов. Функция S интерпретируется функцией d_2.

Множества $\mathcal{P}^{<\omega}(\mathbb{N})$ и $\mathcal{P}^{<\omega}(\mathcal{P}^{<\omega}(\mathbb{N}))$ мы будем интерпретировать множествами S_1 и S_0, соответственно. Предикат $\in$ мы будем интерпретировать предикатом In_1. Зададим предикат $\in_1^I$, интерпретирующий $\in_1$:

$$y \in_1^I x \rightleftharpoons \exists z \in \widehat{S}_1(In_0(z,x) \land \forall w \in \widehat{S}_2 \cap \widehat{W_2}(In_1(w,y) \leftrightarrow In_1(w,z))).$$

Определим интерпретацию равенства $=_2^I$ для $\mathcal{P}^{<\omega}(\mathbb{N})$ и интерпретацию равенства $=_3^I$ для $\mathcal{P}^{<\omega}(\mathcal{P}^{<\omega}(\mathbb{N}))$ по экстенсиональности.

$$x =_2^I y \rightleftharpoons \forall z(z \in^I x \leftrightarrow z \in^I y)$$

$$x =_3^I y \rightleftharpoons \forall z(z \in_1^I x \leftrightarrow z \in_1^I y)$$

Заметим, что в силу леммы 2.24 интерпретация построена корректно. $\square$

Используя леммы 2.27 и 2.28 мы получаем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть α ординал такой, что $2 \leq \alpha \leq \omega$. Тогда теория $\mathrm{Th}(\mathfrak{S}_\alpha)$ неразрешима.*

2.5 Слова из двух символов

Для доказательства разрешимости теории $\mathrm{Th}(\mathfrak{S}_1)$ мы далее построим ее интерпретацию в разрешимой теории $\mathrm{Th}(\omega^\omega; <, +)$ [29].

Лемма 2.29. *В теории $\mathrm{Th}(\omega^\omega; <, +)$ определимы следующие функции и множества:*

1. *множество $\{\omega^x \mid 1 \leq x < \omega\}$;*
2. *ограниченная на множестве $\{\omega^x \mid 1 \leq x < \omega\}$, функция умножения на ω справа $x \mapsto x \cdot \omega$;*
3. *множество $\{x \in \omega^\omega \mid \ell(x) = 0\}$.*

Доказательство. 1. Докажем, что для всякого $\alpha \in \omega^\omega$

$$\alpha \in \{\omega^x \mid 1 \leq x < \omega\} \iff \alpha \neq 0 \land \alpha \neq 1 \land \forall x < \alpha(\forall y < \alpha(x + y < \alpha)).$$

Заметим, что если $\alpha \in \{0,1\}$, то обе части рассматриваемой эквивалентности ложны. Тем самым мы переходим к случаю $\alpha \notin \{0,1\}$.

Импликация слева направо имеется в силу леммы 2.21.

Докажем импликацию справа налево. Пусть $\alpha \notin \{\omega^x \mid 1 \leq x < \omega\}$. Найдем ординалы $\beta, \gamma < \alpha$ такие, что $\beta + \gamma \geq \alpha$. Рассмотрим канторовскую нормальную форму $\alpha = \omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_n}$, где $\alpha_1 \geq \ldots \geq \alpha_n$ и $n \geq 2$. Заметим, что $(\omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_{n-1}}) + (\omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_{n-1}}) \geq \omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_{n-1}} + \omega^{\alpha_1} \geq \omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_n} = \alpha$. Тем самым мы можем положить $\beta = \gamma = \omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_{n-1}}$.

2. $\omega^\alpha \cdot \omega = \beta \iff \beta = \min(\{\omega^x \mid 1 \leq x < \omega\} \cap \{x | x > \omega^\alpha\})$.

3. $\ell(\alpha) = 0 \iff \alpha = 0 \vee \exists x(\alpha = x + 1)$.

$\square$

Теорема 4. *Теория* $\mathrm{Th}(\mathfrak{S}_1)$ *разрешима.*

Доказательство. Хотя выше мы рассмотрели понятие интерпретации лишь в одномерном случае, в этом доказательстве нам потребуются многомерные интерпретации для случая односортных моделей. В n-мерной интерпретации односортных теорий, объекты интерпретируемой теории соответствуют n-кам объектов интерпретирующей теории (классическим примером такой интерпретации является интерпретация теории поля комплексных чисел в теории поля вещественных, когда комплексное число интерпретируется парой состоящей из своей вещественной и мнимой частей). Подробное определение см. [21, глава 5]. Для доказательства разрешимости теории $\mathrm{Th}(\mathfrak{S}_\alpha)$ построим ее эффективную многомерную интерпретацию в теории $\mathrm{Th}(\omega^\omega; <, +)$ и далее воспользуемся разрешимостью последней.

Для каждого слова $\mathsf{A} \in W_1^N$ рассмотрим множество $R(\mathsf{A})$ всех пар ординалов $\langle \alpha, \beta \rangle$ таких, что существует слово $\mathsf{B} \in B_0 \cap W_1$ такое, что $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle o_0(h_1(\mathsf{A})), o_0(\mathsf{B}) \rangle$ и $h_1(\mathsf{A})\mathsf{B} \sim \mathsf{A}$. Очевидно, что $R(\mathsf{A})$ непусто для всех $\mathsf{A} \in W_1^N$. Ясно, что если $\langle \alpha, \beta \rangle \in R(\mathsf{A})$, то $o_0(\mathsf{A}) = \alpha + \beta$. Следовательно для любых $\mathsf{A}, \mathsf{A}' \in W_1^N$, если $\mathsf{A} \neq \mathsf{A}'$, то $R(\mathsf{A}) \cap R(\mathsf{A}') = \emptyset$.

Кроме того отсюда для $\mathsf{A}, \mathsf{A}' \in W_1^N$, $\langle\alpha,\beta\rangle \in R(\mathsf{A})$ и $\langle\gamma,\delta\rangle \in R(\mathsf{A}')$ равенство $\mathsf{A} = \mathsf{A}'$ эквивалентно тому, что $\alpha+\beta = \gamma+\delta$. Используя предложение 2.1 мы получаем, что для $\langle\alpha,\beta\rangle \in \omega^\omega\times\omega^\omega$, принадлежность некоторому $R(\mathsf{A})$ эквивалентна тому, что $\alpha \in \{0\}\cup\{\omega^x \mid 1 \le x < \omega\}$ и β последовательный ординал $< \omega^\omega$ или 0; тем самым это свойство выразимо в $\mathrm{Th}(\omega^\omega; <, +)$.

Интерпретацией A^I слова $\mathsf{A} \in W_1^N$ мы считаем пару $\langle\alpha,\beta\rangle \in R(\mathsf{A})$ такую, что для любых $\langle\alpha',\beta'\rangle \in R(\mathsf{A})$ мы имеем $\beta' \ge \beta$ (напомним, что здесь α всегда равен α'). Очевидно, учитывая доказанное в предыдущем абзаце, что множество всех пар $\{\mathsf{A}^I \mid \mathsf{A} \in W_1^N\}$ определимо в $(\omega^\omega; <, +)$. Из леммы 2.4 и следствия 2.6 следует, что если $\langle\alpha,\beta\rangle \in R(\mathsf{A})$ и $\langle\gamma,\delta\rangle \in R(\mathsf{B})$, то $(\max\langle\alpha,\gamma), \max(\beta,\delta)) \in R(\mathsf{A}\sqcap\mathsf{B})$. Тем самым интерпретация $\sqcap^I$ функции $\sqcap$ выразима. $\square$

Глава 3

Элементарные теории системы ординальных обозначений Беклемишева и ее фрагментов

3.1 Системы ординальных обозначений с неразрешимыми элементарными теориями

В этом разделе мы покажем, что

1. теория $\mathrm{Th}(W^N_\omega; <_0, d_0, \ldots, d_k, \ldots)$ неразрешима;
2. для всякого числа $n \geq 3$ теория $\mathrm{Th}(W^N_n; <_0, d_0, \ldots, d_n)$ неразрешима.

Для этого мы покажем, что для всяких натуральных p, q и ординала α таких, что $0 < p < q \leq \alpha \leq \omega$ теория $(W^N_\alpha; <_0, d_p, d_q)$ неразрешима. Как было показано И.А. Лавровым, элементарная теория $\mathrm{Th}(L^2_{\mathit{fin}})$ всех конечных множеств, снабженных парой линейных порядков наследственно неразрешима [5]. Мы показываем, что имеется правая тотальная интерпретация (мы определяем это понятие далее в этом разделе) $\mathrm{Th}(L^2_{\mathit{fin}})$ в $\mathrm{Th}(W^N_\alpha; <_0, d_p, d_q)$, что дает нам неразрешимость последней теории.

Под определимостью ниже мы подразумеваем определимость формулами первого порядка.

Пусть слова $\mathsf{A} \in W^N_3 \setminus \{\top\}$ и $\mathsf{B} \in W^N_3 \setminus \{\top\}$ таковы, что $\mathsf{A} = \mathsf{C}_1 0 \mathsf{C}_2 0 \ldots 0 \mathsf{C}_n$, $\mathsf{B} = \mathsf{C}_m 0 \mathsf{C}_{m+1} 0 \ldots 0 \mathsf{C}_n$ для некоторых $n \geq 1$ и $1 \leq m \leq n$, $\mathsf{C}_i \in S_1$. В таком случае мы будем говорить, что B является срезом A.

Для каждого $p \geq 1$ обозначим через U_p множество всех слов $\mathsf{A}_1 0 \mathsf{A}_2 0 \dots 0 \mathsf{A}_n$, где все $\mathsf{A}_i \in S_p$.

Лемма 3.1. *Пусть α ординал, p натуральное число и $0 < p \leq \alpha \leq \omega$. Тогда имеется первопорядковая формула $Sl_p(x,y)$ языка модели $(W_\alpha^N; <_0, d_p)$ такая, что для всех $\mathsf{A} \in U_p \cap W_\alpha^N$ и $\mathsf{B} \in W_\alpha^N$ слово B является срезом A тогда и только тогда, когда в $(W_\alpha^N; <_0, d_p)$ выполняется $Sl_p(\mathsf{A}, \mathsf{B})$.*

Доказательство. Положим

$$Sl_p(x,y) \rightleftharpoons x \neq \top \wedge y \neq \top \wedge y \leq_0 x \wedge x <_0 d_p(y). \tag{3.1}$$

Рассмотрим произвольные $\mathsf{A} \in U_p \cap W_\alpha^N$ и $\mathsf{B} \in W_\alpha^N$. Пусть числа n, m, слова $\mathsf{A}_1, \dots, \mathsf{A}_n \in S_p \cap W_\alpha^N$ и слова $\mathsf{B}_1, \dots, \mathsf{B}_m \in S_1 \cap W_\alpha^N$ таковы, что $\mathsf{A} = \mathsf{A}_1 0 \mathsf{A}_2 0 \dots 0 \mathsf{A}_n$, а $\mathsf{B} = \mathsf{B}_1 0 \mathsf{B}_2 0 \dots 0 \mathsf{B}_m$.

Предположим, что B является срезом A и докажем, что $Sl_p(\mathsf{A}, \mathsf{B})$ имеет место в рассматриваемой модели. Из предположения непосредственно следует, что $\mathsf{A} \neq \top$, $\mathsf{B} \neq \top$ и $\mathsf{B} \leq_0 \mathsf{A}$. Кроме того, в силу предположения, $m \leq n$ и $\mathsf{B}_{m-i} = \mathsf{A}_{n-i}$ при всех i от 0 до $m-1$. Также несложно видеть, что для всех i от 1 до $n-m-1$ мы имеем $\mathsf{A}_i <_1 \langle p \rangle \mathsf{B}_1$. Отсюда

$$\omega^{o_1(\mathsf{A}_{n-m+1})} + \omega^{o_1(\mathsf{A}_{n-m})} + \dots + \omega^{o_1(\mathsf{A}_1)} < \omega^{o_1(\langle p \rangle \mathsf{B}_1)}.$$

Тем самым, $o_0(\mathsf{A}) < o_0(\langle p \rangle \mathsf{B})$ и следовательно $\mathsf{A} <_0 d_p(\mathsf{B})$.

Теперь предположим, что $Sl_p(\mathsf{A}, \mathsf{B})$ имеет место в рассматриваемой модели и докажем, что B является срезом A. Если $\mathsf{A} = \mathsf{B}$, то требуемое очевидно и поэтому без ограничения общности мы предполагаем, что $\mathsf{B} <_0 \mathsf{A}$. Рассмотрим наибольшее натуральное число l от 1 до $n+1$ такое, что $\mathsf{A}_l 0 \mathsf{A}_{l+1} 0 \dots 0 \mathsf{A}_n \geq_0 \mathsf{B}$. Очевидно, что $l \neq n+1$. Обозначим $\mathsf{A}_l 0 \mathsf{A}_{l+1} 0 \dots 0 \mathsf{A}_n$ через A'.

Рассмотрим случай $\mathsf{A}_l \leq_0 \mathsf{B}_1$. Мы имеем

$$o_0(\mathsf{A}_{l+1} 0 \dots 0 \mathsf{A}_n) + \omega^{o_1(\mathsf{A}_l)} \geq o_0(\mathsf{A}') \geq o_0(\mathsf{B}) = o_0(\mathsf{B}_2 0 \dots 0 \mathsf{B}_m) + \omega^{o_1(\mathsf{B}_1)}.$$

Так как $\omega^{o_1(\mathsf{A}_l)} \leq \omega^{o_1(\mathsf{B}_1)}$ мы имеем либо

$$o_0(\mathsf{A}_{l+1}0\dots0\mathsf{A}_n) + \omega^{o_1(\mathsf{A}_l)} = o_0(\mathsf{B}_2 0\dots0\mathsf{B}_m) + \omega^{o_1(\mathsf{B}_1)}$$

и $\omega^{o_1(\mathsf{A}_l)} = \omega^{o_1(\mathsf{B}_1)}$, либо

$$o_0(\mathsf{A}_{l+1}0\dots0\mathsf{A}_n) \geq o_0(\mathsf{B}_2 0\dots0\mathsf{B}_m) + \omega^{o_1(\mathsf{B}_1)}.$$

Последнее противоречит минимальности l. Отсюда $o_0(\mathsf{B}) = o_0(\mathsf{A}')$ и тем самым $\mathsf{B} = \mathsf{A}'$ и B является срезом A.

Теперь рассмотрим случай $\mathsf{B}_1 <_0 \mathsf{A}_l$ и покажем, что он невозможен. В этом случае

$$h_p(\mathsf{B}) = h_p(\mathsf{B}_1) \leq_0 \mathsf{B}_1 <_0 \mathsf{A}_l = h_p(\mathsf{A}').$$

Так как $h_p(\mathsf{B}_1) <_0 \mathsf{A}_l$, мы имеем $h_p(\mathsf{B}_1) <_p \mathsf{A}_l$ и соответственно $\langle p\rangle h_p(\mathsf{B}_1) \leq_p \mathsf{A}_l$. Тем самым по лемме 2.5 $\mathrm{GLP} \vdash \mathsf{A}_l \to \langle p\rangle h_p(\mathsf{B}_1)$. Пусть C таково, что $\mathsf{B}_1 = h_p(\mathsf{B})\mathsf{C}$. Отметим, что $t(\mathsf{C}) < p$. Так как $\mathrm{GLP} \vdash \mathsf{B}_1 \to \mathsf{C}$ мы получаем $\mathsf{C} <_0 \mathsf{A}_l$ и в силу следствия 2.7 мы получаем $\mathrm{GLP} \vdash \mathsf{A}_l \to \mathsf{C}$. Заметим, что $0\mathsf{B}_2 0\dots0\mathsf{B}_m \leq_0 \mathsf{A}'$ и, в силу того, что $t(\mathsf{A}') = t(\mathsf{A}_l) \neq 0$ мы имеем $0\mathsf{B}_2 0\dots0\mathsf{B}_m \neq \mathsf{A}'$. Тем самым, $0\mathsf{B}_2 0\dots0\mathsf{B}_m <_0 \mathsf{A}'$ и с помощью леммы 2.5 мы получаем $\mathrm{GLP} \vdash \mathsf{A}' \to 0\mathsf{B}_2 0\dots0\mathsf{B}_m$. Поэтому,

$$d_p(\mathsf{B}) \sim \langle p\rangle h_p(\mathsf{B}) \wedge \mathsf{C} \wedge 0\mathsf{B}_2 0\dots0\mathsf{B}_m.$$

Таким образом $\mathrm{GLP} \vdash \mathsf{A}' \to d_p(\mathsf{B})$. Отсюда, если бы $\mathsf{A}' <_0 d_p(\mathsf{B})$, то мы бы имели $\mathsf{A}' <_0 \mathsf{A}'$, что противоречит иррефлексивности $<_0$. $\square$

Фиксируем некоторые натуральные числа p,r и q такие, что $0 < p < r < q$. Обозначим через I_s слово rq^s для $s \geq 0$. Для натуральных чисел k и c таких, что $1 \leq k \leq c$ обозначим через $\mathsf{K}_{c,k}$ слово $q^k\mathsf{I}_k\mathsf{I}_{k+1}\dots\mathsf{I}_{c-1}$ и через L_c слово $\mathsf{I}_1\dots\mathsf{I}_{c-1}$. Отметим, что для всех таких k и c, что $1 \leq k \leq c$ мы имеем

$$q^{k-1}\mathsf{I}_k\dots\mathsf{I}_{c-1} \leq_0 \mathsf{L}_c <_0 q^k\mathsf{I}_k\dots\mathsf{I}_{c-1} = \mathsf{K}_{c,k}.$$

Также отметим, что
$$\mathsf{K}_{c,1} <_0 \mathsf{K}_{c,2} <_0 \ldots <_0 \mathsf{K}_{c,c}.$$

Пусть слово $\mathsf{A} \in NF$ имеет вид $\mathsf{A}_1 0 \mathsf{A}_2 0 \ldots 0 \mathsf{A}_e$, где все $\mathsf{A}_i \in S_1$. Сопоставим слову A конечную последовательность слов $\mathbf{u}(\mathsf{A}) = (u_1(\mathsf{A}), \ldots, u_e(\mathsf{A}))$, где для всякого $i \in \{1, \ldots, e\}$ мы полагаем $u_i(\mathsf{A}) = d_q(\mathsf{A}_i 0 \mathsf{A}_{i+1} 0 \ldots 0 \mathsf{A}_e)$.

Лемма 3.2. *Пусть даны натуральные числа $c \geq 1$, e и набор ненулевых натуральных чисел $k_1, \ldots, k_e \leq c$. Тогда найдется $\mathsf{A} \in W_q^N$ такое, что последовательность $\boldsymbol{u}(\mathsf{A})$ равна последовательности $\mathsf{K}_{c,k_1}, \ldots, \mathsf{K}_{c,k_e}$.*

Доказательство. При i от 1 до e обозначим через C_i слово $q^{k_i-1}\mathsf{I}_{k_i} \ldots \mathsf{I}_{c-1}$. Положим:
$$\mathsf{A} = \mathsf{C}_1(p\mathsf{L}_c)^0 0 \ldots 0 \mathsf{C}_{e-1}(p\mathsf{L}_c)^{e-2} 0 \mathsf{C}_e(p\mathsf{L}_c)^{e-1}.$$

Рассмотрим некоторое i от 1 до e. Слово $u_i(\mathsf{A})$ равно нормальной форме слова $q\mathsf{C}_i(p\mathsf{L}_c)^{i-1} 0 \ldots 0 \mathsf{C}_{e-1}(p\mathsf{L}_c)^{e-2} 0 \mathsf{C}_e(p\mathsf{L}_c)^{e-1}$. Так как $\mathsf{L}_c <_0 \mathsf{K}_{c,k_i}$ и $\mathsf{K}_{c,k_i} = q\mathsf{C}_i$ мы используя алгоритм приведения к нормальной форме получаем, что нормальная форма $q_i(p\mathsf{L}_c)^{i-1}$ равна K_{c,k_i}. Так как для всех j от $i+1$ до e мы имеем $\mathsf{L}_c <_r \mathsf{K}_{c,k_i}$ и $\mathsf{C}_j <_r \mathsf{K}_{c,k_i}$, используя определение o_p мы получаем $\mathsf{C}_j(p\mathsf{L}_c)^{j-1} <_p \mathsf{K}_{c,k_i}$. Тем самым, нормальная форма слова
$$q\mathsf{C}_i(p\mathsf{L}_c)^{i-1} 0 \ldots 0 \mathsf{C}_{e-1}(p\mathsf{L}_c)^{e-2} 0 \mathsf{C}_e(p\mathsf{L}_c)^{e-1}$$
равна K_{c,k_i}. Следовательно, $\mathbf{u}(\mathsf{A})$ имеет требуемый вид. □

Правые тотальные интерпретации.

Один из методов доказательства неразрешимости теорий основан на правых тотальных интерпретациях (см. [4, глава 5, §1], где этот метод называется методом относительно элементарной определимости). Ниже мы дадим определение понятия правой тотальной интерпретации. Для упрощения технических моментов мы даем его только для случая сигнатуры интерпретируемой теории без функциональных символов и абсолютной интерпретации равенства.

Пусть даны теория T_1 сигнатуры σ_1 и теория T_2 сигнатуры σ_2 без функциональных символов. Пусть дана интерпретация Γ сигнатуры σ_2 в σ_1 и ей соответствует перевод формул $\mathrm{tr}_\Gamma\colon F \longmapsto F^\star$. При этом мы предполагаем, что Γ интерпретирует равенства равенствами. Мы называем Γ *правой тотальной интерпретацией* [21, глава 5.3], если всякая первопорядковая формула A сигнатуры σ_2 такова, что если ее перевод $A^\star$ является теоремой T_1, то и сама A оказывается теоремой теории T_2. Отметим, что это определение отлично от обычного понятия интерпретации, которое, в рамках такой терминологии, можно называть левой тотальной интерпретацией. Правая тотальная интерпретация называется эффективной, если соответствующий ей перевод рекурсивен. В силу того, что нам будут встречаться только эффективные правые тотальные интерпретации и их эффективность всегда будет очевидна из их конструкции, мы всегда, ничего дополнительно не оговаривая, предполагаем эффективность правых тотальных интерпретаций.

Пусть имеются классы моделей $\mathbf{A}$ сигнатуры σ_1 и $\mathbf{B}$ сигнатуры σ_2, а также интерпретация Γ сигнатуры σ_2 в сигнатуре σ_1. Рассмотрим класс моделей $\mathbf{C}$ сигнатуры σ_2, являющийся совокупностью образов всех моделей из $\mathbf{A}$ под действие преобразования моделей, задаваемого Γ. Ясно, что Γ является правой тотальной интерпретацией $\mathrm{Th}(\mathbf{A})$ в $\mathrm{Th}(\mathbf{B})$ тогда и только тогда, когда для каждой модели из $\mathbf{B}$ найдется изоморфная ей модель из $\mathbf{C}$.

Теория T называется *наследственно неразрешимой*, если всякая ее подтеория неразрешима.

Лемма 3.3. *Если теория T_2 наследственно неразрешима и имеется эффективная правая тотальная интерпретация теории T_2 в теории T_1, то теория T_1 неразрешима.*

Доказательство. Пусть σ_1 сигнатура теории T_1, а σ_2 сигнатура теории T_2, Γ является эффективной правой тотальной интерпретацией T_2 в T_1 и Γ соответствует перевод $\mathrm{tr}_\Gamma\colon F \longmapsto F^\star$. Для завершения доказательства предположим противное и придем к противоречию — предположим T_1 разрешима. Рассмотрим теорию E сигнатуры σ_2:

$$A \in \mathrm{E} \iff A^\star \in \mathrm{T}_1.$$

Очевидно, E в самом деле является теорией. E разрешима в силу эффективности tr_Γ и разрешимости T_1. Но в силу того, что Γ является правой тотальной интерпретацией, E является подтеорией T_2 и тем самым неразрешима — противоречие. □

Теорема 5. *Если α ординал $\leq \omega$, а p и q натуральные числа такие, что $0 < p$ и $p+1 < q < \alpha$, то теория $\mathrm{Th}(W_\alpha^N; <_0, \langle p\rangle, \langle q\rangle)$ неразрешима.*

Доказательство. Рассмотрим L^2_{fin} — класс всех моделей вида $(B, \mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2)$, где B конечное множество, а L_1 и L_2 строгие линейные порядки на нем. Известно, что элементарная теория класса L^2_{fin} наследственно неразрешима [5].

Пусть c — константный символ. Рассмотрим множество $\mathbf{A}$ всех моделей вида $(W_\alpha^N; <_0, \langle p\rangle, \langle q\rangle, c)$, где c оценивается произвольным словом $\mathsf{A} \in W_\alpha^N$. Заметим, что теории $\mathrm{Th}(\mathbf{A})$ и $\mathrm{Th}(W_\alpha^N; <_0, \langle p\rangle, \langle q\rangle)$ разрешимы или неразрешимы одновременно. В самом деле, из разрешимости первой очевидно следует разрешимость второй. Если же разрешима $\mathrm{Th}(W_\alpha^N; <_0, \langle p\rangle, \langle q\rangle)$, то следующая эквивалентность дает разрешимость $\mathrm{Th}(\mathbf{A})$:

$$F(c) \in \mathrm{Th}(\mathbf{A}) \iff (\forall x(F(x))) \in \mathrm{Th}(W_\alpha^N; <_0, \langle p\rangle, \langle q\rangle),$$

для всех формул $F(x)$ сигнатуры модели $(W_\alpha^N; <_0, \langle p\rangle, \langle q\rangle)$.

Далее мы строим правую тотальную интерпретацию $\mathrm{Th}(L^2_{\mathit{fin}})$ в $\mathrm{Th}(\mathbf{A})$ и тем самым с помощью леммы 3.3 получаем искомое. Мы полагаем, что универсум интерпретации задается формулой $Sl(c, x)$. Предикат $x_1\ \mathrm{L}_1\ x_2$ интерпретируется формулой $x_1 <_0 x_2$, а предикат $x_1\ \mathrm{L}_2\ x_2$ интерпретируется формулой $\langle q\rangle x_1 <_0 \langle q\rangle x_2$.

Определим модель $\mathfrak{I}_\mathsf{A}$ как результат преобразования, задаваемого определенной выше интерпретацией, примененного к модели

$(W_\alpha^N; <_0, \langle p\rangle, \langle q\rangle, c)$ с константой c оцениваемой как A. Тем самым задано семейство, проиндексированное $\mathsf{A} \in W_\alpha^N$, моделей $\mathfrak{I}_{\mathsf{A}}$ той же сигнатуры, что и модели из L^2_{fin}. Покажем, что для всякой модели $(B, \mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2) \in L^2_{\mathit{fin}}$ найдется $\mathsf{A} \in W_\alpha^N$ такое, что $\mathfrak{I}_{\mathsf{A}}$ изоморфна $(B; \mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2)$. Положим $k = |B|$. Обозначим элементы B в соответствие с порядком L_1:

$$b_1 \ \mathrm{L}_1 \ b_2 \ \mathrm{L}_1 \ \ldots \ \mathrm{L}_1 \ b_k.$$

Для всех i от 1 до k положим s_i равным мощности множества $\{d \in B \mid d \ \mathrm{L}_2 \ b_i\}$. В силу леммы 3.2, найдется такое A, что $\mathbf{u}(\mathsf{A}) = (\mathsf{K}_{k,s_1+1}, \mathsf{K}_{k,s_2+1}, \ldots, \mathsf{K}_{k,s_k+1})$. Несложно видеть, что $\mathfrak{I}_{\mathsf{A}}$ изоморфна $(B; \mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2)$. Тем самым, мы построили требуемую интерпретацию. □

Используя теорему 5, мы получаем

Следствие 3.4. *Теория* $\mathrm{Th}(W_\omega^N; <_0, \top, d_0, \ldots, d_k, \ldots)$ *неразрешима. Для каждого* $n \geq 3$ *теория* $\mathrm{Th}(W_n^N; <_0, \top, d_0, \ldots, d_n)$ *неразрешима.*

3.2 Некоторые теории ординалов и слов

Мы переходим к доказательству разрешимости элементарных теорий $\mathrm{Th}(W_\alpha^N; <_0, \top, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle)$ для $\alpha \in [2, \omega)$. Для таких α мы построим интерпретации элементарной теории $\mathrm{Th}(W_\alpha^N; <_0, \top, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle)$ в разрешимой слабой монадической теории модели $(\omega_\alpha; R)$ [13]; здесь R — это специальное бинарное отношение, определяемое через кофинальные последовательности. Для этого мы при всех $\alpha \in [2, \omega)$ построим цепочку интерпретаций моделей:

1. Мы строим в лемме 3.9 интерпретацию $(W_\alpha^N; <_0, \top, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle)$ в $(\omega_\alpha; <, \psi)^+$. Модель $(\omega_\alpha; <, \psi)^+$ состоит из ординалов меньших ω_α, конечных мультимножеств ординалов, стандартного порядка на ординалах, специальной функции ψ на ординалах и некоторых естественных предикатов для работы с мультимножествами.
2. В лемме 3.10 мы строи интерпретация $(\omega_\alpha; <, \psi)^+$ в $(\omega_\alpha; <, \psi)'$.

3. Мы строим в лемме 3.12 интерпретацию $(\omega_\alpha; <, \psi)'$ в $(\omega_\alpha; R)'$. Бинарное отношение R — это отношение определяемое на основе стандартной системы кофинальных последовательностей.

Мы называем *конечным мультимножеством* функцию f такую, что ее область определения $\mathrm{dom}(f)$ конечна и ее область значений $\mathrm{ran}(f)$ вложена в $[1, \omega)$. Конечное мультимножество f *вложено в конечное мультимножество* g, если $\mathrm{dom}(f) \subset \mathrm{dom}(g)$ и для всякого $x \in \mathrm{dom}(f)$ имеет место $f(x) \leq g(x)$; мы обозначаем это $f \subset_M g$. Определим $\mathfrak{i}_f(x)$ — *кратность вхождения* x в конечное мультимножество f. Если $x \in \mathrm{dom}(f)$, то $\mathfrak{i}_f(x) = f(x)$. Иначе, $\mathfrak{i}_f(x) = 0$. Для всякого x и мультимножества f мы определяем

$$x \in_M f \overset{\text{def}}{\iff} \mathfrak{i}_f(x) > 0.$$

Для всякого множества A мы обозначаем через $\mathcal{M}^{<\omega}(A)$ множество всех конечных мультимножеств, которым принадлежат лишь элементы A. Мы обозначаем через $\{a_1, \ldots, a_n\}^M$ мультимножество $f(x)$ такое, что $\mathrm{dom}(f) = \{a_1, \ldots, a_n\}$ и для всякого $x \in \mathrm{dom}(f)$ значение $f(x)$ равно мощности множества $\{i \mid x = a_i\}$.

Рассмотрим односортную модель $\mathfrak{A}$ с носителем A. Определим двусортную модель $\mathfrak{A}^+$. Модель $\mathfrak{A}^+$ является расширением $\mathfrak{A}$ дополнительной предметной областью $\mathcal{M}^{<\omega}(A)$, предикатом $\in_M$, ограниченным на $A \times \mathcal{M}^{<\omega}(A)$ и предикатом $\subset_M$, ограниченным на $\mathcal{M}^{<\omega}(A) \times \mathcal{M}^{<\omega}(A)$.

Напомним, что мы используем определение ординалов по фон Нейману и соответственно

$$\alpha = \{\beta \in On \mid \beta < \alpha\}.$$

Далее мы докажем несколько лемм об определимости некоторых естественных предикатов и функций в моделях $(\alpha; <)$, $(\alpha; <)'$ и $(\alpha; <)^+$, где α — это ординал. Заметим, что все множества, предикаты и функции определимые в $(\alpha; <)$ также определимы в $(\alpha; <)'$ и $(\alpha; <)^+$.

Лемма 3.5. *Пусть дан предельный ординал $\alpha > 0$. Тогда в модели $(\alpha; <)$ определимы:*

1. *функция $S\colon On \to On$, $S\colon \beta \longmapsto \beta + 1$, ограниченная на α;*
2. *элемент 0;*
3. *предикат $x \in Lim$, где Lim класс всех отличных от 0 непоследовательных ординалов;*
4. *ограниченное на α отношение эквивалентности $FinDif(x, y)$, где*

$$FinDif(\beta, \gamma) \overset{def}{\iff} \exists n \in \omega(\beta + n = \gamma \vee \beta = \gamma + n).$$

Доказательство. Для всяких $\beta, \gamma \in \alpha$ имеют место следующие эквивалентности:

1. $S(\beta) = \gamma \iff \beta < \gamma \wedge \forall \delta \in \alpha(\gamma \leq \delta \vee \delta \leq \beta)$;
2. $\beta = 0 \iff \forall \delta \in \alpha(\beta \leq \delta)$;
3. $\beta \in Lim \iff \beta \neq 0 \wedge \forall \gamma \in \alpha(\beta \neq S(\gamma))$;
4. $$\begin{aligned} FinDif(\beta, \gamma) \iff &(\beta < \gamma \wedge \forall \delta \in \alpha(\beta < \delta \leq \gamma \to \delta \notin Lim)) \vee \\ &(\gamma < \beta \wedge \forall \delta \in \alpha(\gamma < \delta \leq \beta \to \delta \notin Lim)) \vee \\ &\beta = \gamma. \end{aligned}$$

Эти эквивалентности показывают определимость требуемых функций, элементов и предикатов. □

Лемма 3.6. *Пусть $\alpha \in On$. Тогда в модели $(\alpha; <)'$ выразима функция*

$$\min\colon \mathcal{P}^{<\omega}(\alpha) \setminus \{\emptyset\} \to \alpha$$

и в модели $(\alpha; <)^+$ выразима функция

$$\min\colon \mathcal{M}^{<\omega}(\alpha) \setminus \{\emptyset^{\mathrm{M}}\} \to \alpha.$$

Доказательство. Для всякого $Q \in \mathcal{P}^{<\omega}(\alpha) \setminus \emptyset$ и $\beta \in \alpha$ имеет место эквивалентность

$$\min(Q) = \beta \iff \beta \in Q \wedge \forall \gamma \in \alpha(\gamma < \beta \to \gamma \notin Q).$$

Заметим, что тем самым мы построили искомое определение для $(\alpha; <)'$. Для модели $(\alpha; <)^+$ доказательство аналогично. □

Лемма 3.7. *Пусть $\mathfrak{A}$ — модель с одним универсумом A. Тогда в модели $\mathfrak{A}^+$ выразимы*

1. *предикат $CLess(x, X, Y)$, выполняющийся на всякой тройке $(a, Q_1, Q_2) \in A \times \mathcal{M}^{<\omega}(A) \times \mathcal{M}^{<\omega}(A)$ тогда и только тогда, когда кратность вхождения a в Q_1 меньше кратности вхождения a в Q_2;*
2. *предикат $CEq(x, X, Y)$, выполняющийся на всякой тройке $(a, Q_1, Q_2) \in A \times \mathcal{M}^{<\omega}(A) \times \mathcal{M}^{<\omega}(A)$ тогда и только тогда, когда кратность вхождения a в Q_1 равна кратности вхождения a в Q_2;*
3. *предикат $CS(x, X, Y)$, выполняющийся на всякой тройке $(a, S_1, S_2) \in A \times \mathcal{M}^{<\omega}(A) \times \mathcal{M}^{<\omega}(A)$ тогда и только тогда, когда кратность вхождения a в Q_1 меньше кратности вхождения a в Q_2 ровно на* 1*;*

Доказательство. Для всех троек $(a, Q_1, Q_2) \in A \times \mathcal{M}^{<\omega}(A) \times \mathcal{M}^{<\omega}(A)$ очевидно имеют место следующие эквивалентности:

1. $CLess(a, Q_1, Q_2) \iff \exists Q_3 \in \mathcal{M}^{<\omega}(A)(\forall b \in A(b \in_M Q_3 \leftrightarrow a = b) \wedge$
$$Q_3 \subset_M Q_2 \wedge \neg Q_3 \subset_M Q_1);$$
2. $CEq(a, Q_1, Q_2) \iff \neg CLess(a, Q_1, Q_2) \wedge \neg CLess(a, Q_2, Q_1)$;
3. $CS(a, Q_1, Q_2) \iff CLess(a, Q_1, Q_2) \wedge$
$$\forall Q_3 \in \mathcal{M}^{<\omega}(A)(\neg(CLess(a, Q_3, Q_2) \wedge CLess(a, Q_1, Q_3))).$$

Отсюда следует выразимость предикатов из условия леммы. □

Определим функцию $\psi\colon On \to On$:

1. $\psi(0) = \omega$;
2. $\psi(\omega^{\alpha_1} + \omega^{\alpha_2} + \cdots + \omega^{\alpha_n}) = \omega^{\alpha_1} + \omega^{\alpha_2} + \cdots + \omega^{\alpha_{n-1}} + \omega^{\alpha_n + 1}$, где $n \geq 1$ и $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_n$.

Мы называем ординал α *замкнутым относительно функции* ψ, если для всякого $\beta < \alpha$ мы имеем $\psi(\beta) < \alpha$.

Несложно видеть,что имеем место следующая лемма.

Лемма 3.8. *Ординал α замкнут относительно ψ тогда и только тогда, когда либо $\alpha = 0$, либо $\alpha = \omega^{\omega \cdot \beta}$ для некоторого $\beta > 0$.*

Лемма 3.9. *Пусть α ординал от 2 до ω. Тогда в модели $(\omega_\alpha; <, \psi)^+$ интерпретируется модель $(W_\alpha^N; <_0, \top, \langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle)$.*

Доказательство. Перед построением интерпретации отметим два факта. В силу леммы 3.8, ординал ω_α замкнут относительно ψ. Функция o_1 является биекцией между множествами $W_\alpha^N \cap S_1$ и ω_α.

Рассмотрим слово $\mathsf{A} \in W_\alpha^N$ и определим его интерпретацию — мультимножество A^I. Слово A единственным образом представляется в виде $\mathsf{A}_1 0 \ldots 0 \mathsf{A}_n$ для некоторых $n \geq 0$ и $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_n \in W_\alpha^N \cap S_1$. Положим

$$\mathsf{A}^I = \{\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_n\}^M.$$

Несложно видеть, что определенное тем самым отображение $\mathsf{A} \mapsto \mathsf{A}^I$ является биекцией между W_α^N и $\mathcal{M}^{<\omega}(\omega_\alpha)$.

Определим интерпретацию предиката $<_0$ — предикат $<_0^I$:

$$X <_0^I Y \rightleftharpoons \exists x (CLess(x, X, Y) \land \forall y > x (CEq(y, X, Y))).$$

Докажем, что $<_0^I$ действительно является интерпретацией $<_0$.

Покажем, что для всяких $\mathsf{A}, \mathsf{B} \in W_\alpha^N$ мы имеем

$$\mathsf{A} <_0 \mathsf{B} \iff \mathsf{A}^I <_0^I \mathsf{B}^I.$$

Мы находим $\mathsf{A}_1, \ldots, \mathsf{A}_n, \mathsf{B}_1, \ldots, \mathsf{B}_m \in S_1$ такие, что A равно $\mathsf{A}_1 0 \mathsf{A}_2 0 \ldots 0 \mathsf{A}_n$ и B равно $\mathsf{B}_1 0 \mathsf{B}_2 0 \ldots 0 \mathsf{B}_m$. Мы обозначаем через A мультимножество A^I и обозначим через B мультимножество B^I. Покажем, что

$$\mathsf{A}_1 0 \mathsf{A}_2 0 \ldots 0 \mathsf{A}_n <_0 \mathsf{B}_1 0 \mathsf{B}_2 0 \ldots 0 \mathsf{B}_m \iff (\omega_\alpha; <, \psi)^+ \models A <_0^I B.$$

Пусть имеет место

$$(\omega_\alpha; <, \psi)^+ \models A <_0^I B.$$

Покажем, что $\mathsf{A}_1 0 \mathsf{A}_2 0 \ldots 0 \mathsf{A}_n <_0 \mathsf{B}_1 0 \mathsf{B}_2 0 \ldots 0 \mathsf{B}_m$. Тогда найдется ординал γ такой, что кратность вхождения γ в A меньше кратности вхождения

γ в B и для всяких δ из интервала (γ, ω_α) кратности вхождения δ в A и B совпадают. Пусть кратность вхождения γ в A равна l, а кратность вхождения γ в B равна e. Пусть k является $(e-l)$-ым, в смысле стандартного порядка на натуральных числах, элементом множества $\{i \mid o_1(\mathsf{B}_i) = \gamma\}$; заметим, что в силу определения $<_0^I$ такое k найдется. Несложно видеть, что для i от 0 до $m-k-1$ мы имеем $\mathsf{A}_{n-i} = \mathsf{B}_{m-i}$. Притом, либо $n = m-k-1$, либо $\mathsf{A}_{n-(m-k)} <_0 \mathsf{B}_k$. Отметим, что силу определения NF, при всех j от 1 до $n-(m-k)$ мы также имеем $\mathsf{A}_j <_0 \mathsf{B}_k$. Тем самым, используя определение o_0, мы устанавливаем, что $\mathsf{A}_1 0 \dots 0 \mathsf{A}_n <_0 \mathsf{B}_1 0 \dots 0 \mathsf{B}_m$.

Теперь предположим, что $\mathsf{A}_1 0 \dots 0 \mathsf{A}_n <_0 \mathsf{B}_1 0 \dots 0 \mathsf{B}_m$ и покажем, что $(\omega_\alpha; <, \psi)^+ \models A <_0^I B$. Несложно видеть, что найдется $l < m$ такое, что для всех i от 0 до $l-1$ мы имеем $\mathsf{A}_{n-i} = \mathsf{B}_{m-i}$ и притом либо $n = l$, либо $\mathsf{A}_{n-l} <_0 \mathsf{B}_{m-l}$. Из последнего следует, что для всех i от l до $n-1$ мы имеем $\mathsf{A}_i <_0 \mathsf{B}_{m-l}$, а тем самым и $o_1(\mathsf{A}_i) < o_1(\mathsf{B}_{m-l})$. В качестве искомого x из определения $<_0^I$ выберем $o_1(\mathsf{B}_{m-l})$ и получим $(\omega_\alpha; <)^+ \models A <_0^I B$. Тем самым, $<_0^I$ является интерпретацией $<_0$.

Функция $\langle 0 \rangle$ и константа $\top$ определимы в $(W_\alpha^N; <_0)$ и тем самым могут быть пропущены при построение искомой интерпретации.

Заметим, что для всякого $\mathsf{A} \in NF \cap S_1$ имеет место тождество $\psi(o_1(\mathsf{A})) = o_1(\langle 2 \rangle \mathsf{A})$.

Определим функции $\langle 1 \rangle^I$ и $\langle 2 \rangle^I$ — интерпретации функций $\langle 1 \rangle$ и $\langle 2 \rangle$:

$$\begin{aligned}\langle 1 \rangle^I X = Y \rightleftharpoons (X = \emptyset^M \to Y = \{1\}^M) \wedge (X \neq \emptyset^M \to \\ \forall x > S(\min(X))(CEq(x, X, Y)) \wedge \\ CS(S(\min(X)), X, Y) \wedge \\ \forall x < S(\min(X))(\neg x \in_M Y)),\end{aligned}$$

$$\langle 2\rangle^I X = Y \rightleftharpoons (X = \emptyset^M \to Y = \{\omega\}^M) \wedge (X \neq \emptyset^M \to$$
$$\forall x > \psi(\min(X))(CEq(x, X, Y)) \wedge$$
$$CS(\psi(\min(X)), X, Y) \wedge$$
$$\forall x < \psi(\min(X))(\neg x \in_M Y)).$$

Легко видеть, что эти определения $\langle 1\rangle^I$ и $\langle 2\rangle^I$ могут быть выражены первопорядковыми формулами в структуре $(\omega_\alpha; <, \psi)^+$. Покажем корректность определения интерпретации $\langle 2\rangle$, корректность определения интерпретации $\langle 1\rangle$ доказывается аналогично. Рассмотрим произвольное слово $\mathsf{A} \in W_\alpha^N$, имеющее вид $\mathsf{A}_1 0 \dots 0 \mathsf{A}_n$, где $\mathsf{A}_1, \dots, \mathsf{A}_n \in W_\alpha^N \cap S_1$. В силу алгоритма приведения слов к нормальной форме (см. раздел 2.1) нормальной формой $d_2(\mathsf{A})$ является слов $2\mathsf{A}_1 0 \mathsf{A}_k 0 \mathsf{A}_{k+1} 0 \dots 0 \mathsf{A}_n$ для некоторого k от 2 до $n+1$. Притом k таково, что для всех i от k до n имеет место $2\mathsf{A}_1 \leq_0 \mathsf{A}_i$ и для всех i от 2 до $k-1$ имеет место $\mathsf{A}_i <_0 2\mathsf{A}_1$. Отсюда следует правильность построенного определения. $\square$

Лемма 3.10. *Пусть α — замкнутый относительно ψ ординал. Тогда в модели $(\alpha; <, \psi)'$ интерпретируется модель $(\alpha; <, \psi)^+$.*

Доказательство. Всякий ординал $\beta \in \alpha$ мы будем интерпретировать ординалом $\beta^I = \omega \cdot \beta$, несложно видеть, что тем самым мы построим инъекцию α в себя. Для данного мультимножества $A \in \mathcal{M}^{<\omega}(\alpha)$ построим множество $A^I \in \mathcal{P}^{<\omega}(\alpha)$ — интерпретацию A. Пусть набор $\beta_1, \dots, \beta_n$ попарно различных ординалов меньших α содержит все ординалы входящие в A с ненулевой кратностью. Притом, пусть $k_1, \dots, k_n \in \omega$ есть кратности вхождений в A ординалов $\beta_1, \dots, \beta_n$ соответственно. Положим $A^I = \{\omega \cdot \beta_i + (k_i - 1) \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$.

Заметим, что отображение $(\beta, k) \longmapsto \omega \cdot \beta + (k-1)$ есть биекция между множествами $\alpha \times (\omega \setminus \{0\})$ и α. Тем самым, построенное отображение $A \longmapsto A^I$ является инъективным. Покажем, что множество U_1 всех интерпретаций ординалов определимо в $(\alpha; <, \psi)'$. В самом деле, для всякого $\beta \in \alpha$

$$\beta \in U_1 \iff \beta \in Lim \vee \beta = 0.$$

Теперь покажем, что множество U_2 всех интерпретаций мультимножеств определимо в $(\alpha; <, \psi)'$. В самом деле, для всякого $A \in \mathcal{P}^{<\omega}(\alpha)$ мы имеем

$$A \in U_2 \iff \forall\beta \in \alpha\forall\gamma \in \alpha((\beta \in X \wedge \gamma \in X) \to (FinDif(\beta, \gamma) \leftrightarrow \beta = \gamma)).$$

Зададим $\in_M^I$, $\subset_M^I$, $<^I$, ψ^I — интерпретации $\in_M$, $\subset_M$, $<$, ψ соответственно.

$$x \in_M^I X \rightleftharpoons x \in U_1 \wedge X \in U_2 \wedge \exists y \in X(FinDif(x, y));$$

$$x <^I y \rightleftharpoons x \in U_1 \wedge y \in U_1 \wedge x < y;$$

$$\psi^I(x) = y \rightleftharpoons x \in U_1 \wedge y \in U_1 \wedge (x = 0 \to y = \psi(\psi(0))) \wedge (x \neq 0 \to y = \psi(x));$$

$$X \subset_M^I Y \rightleftharpoons X, Y \in U_2 \wedge \forall x \in X\exists y \in Y(FinDif(x, y) \wedge x \leq y).$$

Несложно видеть, что эти определения задают требуемую интерпретацию. □

Кофинальной последовательностью длины ω для ординала α называется проиндексированная натуральными числами последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ такая, что $\alpha_i < \alpha_{i+1}$ и $\alpha = \sup\{\alpha_i \mid i \in \omega\}$. Так как мы не рассматриваем кофинальных последовательностей длин отличных от ω мы будем называть их просто кофинальными последовательностями. Имеется общепринятая система кофинальных последовательностей для ординалов из Lim меньших ε_0. Для каждого натурального числа n и ординала $\alpha \in Lim$ с канторовской нормальной формой $\omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_k}$ следующим образом задается n-ый член кофинальной последовательности $\alpha[n]$:

1. $\alpha[n] = \omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_{k-1}} + \omega^{\beta}(n + 1)$, если $\alpha_k \notin Lim$ и $\alpha_k = \beta + 1$;
2. $\alpha[n] = \omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_{k-1}} + \omega^{\alpha_k[n]}$, если $\alpha_k \in Lim$.

На основе кофинальных последовательностей вводится бинарное отношение R на ординалах меньших ε_0:

$$\alpha R \beta \overset{\text{def}}{\iff} \beta = \alpha + 1 \vee \exists n \in \omega (\alpha = \beta[n]).$$

Несложно видеть, что транзитивное замыканием бинарного отношения R совпадает со стандартным порядком на ординалах $<$.

Лореном Бро [13] было доказано следующее предложение.

Предложение 3.11. *При всех $\alpha \in [1, \varepsilon_0)$ разрешима теория* $\mathrm{Th}((\alpha; <, R)')$.

Лемма 3.12. *В модели $(\alpha; R)'$ интерпретируется модель $(\alpha; <, \psi)'$*

Доказательство. Для доказательства леммы нам достаточно выразить операцию ψ в $(\omega_\alpha; <, R)'$, ниже мы строим такое выражение. Пусть $\beta \in \omega_\alpha$ — ненулевой ординал. Покажем, что $\psi(\beta)$ есть второй ординал γ такой, что $\beta R \gamma$. Пусть канторовская нормальная форма β имеет вид

$$\omega^{\beta_1} + \cdots + \omega^{\beta_{k-1}} + \underbrace{\omega^{\beta_k} + \cdots + \omega^{\beta_k}}_{n \text{ слагаемых}}, \text{ где } k, n \geq 1 \text{ и } \beta_1 \geq \beta_2 \geq \ldots \geq \beta_{k-1} > \beta_k.$$

Ясно, что $\psi(\beta) = \omega^{\beta_1} + \cdots + \omega^{\beta_{k-1}} + \omega^{\beta_k + 1}$. Очевидно имеет место $\beta R \psi(\beta)$ и $\beta R (\beta + 1)$. От противного докажем, что для всех $\gamma \in (\beta + 1, \psi(\beta))$ не выполняется $\beta R \gamma$. Предположим $\gamma \in (\beta + 1, \psi(\beta))$ и $\beta R \gamma$. Ординал γ имеет канторовскую нормальную форму

$$\omega^{\beta_1} + \cdots + \omega^{\beta_{k-1}} + \underbrace{\omega^{\beta_k} + \cdots + \omega^{\beta_k}}_{n \text{ слагаемых}} + \omega^{\gamma_1} + \cdots + \omega^{\gamma_s}, \text{ где } s \geq 1 \text{ и } \beta_k > \gamma_1.$$

Из определения отношения R следует, что $\gamma \in Lim$ и для некоторого n мы имеем $\gamma[n] = \beta$. Но

$$\gamma[n] = \omega^{\beta_1} + \cdots + \omega^{\beta_{k-1}} + \underbrace{\omega^{\beta_k} + \cdots + \omega^{\beta_k}}_{n \text{ слагаемых}} + \omega^{\gamma_1} + \cdots + \omega^{\gamma_{s-1}} + \omega^{\gamma_s}[n]$$

и $\omega^{\gamma_s}[n] \neq 0$. Тем самым, $\gamma[n] > \beta$ и мы пришли к противоречию с нашим предположением $\beta R \gamma$. Следовательно, $\psi(\beta)$ действительно является вторым ординалом γ таким, что $\beta R \gamma$.

В силу доказанного в предыдущем абзаце, ясно что для всяких $\beta, \gamma < \omega_\alpha$ равенство $\psi(\beta) = \gamma$ выполнено тогда и только тогда, когда

$$(\beta = 0 \to \gamma \in Lim \wedge \forall \delta < \gamma(\delta \notin Lim)) \wedge$$
$$(\beta \neq 0 \to \beta R \gamma \wedge \exists! \delta < \gamma(\beta R \delta))$$

Следовательно, функция ψ выражается в $(\omega_\alpha; <, R)'$, что завершает доказательство леммы. $\square$

Из лемм 3.9, 3.10, 3.12 и утверждения 3.11, доказанного в [13], мы получаем

Теорема 6. *При всех $\alpha \in [2, \omega)$ теория $\mathrm{Th}(W^N_\alpha; <_0, \top, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle)$ разрешима.*

3.3 Элементарная эквивалентность некоторых моделей

В этом разделе мы покажем, что структуры $(W^N_\omega; <_0, \top, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle)$ и $(W^N_3; <_0, \top, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle)$ элементарно эквивалентны. Тем самым мы покажем разрешимость $\mathrm{Th}(W^N_\omega; <_0, \top, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle)$ и усилим теорему 6. Для этого мы воспользуемся классическим результатом А. Эренфойхта [17] об элементарной эквивалентности.

Замечание 3.13. *Далее мы рассматриваем понятия ординала, пары, функции и последовательности в теоретико-множественном стиле. Мы используем ординалы по фон Нейману $\alpha = \{\beta \mid \beta < \alpha\}$. Мы используем пары по Куратовскому $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Мы рассматриваем функции f, как множества пар $\{(x, f(x)) \mid x \in \mathrm{dom}(f)\}$. Мы рассматриваем последовательности $\langle a_\beta \mid \beta < \alpha\rangle$, как функции $\{(\beta, a_\beta) \mid \beta < \alpha\}$.*

Пусть $\mathfrak{A}$ структура без функциональных символов в сигнатуре. Мы определяем модель $\mathsf{HF}(\mathfrak{A})$ с сигнатурой расширяющей сигнатуру модели $\mathfrak{A}$ бинарным предикатным символом $\in$ и унарным предикатным символом Ur. Пусть универсумом $\mathfrak{A}$ является множество A. Некоторым фиксированным образом выберем множество B равномощное A, но не содержащее конечных множеств и биекцию $e_A\colon A \to B$. Универсум модели $\mathsf{HF}(\mathfrak{A})$ — это множество $\mathsf{HF}(B)$. Множество $\mathsf{HF}(B)$ — это минимальное множество такое, что $B \subset \mathsf{HF}(B)$ и $\mathcal{P}^{<\omega}(\mathsf{HF}(B)) \subset \mathsf{HF}(B)$. Очевидно, $\mathsf{HF}(B)$ существует и единственно. Оценка всякого предикатного символа $P(x_1, \ldots, x_n)$ из сигнатуры $\mathfrak{A}$ в модели $\mathsf{HF}(\mathfrak{A})$ такова:

$$\mathsf{HF}(\mathfrak{A}) \models P(a_1, \ldots, a_n) \overset{\text{def}}{\iff} a_1, \ldots, a_n \in B \text{ и } \mathfrak{A} \models P(e_A^{-1}(a_1), \ldots, e_A^{-1}(a_n)).$$

Для каждого $a \in \mathsf{HF}(B)$

$$\mathsf{HF}(\mathfrak{A}) \models Ur(a) \overset{\text{def}}{\iff} a \in B.$$

Для каждого $a_1, a_2 \in \mathsf{HF}(B)$

$$\mathsf{HF}(\mathfrak{A}) \models a_1 \in a_2 \overset{\text{def}}{\iff} a_2 \notin B \text{ и } a_1 \in a_2.$$

Тем самым, мы определили модель $\mathsf{HF}(\mathfrak{A})$. Если $a \in \mathsf{HF}(\mathfrak{A})$ таков, что $\mathsf{HF}(\mathfrak{A}) \models Ur(a)$, тогда мы называем $a \in \mathsf{HF}(\mathfrak{A})$ урэлементом.

Лемма 3.14. *Для всякого $\alpha \in Lim$ модель $(\omega^\alpha; <, \psi)'$ интерпретируется в $\mathsf{HF}(\alpha; <)$.*

Доказательство. Несложно видеть, что $\mathsf{HF}(\alpha; <)$ удовлетворяет всем аксиомам теории ZF, кроме аксиомы бесконечности и аксиомы объемности. При этом $\mathsf{HF}(\alpha; <)$ удовлетворяет естественной модификации аксиомы объемности

$$\forall x, y(\neg Ur(x) \land \neg Ur(y) \land \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y).$$

Поэтому, в $\mathsf{HF}(\alpha; <)$ выразимы понятия из замечания 3.13 (подробнее см. [6]).

Пусть $\beta \in \omega^\alpha$ и его канторовская нормальная форма имеет вид $\omega^{\beta_1} + \dots + \omega^{\beta_n}$. Тогда его интерпретация β^I равна конечной последовательности $(e_\alpha(\beta_1), \dots, e_\alpha(\beta_n))$. В $\mathsf{HF}(\alpha; <)$ множество всех интерпретаций ординалов определимо, как множество всех монотонно невозрастающих последовательностей урэлементов. Интерпретацией множества $A \in \mathcal{P}^{<\omega}(\omega^\alpha)$ является $A^I = \{\beta^I \mid \beta \in A\}$. Множество всех интерпретаций конечных множеств ординалов очевидно определимо в $\mathsf{HF}(\alpha; <)$. Предикат $\in$ интерпретируется тривиальным образом. Предикат $<^I$, интерпретирующий $<$, задается, как лексикографический порядок на конечных последовательностях атомов. Зададим интерпретацию ψ — функцию ψ^I. $\psi^I((e_\alpha(\beta_1), \dots, e_\alpha(\beta_n)))$ равна лексикографически минимальной последовательности, заканчивающейся на $e_\alpha(\beta_n + 1)$ и лексикографически большей, чем $(e_\alpha(\beta_1), \dots, e_\alpha(\beta_n))$. $\square$

Определим понятие *ω-хвоста* ординала α с канторовской нормальной формой $\omega^{\alpha_1} + \omega^{\alpha_2} + \dots + \omega^{\alpha_n}$. Если $\alpha < \omega^\omega$, то ω-хвост α совпадает с α. Если $\alpha \geq \omega^\omega$, то ω-хвостом α будет ординал $\omega^\omega + \omega^{\alpha_k} + \dots + \omega^{\alpha_n}$, где k минимальное натуральное число такое, что $\alpha_i < \omega$ для всех i таких, что $k \leq i \leq n$.

Известен результат А. Эренфойхта о элементарной эквивалентности моделей $\mathsf{HF}(\alpha_1; <)$ и $\mathsf{HF}(\alpha_2; <)$ для α_1 и α_2 у которых совпадает ω-хвост [17]. Заметим, что при $\alpha \in [2, \omega]$ у всех ω_α совпадают ω-хвосты.

Заметим, что переводы формул, извлекаемые из доказательств лемм 3.9, 3.10 и 3.14, не зависят от параметров пар теорий. Отсюда и леммы 3.14 последовательно выводятся следующие следствия:

Следствие 3.15. *Для всяких $\alpha_1, \alpha_2 \in [3, \omega]$ модели $(\omega_{\alpha_1}; <, \psi)'$ и $(\omega_{\alpha_2}; <, \psi)'$ элементарно эквивалентны.*

Следствие 3.16. *Для всяких $\alpha_1, \alpha_2 \in [3, \omega]$ модели $(\omega_{\alpha_1}; <, \psi)^+$ и $(\alpha_2; <, \psi)^+$ элементарно эквиваленты.*

Следствие 3.17. *Пусть ординал* $\alpha \in [3, \omega]$. *Тогда модели* $(W_\alpha^N; <_0, \top, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle)$ *и* $(W_3^N; <_0, \top, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle)$ *элементарно эквивалентны.*

Из следствия 3.17 и теоремы 6 мы заключаем следующую усиленную версию теоремы 6:

Теорема 7. *Для всех ординалов* α *таких, что* $2 \leq \alpha \leq \omega$ *теория* $\mathrm{Th}(W_\alpha^N; <_0, \top, \langle 0\rangle, \langle 1\rangle, \langle 2\rangle)$ *разрешима.*

Литература

[1] Е.В. Дашков. О позитивном фрагменте полимодальной логики доказуемости GLP. *Математические заметки*, 91(3):331–346, 2012.

[2] Г.К. Джапаридзе. Модально-логические средства исследования доказуемости. *Дисс. канд. филос. наук, Москва, МГУ*, 1986.

[3] Ю.Л. Ершов, И.А. Лавров, А.Д. Тайманов и М.А. Тайцлин. Элементарные теории. *Успехи математических наук*, 20, 4(124):37–108, 1965.

[4] Ю.Л. Ершов. *Проблемы разрешимости и конструктивные модели.* Наука, 1980.

[5] И.А. Лавров. Эффективная неотделимость множества тождественно истинных и множества конечно опровержимых формул некоторых теорий. *Алгебра и Логика Семинар*, 2(1):5–18, 1963.

[6] J. Barwise. *Admissible Sets and Structures.* Perspectives in mathematical logic. Springer, 1975.

[7] Lev D. Beklemishev. Provability algebras and proof-theoretic ordinals, I. *Annals of Pure and Applied Logic*, 128:103–123, 2004.

[8] Lev D. Beklemishev. Veblen hierarchy in the context of provability algebras. In *Logic, Methodology and Philosophy of Science, Proceedings of the Twelfth International Congress.*, pages 65–78. Kings College Publications, 2005.

[9] Lev D. Beklemishev, Joost J. Joosten, and Marco Vervoort. A finitary treatment of the closed fragment of Japaridze's provability logic. *J. Log. Comput.*, 15(4):447–463, 2005.

[10] Lev D. Beklemishev, David Fernández-Duque, and Joost J. Joosten. On provability logics with linearly ordered modalities. *Studia Logica*, 102(3):541–566, 2014.

[11] P. Blackburn, M. de Rijke, and Y. Venema. *Modal Logic: Graph. Darst.* Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science. Cambridge University Press, 2002.

[12] Félix Bou and Joost J. Joosten. The closed fragment of IL is PSPACE hard. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 278:47–54, 2011.

[13] Laurent Braud. Covering of ordinals. In *FSTTCS*, pages 97–108, 2009.

[14] J.R. Büchi. Weak second-order arithmetic and finite automata. *Mathematical Logic Quarterly*, 6(1-6):66–92, 1960.

[15] Alexander V. Chagrov and Mikhail N. Rybakov. How many variables does one need to prove pspace-hardness of modal logics? In *Advances in Modal Logic 4 (AiML'02.* Citeseer, 2003.

[16] Stephen A. Cook and Robert A. Reckhow. Time bounded random access machines. *J. Comput. Syst. Sci.*, 7(4):354–375, August 1973.

[17] Andrzej Ehrenfeucht. An application of games to the completeness problem for formalized theories. *Fundamenta Mathematicae*, 49:129–141, 1961.

[18] C.C. Elgot and M.O. Rabin. Decidability and undecidability of extensions of second (first) order theory of (generalized) successor. *J. Symb. Log.*, 31:169–181, 1966.

[19] Gerhard Gentzen. Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie. *Mathematische Annalen*, 112:493–565, 1936.

[20] Kurt Gödel. Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls. Ergebnisse eines mathematischen Kolloquiums, 4: 39–40, 1933. English translation, with an introductory note by A.S. Troelstra. *Kurt Gödel, Collected Works*, 1:296–303, 1986.

[21] W. Hodges. *Model Theory.* Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1993.

[22] K.N. Ignatiev. On strong provability predicates and the associated modal logics. *The Journal of symbolic logic*, 58(1):249–290, 1993. eng.

[23] Joost J. Joosten. Interpretability formalized. Ph.D thesis, Utrecht University, 2004.

[24] Richard E. Ladner. The computational complexity of provability in systems of modal propositional logic. *SIAM journal on computing*, 6(3):467–480, 1977.

[25] Martin Hugo Löb. Solution of a problem of Leon Henkin. *The Journal of Symbolic Logic*, 20(02):115–118, 1955.

[26] Ilya Shapirovsky. PSPACE-decidability of Japaridze's polymodal logic. In *Advances in Modal Logic*, pages 289–304, 2008.

[27] Robert M. Solovay. Provability interpretations of modal logic. *Israel journal of mathematics*, 25(3-4):287–304, 1976.

[28] L. J. Stockmeyer and A. R. Meyer. Word problems requiring exponential time(preliminary report). In *Proceedings of the Fifth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, STOC '73, pages 1–9, New York, NY, USA, 1973. ACM.

[29] A. Tarski and A. Mostowski. Arithmetical classes and types of well ordered systems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55:65, 1949.

[30] A. Tarski, A. Mostowski, and R.M. Robinson. *Undecidable Theories.* Studies in logic and the foundations of mathematics. North-Holland, 1953.

Работы автора по теме диссертации

[31] Ф.Н. Пахомов. Неразрешимость элементарной теории полурешетки GLP-слов. *Математический сборник*, 203(8):141–160, 2012.

[32] Ф.Н. Пахомов. Об элементарных теориях систем ординальных обозначений на основе схем рефлексии. *Труды Математического института им. В.А. Стеклова*, 289:206–226, 2015.

[33] Fedor Pakhomov. On the complexity of the closed fragment of Japaridze's provability logic. *Archive for Mathematical Logic*, 53(7-8):949–967, 2014.