

“УТВЕРЖДАЮ”
Директор федерального государственного
бюджетного учреждения науки
Институт математики
им. С.Л. Соболева СО РАН,
член-корреспондент РАН С.С. Гончаров

ОТЗЫВ

ведущей организации о диссертации Пахомова Федора Николаевича
“Некоторые алгоритмические вопросы для полимодальных логик доказуемости”,
представленной на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности
01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертационная работа Пахомова Ф.Н. посвящена исследованию алгоритмических вопросов связанных с логиками доказуемости. Идея интерпретации модального оператора необходимости как предиката доказуемости в формальной теории принадлежит Курту Геделю. Всплеск интереса к логикам доказуемости связан с результатом Роберта Соловея, доказавшего в 1976 году, что модальная логика Геделя-Леба GL полностью описывает модальные свойства предиката доказуемости в арифметике Пеано. Объектом изучения данной работы являются полимодальная версия GLP логики Геделя-Леба, предложенная Джапаридзе, и связанные с ней структуры. Счетное число модальностей $[n]$, $n \in \omega$, логики GLP интерпретируется как предикаты доказуемости в арифметике Пеано с помощью ω -правила при различных ограничениях на степень вложенности ω -правила в выводе. Эта логика исследовалась такими авторами, как Беклемишев, Дашков, Шапировский. Л.Д. Беклемишевым показано, что логика GLP может успешно использоваться в ординальном анализе арифметических теорий. Ее применение основано на использовании замкнутых формул для обозначения арифметических теорий и для построения естественной системы ординальных обозначений для ординала ε_0 . В связи с этим главное внимание в работе уделено исследованию замкнутого фрагмента логики GLP и связанных с ним структур.

Диссертация состоит из введения и трех глав. Во введении содержится компактное изложение истории вопроса, а также содержания диссертации.

В первой главе диссертации исследуется сложность замкнутых фрагментов логики Джапаридзе и ее подсистем GLP_n , $n \in \omega$, язык которых содержит лишь конечное число модальностей. Установлено, что проблема распознавания выводимости замкнутых формул является $PSPACE$ -полной в логике GLP и полиномиальной для каждой из логик GLP_n . В связи с результатом о $PSPACE$ -полноте замкнутого фраг-

мента GLP стоит вспомнить о разрешимости за полиномиальное время замкнутого фрагмента логики GL, установленной Чагровым и Рыбаковым.

Последние две главы диссертации посвящены исследованию сложности элементарных теорий структур, составленных из классов эквивалентных GLP-слов. Под GLP-словом понимается формула вида $\langle n_1 \rangle \dots \langle n_k \rangle T$. Через W (W_n) обозначается множество всех GLP-слов (в языке логики GLP_n).

Во второй главе доказывается, что семейства классов эквивалентности слов W/\sim и W_n/\sim , $n \in \omega$, где \sim — доказуемая эквивалентность в GLP, образуют нижние полурешетки, и исследуется вопрос о разрешимости элементарных теорий этих полурешеток. Установлено, что элементарные теории полурешеток $\langle W/\sim, \wedge \rangle$ и $\langle W_n/\sim, \wedge \rangle$, $n \geq 2$ неразрешимы. В тоже время доказано, что элементарная теория $\langle W_1/\sim, \wedge \rangle$ разрешима.

Заключительная глава диссертации посвящена изучению системы ординальных обозначений Беклемишева и ее фрагментов. Точнее, изучаются элементарные теории моделей $\langle W/\sim, \leq_0, T, \langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \dots, \langle k \rangle, \dots \rangle$ и $\langle W_n/\sim, \leq_0, T, \langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \dots, \langle n \rangle \rangle$, которые являются естественными эффективными представлениями ординалов ε_0 и ω_{n+1} , соответственно. Установлено, что элементарные теории моделей $\langle W/\sim, \leq_0, T, \langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \dots, \langle k \rangle, \dots \rangle$ и $\langle W_n/\sim, \leq_0, T, \langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \dots, \langle n \rangle \rangle$, $n \geq 3$ неразрешимы. В тоже время, элементарные теории моделей $\langle W/\sim, \leq_0, T, \langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle \rangle$ и $\langle W_n/\sim, \leq_0, T, \langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle \rangle$, $n \geq 2$, разрешимы.

Для доказательства результатов о разрешимости и неразрешимости используются различные версии метода относительной элементарной определимости теорий и классов моделей. Это технически сложные и красивые результаты.

В целом текст диссертации хорошо написан. Опечатки в словах, формулах и стилистические погрешности присутствуют в незначительном количестве и не мешают чтению работы. Некоторые проблемы при чтении создает значительное число определений, которые просто встроены в текст, а не выделены отдельным абзацем. В тексте диссертации теорема 7 формулируется как усиленная версия теоремы 6, а в тексте автореферата эквивалентные формулировки этих теорем приведены без соответствующего пояснения, что вызывает некоторое недоумение при первом прочтении.

Отмеченные выше недостатки легко исправимы и не влияют на общую высокую оценку диссертации.

Результаты диссертации являются новыми и актуальными, они обоснованы корректными доказательствами, своевременно опубликованы в ведущих отечественных и зарубежных изданиях. Тематика диссертации относится к активно развиваемой области математической логики.

По теме диссертации автором опубликованы три статьи в отечественных и зарубежных журналах, входящих в перечень ВАК. Язык и стиль диссертации хорошие. Автореферат полно и правильно отражает содержание диссертации.

Работа имеет теоретическое значение. Ее результаты представляют интерес для специалистов в области математической логики, в частности, по неклассическим логикам и теории вычислимости, а также для специалистов в области теоретической информатики.

Результаты диссертации целесообразно использовать в исследованиях по неклассическим логикам в Московском госуниверситете, Математическом институте РАН, Институте математики СО РАН, Институте проблем передачи информации РАН,

