На правах рукописи
УДК 511.21, 511.556, 519.116

Монина Мария Дмитриевна

Арифметическая теория тэта-функций и последовательностей Сомоса

01.01.06 – математическая логика,
алгебра и теория чисел

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Хабаровск — 2015

Работа выполнена в отделе теоретической и прикладной математики Хабаровского отделения Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской Академии наук

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
чл.-корр. РАН, директор ХО ИПМ ДВО РАН
Быковский Виктор Алексеевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Журавлев Владимир Георгиевич,
профессор кафедры математического анализа
физико-математического факультета
ФГБОУ ВПО «Владимирский государственный
университет имени Александра Григорьевича
и Николая Григорьевича Столетовых»

доктор физико-математических наук,
доцент Герман Олег Николаевич,
доцент кафедры теории чисел
механико-математического факультета
ФГБОУ ВО «Московский государственный
университет имени М.В. Ломоносова»

Ведущая организация: ФГБОУ ВПО «Тульский государственный
педагогический университет
им. Л. Н. Толстого»

Защита диссертации состоится 24 декабря 2015 г. в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 002.022.03 при Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук по адресу Москва, ул. Губкина, д. 8.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Математического института им. В. А. Стеклова, а также на сайте *http://www.mi.ras.ru/dis/ref15/monina/monina_dis.pdf*.

Автореферат разослан “____” ноября 2015 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 002.022.03 при МИАН,
доктор физико-математических наук И. Д. Шкредов

Общая характеристика работы

Актуальность темы. В 1861 году в письме к Лиувиллю Эрмит написал: "После нашей последней беседы по поводу арифметических вопросов, которые составляют предмет ваших исследований и на которых вы мне показали новый пример великой плодотворности методов, которых принцип вы скрываете, мне, думается, удалось удовлетворить в некоторой мере желанию, которое вы неоднократно выражали касательно превосходных теорем Кронекера о числе классов квадратичных форм". В своём ответе на это письмо, опубликованном в "Journal de mathématiques", Лиувилль характеризует свой метод так: "Мы (с вами) идем к одной цели, но совершенно по разным путям, которые всё-же связаны с работами Якоби...Эта теория (теория эллиптических функций), которою вы непосредственно пользуетесь, для меня заменяется формулами, принадлежащими к области элементарной алгебры и полученными при помощи весьма простых тождеств". Позднее методы Лиувилля были воссозданы в работах в работах Баскакова, Назимова, Гирстера, Успенского, Венкова и других авторов[1]. В их работах было получено много новых конкретных арифметических результатов.

В 1984 году появилась заметка (Heath-Brown D.R. Fermat's two squares theorem. Invariant, 1984. С. 2–5) с коротким элементарным доказательством представимости простых чисел вида $4n+1$ суммой двух квадратов. Оно вошло в сборник лучших доказательств со времен Евклида до наших дней (Proofs from THE BOOK by M. Aigner, G.M. Zeigler. Springer-Verlag, 1998) и опирается на арифметическую инволюцию, лежащую в основе методов Лиувилля. В серии работ Макдональда, Каца, Муди, Леповского и других авторов по теории представлений бесконечномерных алгебр Ли, публиковавшихся начиная с 1972 года, были предложены новые методы доказательств тождеств из теории тэта-функций. В 90-х годах прошлого века в работах канадского математика К.С. Вильямса[2] и его учеников активно начали использоваться методы Лиувилля для доказательства новых классов арифметических тождеств и их приложений. Рассматриваемая тематика и её приложения по-прежнему в центре внимания специалистов по теории чисел, теории автоморфных функций и другим разделам математики.

В последнее десятилетие прошлого века большое внимание специалистов привлекли последовательности Сомоса. В первую очередь это связано с тем, что они естественным образом возникают при выполнении операции сложения точек на эллиптических кривых. Особенно большой интерес вызывает вопрос о целочисленности вышеупомянутых последовательностей. Этим вопросом занимались Малуф, Бомбьери, Хикерсон, Лотто, Фомин, Зелевинский, Хоун, Сворт и др.

Степень разработанности темы. В работах предшествующих авторов по теме исследования арифметические методы Лиувилля не применялись для доказательства некоторых фундаментальных тождеств в теории тэта-функций, таких

[1] Dickson L.E. *History of the theory of numbers*, New York: Chelsea Pub. Co., **2** (1952).

[2] Williams Kenneth S. *Number theory in the spirit of Liouville*, London Mathematical Society Student Texts, 76, Cambridge University Press, 2011.

как тождества для тройного, пятикратного и восьмикратного произведений. Известные ранее арифметические тождества рассматривались каждое само по себе и применялись в основном для изучения представлений чисел квадратичными формами.

Существующие методы, опирающиеся на теорию тэта-функций позволяют исследовать вопросы целочисленности для последовательностей Сомос-k с $2 \leqslant k \leqslant 7$. В случае $k \geqslant 8$ этот вопрос на сегодняшний день мало изучен.

Цели работы. Построение новых универсальных арифметических тождеств, содержащих в себе ранее полученные тождества Лиувилля, Успенского и других авторов. Доказательство с их помощью тождеств для тройного, пятикратного и восьмикратного произведений, а также получение новых соотношений для тэта-функций.

Разработка новых методов построения целочисленных последовательностей Сомос-8 и Сомос-9, опирающихся на теорию тэта-функций.

Методы исследования. В работе использованы элементарные методы теории чисел, теории тэта-функций, теории бесконечных произведений и рядов.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно. К важнейшим можно отнести следующие:

- универсальное арифметическое тождество из теоремы 1;
- новые доказательства для классических разложений в тройное, пятикратное и восьмикратное произведения, опирающиеся на арифметические методы Лиувилля;
- новое элементарное арифметическое доказательство трёхчленного соотношения для произведения функций Якоби от двух переменных;
- два новых трёхчленных тождества с произведениями тэта-функций от одной и двух переменных;
- новый метод построения целочисленных последовательностей Сомос-8 и Сомос-9, основанный на теории тэта-функций.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Результаты, полученные в диссертации, и разработанные в ней методы могут быть применены в теории представлений чисел квадратичными формами, теории эллиптических, тэта-функций и теории последовательностей Сомоса. Кроме того, полученные результаты могут быть использованы в учебном процессе в рамках специальных курсов и семинаров.

Апробация результатов. Результаты диссертации докладывались автором на следующих конференциях:

- «Diophantine Analysis» — Астрахань, Россия (30 июля – 3 августа 2012);

- «Multidimensional continued fractions» — Грац, Австрия (22 – 26 июня 2013 года);
- «28th Journées Arithmétiques» — Гренобль, Франция (1 – 5 июля 2013 года);
- «4th International Conference on Uniform Distribution Theory» — Острава, Чехия (30 июня – 4 июля 2014 года);
- «29th Journées Arithmétiques» — Дебрецен, Венгрия (6 – 10 июля 2015 года);
- «Analytical methods in number theory, probability theory and mathematical statistics» — Санкт-Петербург, Россия (14 – 18 сентября 2015 года)

и научном семинаре ХО ИПМ ДВО РАН (рук. В.А. Быковский).

По теме диссертации опубликовано 6 статей в ведущих российских изданиях [1]—[6]. Список работ приводится в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из предисловия, введения, двух глав и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 63 страницы. Библиография включает 39 наименований.

Положения выносимые на защиту

В своих основополагающих работах[3,4] Якоби в качестве одного из главных инструментов для построения теории эллиптических функций использовал четыре тэта-функции

$$\vartheta_1(z) = \vartheta_1(z;q) = 2q^{\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)} \sin(2n+1)z = -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{(2n+1)iz},$$

$$\vartheta_2(z) = \vartheta_2(z;q) = 2q^{\frac{1}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)} \cos(2n+1)z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{(2n+1)iz},$$

$$\vartheta_3(z) = \vartheta_3(z;q) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos(2nz) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2inz},$$

$$\vartheta_4(z) = \vartheta_4(z;q) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k q^{n^2} \cos(2nz) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2inz}.$$

[3] Jacobi C. G. J. *Gesammelte Werke*, Berlin, **1** (1881), 49–239.
[4] Jacobi C. G. J. *Gesammelte Werke*, Berlin, **1** (1881), 497–538.

Позднее в работе[5], посвящённой динамике твёрдого тела, он ввёл ещё одну тэта-функцию от двух переменных

$$H(z,w)=H(z,w;q)=\operatorname{ctg} z+\operatorname{ctg} w+4\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}q^{2mn}\sin(2mz+2nw).$$

В первой главе диссертации излагаются новые результаты, развивающие арифметические методы Лиувилля и его последователей.

Фундаментальную роль в теории тэта-функций играют следующие разложения тэта-функций Якоби с $u=e^{2iz}$:

$$\vartheta_1(z;q)=\frac{1}{i}\sum_{b=-\infty}^{\infty}(-1)^b u^{b+\frac{1}{2}}q^{(b+\frac{1}{2})^2}=$$

$$=\frac{1}{i}(u^{\frac{1}{2}}-u^{-\frac{1}{2}})q^{\frac{1}{4}}\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k})(1-uq^{2k})(1-u^{-1}q^{2k}),$$

$$\vartheta_2(z;q)=\sum_{b=-\infty}^{\infty}u^{b+\frac{1}{2}}q^{(b+\frac{1}{2})^2}=(u^{\frac{1}{2}}+u^{-\frac{1}{2}})q^{\frac{1}{4}}\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k})(1+uq^{2k})(1+u^{-1}q^{2k}),$$

$$\vartheta_3(z;q)=\sum_{b=-\infty}^{\infty}u^b q^{b^2}=\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k})(1+uq^{2k-1})(1+u^{-1}q^{2k-1}),$$

$$\vartheta_4(z;q)=\sum_{b=-\infty}^{\infty}(-1)^b u^b q^{b^2}=\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k})(1-uq^{2k-1})(1-u^{-1}q^{2k-1}).$$

Они были открыты в основополагающих работах Якоби[6] и независимо в опубликованных много лет спустя научных дневниках Гаусса[7]. Некоторые авторы называют их разложениями в тройное произведение по количеству множителей в бесконечных произведениях.

На странице 433 первого тома монографии Фрикке[8] представлено ещё одно замечательное тождество

$$2q^{\frac{1}{6}}\sum_{b=-\infty}^{\infty}(-1)^b\cos\left(\pi z(6b+1)\right)q^{\frac{(6b+1)^2}{12}}=\vartheta_2(z;q)\vartheta_3(z;q)\vartheta_4(z;q)\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k})^{-2}.$$

[5] Jacobi C. G. J. *Gesammelte Werke*, Berlin, **2** (1881), 289–352.

[6] Jacobi C. G. J. *Gesammelte Werke*, Berlin, **1** (1881).

[7] Gauss C. F. *Gauss Werke II*, Göttingen, 1863.

[8] Fricke R. *Die Elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen,* Berlin: Springer, **1** (2011).

С помощью замен

$$z \to z + \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad q \to q^{\frac{1}{2}}$$

его можно записать в следующем виде

$$(1-u^{-1})\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k)(1-uq^k)(1-u^{-1}q^k)(1-u^2q^{2k-1})(1-u^{-2}q^{2k-1}) =$$

$$= \sum_{b=-\infty}^{\infty} q^{\frac{3b^2+b}{2}}(u^{3b}-u^{-3b-1}), \quad (1)$$

которое переоткрывалось в работах[9,10,11,12]. В свою очередь (1) после замен[13]

$$q \to q^6 \quad \text{и} \quad u \to uq^3$$

преобразуется к виду

$$q(u-u^{-1})\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{6k})(1-uq^{3k})(1-u^{-1}q^{3k})(1+uq^{6k})(1+u^{-1}q^{6k}) = \sum_{b=-\infty}^{\infty}\chi_{-3}(b)u^b q^{b^2}, \quad (2)$$

где

$$\chi_{-3}(b) = \begin{cases} 0, & \text{если } b \equiv 0 \pmod 3; \\ 1, & \text{если } b \equiv 1 \pmod 3; \\ -1, & \text{если } b \equiv -1 \pmod 3) \end{cases}$$

— квадратичный характер по модулю 3. Тождество (2) иногда называют тождеством для пятикратного произведения.

Пусть $v = e^{2iw}$. К числу важнейших в теории эллиптических и тэта-функций относится тождество для восьмикратного произведения

$$\frac{uv-1}{(u-1)(v-1)}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(1-q^k)(1-q^k)(1-uvq^k)(1-u^{-1}v^{-1}q^k)}{(1-uq^k)(1-u^{-1}q^k)(1-vq^k)(1-v^{-1}q^k)} =$$

$$= 1 - \frac{1}{1-u} - \frac{1}{1-v} - \sum_{m,n=1}^{\infty}(u^m v^n - u^{-m}v^{-n})q^{mn}.$$

---

[9] Atkin A. O. L., Swinnerton-Dyer P. *Some properties of partitions*, Proc. London Math. Soc. (3), **4** (1954), 84–106.

[10] Gordon B. *Some identities in combinatorial analysis*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2), **12** (1961), 285–290.

[11] Watson G. N. *Theorems stated by Ramanujan (VII): Theorems on a continued fraction*, J. London Math. Soc., **4** (1929), 39–48.

[12] Клячко А. А. *Модулярные формы и представления симметрических групп*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **116** (1982), 174–85.

[13] Бударина Н. В., Быковский В. А. "Арифметическая природа тождеств для тройного и пятикратного произведений", *Дальневосточный математический журнал*, **11**: 2 (2011), 140–148.

С помощью разложения тэта-функции $\vartheta_1(v;q)$ в тройное произведение и замен

$$q \to q^2, u \to u^2, v \to v^2$$

оно преобразуется в восходящее к Якоби тождество[14]

$$\frac{\vartheta_1(z+w)\vartheta_1'}{\vartheta_1(z)\vartheta_1(w)} = \operatorname{ctg} z + \operatorname{ctg} w + 4\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} q^{2mn}\sin(2mz+2nw) = H(z,w), \qquad (3)$$

где ϑ_1' — производная по z в нуле нечетной функции Якоби ϑ_1.

В разделе 1.1 первой главы излагается общая конструкция, которая с единой точки зрения объясняет все ранее полученные результаты. С её помощью доказываются тождества для разложения ϑ_3 в тройное произведение, а также тождества для пятикратного и восьмикратного произведений.

Сформулируем результаты из раздела 1.1.

Пусть L – ненулевая линейная форма от s $(= 2, 3, \dots)$ независимых переменных $x_1, \dots, x_s$ с целыми коэффициентами , а

$$J, U_-, U_+, R : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$$

– четыре линейных преобразования, определяемых матрицами размера $s \times s$ с целыми коэффициентами и определителем ± 1.

Пусть также Ω – конечное подмножество в

$$\mathbb{Z}^s = \{m = (m_1, \dots, m_s) \mid m_i \in \mathbb{Z}\},$$

которое разбивается на три непересекающихся подмножества Ω_0, Ω_- и Ω_+ с помощью ограничений:

$$L(m) = 0, \quad L(m) < 0 \ \text{ и } \ L(m) > 0.$$

Предположим, что:

(I) J, U_-, U_+ – инволюции (обратное преобразование совпадает с исходным) и при этом

$$R = J \circ U_+ = U_- \circ J;$$

(II)

$$L \circ J = -L; \qquad (4)$$

(III) инволюции J, U_- и U_+ определяют, соответственно, биекции Ω, Ω_- и Ω_+ на себя.

Замечание 1. *Начиная с этого момента $\mathcal{A}$ – произвольная аддитивная абелева группа.*

---

[14] Weber H. M. *Lehrbuch der Algebra*, Braunschweig, **3** (1908), 92.

Теорема 1. *Пусть* $\Phi : \mathbb{Z}^s \to \mathcal{A}$ *– произвольная функция, для которой*

$$\Phi(R(m)) = -\Phi(m) \quad \forall m \in \mathbb{Z}^s.$$

Тогда

$$\sum_{m\in\Omega} \Phi(m) = \sum_{m\in\Omega_0} \Phi(m).$$

Следствие 1. *Предположим, что* $R^l = E$ *(тождественное преобразование) для некоторого чётного натурального* l. *Тогда для любой функции* $F : \mathbb{Z}^s \to \mathcal{A}$ *справедливо утверждение теоремы 1 с*

$$\Phi = \sum_{t=0}^{l-1} (-1)^t F \circ R^t.$$

В разделе 1.2 первой главы доказывается

Теорема 2. *Пусть* $G : \mathbb{Z}^3 \to \mathcal{A}$ *произвольная функция с*

$$G(-m) = -G(m) \quad (m \in \mathbb{Z}^3).$$

Тогда для любого натурального d выполняется *равенство*

$$\sum_{b^2+ac=d} \Phi(a, b, c) = \sum_{\substack{d=n^2\\0<k<2n}} \Phi(k, n-k, 2n-k),$$

где

$$\Phi(m) = G(m) + G(R^2(m)) + G(R^4(m)) =$$
$$= G(m_1, m_2, m_3) + G(m_1 + 2m_2 - m_3, -m_1 - m_2, -m_1)+$$
$$+G(-m_3, -m_2 + m_3, -m_1 - 2m_2 + m_3).$$

В соответствии с обозначениями, суммирование в левой части ведётся по целым b, а также натуральным a и c, связанным соотношением $b^2 + ac = d$.

В качестве следствия из теоремы 2 получается тождество Успенского

$$\sum_{b^2+ac=d} \{F(a + c, b, -a + c) - 2F(a - 2b, b + c, -a + 2b + 2c)\} =$$

$$= \sum_{\substack{d=n^2\\0<k<2n}} \{F(2n, n - k, 2n - 2k) - 2F(k, n, k)\},$$

впервые опубликованное им в работе[15]. Оно выполняется для любой функции F, удовлетворяющей соотношениям

$$F(m_1,-m_2,-m_3)=F(m_1,m_2,m_3)=-F(-m_1,m_2,m_3)\qquad(m_1,m_2,m_3\in\mathbb{Z}).$$

В разделе 1.3 с помощью теоремы 2 доказывается следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ произвольная чётная функция. Тогда для любого натурального d выполняется тождество*

$$-\frac{1}{2}\sum_{\substack{b^2+ac=d\\ a\text{ — чётное}}} af(b)-\sum_{\substack{b^2+ac=d\\ a\text{ — нечётное}}}(-1)^c af(c-b)=$$

$$=\begin{cases} n^2 f(n), & \text{если } d=n^2,\\ 0, & \text{если } d\neq n^2.\end{cases}$$

Также в этом разделе объясняется почему тождество из теоремы 3 эквивалентно разложению тэта-функции ϑ_3 в тройное произведение.

В разделе 1.4 с помощью теоремы 2 доказывается ещё одно утверждение. Здесь и далее через δ_n обозначим характеристическую функцию делимости на n:

$$\delta_n(b)=\begin{cases}1, & \text{если } b\equiv 0 \pmod n;\\ 0, & \text{если } b\not\equiv 0 \pmod n\end{cases}$$

для целого b и натурального n.

Теорема 4. *Пусть $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ произвольная нечётная функция. Тогда для любого натурального d выполняется тождество*

$$-\frac{1}{2}\sum_{b^2+ac=d}\delta_6(a)a\chi_{-3}(b)g(b)-\sum_{b^2+ac=d}\delta_3(a)(1+\delta_2(a)(-1)^c)a\chi_{-3}(b)g(b-c)=$$

$$=\begin{cases}\chi_{-3}(n)(n^2-1)g(n), & \text{если } d=n^2,\\ 0, & \text{если } d\neq n^2.\end{cases}$$

Также в этом разделе объясняется почему утверждение для теоремы 4 эквивалентно тождеству для пятикратного произведения.

Особо подчеркнём, что доказательство теорем 2 и 3 основаны на частном случае универсального арифметического тождества из теоремы 1, соответствующего следующей конструкции.

[15] Ouspensky J. “Sur les relations entre les nombres des classes des formes quadratiques binaires et positives. Premier Memoire, I”, *Известия Академии Наук. VI серия*, **19**: 12–15 (1925), 599–620.

Нетрудно проверить, что преобразования

$$J : (m_1, m_2, m_3) \to (m_3, -m_2, m_1),$$

$$U_+ : (m_1, m_2, m_3) \to (m_1 + 2m_2 - m_3, -m_2 + m_3, m_3)$$

определяют целочисленные линейные автоморфизмы квадратичной формы

$$Q(m_1, m_2, m_3) = m_2^2 + m_1 m_3.$$

При этом для

$$L(m_1, m_2, m_3) = m_1 + 2m_2 - m_3$$

выполняется условие (4), а для конечных множеств

$$\Omega = \Omega(d) = \{(a, b, c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \mid Q(a, b, c) = b^2 + ac = d\}$$

условия теоремы 1 при любом натуральном d.
По определению, преобразование

$$R(m) = J(U_+(m)) = (m_3, m_2 - m_3, m_1 + 2m_2 - m_3),$$

для которого

$$R^3(m) = (-m_1, -m_2, -m_3).$$

Для d, отличных от квадрата, $\Omega_0(d)$ – пустое множество, а для $d = n^2$

$$\Omega_0(n^2) = \{(k, n - k, 2n - k) \mid \ 0 < k < 2n\}.$$

Замечание 2. *По той же схеме с помощью теоремы 2 доказываются остальные разложения в тройное произведения тэта-функций $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_4$. Впрочем, как хорошо известно, их можно получить из разложения для ϑ_3 путём следующих замен:*

1) $u \to -uq$ для ϑ_1;
2) $u \to uq$ для ϑ_2;
3) $u \to -u$ для ϑ_4.

В разделе 1.5 доказывается следующий новый результат.

Теорема 5. *Для любых комплексных z_1, z_2, z_3* и $|q| < 1$ *выполняется тождество*

$$\vartheta_3(z_1; q^2) H(-z_2, -z_3; q) + \vartheta_3(z_1 - 2z_2; q^2) H(z_1 + z_3 - z_2, z_2; q) +$$

$$+ \vartheta_3(z_1 + 2z_3; q^2) H(w, z_2 - z_3 - z_1; q) = 0.$$

Замечание 3. *С содержательной точки зрения теорема 5 представляет собой аналитический вариант теоремы 2. В тексте диссертации она выводится из теоремы 2. При этом все элементы доказательства этого факта обратимы и в этом смысле могут рассматриваться как доказательство теоремы 2 с помощью теоремы 5.*

В разделе 1.6 теорема 1 специализируется с помощью еще одной конструкции.

Преобразования

$$J : (m_1, m_2, m_3, m_4) \to (m_4, -m_3, -m_2, m_1),$$

$$U_+ : (m_1, m_2, m_3, m_4) \to (m_1 + m_2 + m_3 - m_4, -m_2 + m_4, -m_3 + m_4, m_4)$$

определяют целочисленные линейные автоморфизмы квадратичной формы

$$Q(m_1, m_2, m_3, m_4) = m_2^2 + m_3^2 + 2m_1m_4.$$

При этом для

$$L(m_1, m_2, m_3, m_4) = m_1 + m_2 + m_3 - m_4$$

выполняется условие (4), а для конечных множеств

$$\Omega = \Omega(d) = \{(a, b_1, b_2, c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{N} \mid b_1^2 + b_2^2 + 2ac = d\}$$

условия теоремы 1 при любом натуральном d.

По определению, преобразование

$$R(m) = J(U_+(m)) = (m_4, m_3 - m_4, m_2 - m_4, m_1 + m_2 + m_3 - m_4),$$

для которого

$$R^3(m) = (-m_1, -m_2, -m_3, -m_4).$$

Из равенства

$$L(m) = m_1 + m_2 + m_3 - m_4 = 0$$

следует, что

$$Q(m) = m_2^2 + m_3^2 + 2m_1(m_1 + m_2 + m_3) = (m_1 + m_2)^2 + (m_1 + m_3)^2.$$

В рассматриваемом случае теорема 1 и следствие 1 приводят к следующему утверждению.

Теорема 6. *Пусть* $G : \mathbb{Z}^4 \to \mathcal{A}$ *произвольная функция с* $G(-m) = -G(m)$ $(\forall m \in \mathbb{Z}^4)$. *Тогда для любого натурального* d *выполняется равенство*

$$\sum_{b_1^2+b_2^2+2ac=d} \Phi(a, b_1, b_2, c) = \sum_{\substack{(a+b_1)^2+(a+b_2)^2=d \\ a+b_1+b_2>0}} \Phi(a, b_1, b_2, a + b_1 + b_2),$$

где

$$\Phi(m) = G(m) + G(R^2(m)) + G(R^4(m)) =$$
$$= G(m_1, m_2, m_3, m_4) + G(m_1 + m_2 + m_3 - m_4, -m_1 - m_3, -m_1 - m_2, -m_1) +$$
$$+ G(-m_4, -m_3 + m_4, -m_2 + m_4, -m_1 - m_2 - m_3 + m_4).$$

В этом же разделе с помощью теоремы 6 доказывается следующее утверждение.

Теорема 7. *Пусть $h : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C}$ произвольная функция, для которой*

$$h(m_1, m_2) = h(m_2, m_1) = -h(-m_1, -m_2) \qquad (\forall m_1, m_2 \in \mathbb{Z}).$$

Тогда для любого натурального d выполняется тождество

$$-\sum_{\substack{b_1^2+b_2^2+2ac=d\\ a,\, c\text{— чётные}}} \chi_{-4}(b_1)\chi_{-4}(b_2)h(a + b_1, b_2 + c) =$$
$$= \sum_{n_1^2+n_2^2=d} \chi_{-4}(n_1)\chi_{-4}(n_2)(n_2 h(n_1, n_1) - 2 \sum_{\substack{-n_1 \le t \le n_1\\ t\text{—нечёт}}}'' h(t, n_2)),$$

где штрихи подразумевают коэффициент $\frac{1}{2}$ при $t = \pm n_1$ и

$$\chi_{-4}(b) = \begin{cases} 0, & \text{если } b \text{ — чётно;}\\ (-1)^{\frac{b-1}{2}}, & \text{если } b \text{ — нечётно} \end{cases}$$

— квадратичный характер по модулю 4.

Замечание 4. *Теорему 7 можно рассматривать как арифметический вариант тождества (3).*

В разделе 1.7 теорема 1 специализируется с помощью третьей конструкции, в которой

$$J : (m_1, m_2, m_3, m_4) \to (m_3, m_4, m_1, m_2),$$
$$U_+ : (m_1, m_2, m_3, m_4) \to (m_2 + m_4, m_1 - m_3, m_4, m_3)$$

определяют целочисленные линейные автоморфизмы квадратичной формы

$$Q(m_1, m_2, m_3, m_4) = m_1 m_4 + m_2 m_3.$$

По определению, преобразование

$$R(m) = J(U_+(m)) = (m_4, m_3, m_2 + m_4, m_1 - m_3),$$

для которого

$$R^6(m) = (-m_1, -m_2, -m_3, -m_4).$$

При этом $\Omega(d)$ состоит из всех четверок натуральных чисел (m_1, m_2, m_3, m_4), для которых

$$m_1 m_4 + m_2 m_3 = d.$$

Безотносительно к представленной в разделе 1.1 общей конструкции, соответствующий результат для этого случая содержится в следующем утверждении, доказанном в работе[16].

Теорема 9. *Пусть $\Phi : \mathbb{Z}^4 \to \mathcal{A}$ — произвольная функция, для которой*

$$\Phi \begin{pmatrix} m' & m' - m \\ -n' & n' + n \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} m & m' \\ n & n' \end{pmatrix}.$$

Тогда для любого натурального d

$$\sum_{mn' + m'n = d} \left(\Phi \begin{pmatrix} m & m' \\ n & n' \end{pmatrix} - \Phi \begin{pmatrix} m & -m' \\ -n & n' \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \sum_{d_1 d_2 = d} \left(\sum_{0 \le a < d_2} \Phi \begin{pmatrix} 0 & d_1 \\ d_2 & -a \end{pmatrix} - \sum_{0 \le b < d_1} \Phi \begin{pmatrix} b & d_1 \\ d_2 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Из этой теоремы выводится соотношение[17]

$$H(z, w)H(z', w') + H(z + z', w')H(-z, -w + w') + H(-z', w - w')H(z + z', w) = 0.$$

И, наконец, в разделе 1.8 доказывается ещё один новый результат на рассматриваемую тему.

Теорема 10. *Для любых комплексных z_1, z_2, z_3, z_4 и $|q| < 1$ выполняется тождество*

$$\vartheta_3(z_2; q)\vartheta_3(z_3; q)H(z_1, z_4; q)+$$

$$+\vartheta_3(z_3 - z_1; q)\vartheta_3(z_2 - z_1; q)H(z_1 - z_2 - z_3 - z_4, -z_1; q)+$$

$$+\vartheta_3(z_3 + z_4; q)\vartheta_3(z_2 + z_4; q)H(-z_4, -z_1 + z_2 + z_3 + z_4; q) = 0.$$

Она выводится из теоремы 2. При этом в доказательстве рассуждения можно обратить и по этой причине теоремы 2 и 10 можно считать эквивалентными утверждениями.

---

[16] Быковский В. А. “Обобщение арифметических тождеств Лиувилля и Скорупны”, *Доклады Академии наук*, **432**: 6 (2010), 736–737.

[17] Полищук А. Е. *Абелевы многообразия, тэта-функции и преобразование Фурье*, Москва: МЦНМО, 2010 (глава 12, упражнение 6).

Во второй главе предложен новый метод построения целочисленных последовательностей Сомос-8 и Сомос-9, опирающийся на теорию тэта-функций и результаты работ[18,19,20,21]. Для натурального $k \geqslant 2$ последовательность Сомос-k: $A : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ удовлетворяет квадратичному рекуррентному соотношению

$$A\left(n+k\right)A\left(n\right)=\sum_{j=1}^{[k/2]}\alpha_j A\left(n+k-j\right)A\left(n+j\right)$$

с константами α_j. В ситуации общего положения, за исключением некоторых вырожденных случаев, эта последовательность однозначно определяется коэффициентами $\alpha_1, \ldots, \alpha_{[k/2]}$ и начальными значениями $A(1), \ldots, A(k)$. В частных случаях с $\alpha_i = 1$ и начальными значениями, также равными 1, при $k = 4, 5, 6$ и 7 Сомос предположил[22], что возникающие при этом последовательности состоят из натуральных чисел[23]. При $k = 8$ численные эксперименты показали, что это утверждение уже неверно. Фомин и Зелевинский[24], опираясь на теорию кластерных алгебр, доказали, что при $k = 4, 5, 6$ и 7 элементы последовательностей Сомоса являются целочисленными полиномами от коэффициентов α_i и формальных переменных $A^{\pm 1}(1), \ldots, A^{\pm 1}(k)$. Отсюда немедленно следует целочисленность последовательностей Сомоса с единичными коэффициентами и единичными начальными данными. При $k = 4$ и 5 были построены более широкие классы целочисленных последовательностей Сомоса с удовлетворяющими некоторым условиям целыми начальными данными и рациональными коэффициентами[19].

В разделе 2.1 формулируются необходимые для дальнейшего результаты, относящиеся к теории эллиптических систем последовательностей. Пусть A — целочисленная последовательность Сомоса вида

$$A(n) = e^{an^2+bn+c}\sigma_\Gamma(z_0 + nz),$$

где a, b, c, z_0 и $z \neq 0$ — произвольные комплексные числа, а Γ — любая решётка на комплексной плоскости. Здесь присутствует сигма-функция Вейерштрасса, ассоциированная с решёткой Γ, которая определяется по формуле

$$\sigma_\Gamma(z) = z \prod_{w\in\Gamma\setminus\{0\}} (1 - \frac{z}{w})\ e^{\frac{z}{w}+\frac{1}{2}(\frac{z}{w})^2}.$$

[18] Bykovskii V. *Elliptic systems of sequences and functions*, 2015. http://www.skoltech.ru/app/data/uploads/sites/29/2015/02/Skolkovo/Bykovskii.pdf

[19] Hone A. N. W., Swart C. S. *Integrality and the Laurent phenomenon for Somos 4 and Somos 5 sequences*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **145** (2008), 65–85.

[20] Hone A. N. W. *Elliptic curves and quadratic recurrence sequences*, Bulletin of the London Mathematical Society, **37** (2005), 161–171.

[21] Hone A. N. W. Sigma function solution of the initial value problem for Somos 5 sequences *Trans. Amer. Math. Soc.* , **359** (2007), 5019–5034.

[22] Somos M. *Problem 1470*, Crux Mathematicorum 15 (1989), 208.

[23] Gale D. *Mathematical Entertainments: The Strange and Surprising Saga of the Somos Sequences*, Math. Intel., **13** (1991), 40–42.

[24] Fomin S., Zelevinsky A. *The Laurent Phenomenon*, Adv. Appl. Math., **28** (2002), 119–144.

В вырожденных случаях:

1) для $\Gamma = \{0\}$ $\qquad \sigma_\Gamma(z) = z$;

2) для $\Gamma = \{mw | m \in \mathbb{Z}\}$ с $w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$

$$\sigma_\Gamma(z) = z \prod_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(1 - \frac{z}{nw}\right) e^{\frac{z}{nw}+\frac{1}{2}(\frac{z}{nw})^2} = \frac{w}{\pi}\sin\frac{\pi z}{w} e^{\frac{\pi^2}{6}(\frac{z}{w})^2}.$$

Определим целочисленную последовательность $B : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ по формуле

$$B(n) = lA(n) + tA(n + 2N)$$

с фиксированным целым $N \neq 0$ и целыми l и t. В разделе 2.2 доказывается следующее утверждение

Теорема 11. *Если*

$$\det \begin{pmatrix} B(6)B(0) & B(5)B(1) & B(4)B(2) & B(3)B(3) \\ B(5)B(-1) & B(4)B(0) & B(3)B(1) & B(2)B(2) \\ B(4)B(-2) & B(3)B(-1) & B(2)B(0) & B(1)B(1) \\ B(3)B(-3) & B(2)B(-2) & B(1)B(-1) & B(0)B(0) \end{pmatrix} \neq 0,$$

то B — целочисленная последовательность Сомос-8.

Определим целочисленную последовательность $B : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ по формуле

$$B(n) = lA(n) + tA(n + 2N + 1)$$

с фиксированным целым N и целыми l и t. В разделе 2.3 доказывается ещё одно утверждение на эту тему

Теорема 12. *Если*

$$\det \begin{pmatrix} B(7)B(0) & B(6)B(1) & B(5)B(2) & B(4)B(3) \\ B(6)B(-1) & B(5)B(0) & B(4)B(1) & B(3)B(2) \\ B(5)B(-2) & B(4)B(-1) & B(3)B(0) & B(2)B(1) \\ B(4)B(-3) & B(3)B(-2) & B(2)B(-1) & B(1)B(0) \end{pmatrix} \neq 0,$$

то B — целочисленная последовательность Сомос-9.

Отметим также, что в разделах 2.2 и 2.3 приводятся конкретные примеры последовательностей $B(n)$, удовлетворяющих условиям теорем 11 и 12.

Список работ автора по теме диссертации

1. В. А. Быковский, М. Д. Монина, “Арифметические тождества, ассоциированные с квадратичными формами, и их приложения”, *ДАН*, **449**:5 (2013), 503–506.

2. В. А. Быковский, М. Д. Монина, “Об арифметической природе некоторых тождеств теории эллиптических функций”, *Дальневост. матем. журн.*, **13**:1 (2013), 15–34.

3. М. Д. Монина, “Арифметическая интерпретация трёхчленного тождества из теории эллиптических функций”, *Дальневост. матем. журн.*, **14**:1 (2014), 66–72.

4. М. Д. Монина, “Об одном трёхчленном тождестве из теории тэта-функций”, *Дальневост. матем. журн.*, **14**:2 (2014), 242–247.

5. М. Д. Монина, “О целочисленных последовательностях Сомос-8 и Сомос-9”, *Дальневост. матем. журн.*, **15**:1 (2015), 70–75.

6. M. D. Monina, “Three-term Identity for Products of Jacobi Theta Functions of One or Two Variables”, *Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory*, **5**:1-2 (2015), 21–25.