Хабаровское отделение
Федерального государственного бюджетного учреждения науки
Института прикладной математики
Дальневосточного отделения Российской Академии наук

На правах рукописи

МОНИНА Мария Дмитриевна

Арифметическая теория тэта-функций и последовательностей Сомоса

Специальность 01.01.06 – математическая логика,
алгебра и теория чисел

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
чл.-корр. РАН Быковский Виктор Алексеевич

Хабаровск — 2015

Оглавление

Предисловие

В своих основополагающих работах Якоби сразу же открыл тесную связь между эллиптическими и тэта-функциями. Последние встречались уже ранее в работах Бернулли, Эйлера, Фурье и других авторов. Но лишь Якоби удалось по-настоящему глубоко изучить их свойства и применить построенную им теорию тэта-функций к решению фундаментальных проблем теории эллиптических функций, механики и теории чисел. В частности, ему удалось получить точные формулы для числа представлений натуральных чисел суммой двух, четырёх, шести и восьми квадратов. Позднее выяснилось, что многие результаты на эту тему были известны ранее Гауссу. Они не были опубликованы, но были обнаружены после смерти Гаусса в его дневниках.

В работах Якоби и последующих авторов было найдено множество тождеств для тэта-функций. В своей книге "Лекции о тэта-функциях" по этому поводу Д. Мамфорд написал: "Мы уделили этим соотношениям столько места, чтобы проиллюстрировать одно из ключевых свойств теории тэта-функций: исходная симметрия быстро приводит к нагромождению формул, порядка которых не видно; дать ясную картину их алгебраических следствий обычно бывает нелегко". Тождества для тэта-функций можно доказывать различными способами. Один из самых распространенных опирается на теорему Лиувилля из теории функций комплексного переменного о том, что если голоморфная на всей комплексной плоскости функция ограничена, то она является константой. Тот же самый автор, Лиувилль, разработал элементарные арифметические методы для доказательства тождеств с тэта-функциями.

В серии из восемнадцати статей, опубликованных в "Journal de mathématiques pures et appliquées" в 1858–1865 годах под общим названием "Sur quelques formules générales qui peuvent étre utiles dans la théorie des nombres", французский математик Ж. Лиувилль привёл без доказательств большое число арифметических тождеств. Опираясь на них, он в огромном количестве заметок, опубликованных в те же годы и также без доказательств, нашёл формулы для числа представлений натуральных чисел квадратичными формами специального вида. Методы Лиувилля были воссозданы в работах Баскакова, Назимова, Успенского и других авторов, а также получили дальнейшее развитие и новые применения.

В диссертации дан частичный ответ на вопрос Мамфорда, базирующийся на элементарных арифметических методах, восходящих к Лиувиллю. В ней предложена универсальная арифметическая конструкция, которая позволяет с единой точки зрения изложить более ранние результаты, а также получить новые. Кроме того, в диссертации представлены новые результаты, относящиеся к вопросам построения целочисленных последовательностей Сомоса, доказательства которых опираются на теорию тэта-функций.

Введение

Актуальность темы. В 1861 году в письме к Лиувиллю Эрмит написал: “После нашей последней беседы по поводу арифметических вопросов, которые составляют предмет ваших исследований и на которых вы мне показали новый пример великой плодотворности методов, которых принцип вы скрываете, мне, думается, удалось удовлетворить в некоторой мере желанию, которое вы неоднократно выражали касательно превосходных теорем Кронекера о числе классов квадратичных форм”. В своём ответе на это письмо, опубликованном в “Journal de mathématiques”, Лиувилль характеризует свой метод так: “Мы (с вами) идем к одной цели, но совершенно по разным путям, которые всё-же связаны с работами Якоби...Эта теория (теория эллиптических функций), которою вы непосредственно пользуетесь, для меня заменяется формулами, принадлежащими к области элементарной алгебры и полученными при помощи весьма простых тождеств”. Позднее методы Лиувилля были воссозданы в работах в работах Баскакова, Назимова, Гирстера, Успенского, Венкова и других авторов. В их работах было получено много новых конкретных арифметических результатов.

В 1984 году появилась заметка (Heath-Brown D.R. Fermat’s two squares theorem. Invariant, 1984. С. 2–5) с коротким элементарным доказательством представимости простых чисел вида $4n+1$ суммой двух квадратов. Оно вошло в сборник лучших доказательств со времен Евклида до наших дней (Proofs from THE BOOK by M. Aigner, G.M. Zeigler. Springer-Verlag, 1998) и опирается на арифметическую инволюцию, лежащую в основе методов Лиувилля. В серии работ Макдональда, Каца, Муди, Леповского и других авторов по теории представлений бесконечномерных алгебр Ли, публиковавшихся начиная с 1972 года, были предложены новые методы доказательств тождеств из теории тэта-функций. В 90-х годах прошлого века в работах канадского математика К.С. Вильямса и его учеников (см. [26]) активно начали использоваться методы Лиувилля для доказательства новых классов арифметических тождеств и их приложений. Рассматриваемая тематика и её приложения по-прежнему в центре внимания специалистов по теории чисел, теории автоморфных функций и другим разделам математики.

В последнее десятилетие прошлого века большое внимание специалистов привлекли последовательности Сомоса. В первую очередь это связано с тем, что они естественным образом возникают при выполнении операции сложения точек на эллиптических кривых. Особенно большой интерес вызывает вопрос о целочисленности вышеупомянутых последовательностей. Этим вопросом занимались Малуф, Бомбьери, Хикерсон, Лотто, Фомин, Зелевинский, Хоун, Сворт и др.

Степень разработанности темы. В работах предшествующих авторов по теме исследования арифметические методы Лиувилля не применялись для доказательства многих фундаментальных тождеств в теории тэта-функций, таких как тождество для тройного, пятикратного и восьмикратного произведений. Известные ранее арифметические тождества рассматривались каждое само по себе и применялись в основном для изучения представлений чисел квадратичными формами.

Существующие методы, опирающиеся на теорию тэта-функций позволяют исследовать вопросы целочисленности для последовательностей Сомос-k с $2 \leqslant k \leqslant 7$. В случае $k \geqslant 8$ этот вопрос практически не был изучен.

Цели работы. Построение новых универсальных арифметических тождеств, содержащих в себе ранее полученные тождества Лиувилля, Успенского и других авторов. Доказательство с их помощью тождеств для тройного, пятикратного и восьмикратного произведений, а также получение новых соотношений для тэта-функций.

Разработка новых методов построения целочисленных последовательностей Сомос-8 и Сомос-9, опирающихся на теорию тэта-функций.

Методы исследования. В работе использованы элементарные методы теории чисел, теории тэта-функций, теории бесконечных произведений и рядов.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно. К важнейшим можно отнести следующие:

- универсальное арифметическое тождество из теоремы 1;
- новые доказательства для классических разложений в тройное, пятикратное и восьмикратное произведения, опирающиеся на арифмети-

ческие методы Лиувилля;

- новое элементарное арифметическое доказательство трёхчленного соотношения для произведения функций Якоби от двух переменных;
- два новых трёхчленных тождества с произведениями тэта-функций от одной и двух переменных;
- новый метод построения целочисленных последовательностей Сомос-8 и Сомос-9, основанный на теории тэта-функций.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Результаты, полученные в диссертации, и разработанные в ней методы могут быть применены в теории представлений чисел квадратичными формами, теории эллиптических, тэта-функций и теории последовательностей Сомоса. Кроме того, полученные результаты могут быть использованы в учебном процессе в рамках специальных курсов и семинаров.

Положения, выносимые на защиту. В своих основополагающих работах [16] и [17] Якоби в качестве одного из главных инструментов для построения теории эллиптических функций использовал четыре тэта-функции

$$\vartheta_1(z)=\vartheta_1(z;q)=2q^{\frac14}\sum_{n=0}^{\infty}q^{n(n+1)}\sin(2n+1)z=-i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac12)^2}e^{(2n+1)iz},$$

$$\vartheta_2(z)=\vartheta_2(z;q)=2q^{\frac14}\sum_{n=0}^{\infty}q^{n(n+1)}\cos(2n+1)z=\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{(n+\frac12)^2}e^{(2n+1)iz},$$

$$\vartheta_3(z)=\vartheta_3(z;q)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}\cos(2nz)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{n^2}e^{2inz},$$

$$\vartheta_4(z)=\vartheta_4(z;q)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^k q^{n^2}\cos(2nz)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}e^{2inz}.$$

Позднее в работе [18], посвящённой динамике твёрдого тела, он ввёл ещё одну тэта-функцию от двух переменных

$$H(z,w)=H(z,w;q)=\operatorname{ctg} z+\operatorname{ctg} w+4\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}q^{2mn}\sin(2mz+2nw).$$

В первой главе диссертации излагаются новые результаты, развивающие арифметические методы Лиувилля и его последователей.

Фундаментальную роль в теории тэта-функций играют следующие разложения тэта-функций Якоби с $u = e^{2iz}$:

$$\vartheta_1(z;q) = \frac{1}{i}\sum_{b=-\infty}^{\infty}(-1)^b u^{b+\frac{1}{2}} q^{(b+\frac{1}{2})^2} =$$

$$= \frac{1}{i}(u^{\frac{1}{2}} - u^{-\frac{1}{2}})q^{\frac{1}{4}}\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k})(1-uq^{2k})(1-u^{-1}q^{2k}),$$

$$\vartheta_2(z;q) = \sum_{b=-\infty}^{\infty} u^{b+\frac{1}{2}} q^{(b+\frac{1}{2})^2} = (u^{\frac{1}{2}} + u^{-\frac{1}{2}})q^{\frac{1}{4}}\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k})(1+uq^{2k})(1+u^{-1}q^{2k}),$$

$$\vartheta_3(z;q) = \sum_{b=-\infty}^{\infty} u^b q^{b^2} = \prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k})(1+uq^{2k-1})(1+u^{-1}q^{2k-1}),$$

$$\vartheta_4(z;q) = \sum_{b=-\infty}^{\infty} (-1)^b u^b q^{b^2} = \prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k})(1-uq^{2k-1})(1-u^{-1}q^{2k-1}).$$

Они были открыты в основополагающих работах Якоби (см. [15]) и независимо в опубликованных много лет спустя научных дневниках Гаусса (см. [8]). Некоторые авторы называют их разложениями в тройное произведение по количеству множителей в бесконечных произведениях.

На странице 433 первого тома монографии Фрикке [5] представлено ещё одно замечательное тождество

$$2q^{\frac{1}{6}}\sum_{b=-\infty}^{\infty}(-1)^b\cos\left(\pi z(6b+1)\right) q^{\frac{(6b+1)^2}{12}} = \vartheta_2(z;q)\vartheta_3(z;q)\vartheta_4(z;q)\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k})^{-2}.$$

С помощью замен

$$z \to z + \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad q \to q^{\frac{1}{2}}$$

его можно записать в следующем виде

$$(1-u^{-1})\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k)(1-uq^k)(1-u^{-1}q^k)(1-u^2q^{2k-1})(1-u^{-2}q^{2k-1}) =$$

$$= \sum_{b=-\infty}^{\infty} q^{\frac{3b^2+b}{2}}(u^{3b} - u^{-3b-1}), \quad (0.1)$$

которое переоткрывалось в работах [1], [9], [23] и [33]. В свою очередь (0.1) после замен (см. [27])

$$q \to q^6 \quad \text{и} \quad u \to uq^3$$

преобразуется к виду

$$q(u-u^{-1})\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{6k})(1-uq^{3k})(1-u^{-1}q^{3k})(1+uq^{6k})(1+u^{-1}q^{6k}) = \sum_{b=-\infty}^{\infty}\chi_{-3}(b)u^b q^{b^2}, \tag{0.2}$$

где

$$\chi_{-3}(b) = \begin{cases} 0, & \text{если } b \equiv 0 \pmod 3; \\ 1, & \text{если } b \equiv 1 \pmod 3; \\ -1, & \text{если } b \equiv -1 \pmod 3) \end{cases}$$

— квадратичный характер по модулю 3. Тождество (0.2) иногда называют тождеством для пятикратного произведения.

Пусть $v = e^{2iw}$. К числу важнейших в теории эллиптических и тэта-функций относится тождество для восьмикратного произведения

$$\frac{uv-1}{(u-1)(v-1)}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(1-q^k)(1-q^k)(1-uvq^k)(1-u^{-1}v^{-1}q^k)}{(1-uq^k)(1-u^{-1}q^k)(1-vq^k)(1-v^{-1}q^k)} =$$

$$= 1 - \frac{1}{1-u} - \frac{1}{1-v} - \sum_{m,n=1}^{\infty}(u^m v^n - u^{-m}v^{-n})q^{mn}.$$

С помощью разложения тэта-функции $\vartheta_1(v;q)$ в тройное произведение и замен

$$q \to q^2, u \to u^2, v \to v^2$$

оно преобразуется в восходящее к Якоби тождество (см. по этому поводу [24], стр. 92)

$$\frac{\vartheta_1(z+w)\vartheta_1'}{\vartheta_1(z)\vartheta_1(w)} = \operatorname{ctg} z + \operatorname{ctg} w + 4\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}q^{2mn}\sin(2mz+2nw) = H(z,w), \tag{0.3}$$

где ϑ_1' — производная по z в нуле нечетной функции Якоби ϑ_1.

В разделе 1.1 первой главы излагается общая конструкция, которая с единой точки зрения объясняет все ранее полученные результаты. С её помощью доказываются тождества для разложения ϑ_3 в тройное произведение, а также тождества для пятикратного и восьмикратного произведений.

Сформулируем результаты из раздела 1.1.

Пусть L – ненулевая линейная форма от s $(= 2, 3, \dots)$ независимых переменных $x_1, \dots, x_s$ с целыми коэффициентами , а

$$J, U_-, U_+, R : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$$

– четыре линейных преобразования, определяемых матрицами размера $s \times s$ с целыми коэффициентами и определителем ± 1.

Пусть также Ω – конечное подмножество в

$$\mathbb{Z}^s = \{m = (m_1, \dots, m_s) \mid m_i \in \mathbb{Z}\},$$

которое разбивается на три непересекающихся подмножества Ω_0, Ω_- и Ω_+ с помощью ограничений:

$$L(m) = 0, \quad L(m) < 0 \ \text{ и } \ L(m) > 0.$$

Предположим, что:

(I) J, U_-, U_+ – инволюции (обратное преобразование совпадает с исходным) и при этом

$$R = J \circ U_+ = U_- \circ J;$$

(II)

$$L \circ J = -L; \tag{0.4}$$

(III) инволюции J, U_- и U_+ определяют, соответственно, биекции Ω, Ω_- и Ω_+ на себя.

Замечание 0.1. Начиная с этого момента $\mathcal{A}$ – произвольная аддитивная абелева группа.

Теорема 1. *Пусть* $\Phi : \mathbb{Z}^s \to \mathcal{A}$ *– произвольная функция, для которой*

$$\Phi(R(m)) = -\Phi(m) \qquad \forall m \in \mathbb{Z}^s.$$

Тогда

$$\sum_{m \in \Omega} \Phi(m) = \sum_{m \in \Omega_0} \Phi(m).$$

Следствие 1. *Предположим, что $R^l = E$ (тождественное преобразование) для некоторого чётного натурального l. Тогда для любой функции $F : \mathbb{Z}^s \to \mathcal{A}$ справедливо утверждение теоремы 1 с*

$$\Phi = \sum_{t=0}^{l-1} (-1)^t F \circ R^t.$$

В разделе 1.2 первой главы доказывается

Теорема 2. *Пусть $G : \mathbb{Z}^3 \to \mathcal{A}$ произвольная функция с*

$$G(-m) = -G(m) \quad (m \in \mathbb{Z}^3).$$

Тогда для любого натурального d выполняется равенство

$$\sum_{b^2+ac=d} \Phi(a, b, c) = \sum_{\substack{d=n^2\\0<k<2n}} \Phi(k, n-k, 2n-k),$$

где

$$\Phi(m) = G(m) + G(R^2(m)) + G(R^4(m)) =$$

$$= G(m_1, m_2, m_3) + G(m_1 + 2m_2 - m_3, -m_1 - m_2, -m_1) +$$

$$+ G(-m_3, -m_2 + m_3, -m_1 - 2m_2 + m_3).$$

В соответствии с обозначениями, суммирование в левой части ведётся по целым b, а также натуральным a и c, связанным соотношением $b^2 + ac = d$.

В качестве следствия из теоремы 2 получается тождество Успенского

$$\sum_{b^2+ac=d} \{F(a+c, b, -a+c) - 2F(a-2b, b+c, -a+2b+2c)\} =$$

$$= \sum_{\substack{d=n^2\\0<k<2n}} \{F(2n, n-k, 2n-2k) - 2F(k, n, k)\},$$

впервые опубликованное им в работе [20]. Оно выполняется для любой функции F, удовлетворяющей соотношениям

$$F(m_1, -m_2, -m_3) = F(m_1, m_2, m_3) = -F(-m_1, m_2, m_3) \qquad (m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}).$$

В разделе 1.3 с помощью теоремы 2 доказывается следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ произвольная чётная функция. Тогда для любого натурального d выполняется тождество*

$$-\frac{1}{2}\sum_{\substack{b^2+ac=d\\ a\text{ — чётное}}} af(b) - \sum_{\substack{b^2+ac=d\\ a\text{ — нечётное}}} (-1)^c af(c-b) =$$

$$= \begin{cases} n^2 f(n), & \text{если } d = n^2,\\ 0, & \text{если } d \neq n^2.\end{cases}$$

Также в этом разделе объясняется почему тождество из теоремы 3 эквивалентно разложению тэта-функции ϑ_3 в тройное произведение.

В разделе 1.4 с помощью теоремы 2 доказывается ещё одно утверждение. Здесь и далее через δ_n обозначим характеристическую функцию делимости на n:

$$\delta_n(b) = \begin{cases} 1, & \text{если } b \equiv 0 \pmod{n};\\ 0, & \text{если } b \not\equiv 0 \pmod{n}\end{cases}$$

для целого b и натурального n.

Теорема 4. *Пусть $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ произвольная нечётная функция. Тогда для любого натурального d выполняется тождество*

$$-\frac{1}{2}\sum_{b^2+ac=d} \delta_6(a) a\chi_{-3}(b) g(b) - \sum_{b^2+ac=d} \delta_3(a)(1+\delta_2(a)(-1)^c) a\chi_{-3}(b) g(b-c) =$$

$$= \begin{cases} \chi_{-3}(n)(n^2-1)g(n), & \text{если } d = n^2,\\ 0, & \text{если } d \neq n^2.\end{cases}$$

Также в этом разделе объясняется почему утверждение для теоремы 4 эквивалентно тождеству для пятикратного произведения.

Особо подчеркнём, что доказательство теорем 2 и 3 основаны на частном случае универсального арифметического тождества из теоремы 1, соответствующего следующей конструкции.

Нетрудно проверить, что преобразования

$$J : (m_1, m_2, m_3) \to (m_3, -m_2, m_1),$$

$$U_+ : (m_1, m_2, m_3) \to (m_1 + 2m_2 - m_3, -m_2 + m_3, m_3)$$

определяют целочисленные линейные автоморфизмы квадратичной формы

$$Q(m_1, m_2, m_3) = m_2^2 + m_1 m_3.$$

При этом для

$$L(m_1, m_2, m_3) = m_1 + 2m_2 - m_3$$

выполняется условие (0.4), а для конечных множеств

$$\Omega = \Omega(d) = \{(a, b, c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \mid Q(a, b, c) = b^2 + ac = d\}$$

условия теоремы 1 при любом натуральном d.

По определению, преобразование

$$R(m) = J(U_+(m)) = (m_3, m_2 - m_3, m_1 + 2m_2 - m_3),$$

для которого

$$R^3(m) = (-m_1, -m_2, -m_3).$$

Для d, отличных от квадрата, $\Omega_0(d)$ – пустое множество, а для $d = n^2$

$$\Omega_0(n^2) = \{(k, n - k, 2n - k) \mid \ 0 < k < 2n\}.$$

Замечание 0.2. По той же схеме с помощью теоремы 2 доказываются остальные разложения в тройное произведения тэта-функций $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_4$. Впрочем, как хорошо известно, их можно получить из разложения для ϑ_3 путём следующих замен:

1) $u \to -uq$ для ϑ_1;

2) $u \to uq$ для ϑ_2;

3) $u \to -u$ для ϑ_4.

В разделе 1.5 доказывается следующий новый результат.

Теорема 5. *Для любых комплексных* z_1, z_2, z_3 и $|q| < 1$ *выполняется тождество*

$$\vartheta_3(z_1; q^2) H(-z_2, -z_3; q) + \vartheta_3(z_1 - 2z_2; q^2) H(z_1 + z_3 - z_2, z_2; q) +$$

$$+ \vartheta_3(z_1 + 2z_3; q^2) H(w, z_2 - z_3 - z_1; q) = 0.$$

Замечание 0.3. С содержательной точки зрения теорема 5 представляет собой аналитический вариант теоремы 2. В тексте диссертации она выводится из теоремы 2. При этом все элементы доказательства этого факта обратимы и в этом смысле могут рассматриваться как доказательство теоремы 2 с помощью теоремы 5.

В разделе 1.6 теорема 1 специализируется с помощью еще одной конструкции.

Преобразования

$$J : (m_1, m_2, m_3, m_4) \to (m_4, -m_3, -m_2, m_1),$$

$$U_+ : (m_1, m_2, m_3, m_4) \to (m_1 + m_2 + m_3 - m_4, -m_2 + m_4, -m_3 + m_4, m_4)$$

определяют целочисленные линейные автоморфизмы квадратичной формы

$$Q(m_1, m_2, m_3, m_4) = m_2^2 + m_3^2 + 2m_1 m_4.$$

При этом для

$$L(m_1, m_2, m_3, m_4) = m_1 + m_2 + m_3 - m_4$$

выполняется условие (0.4), а для конечных множеств

$$\Omega = \Omega(d) = \{(a, b_1, b_2, c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{N} \mid b_1^2 + b_2^2 + 2ac = d\}$$

условия теоремы 1 при любом натуральном d.

По определению, преобразование

$$R(m) = J(U_+(m)) = (m_4, m_3 - m_4, m_2 - m_4, m_1 + m_2 + m_3 - m_4),$$

для которого

$$R^3(m) = (-m_1, -m_2, -m_3, -m_4).$$

Из равенства

$$L(m) = m_1 + m_2 + m_3 - m_4 = 0$$

следует, что

$$Q(m) = m_2^2 + m_3^2 + 2m_1(m_1 + m_2 + m_3) = (m_1 + m_2)^2 + (m_1 + m_3)^2.$$

В рассматриваемом случае теорема 1 и следствие 1 приводят к следующему утверждению.

Теорема 6. *Пусть $G : \mathbb{Z}^4 \to \mathcal{A}$ произвольная функция с* $G(-m) = -G(m)$ $(\forall m \in \mathbb{Z}^4)$. *Тогда для любого натурального d выполняется равенство*

$$\sum_{b_1^2+b_2^2+2ac=d} \Phi(a, b_1, b_2, c) = \sum_{\substack{(a+b_1)^2+(a+b_2)^2=d \\ a+b_1+b_2>0}} \Phi(a, b_1, b_2, a + b_1 + b_2),$$

где

$$\Phi(m) = G(m) + G(R^2(m)) + G(R^4(m)) =$$

$$= G(m_1, m_2, m_3, m_4) + G(m_1 + m_2 + m_3 - m_4, -m_1 - m_3, -m_1 - m_2, -m_1)+$$

$$+G(-m_4, -m_3 + m_4, -m_2 + m_4, -m_1 - m_2 - m_3 + m_4).$$

В этом же разделе с помощью теоремы 6 доказывается следующее утверждение.

Теорема 7. *Пусть $h : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C}$ произвольная функция, для которой*

$$h(m_1, m_2) = h(m_2, m_1) = -h(-m_1, -m_2) \qquad (\forall m_1, m_2 \in \mathbb{Z}).$$

Тогда для любого натурального d выполняется тождество

$$-\sum_{\substack{b_1^2+b_2^2+2ac=d \\ a,\ c\text{— чётные}}} \chi_{-4}(b_1)\chi_{-4}(b_2)h(a + b_1, b_2 + c) =$$

$$= \sum_{n_1^2+n_2^2=d} \chi_{-4}(n_1)\chi_{-4}(n_2)(n_2 h(n_1, n_1) - 2 \sideset{}{''}\sum_{\substack{-n_1\le t\le n_1 \\ t-\text{нечёт}}} h(t, n_2)),$$

где штрихи подразумевают коэффициент $\frac{1}{2}$ при $t = \pm n_1$ и

$$\chi_{-4}(b) = \begin{cases} 0, & \text{если } b \text{ — чётно;} \\ (-1)^{\frac{b-1}{2}}, & \text{если } b \text{ — нечётно} \end{cases}$$

— квадратичный характер по модулю 4.

Замечание 0.4. Теорему 7 можно рассматривать как арифметический вариант тождества (0.3).

В разделе 1.7 теорема 1 специализируется с помощью третьей конструкции, в которой

$$J : (m_1, m_2, m_3, m_4) \to (m_3, m_4, m_1, m_2),$$

$$U_+ : (m_1, m_2, m_3, m_4) \to (m_2 + m_4, m_1 - m_3, m_4, m_3)$$

определяют целочисленные линейные автоморфизмы квадратичной формы

$$Q(m_1, m_2, m_3, m_4) = m_1 m_4 + m_2 m_3.$$

По определению, преобразование

$$R(m) = J(U_+(m)) = (m_4, m_3, m_2 + m_4, m_1 - m_3),$$

для которого

$$R^6(m) = (-m_1, -m_2, -m_3, -m_4).$$

При этом $\Omega(d)$ состоит из всех четверок натуральных чисел (m_1, m_2, m_3, m_4), для которых

$$m_1 m_4 + m_2 m_3 = d.$$

Безотносительно к представленной в разделе 1.1 общей конструкции, соответствующий результат для этого случая содержится в следующем утверждении, доказанном в работе [29],

Теорема 9. *Пусть $\Phi : \mathbb{Z}^4 \to \mathcal{A}$ — произвольная функция, для которой*

$$\Phi\begin{pmatrix} m' & m' - m \\ -n' & n' + n \end{pmatrix} = \Phi\begin{pmatrix} m & m' \\ n & n' \end{pmatrix}.$$

Тогда для любого натурального d

$$\sum_{mn'+m'n=d} \left(\Phi\begin{pmatrix} m & m' \\ n & n' \end{pmatrix} - \Phi\begin{pmatrix} m & -m' \\ -n & n' \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \sum_{d_1 d_2 = d} \left(\sum_{0 \le a < d_2} \Phi\begin{pmatrix} 0 & d_1 \\ d_2 & -a \end{pmatrix} - \sum_{0 \le b < d_1} \Phi\begin{pmatrix} b & d_1 \\ d_2 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

Из этой теоремы выводится соотношение

$$H(z,w)H(z',w') + H(z+z',w')H(-z,-w+w') + H(-z',w-w')H(z+z',w) = 0,$$

впервые упомянутое в [38] (глава 12, упражнение 6).

И, наконец, в разделе 1.8 доказывается ещё один новый результат на рассматриваемую тему.

Теорема 10. *Для любых комплексных* z_1, z_2, z_3, z_4 *и* $|q| < 1$ *выполняется тождество*

$$\vartheta_3(z_2;q)\vartheta_3(z_3;q)H(z_1,z_4;q)+$$

$$+\vartheta_3(z_3-z_1;q)\vartheta_3(z_2-z_1;q)H(z_1-z_2-z_3-z_4,-z_1;q)+$$

$$+\vartheta_3(z_3+z_4;q)\vartheta_3(z_2+z_4;q)H(-z_4,-z_1+z_2+z_3+z_4;q)=0.$$

Она выводится из теоремы 2. При этом в доказательстве рассуждения можно обратить и по этой причине теоремы 2 и 10 можно считать эквивалентными утверждениями.

Во второй главе предложен новый метод построения целочисленных последовательностей Сомос-8 и Сомос-9, опирающийся на теорию тэта-функций и результаты работ [3], [10], [11] и [12]. Для натурального $k \geqslant 2$ последовательность Сомос-k: $A : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ удовлетворяет квадратичному рекуррентному соотношению

$$A\left(n+k\right)A\left(n\right)=\sum_{j=1}^{[k/2]}\alpha_j A\left(n+k-j\right)A\left(n+j\right)$$

с константами α_j. В ситуации общего положения, за исключением некоторых вырожденных случаев, эта последовательность однозначно определяется коэффициентами $\alpha_1, \ldots, \alpha_{[k/2]}$ и начальными значениями $A(1), \ldots, A(k)$. В частных случаях с $\alpha_i = 1$ и начальными значениями, также равными 1, при $k = 4, 5, 6$ и 7 в работе [21] Сомос предположил, что возникающие при этом последовательности состоят из натуральных чисел (см. обзор [7]). При $k = 8$ численные эксперименты показали, что это утверждение уже неверно. Фомин и Зелевинский в работе [6], опираясь на теорию кластерных алгебр, доказали, что при $k = 4, 5, 6$ и 7 элементы последовательностей Сомоса являются целочисленными полиномами от коэффициентов α_i и формальных переменных $A^{\pm 1}(1), \ldots, A^{\pm 1}(k)$. Отсюда немедленно следует целочисленность последовательностей Сомоса с единичными коэффициентами и единичными начальными данными. При $k = 4$ и 5 в работе [10] были построены более широкие классы целочисленных последовательностей Сомоса с удовлетворяющими некоторым условиям целыми начальными данными и рациональными коэффициентами.

В разделе 2.1 формулируются необходимые для дальнейшего результаты, относящиеся к теории эллиптических систем последовательностей. Пусть A — целочисленная последовательность Сомоса вида

$$A(n) = e^{an^2+bn+c}\sigma_\Gamma(z_0 + nz),$$

где a, b, c, z_0 и $z \neq 0$ — произвольные комплексные числа, а Γ — любая решётка на комплексной плоскости. Здесь присутствует сигма-функция Вейерштрасса, ассоциированная с решёткой Γ, которая определяется по формуле

$$\sigma_\Gamma(z) = z \prod_{w\in\Gamma\setminus\{0\}} (1 - \frac{z}{w})\ e^{\frac{z}{w}+\frac{1}{2}(\frac{z}{w})^2}.$$

В вырожденных случаях:

1) для $\Gamma = \{0\}$ $\qquad \sigma_\Gamma(z) = z$;

2) для $\Gamma = \{mw | m \in \mathbb{Z}\}$ с $w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$

$$\sigma_\Gamma(z) = z \prod_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(1 - \frac{z}{nw}\right)\ e^{\frac{z}{nw}+\frac{1}{2}(\frac{z}{nw})^2} = \frac{w}{\pi}\sin\frac{\pi z}{w}e^{\frac{\pi^2}{6}(\frac{z}{w})^2}.$$

Определим целочисленную последовательность $B : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ по формуле

$$B(n) = lA(n) + tA(n + 2N)$$

с фиксированным целым $N \neq 0$ и целыми l и t. В разделе 2.2 доказывается следующее утверждение

Теорема 11. *Если*

$$\det\begin{pmatrix} B(6)B(0) & B(5)B(1) & B(4)B(2) & B(3)B(3) \\ B(5)B(-1) & B(4)B(0) & B(3)B(1) & B(2)B(2) \\ B(4)B(-2) & B(3)B(-1) & B(2)B(0) & B(1)B(1) \\ B(3)B(-3) & B(2)B(-2) & B(1)B(-1) & B(0)B(0) \end{pmatrix} \neq 0,$$

то B — целочисленная последовательность Сомос-8.

Определим целочисленную последовательность $B : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ по формуле

$$B(n) = lA(n) + tA(n + 2N + 1)$$

с фиксированным целым N и целыми l и t. В разделе 2.3 доказывается ещё одно утверждение на эту тему

Теорема 12. *Если*

$$\det \begin{pmatrix} B(7)B(0) & B(6)B(1) & B(5)B(2) & B(4)B(3) \\ B(6)B(-1) & B(5)B(0) & B(4)B(1) & B(3)B(2) \\ B(5)B(-2) & B(4)B(-1) & B(3)B(0) & B(2)B(1) \\ B(4)B(-3) & B(3)B(-2) & B(2)B(-1) & B(1)B(0) \end{pmatrix} \neq 0,$$

то B *— целочисленная последовательность Сомос-9.*

Отметим так же, что в разделах 2.2 и 2.3 приводятся конкретные примеры последовательностей $B(n)$, удовлетворяющих условиям теорем 11 и 12.

Апробация результатов. Результаты диссертации докладывались автором на следующих конференциях:

- «Diophantine Analysis» — Астрахань, Россия (30 июля – 3 августа 2012);
- «Multidimensional continued fractions» — Грац, Австрия (22 – 26 июня 2013 года);
- «28th Journées Arithmétiques» — Гренобль, Франция (1 – 5 июля 2013 года);
- «4th International Conference on Uniform Distribution Theory» — Острава, Чехия (30 июня – 4 июля 2014 года);
- «29th Journées Arithmétiques» — Дебрецен, Венгрия (6 – 10 июля 2015 года);
- «Analytical methods in number theory, probability theory and mathematical statistics» — Санкт-Петербург, Россия (14 – 18 сентября 2015 года)

и научном семинаре ХО ИПМ ДВО РАН (рук. рук. В.А. Быковский).

По теме диссертации опубликовано 6 статей в ведущих российских изданиях [19], [30], [31] и [35]–[37].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из предисловия, введения, двух глав и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 63 страницы. Библиография включает 39 наименований.

ГЛАВА 1

Арифметические методы доказательства тождеств для тэта-функций

1.1. Универсальное арифметическое тождество

Пусть L – ненулевая линейная форма от s $(= 2, 3, \dots)$ независимых переменных $x_1, \dots, x_s$ с целыми коэффициентами , а

$$J, U_-, U_+, R : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$$

– четыре линейных преобразования, определяемых матрицами размера $s \times s$ с целыми коэффициентами и определителем ± 1.

Пусть также Ω – конечное подмножество в

$$\mathbb{Z}^s = \{m = (m_1, \dots, m_s) \mid m_i \in \mathbb{Z}\},$$

которое разбивается на три непересекающихся подмножества Ω_0, Ω_- и Ω_+ с помощью ограничений:

$$L(m) = 0, \quad L(m) < 0 \ \text{ и } \ L(m) > 0.$$

Предположим, что:

(I) J, U_-, U_+ – инволюции (обратное преобразование совпадает с исходным) и при этом

$$R = J \circ U_+ = U_- \circ J;$$

(II)

$$L \circ J = -L;$$

(III) инволюции J, U_- и U_+ определяют, соответственно, биекции Ω, Ω_- и Ω_+ на себя.

Замечание 1.1. Из условия (II) следует, что J определяет биекцию Ω_0 на себя; а также устанавливает взаимно однозначное соответствие между элементами Ω_- и Ω_+.

Замечание 1.2. В условии (III) достаточно потребовать биективности первой и второй инволюции (или первой и третьей), так как из условий (I) и (II) следует, что третья инволюция – биекция (соответственно, вторая – биекция).

Замечание 1.3. Нет принципиальной необходимости вводить в определение инволюцию U_-, как и R. Достаточно положить $U_- = J \circ U_+ \circ J$ и убедиться в том, что U_- — инволюция на Ω_-. Мы только хотели этим подчеркнуть симметрию между Ω_+ и Ω_-. В дальнейшем будут определяться только конечное множество Ω, линейная форма L, инволюции J и U_+.

Теорема 1. *Пусть $\Phi : \mathbb{Z}^s \to \mathcal{A}$ – произвольная функция, для которой*

$$\Phi(R(m)) = -\Phi(m) \qquad \forall m \in \mathbb{Z}^s.$$

Тогда

$$\sum_{m\in\Omega} \Phi(m) = \sum_{m\in\Omega_0} \Phi(m).$$

Доказательство. С помощью преобразований J и U_+, а также условия на Φ находим

$$\sum_{m\in\Omega_-} \Phi(m) = \sum_{m'\in\Omega_+} \Phi(J(m')) =$$

$$= \sum_{m''\in\Omega_+} \Phi(J \circ U_+(m'')) = \sum_{m''\in\Omega_+} \Phi(R(m'')) = - \sum_{m''\in\Omega_+} \Phi(m'').$$

Поэтому

$$\sum_{m\in\Omega} \Phi(m) = \sum_{m\in\Omega_0} \Phi(m) + \sum_{m\in\Omega_-} \Phi(m) + \sum_{m\in\Omega_+} \Phi(m) =$$

$$= \sum_{m\in\Omega_0} \Phi(m) - \sum_{m\in\Omega_+} \Phi(m) + \sum_{m\in\Omega_+} \Phi(m) = \sum_{m\in\Omega_0} \Phi(m).$$

$\square$

Следствие 1. *Предположим, что $R^l = E$ (тождественное преобразование) для некоторого чётного натурального l. Тогда для любой функции $F : \mathbb{Z}^s \to \mathcal{A}$*

справедливо утверждение теоремы 1 с

$$\Phi = \sum_{t=0}^{l-1} (-1)^t F \circ R^t.$$

1.2. Тождество Успенского

Нетрудно проверить, что преобразования

$$J : (m_1, m_2, m_3) \to (m_3, -m_2, m_1),$$

$$U_+ : (m_1, m_2, m_3) \to (m_1 + 2m_2 - m_3, -m_2 + m_3, m_3)$$

определяют целочисленные линейные автоморфизмы квадратичной формы

$$Q(m_1, m_2, m_3) = m_2^2 + m_1 m_3.$$

При этом для

$$L(m_1, m_2, m_3) = m_1 + 2m_2 - m_3$$

выполняется условие

$$L \circ J = -L, \tag{1.1}$$

а для конечных множеств

$$\Omega(d) = \{(a, b, c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \mid Q(a, b, c) = b^2 + ac = d\}$$

условия теоремы 1 при любом натуральном d.

По определению,

$$R(m) = J(U_+(m)) = (m_3, m_2 - m_3, m_1 + 2m_2 - m_3),$$

$$R^2(m) = -U_+(J(m)) = (m_1 + 2m_2 - m_3, -m_1 - m_2, -m_1),$$

$$R^3(m) = (-m_1, -m_2, -m_3), \tag{1.2}$$

$$R^4(m) = -J(U_+(m)) = (-m_3, -m_2 + m_3, -m_1 - 2m_2 + m_3),$$

$$R^5(m) = U_+(J(m)) = (-m_1 - 2m_2 + m_3, m_1 + m_2, m_1).$$

Кроме того, из равенства

$$L(m) = m_1 + 2m_2 - m_3 = 0$$

следует, что

$$Q(m_1, m_2, m_3) = m_2^2 + (m_1 + 2m_2)m_1 = (m_1 + m_2)^2.$$

Поэтому для (a, b, c) из $\Omega_0(d)$ число

$$d = Q(a, b, c) = (a + b)^2$$

может быть только квадратом некоторого натурального n. В этом случае

$$2a + 2b > a + 2b = c > 0 \quad \text{и} \quad a + b = n,$$

а при замене a на k получаем, что

$$b = n - k, \quad c = a + 2b = 2n - k.$$

Следовательно, для d, отличных от квадрата, $\Omega_0(d)$ – пустое множество, а для $d = n^2$

$$\Omega_0(n^2) = \{(k, n - k, 2n - k) \mid \ 0 < k < 2n\}.$$

С учётом вышесказанного, теорема 1 (см. также следствие 1) в рассматриваемом случае приобретает следующий вид.

Теорема 2. *Пусть $G : \mathbb{Z}^3 \to \mathcal{A}$ произвольная функция с*

$$G(-m) = -G(m) \quad (m \in \mathbb{Z}^3).$$

Тогда для любого натурального d выполняется равенство

$$\sum_{b^2+ac=d} \Phi(a, b, c) = \sum_{\substack{d=n^2 \\ 0<k<2n}} \Phi(k, n - k, 2n - k), \tag{1.3}$$

где

$$\Phi(m) = G(m) + G(R^2(m)) + G(R^4(m)) =$$

$$= G(m_1, m_2, m_3) + G(m_1 + 2m_2 - m_3, -m_1 - m_2, -m_1) +$$

$$+ G(-m_3, -m_2 + m_3, -m_1 - 2m_2 + m_3).$$

Предположим, что

$$G(J(m)) = G(m) \qquad (m \in \mathbb{Z}^3). \tag{1.4}$$

Тогда, в соответствии с (1.2),

$$G(R^2(m)) = G(-U_+(J(m))) = -G(U_+(J(m))),$$

$$G(R^4(m)) = G(-J(U_+(m))) = -G(U_+(m)).$$

Так как (см. следствие 1)

$$\sum_{m \in (*)} G(U_+(J(m))) = \sum_{m \in (*)} G(U_+(m)),$$

где $(*)$ означает $\Omega(d)$ или $\Omega_0(d)$, то тождество теоремы 2 можно переписать в виде

$$\sum_{b^2+ac=d} \{G(a,b,c) - 2G(a+2b-c, -b+c, c)\} = \tag{1.5}$$

$$= \sum_{\substack{d=n^2 \\ 0<k<2n}} \{G(k, n-k, 2n-k) - 2G(0,n,k)\}.$$

При этом мы воспользовались очевидным равенством

$$\sum_{0<k<2n} G(0,n,2n-k) = \sum_{0<k<2n} G(0,n,k).$$

Если положить

$$G(m_1, m_2, m_3) = F(m_1 + m_3, m_2, -m_1 + m_3),$$

то условию (1.4) на G будет соответствовать равенство

$$F(m_1, -m_2, -m_3) = F(m_1, m_2, m_3) \qquad (m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}).$$

С учётом этого условие $G(-m) = -G(m)$ из теоремы 2 заменится на второе равенство

$$F(-m_1, m_2, m_3) = -F(m_1, m_2, m_3) \qquad (m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}).$$

В таком случае мы получаем из (1.5) тождество Успенского

$$\sum_{b^2+ac=d} \{F(a+c, b, -a+c) - 2F(a-2b, b+c, -a+2b+2c)\} =$$

$$= \sum_{\substack{d=n^2 \\ 0<k<2n}} \{F(2n, n-k, 2n-2k) - 2F(k, n, k)\},$$

впервые опубликованное в работе [20]. При этом, принимая во внимание биекцию $\Omega(d)$ на себя, определяемую преобразованием $(a, b, c) \to (a, -b, c)$, мы заменили в тождестве (1.5) сумму

$$\sum_{b^2+ac=d} F(a+2b, -b+c, -a-2b+2c)$$

на

$$\sum_{b^2+ac=d} F(a-2b, b+c, -a+2b+2c).$$

1.3. Тождество для тройного произведения

Действуя стандартным способом, восходящим к Эйлеру (см., например, [27]), применим к обеим частям равенства

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k})(1+uq^{2k-1})(1+u^{-1}q^{2k-1}) = \sum_{b=-\infty}^{\infty} u^b q^{b^2}, \tag{1.6}$$

логарифмическую производную $q\frac{\partial}{\partial q}\log$ и воспользуемся разложением

$$\frac{z}{1-z} = \sum_{l=1}^{\infty} z^l.$$

В результате получим, что

$$\frac{\sum\limits_{b=-\infty}^{\infty} b^2u^bq^{b^2}}{\sum\limits_{b=-\infty}^{\infty} u^bq^{b^2}} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(-2k\frac{q^{2k}}{1-q^{2k}} + (2k-1)\frac{uq^{2k-1}}{1+uq^{2k-1}} + (2k-1)\frac{u^{-1}q^{2k-1}}{1+u^{-1}q^{2k-1}}\right) =$$

$$= \sum_{k,l=1}^{\infty}\left(-2kq^{2kl} - (2k-1)(-1)^l(u^l+u^{-l})q^{(2k-1)l}\right) =$$

$$= -\sum_{a,c=1}^{\infty}\delta_2(a)aq^{ac} + \sum_{a,c=1}^{\infty}(\delta_2(a)-1)(-1)^c a(u^c+u^{-c})q^{ac}.$$

Избавляясь от знаменателя и принимая во внимание равенства

$$\sum_{b=-\infty}^{\infty} u^bq^{b^2} = \sum_{b=-\infty}^{\infty} u^{-b}q^{b^2} = \frac{1}{2}\sum_{b=-\infty}^{\infty}(u^b+u^{-b})q^{b^2},$$

$$\sum_{b=-\infty}^{\infty} b^2u^bq^{b^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2(u^n+u^{-n})q^{n^2},$$

находим

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2(u^n+u^{-n})q^{n^2} = -\frac{1}{2}\sum_{a,c=1}^{\infty}\sum_{b=-\infty}^{\infty}\delta_2(a)a(u^b+u^{-b})q^{b^2+ac} +$$

$$+\sum_{a,c=1}^{\infty}\sum_{b=-\infty}^{\infty}(\delta_2(a)-1)(-1)^c a(u^{c-b}+u^{-c+b})q^{b^2+ac}.$$

Положив $f(b) = u^b + u^{-b}$ и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях q^d с натуральным $d = b^2 + ac$, получим арифметическое тождество (1.7).

Замечание 1.4. Здесь и в дальнейшем суммирования проводятся по всем тройкам $(a, b, c) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$, для которых $b^2 + ac = d$.

Обращая только что проведённую цепочку преобразований, мы получим исходное разложение (1.6) с точностью до множителя, не зависящего от q (при логарифмическом дифференцировании он становится равным нулю). Величина множителя находится путём сравнения правой и левой частей при $q = 0$. Поэтому тождество для тройного произведения вытекает из следующего утверждения.

Теорема 3. *Пусть $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ произвольная чётная функция. Тогда для любого натурального d выполняется тождество*

$$-\frac{1}{2}\sum_{\substack{b^2+ac=d\\ a-\text{ чётное}}} af(b) - \sum_{\substack{b^2+ac=d\\ a-\text{ нечётное}}} (-1)^c af(c-b) = \tag{1.7}$$
$$= \begin{cases} n^2 f(n), & \text{если } d = n^2, \\ 0, & \text{если } d \neq n^2. \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим сумму

$$S_1(d) = \sum_{b^2+ac=d} G(a,b,c) = -\frac{1}{4}\sum_{b^2+ac=d}((-1)^a - (-1)^c)(a+2b-c)f(b).$$

Так как преобразование $(a,b,c) \to (a,-b,c)$ определяет биекцию на $\Omega(d)$, а f – чётная функция, то

$$\sum_{b^2+ac=d} bf(b) = 0.$$

Принимая во внимание биекцию J, для оставшейся части суммы $S_1(d)$ находим

$$-\frac{1}{4}\sum_{b^2+ac=d}((-1)^a - (-1)^c)(a-c)f(b) = -\frac{1}{2}\sum_{b^2+ac=d}((-1)^a - (-1)^c)af(b) =$$
$$= -\frac{1}{2}\sum_{b^2<d} f(b) \sum_{ac=d-b^2}((-1)^a - (-1)^c)a.$$

Для любого натурального N

$$\sum_{ac=N}((-1)^a - (-1)^c)a = 2\sum_{\substack{ac=N\\ a+c-\text{нечёт}}}(-1)^a a =$$
$$= 2\sum_{\substack{ac=N\\ a-\text{чёт},\\ c-\text{нечёт}}} a - 2\sum_{\substack{ac=N\\ a-\text{нечёт},\\ c-\text{чёт}}} a = 2\sum_{\substack{ac=N\\ a-\text{чёт}}} a - 2\sum_{\substack{ac=N\\ c-\text{чёт}}} a =$$
$$= 2\sum_{ac=N}\delta_2(a)a - \sum_{\substack{2a\cdot\frac{c}{2}=N\\ \frac{c}{2}\in\mathbb{N}}} 2a = \sum_{ac=N}\delta_2(a)a.$$

В итоге получаем, что

$$S_1(d) = -\frac{1}{2}\sum_{b^2+ac=d}\delta_2(a)af(b).$$

Нетрудно заметить, что

$$\sum_{b^2+ac=d} G(a+2b-c,-b+c,c) = -\frac{1}{4}\sum_{b^2+ac=d}((-1)^{a-c}-(-1)^c)af(-b+c) =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{b^2+ac=d}(\delta_2(a)-1)(-1)^c af(-b+c).$$

И, наконец, для $d=n^2$

$$\sum_{0<k<2n} G(k,n-k,2n-k) = -\frac{1}{4}\sum_{0<k<2n}((-1)^k-(-1)^{2n-k})\cdot 0\cdot f(n-k) = 0,$$

$$\sum_{0<k<2n} G(0,n,2n-k) = -\frac{1}{4}\sum_{0<k<2n}(1-(-1)^k)(0+2n-2n+k)f(n) =$$

$$= -\frac{1}{4}\sum_{0<k<2n}(1-(-1)^k)kf(n) = -\frac{1}{2}n^2 f(n).$$

Мы показали, что при данном выборе G тождество (1.5) преобразуется в тождество (1.7) теоремы 3. □

1.4. Тождество для пятикратного произведения

Напомним, что для $u=e^{2\pi iz}$

$$\vartheta_1(z;q) = \frac{1}{i}\sum_{b=-\infty}^{\infty}(-1)^b u^{b+\frac{1}{2}}q^{(b+\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{i}(u^{\frac{1}{2}}-u^{-\frac{1}{2}})q^{\frac{1}{4}}\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k})(1-uq^{2k})(1-u^{-1}q^{2k}),$$

$$\vartheta_2(z;q) = \sum_{b=-\infty}^{\infty}u^{b+\frac{1}{2}}q^{(b+\frac{1}{2})^2} = (u^{\frac{1}{2}}+u^{-\frac{1}{2}})q^{\frac{1}{4}}\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k})(1+uq^{2k})(1+u^{-1}q^{2k}),$$

$$\vartheta_3(z;q) = \sum_{b=-\infty}^{\infty}u^b q^{b^2} = \prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k})(1+uq^{2k-1})(1+u^{-1}q^{2k-1}),$$

$$\vartheta_4(z;q) = \sum_{b=-\infty}^{\infty}(-1)^b u^b q^{b^2} = \prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k})(1-uq^{2k-1})(1-u^{-1}q^{2k-1})$$

– классические тэта-функции Якоби вместе с их разложениями в тройное произведение. Последнее разложение совпадает с (1.6).

На странице 433 первого тома монографии Фрикке [5] приведено вместе с доказательством тождество

$$2q^{\frac{1}{6}}\sum_{b=-\infty}^{\infty}(-1)^b\cos\pi z(6b+1)q^{\frac{(6b+1)^2}{12}}=\vartheta_4(z;q)\vartheta_2(z;q)\vartheta_3(z;q)\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k})^{-2}.$$

Его с помощью замен

$$z\to z+\frac{1}{2}\quad\text{и}\quad q\to q^{\frac{1}{2}}$$

можно представить в виде

$$(1-u^{-1})\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k)(1-uq^k)(1-u^{-1}q^k)(1-u^2q^{2k-1})(1-u^{-2}q^{2k-1})=$$

$$=\sum_{b=-\infty}^{\infty}q^{\frac{3b^2+b}{2}}(u^{3b}-u^{-3b-1}),\quad (1.8)$$

которое переоткрывалось в работах [1], [9], [23] и [33]. В свою очередь (1.8) после замен (см. [27])

$$q\to q^6\quad\text{и}\quad u\to uq^3$$

преобразуется к виду

$$q(u-u^{-1})\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{6k})(1-uq^{3k})(1-u^{-1}q^{3k})(1+uq^{6k})(1+u^{-1}q^{6k})=\sum_{b=-\infty}^{\infty}\chi_{-3}(b)u^bq^{b^2},\tag{1.9}$$

где $\chi_{-3}:\mathbb{Z}\to\{-1,0,1\}$ – квадратичный характер по модулю 3.

Действуя точно так же как в случае тройного тождества, получим

$$\frac{\sum\limits_{b=-\infty}^{\infty}\chi_{-3}(b)b^2u^bq^{b^2}}{\sum\limits_{b=-\infty}^{\infty}\chi_{-3}(b)u^bq^{b^2}}=$$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-6k\frac{q^{6k}}{1-q^{6k}}-3k\frac{uq^{3k}}{1-uq^{3k}}-3k\frac{u^{-1}q^{3k}}{1-u^{-1}q^{3k}}+6k\frac{uq^{6k}}{1+uq^{6k}}+6k\frac{u^{-1}q^{6k}}{1+u^{-1}q^{6k}})=$$

$$=1-\sum_{a,c=1}^{\infty}\delta_6(a)aq^{ac}-\sum_{a,c=1}^{\infty}(\delta_3(a)+(-1)^c\delta_6(a))a(u^c+u^{-c})q^{ac}.$$

Так как функция χ_{-3} – нечётная, то

$$\sum_{b=-\infty}^{\infty} \chi_{-3}(b)b^2u^bq^{b^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{-3}(n)n^2(u^n - u^{-n})q^{n^2},$$

$$\sum_{b=-\infty}^{\infty} \chi_{-3}(b)u^bq^{b^2} = -\sum_{b=-\infty}^{\infty} \chi_{-3}(b)u^{-b}q^{b^2} = \frac{1}{2}\sum_{b=-\infty}^{\infty} \chi_{-3}(b)(u^b - u^{-b})q^{b^2} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{-3}(n)(u^n - u^{-n})q^{n^2}.$$

Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{-3}(n)(n^2-1)(u^n - u^{-n})q^{n^2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{b=-\infty}^{\infty}\sum_{a,c=1}^{\infty} \delta_6(a)a(u^b - u^{-b})\chi_{-3}(b)q^{b^2+ac} -$$

$$- \sum_{b=-\infty}^{\infty}\sum_{a,c=1}^{\infty} \delta_3(a)(1+\delta_2(a)(-1)^c)a\chi_{-3}(b)(u^{b-c} - u^{-b+c})q^{b^2+ac}.$$

Положив $g(b) = u^b - u^{-b}$ и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях q^d с $d = b^2 + ac$, получим тождество (1.10) из работы [27].

Как и ранее, тождество для пятикратного произведения получается обращением только что приведённых выкладок из следующего утверждения.

Теорема 4. *Пусть $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ произвольная нечётная функция. Тогда для любого натурального d выполняется тождество*

$$-\frac{1}{2}\sum_{b^2+ac=d} \delta_6(a)a\chi_{-3}(b)g(b) - \sum_{b^2+ac=d} \delta_3(a)(1+\delta_2(a)(-1)^c)a\chi_{-3}(b)g(b-c) =$$

$$= \begin{cases} \chi_{-3}(n)(n^2-1)g(n), & \text{если } d = n^2, \\ 0, & \text{если } d \neq n^2. \end{cases} \qquad (1.10)$$

Доказательство. Утверждение теоремы очевидно для $d \not\equiv 1 \pmod 3$. Действительно, во всех суммах $a \equiv 0 \pmod 3$ и для $d \equiv 2 \pmod 3$ сравнение $b^2 \equiv 2 \pmod 3$ неразрешимо, а в случае $d \equiv 0 \pmod 3$ выполняется сравнение $b \equiv 0$

(mod 3) и по причине присутствия множителей $\chi_{-3}(b)$ все слагаемые из сумм левой части равны нулю. Пусть теперь $d \equiv 1 \pmod 3$. Положим в тождестве (1.5)

$$G(m_1, m_2, m_3) =$$
$$= \frac{1}{4}(2 + (-1)^{m_1} + (-1)^{m_3})\chi_{-3}(m_2 - m_3)\delta_3(m_1 + 2m_2 - m_3)(m_1 + 2m_2 - m_3)g(m_2).$$

В таком случае

$$\sum_{b^2+ac=d} G(a + 2b - c, -b + c, c) =$$
$$= \frac{1}{4}\sum_{b^2+ac=d}(2 + (-1)^{a+c} + (-1)^c)\delta_3(a)a\chi_{-3}(-b)g(-b + c) =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{b^2+ac=d}\delta_3(a)(1 + \delta_2(a)(-1)^c)a\chi_{-3}(b)g(b - c).$$

Воспользовавшись преобразованием $J : (a, b, c) \to (c, -b, a)$ и равенством

$$\chi_{-3}(b - c)\delta_3(a + 2b - c) = \chi_{-3}(-a - b)\delta_3(a + 2b - c)$$

получим, что

$$\sum_{b^2+ac=d}(2 + (-1)^a + (-1)^c)\chi_{-3}(b - c)\delta_3(a + 2b - c)bg(b) =$$

$$= \sum_{b^2+ac=d}(1 + (-1)^a)\chi_{-3}(b - c)\delta_3(a + 2b - c)bg(b) = 2\sum_{\substack{b^2+2a_1c=d\\ b-c\equiv a_1-b \pmod 3}}\chi_{-3}(b - c)bg(b).$$

Так как в рассматриваемой сумме

$$\chi_{-3}(b - a_1) = \chi_{-3}(-b + c) = -\chi_{-3}(b - c),$$

то при замене $(a_1, b, c) \to (c, b, a_1)$ все слагаемые поменяют знак. Следовательно, сумма равна нулю и

$$\sum_{b^2+ac=d} G(a, b, c) = \frac{1}{4}\sum_{\substack{b^2+ac=d\\ a+b\equiv -b+c \pmod 3}}(2+(-1)^a+(-1)^c)\chi_{-3}(b-c)(a-c)g(b) = S_0+S_1,$$

где к S_0 отнесены слагаемые с $b \equiv 0 \pmod 3$, а к S_1 с $b \equiv \pm 1 \pmod 3$. В первом случае $a \equiv c \pmod 3$ и

$$\chi_{-3}(b - c) = -\chi_{-3}(c) = -\chi_{-3}(a).$$

Тогда замена $(a,b,c)\to(c,b,a)$ приводит к перемене знака у слагаемых

$$(2+(-1)^a+(-1)^c)\chi_{-3}(c)(a-c)g(b),$$

и поэтому $S_0=0$. Во втором случае

$$ac=d-b^2\equiv 1-(\pm 1)^2\equiv 0 \pmod 3,\qquad a-c\equiv -2b\not\equiv 0 \pmod 3.$$

Воспользовавшись биекцией J, из этих сравнений находим, что

$$\sum_{b^2+ac=d} G(a,b,c)=$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{\substack{b^2+ac=d\\ ac\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 3)\\ a+b\equiv -b+c \ (\mathrm{mod}\ 3)}} (2+(-1)^a+(-1)^c)\chi_{-3}(b-c)(a-c)g(b)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{\substack{b^2+ac=d\\ a-b\equiv c\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 3)}} (2+(-1)^a+(-1)^c)\chi_{-3}(b)(a-c)g(b).$$

Замена $(a,b,c)\to(a,-b,c)$ не меняет слагаемых. Поэтому условие $a-b\equiv 0 \pmod 3$ можно заменить на $a\not\equiv 0 \pmod 3$, добавив коэффициент $\frac{1}{2}$ перед суммой. Так как слагаемые с $a\equiv c\equiv 0 \pmod 3$ взаимно уничтожаются при замене $(a,b,c)\to(c,b,a)$, то

$$\sum_{b^2+ac=d} G(a,b,c)=\frac{1}{4}\sum_{\substack{b^2+ac=d\\ c\equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 3)}} (2+(-1)^a+(-1)^c)\chi_{-3}(b)(a-c)g(b)=$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{b^2<d}\chi_{-3}(b)g(b)\sum_{ac_1=\frac{d-b^2}{3}}(2+(-1)^a+(-1)^{c_1})(a-3c_1).$$

Поскольку $1+(-1)^a$ и $1+(-1)^{c_1}$ отличны от нуля только для чётных a и c_1, то внутренняя сумма равна

$$2\sum_{2a_1c_1=\frac{d-b^2}{3}}(2a_1-3c_1)+2\sum_{2ac_2=\frac{d-b^2}{3}}(a-6c_2)=-2\sum_{ac=d-b^2}\delta_6(a)a.$$

В итоге мы получаем

$$\sum_{b^2+ac=d} G(a,b,c)=-\frac{1}{2}\sum_{b^2+ac=d}\delta_6(a)a\chi_{-3}(b)g(b).$$

Наконец, нетрудно проверить, что

$$\sum_{0<k<2n} G(k, n-k, 2n-k) = 0,$$

$$\sum_{0<k<2n} G(0, n, k) =$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{0<k<2n} (2 + 1 + (-1)^k)\chi_{-3}(n-k)\delta_3(2n-k)(2n-k)g(n) =$$

$$= -\frac{3}{4}\chi_{-3}(n)g(n) \sum_{\substack{0<k<2n \\ k\equiv 2n \pmod 3}} (3 + (-1)^k)\frac{(2n-k)}{3} =$$

$$= -\frac{1}{2}\chi_{-3}(n)(n^2-1)g(n).$$

□

Замечание 1.5. В работе [27] приведено имеющее такую же арифметическую природу доказательство теоремы 4, отличающееся от нашего в некоторых технических деталях.

1.5. Трёхчленное тождество для произведения тэта-функций Якоби от одной и двух переменных

Напомним, что

$$\vartheta_3(z; q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2inz}$$

и

$$H(z, w; q) = \operatorname{ctg} z + \operatorname{ctg} w + 4\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} q^{2mn} \sin(2mz + 2nw).$$

Теорема 5. *Для любых комплексных z_1, z_2, z_3 и $|q| < 1$ выполняется тождество*

$$\vartheta_3(z_1; q^2)H(-z_2, -z_3; q) + \vartheta_3(z_1 - 2z_2; q^2)H(z_1 + z_3 - z_2, z_2; q) +$$

$$+\vartheta_3(z_1 + 2z_3; q^2)H(w, z_2 - z_3 - z_1; q) = 0.$$

Доказательство. Мы будем опираться на тождество из работы [30].

Положим в тождестве (1.3)

$$G(m_1, m_2, m_3) = x^{m_1}y^{m_2}z^{m_3} - x^{-m_1}y^{-m_2}z^{-m_3}.$$

Для суммы из левой части получаем

$$S_1(d) = \sum_{b^2+ac=d} \Phi(a,b,c) =$$

$$= \sum_{m_2^2+m_1m_3=d} (x^{m_1}y^{m_2}z^{m_3} - x^{-m_1-2m_2+m_3}y^{m_1+m_2}z^{m_1} - x^{m_3}y^{m_2-m_3}z^{m_1+2m_2-m_3})+$$

$$+ \sum_{m_2^2+m_1m_3=d} (-x^{-m_1}y^{-m_2}z^{-m_3}+x^{m_1+2m_2-m_3}y^{-m_1-m_2}z^{-m_1}+x^{-m_3}y^{-m_2+m_3}z^{-m_1-2m_2+m_3}).$$

С помощью замены $m_2 \to -m_2$ и группировки находим

$$S_1(d) = \sum_{m_2^2+m_1m_3=d} \Bigg(- y^{m_2}\left(x^{-m_1}z^{-m_3} - x^{m_1}z^{m_3}\right) +$$

$$+ \left(\frac{y}{x^2}\right)^{m_2} \left(\left(\frac{yz}{x}\right)^{-m_1} x^{-m_3} - \left(\frac{yz}{x}\right)^{m_1} x^{m_3} \right) +$$

$$+ \left(yz^2\right)^{m_2} \left(z^{-m_1} \left(\frac{x}{yz}\right)^{-m_3} - z^{m_1}\left(\frac{x}{yz}\right)^{m_3} \right) \Bigg).$$

Правая часть тождества (1.3) после преобразований и использования разложения

$$\sum_{0<k<2n} x^k = \frac{x(x^{2n-1}-1)}{x-1}$$

примет вид

$$S_2(d) = \sum_{\substack{d=n^2\\0<k<2n}} \Phi(k, n-k, 2n-k) = \sum_{d=n^2} \left(\frac{x(1-yz)}{(x-yz)(1-x)}(x^{2n}y^{-n}+x^{-2n}y^{n})+\right.$$

$$\left. +\frac{z(y-x)}{(yz-x)(1-z)}(y^n z^{2n} + y^{-n}z^{-2n}) + \frac{xz-1}{(x-1)(z-1)}(y^n+y^{-n}) \right).$$

Домножим обе части тождества (1.3) на q^d, просуммируем по всем натуральным d и положим

$$\tilde{K}(x,y) = \sum_{d_1,d_2\in\mathbb{N}} (x^{-d_1}y^{-d_2} - x^{d_1}y^{d_2})q^{2d_1d_2}.$$

Опираясь на очевидное равенство

$$\tilde{K}(x,y) = -\tilde{K}(1/x, 1/y),$$

перепишем левую часть в виде

$$\vartheta_3(y;q)\,\tilde{K}\left(\frac{1}{x},\frac{1}{z};\sqrt{q}\right)+\vartheta_3\left(\frac{y}{x^2};q\right)\tilde{K}\left(\frac{yz}{x},x;\sqrt{q}\right)+\vartheta_3\left(yz^2;q\right)\tilde{K}\left(z,\frac{x}{yz};\sqrt{q}\right).$$

Заметим, что

$$\frac{x(yz-1)}{(x-yz)(x-1)}+\frac{z(y-x)}{(x-yz)(z-1)}+\frac{xz-1}{(x-1)(z-1)}=0$$

и

$$\vartheta_3(u;q)=1+\sum_{b=1}^{\infty}(u^b+u^{-b})q^{b^2}.$$

Тогда правая часть тождества запишется в виде

$$\frac{x(yz-1)}{(x-yz)(x-1)}\vartheta_3\left(\frac{y}{x^2};q\right)+\frac{z(y-x)}{(x-yz)(z-1)}\vartheta_3\left(yz^2;q\right)+\frac{xz-1}{(x-1)(z-1)}\vartheta_3(y;q).$$

То есть

$$\vartheta_3(y;q)\,\tilde{K}\left(\frac{1}{x},\frac{1}{z};\sqrt{q}\right)+\vartheta_3\left(\frac{y}{x^2};q\right)\tilde{K}\left(\frac{yz}{x},x;\sqrt{q}\right)+\vartheta_3\left(yz^2;q\right)\tilde{K}\left(z,\frac{x}{yz};\sqrt{q}\right)=$$

$$=\frac{x(yz-1)}{(x-yz)(x-1)}\vartheta_3\left(\frac{y}{x^2};q\right)+\frac{z(y-x)}{(x-yz)(z-1)}\vartheta_3\left(yz^2;q\right)+\frac{xz-1}{(x-1)(z-1)}\vartheta_3(y;q).$$

Так как

$$H(x,y)=2i\left(\tilde{K}(x,y)-\frac{1-xy}{(x-1)(y-1)}\right)$$

и сумма остальных трёх слагаемых равна нулю, то последнее соотношение после замен

$$x=e^{2iu},y=e^{2iv},z=e^{2iw}$$

преобразуется в интересующее нас тождество теоремы 5. $\square$

1.6. Тождество для восьмикратного произведения

Преобразования

$$J:(m_1,m_2,m_3,m_4)\to(m_4,-m_3,-m_2,m_1),$$

$$U_+:(m_1,m_2,m_3,m_4)\to(m_1+m_2+m_3-m_4,-m_2+m_4,-m_3+m_4,m_4)$$

определяют целочисленные линейные автоморфизмы квадратичной формы

$$Q(m_1,m_2,m_3,m_4)=m_2^2+m_3^2+2m_1m_4.$$

При этом для

$$L(m_1, m_2, m_3, m_4) = m_1 + m_2 + m_3 - m_4$$

выполняется условие (1.1), а для конечных множеств

$$\Omega = \Omega(d) = \{(a, b_1, b_2, c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{N} \mid b_1^2 + b_2^2 + 2ac = d\}$$

условия теоремы 1 при любом натуральном d.

По определению,

$$R(m) = J(U_+(m)) = (m_4, m_3 - m_4, m_2 - m_4, m_1 + m_2 + m_3 - m_4),$$

$$R^2(m) = -U_+(J(m)) = (m_1 + m_2 + m_3 - m_4, -m_1 - m_3, -m_1 - m_2, -m_1),$$

$$R^3(m) = (-m_1, -m_2, -m_3, -m_4),$$

$$R^4(m) = -J(U_+(m)) = (-m_4, -m_3 + m_4, -m_2 + m_4, -m_1 - m_2 - m_3 + m_4),$$

$$R^5(m) = U_+(J(m)) = (-m_1 - m_2 - m_3 + m_4, m_1 + m_3, m_1 + m_2, m_1).$$

Из равенства

$$L(m) = m_1 + m_2 + m_3 - m_4 = 0$$

следует, что

$$Q(m) = m_2^2 + m_3^2 + 2m_1(m_1 + m_2 + m_3) = (m_1 + m_2)^2 + (m_1 + m_3)^2.$$

В рассматриваемом случае теорема 1 и следствие 1 приводят к следующему утверждению.

Теорема 6. *Пусть $G : \mathbb{Z}^4 \to \mathcal{A}$ произвольная функция с $G(-m) = -G(m)$ ($\forall m \in \mathbb{Z}^4$). Тогда для любого натурального d выполняется равенство*

$$\sum_{b_1^2+b_2^2+2ac=d} \Phi(a, b_1, b_2, c) = \sum_{\substack{(a+b_1)^2+(a+b_2)^2=d \\ a+b_1+b_2>0}} \Phi(a, b_1, b_2, a + b_1 + b_2), \tag{1.11}$$

где

$$\Phi(m) = G(m) + G(R^2(m)) + G(R^4(m)) =$$

$$= G(m_1, m_2, m_3, m_4) + G(m_1 + m_2 + m_3 - m_4, -m_1 - m_3, -m_1 - m_2, -m_1) +$$

$$+ G(-m_4, -m_3 + m_4, -m_2 + m_4, -m_1 - m_2 - m_3 + m_4).$$

Если дополнительно предположить, что

$$G(J(m)) = G(m) \qquad (m \in \mathbb{Z}^4),$$

то по тем же причинам, что и ранее (см. раздел 1.2) тождество теоремы 6 преобразуется к виду

$$\sum_{b_1^2+b_2^2+2ac=d} \{G(a, b_1, b_2, c) - 2G(a + b_1 + b_2 - c, -b_1 + c, -b_2 + c, c)\} =$$

$$= \sum_{\substack{(a+b_1)^2+(a+b_2)^2=d \\ a+b_1+b_2>0}} \{G(a, b_1, b_2, a + b_1 + b_2) - 2G(0, a + b_2, a + b_1, a + b_1 + b_2)\}. \tag{1.12}$$

К числу важнейших в теории эллиптических и тэта-функций относится тождество

$$\frac{uv-1}{(u-1)(v-1)} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1-q^k)(1-q^k)(1-uvq^k)(1-u^{-1}v^{-1}q^k)}{(1-uq^k)(1-u^{-1}q^k)(1-vq^k)(1-v^{-1}q^k)} =$$

$$= 1 - \frac{1}{1-u} - \frac{1}{1-v} - \sum_{n,l=1}^{\infty} (u^n v^l - u^{-n} v^{-l}) q^{nl}.$$

С помощью разложения тэта-функции $\vartheta_1(v; q)$ в тройное произведение и замен

$$q \to q^8, u \to u^2, v \to v^2$$

оно преобразуется в восходящее к Якоби тождество (см. по этому поводу [24], стр. 92)

$$2 \sum_{a,c=1}^{\infty} \delta_2(a)\delta_2(c)(u^a v^c - u^{-a} v^{-c}) q^{2ac} = -\frac{H(uv; q)H'(1; q)}{H(u; q)H(v; q)} + \frac{u^2+1}{u^2-1} + \frac{v^2+1}{v^2-1}, \tag{1.13}$$

$$H(w; q) = \sum_{b=-\infty}^{\infty} \chi_{-4}(b) w^b q^{b^2} = q(w - w^{-1}) \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^{8k})(1 - w^2 q^{8k})(1 - w^{-2} q^{8k}),$$

$$H'(1;q)=\sum_{b=-\infty}^{\infty}\chi_{-4}(b)bq^{b^2}=2q\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{8k})^3,$$

где $\chi_{-4}:\mathbb{Z}\to\{-1,0,1\}$ – квадратичный характер по модулю 4. Положим

$$\Lambda(u,v;q)=\sum_{a,c=1}^{\infty}\delta_2(a)\delta_2(c)u^av^cq^{2ac}=\Lambda(v,u;q).$$

Тогда

$$2H(u;q)H(v;q)\cdot\sum_{a,c=1}^{\infty}\delta_2(a)\delta_2(c)(u^av^c-u^{-a}v^{-c})q^{2ac}=$$

$$=2H(u;q)H(v;q)(\Lambda(u,v;q)-\Lambda(u^{-1},v^{-1};q))=$$

$$=H(u;q)H(v;q)\Lambda(u,v;q)-H(u^{-1};q)H(v^{-1};q)\Lambda(u^{-1},v^{-1};q)+$$

$$+H(v;q)H(u;q)\Lambda(v,u;q)-H(v^{-1};q)H(u^{-1};q)\Lambda(v^{-1},u^{-1};q)=$$

$$=\sum_{b_1,b_2=-\infty}^{\infty}\sum_{a,c=1}^{\infty}\chi_{-4}(b_1)\chi_{-4}(b_2)\delta_2(a)\delta_2(c)q^{b_1^2+b_2^2+2ac}\times$$

$$\times\left(u^{a+b_1}v^{c+b_2}-u^{-a-b_1}v^{-c-b_2}+v^{a+b_1}u^{c+b_2}-v^{-a-b_1}u^{-c-b_2}\right)=$$

$$=\sum_{d=1}^{\infty}\left(\sum_{b_1^2+b_2^2+2ac=d}\chi_{-4}(b_1)\chi_{-4}(b_2)\delta_2(a)\delta_2(c)h(a+b_1,b_2+c)\right)q^d,$$

где

$$h(b_1,b_2)=u^{b_1}v^{b_2}-u^{-b_1}v^{-b_2}+v^{b_1}u^{b_2}-v^{-b_1}u^{-b_2}.$$

Заметим, что

$$H(uv;q)H'(1;q)=\left(\sum_{b_1=-\infty}^{\infty}\chi_{-4}(b_1)(uv)^{b_1}q^{b_1^2}\right)\left(\sum_{b_2=-\infty}^{\infty}\chi_{-4}(b_2)b_2q^{b_2^2}\right)=$$

$$=2\left(\sum_{n_1=1}^{\infty}\chi_{-4}(n_1)((uv)^{n_1}-(uv)^{-n_1})q^{n_1^2}\right)\left(\sum_{n_2=1}^{\infty}\chi_{-4}(n_2)n_2q^{n_2^2}\right)=$$

$$=2\sum_{n_1,n_2=1}^{\infty}\chi_{-4}(n_1)\chi_{-4}(n_2)n_2\left((uv)^{n_1}-(uv)^{-n_1}\right)q^{n_1^2+n_2^2}=$$

$$=\sum_{d=1}^{\infty}\left(\sum_{n_1^2+n_2^2=d}\chi_{-4}(n_1)\chi_{-4}(n_2)n_2h(n_1,n_1)\right)q^d.$$

Так как для нечётных n

$$\frac{u^2+1}{u^2-1}(u^n-u^{-n}) = 2\sideset{}{''}\sum_{\substack{-n<t<n\\ t-\text{нечёт}}} u^t,$$

где штрихи подразумевают коэффициент $\frac{1}{2}$ при $t=\pm n$, то

$$\frac{u^2+1}{u^2-1}H(u;q)H(v;q)+\frac{v^2+1}{v^2-1}H(v;q)H(u;q) =$$

$$= 2\sum_{n_1,n_2=1}^{\infty}\chi_{-4}(n_1)\chi_{-4}(n_2)\left(\sideset{}{''}\sum_{\substack{-n_1\le t\le n_1\\ t-\text{нечёт}}} u^t(v^{n_2}-v^{-n_2})\right)q^{n_1^2+n_2^2}+$$

$$+2\sum_{n_1,n_2=1}^{\infty}\chi_{-4}(n_1)\chi_{-4}(n_2)\left(\sideset{}{''}\sum_{\substack{-n_1\le t\le n_1\\ t-\text{нечёт}}} v^t(u^{n_2}-u^{-n_2})\right)q^{n_1^2+n_2^2} =$$

$$= 2\sum_{d=1}^{\infty}\left(\sum_{n_1,n_2=d}\chi_{-4}(n_1)\chi_{-4}(n_2)\sideset{}{''}\sum_{\substack{-n_1\le t\le n_1\\ t-\text{нечёт}}} h(t,n_2)\right)q^{n_1^2+n_2^2}.$$

Умножив обе части (1.13) на $H(u;q)H(v;q)$ и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях q^d, получим тождество (1.14).

Проведённые выкладки показывают, что тождество (1.13) вытекает из следующего утверждения.

Теорема 7. *Пусть $h:\mathbb{Z}^2\to\mathbb{C}$ произвольная функция, для которой*

$$h(m_1,m_2)=h(m_2,m_1)=-h(-m_1,-m_2) \qquad (\forall m_1,m_2\in\mathbb{Z}).$$

Тогда для любого натурального d выполняется тождество

$$-\sum_{\substack{b_1^2+b_2^2+2ac=d\\ a,\ c-\text{ чётные}}}\chi_{-4}(b_1)\chi_{-4}(b_2)h(a+b_1,b_2+c) =$$

$$= \sum_{n_1^2+n_2^2=d}\chi_{-4}(n_1)\chi_{-4}(n_2)(n_2h(n_1,n_1)-2\sideset{}{''}\sum_{\substack{-n_1\le t\le n_1\\ t-\text{нечёт}}} h(t,n_2)), \quad (1.14)$$

где штрихи подразумевают коэффициент $\frac{1}{2}$ при $t=\pm n_1$.

Доказательство. Положим в тождестве (1.12)

$$G(m) = \chi_{-4}(m_2)\chi_{-4}(m_3)\delta_2(m_1)\delta_2(m_4)h(m_1+m_2, -m_3+m_4).$$

Тогда

$$\sum_{b_1^2+b_2^2+2ac=d} G(a+b_1+b_2-c, -b_1+c, -b_2+c, c) =$$
$$= \sum_{\substack{b_1^2+b_2^2+2ac=d \\ a,c-\text{чёт}}} \chi_{-4}(-b_1+c)\chi_{-4}(-b_2+c)h(a+b_2, b_2).$$

Так как

$$\chi_{-4}(-b_1+2c_1) = -\chi_{-4}(b_1-2c_1) = -\chi_{-4}(b_1+2c_1),$$

то при замене $b_1 \to -b_1$ все слагаемые в последней сумме поменяют знак, и поэтому она равна нулю.

Далее,

$$\sum_{b_1^2+b_2^2+2ac=d} G(a, b_1, b_2, c) = \sum_{\substack{b_1^2+b_2^2+2ac=d \\ a,c-\text{чёт}}} \chi_{-4}(b_1)\chi_{-4}(b_2)h(a+b_1, -b_2+c).$$

После замены $b_2 \to -b_2$ правая часть превратится в левую часть тождества (1.14).

Воспользовавшись заменами $a+b_1 = m_1$ и $a+b_2 = m_2$, а также равенствами

$$\chi_{-4}(2a_1+b_2) = (-1)^{a_1}\chi_{-4}(b_2), \quad \chi_{-4}(2a_1+b_1) = (-1)^{a_1}\chi_{-4}(b_1),$$

представим правую часть (1.12)

$$\sum_{\substack{(a+b_1)^2+(a+b_2)^2=d \\ a+b_1+b_2>0}} \{\chi_{-4}(b_1)\chi_{-4}(b_2)h(a+b_1, a+b_1) - 2\chi_{-4}(a+b_2)\chi_{-4}(a+b_1)h(a+b_2, b_2)\}$$

как сумму двух слагаемых:

$$\sum_{\substack{m_1^2+m_2^2=d \\ m_1+m_2>0}} \sum_{\substack{0<a<m_1+m_2 \\ a-\text{чётное}}} \chi_{-4}(m_1)\chi_{-4}(m_2)h(m_1, m_1), \tag{1.15}$$

$$-2\sum_{\substack{m_1^2+m_2^2=d \\ m_1+m_2>0}} \sum_{\substack{0<a<m_1+m_2 \\ a-\text{чётное}}} \chi_{-4}(m_1)\chi_{-4}(m_2)h(m_2, m_2-a). \tag{1.16}$$

Разбивая область суммирования

$$\{(m_1, m_2) | m_1^2+m_2^2 = d, m_1+m_2 > 0\}$$

на непересекающиеся три с

$$m_1 = n_1 > 0 \quad \text{и} \quad m_2 = n_2 > 0,$$

$$m_1 = -n_1 < 0 \quad \text{и} \quad m_2 = n_2 > 0,$$

$$m_1 = n_1 > 0 \quad \text{и} \quad m_2 = -n_2 < 0, \quad (1.17)$$

для суммы (1.15) получим выражение

$$\sum_{n_1^2+n_2^2=d} \chi_{-4}(n_1)\chi_{-4}(n_2)(\frac{n_1+n_2}{2}-1)h(n_1,n_1)+$$

$$+\sum_{\substack{n_1^2+n_2^2=d\\ n_1<n_2}} \chi_{-4}(n_1)\chi_{-4}(n_2)(\frac{-n_1+n_2}{2}-1)h(n_1,n_1)-$$

$$-\sum_{\substack{n_1^2+n_2^2=d\\ n_1>n_2}} \chi_{-4}(n_1)\chi_{-4}(n_2)(\frac{n_1-n_2}{2}-1)h(n_1,n_1) = \sum_{n_1^2+n_2^2=d} \chi_{-4}(n_1)\chi_{-4}(n_2)n_2h(n_1,n_1)-$$

$$-2\sum_{\substack{n_1^2+n_2^2=d\\ n_1<n_2}} \chi_{-4}(n_1)\chi_{-4}(n_2)h(n_1,n_1) - \sum_{\substack{n_1^2+n_2^2=d\\ n_1=n_2}} \chi_{-4}(n_1)\chi_{-4}(n_2)h(n_1,n_1).$$

Выполнив замену $t = m_2 - a$, перепишем сумму из (1.16) в виде

$$-2\sum_{\substack{m_1^2+m_2^2=d\\ m_1+m_2>0}} \sum_{\substack{-m_1<t<m_2\\ t-\text{нечётное}}} \chi_{-4}(m_1)\chi_{-4}(m_2)h(t,m_2),$$

которая в соответствии с (1.17) разобьётся в сумму трёх слагаемых:

$$-2\sum_{n_1^2+n_2^2=d} \sum_{\substack{-n_1<t<n_2\\ t-\text{нечётное}}} \chi_{-4}(n_1)\chi_{-4}(n_2)h(t,n_2),$$

$$2\sum_{\substack{n_1^2+n_2^2=d\\ n_1<n_2}} \sum_{\substack{n_1<t<n_2\\ t-\text{нечётное}}} \chi_{-4}(n_1)\chi_{-4}(n_2)h(t,n_2),$$

$$-2\sum_{\substack{n_1^2+n_2^2=d\\ n_1>n_2}} \sum_{\substack{n_2<t<n_1\\ t-\text{нечётное}}} \chi_{-4}(n_1)\chi_{-4}(n_2)h(t,n_2).$$

При этом в третьем случае мы воспользовались заменой $t \to -t$ и равенством $h(-t,-n_2) = -h(t,n_2)$. Разбивая первую из этих сумм на три в соответствии с условиями

$$n_1 < n_2, \quad n_1 = n_2, \quad n_1 > n_2,$$

и добавляя к ним оставшиеся две, получим выражение

$$-2\sum_{\substack{n_1^2+n_2^2=d\\ n_1<n_2}}\ \sum_{\substack{-n_1<t<n_1\\ t-\text{нечётное}}}\chi_{-4}(n_1)\chi_{-4}(n_2)h(t,n_2)-2\sum_{\substack{n_1^2+n_2^2=d\\ n_1>n_2}}\dots-2\sum_{\substack{n_1^2+n_2^2=d\\ n_1=n_2}}\dots-$$

$$-2\sum_{\substack{n_1^2+n_2^2=d\\ n_1<n_2}}\chi_{-4}(n_1)\chi_{-4}(n_2)h(n_1,n_2)+2\sum_{\substack{n_1^2+n_2^2=d\\ n_1>n_2}}\chi_{-4}(n_1)\chi_{-4}(n_2)h(n_2,n_2).$$

Первые три суммы можно записать в виде одной

$$-2\sum_{n_1^2+n_2^2=d}\ \sum_{\substack{-n_1<t<n_1\\ t-\text{нечётное}}}\chi_{-4}(n_1)\chi_{-4}(n_2)h(t,n_2).$$

Четвёртую с помощью замены $(n_1,n_2)\to(n_2,n_1)$ преобразуем к виду

$$-\sum_{n_1^2+n_2^2=d}\chi_{-4}(n_1)\chi_{-4}(n_2)h(n_1,n_2)+\sum_{\substack{n_1^2+n_2^2=d\\ n_1=n_2}}\dots.$$

В результате для суммы (1.16) получаем выражение

$$-2\sum_{n_1^2+n_2^2=d}\ \sum_{\substack{-n_1<t<n_1\\ t-\text{нечётное}}}\chi_{-4}(n_1)\chi_{-4}(n_2)h(t,n_2)-\sum_{n_1^2+n_2^2=d}\chi_{-4}(n_1)\chi_{-4}(n_2)h(n_1,n_2)+$$

$$+\sum_{\substack{n_1^2+n_2^2=d\\ n_1=n_2}}\chi_{-4}(n_2)h(n_1,n_1)+2\sum_{\substack{n_1^2+n_2^2=d\\ n_1<n_2}}\chi_{-4}(n_1)\chi_{-4}(n_2)h(n_1,n_1).$$

Так как при замене $(n_1,n_2)\to(n_2,n_1)$ величина $h(-n_1,n_2)$ меняет знак, то

$$\sum_{n_1^2+n_2^2=d}\chi_{-4}(n_1)\chi_{-4}(n_2)h(-n_1,n_2)=0.$$

Объединив все эти вычисления вместе, получим выражение для правой части тождества (1.14) в виде суммы выражений из (1.15) и (1.16). □

1.7. Арифметическая интерпретация трёхчленного тождества из теории эллиптических функций

Говорят, что голоморфная на всей плоскости комплексного переменного (другими словами – целая) функция f удовлетворяет *трёхчленному уравнению*, если для любых комплексных чисел z_1, z_2, z_3 и z_4 выполняется равенство

$$f(z_1+z_2)f(z_1-z_2)f(z_3+z_4)f(z_3-z_4)+f(z_1+z_3)f(z_1-z_3)f(z_4+z_2)f(z_4-z_2)+$$

$$+f(z_1+z_4)f(z_1-z_4)f(z_2+z_3)f(z_2-z_3)=0. \tag{1.18}$$

Пусть λ, A и B – произвольные комплексные числа и при этом $\lambda \neq 0$. Определим новую целую функцию g из равенства

$$g(z) = f(\lambda z)e^{Az^2+B}. \tag{1.19}$$

Легко проверить, что f удовлетворяет уравнению (1.18) тогда и только тогда, когда g удовлетворяет этому уравнению. По этой причине будем называть функции f и g, связанные уравнением (1.19), эквивалентными, с символической записью $f \sim g$.

А. Гурвиц в [14] доказал, что любая функция, тождественно не равная нулю и удовлетворяющая уравнению (1.18), эквивалентна сигма-функции Вейерштрасса $\sigma_\Gamma(z)$.

Для невырожденной решётки справедливо равенство

$$\sigma_\Gamma(z) = e^{Az^2+B}\vartheta_1\left(\frac{\pi z}{2}; e^{\pi i\tau}\right)$$

с некоторыми комплексными константами A и B (см. [39], глава 21), зависящими только от ω_1 и ω_2. Поэтому $\sigma_\Gamma \sim \vartheta_1$ и, как было отмечено ещё самим Вейерштрассом, для функции $\vartheta_1(.;q)$ выполняется равенство

$$\vartheta_1(z_1+z_2)\vartheta_1(z_1-z_2)\vartheta_1(z_3+z_4)\vartheta_1(z_3-z_4)+\vartheta_1(z_1+z_3)\vartheta_1(z_1-z_3)\vartheta_1(z_4+z_2)\vartheta_1(z_4-z_2)+$$

$$+\vartheta_1(z_1+z_4)\vartheta_1(z_1-z_4)\vartheta_1(z_2+z_3)\vartheta_1(z_2-z_3) = 0.$$

После замен

$$z_1 \to \frac{w+z+w'+z'}{2}, \qquad z_2 \to \frac{w+z-w'-z'}{2},$$

$$z_3 \to \frac{-w+z+w'+z'}{2}, \qquad z_4 \to \frac{w+z-w'+z'}{2}$$

оно примет вид

$$\vartheta_1(z+w)\vartheta_1(z'+w')\vartheta_1(z+z')\vartheta_1(-w+w') + \vartheta_1(z+z'+w')\vartheta_1(z+w-w')\vartheta_1(z')\vartheta_1(w)+$$

$$+\vartheta_1(-z'+w-w')\vartheta_1(w+z+z')\vartheta_1(z)\vartheta_1(w') = 0.$$

Умножив обе части последнего равенства на $\vartheta_1'^2$, разделив на

$$\vartheta_1(z)\vartheta_1(w)\vartheta_1(z')\vartheta_1(w')\vartheta_1(z+z')\vartheta_1(w'-w)$$

и воспользовавшись нечётностью функции ϑ_1, получим

$$\frac{\vartheta_1(z+w)\vartheta_1'}{\vartheta_1(z)\vartheta_1(w)}\cdot\frac{\vartheta_1(z'+w')\vartheta_1'}{\vartheta_1(z')\vartheta_1(w')}+\frac{\vartheta_1(z+z'+w')\vartheta_1'}{\vartheta_1(z+z')\vartheta_1(w')}\cdot\frac{\vartheta_1(-z-w+w')\vartheta_1'}{\vartheta_1(-z)\vartheta_1(w'-w)}+ \\ +\frac{\vartheta_1(-z'+w-w')\vartheta_1'}{\vartheta_1(-z')\vartheta_1(w-w')}\cdot\frac{\vartheta_1(z+z'+w)\vartheta_1'}{\vartheta_1(z+z')\vartheta_1(w)}=0. \tag{1.20}$$

В 1848 году в работе “Sur la rotation d’un corps” (“О вращении тела”) Якоби опубликовал тождество, которое после некоторых замен переменных приобретает следующий вид:

$$\frac{\vartheta_1(z+w)\vartheta_1'}{\vartheta_1(z)\vartheta_1(w)}=\operatorname{ctg} z+\operatorname{ctg} w+4\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}q^{2mn}\sin(2mz+2nw)=H(z,w).$$

С его помощью соотношение (1.20) превращается в тождество

$$H(z,w)H(z',w')+H(z+z',w')H(-z,-w+w')+H(-z',w-w')H(z+z',w)=0,$$

приведённое в [38] (глава 12, упражнение 6).

Вводя замены $x=e^{2iz}$, $y=e^{2iw}$, $u=e^{2iz'}$ и $v=e^{2iw'}$ и степенной ряд

$$K(x,y)=\frac{x+1}{x-1}+\frac{y+1}{y-1}+2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(x^{-m}y^{-n}-x^my^n)q^{2mn}=-iH(z,w),$$

приходим к следующему утверждению.

Теорема 8. *Для независимых переменных x,y,u,v справедливо тождество*

$$K(x,y)K(u,v)+K(xu,v)K(1/x,v/y)+K(1/u,y/v)K(xu,y)=0. \tag{1.21}$$

Мы будем придерживаться следующих обозначений:

1) a,b,a',b' — целые числа;

2) d,d_1,d_2,m,n,m',n' — положительные целые числа;

3) $\mathcal{A}$ — аддитивная абелева группа;

4) $\mathbb{Z}^4$ — множество всех целочисленных матриц

$$\omega=\begin{pmatrix}a\ a'\\ b\ b'\end{pmatrix}; \tag{1.22}$$

5) U,U^2 — линейные автоморфизмы $\mathbb{Z}^4$, переводящие матрицу из (1.22) в

$$\begin{pmatrix}a' & a'-a\\ -b' & b'+b\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}a'-a & -a\\ -b'-b & b\end{pmatrix}.$$

При этом

$$U^3 = -E, \quad U^6 = E,$$

где E — тождественное преобразование.

Доказательство тождества (1.21) базируется на следующем результате, полученном независимо в работах [13] (см. также [26]) и [28] (см. также [29]).

Теорема 9. *Пусть $\Phi : \mathbb{Z}^4 \to \mathcal{A}$ — произвольная функция, для которой*

$$\Phi\left(U\begin{pmatrix} m\, m' \\ n\;\; n' \end{pmatrix}\right) = \Phi\begin{pmatrix} m' & m'-m \\ -n' & n'+n \end{pmatrix} = \Phi\begin{pmatrix} m\, m' \\ n\;\; n' \end{pmatrix}.$$

Тогда для любого натурального d

$$\sum_{mn'+m'n=d}\left(\Phi\begin{pmatrix} m\, m' \\ n\;\; n' \end{pmatrix} - \Phi\begin{pmatrix} m & -m' \\ -n & n' \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \sum_{d_1 d_2 = d}\left(\sum_{0\le a<d_2}\Phi\begin{pmatrix} 0 & d_1 \\ d_2 & -a \end{pmatrix} - \sum_{0\le b<d_1}\Phi\begin{pmatrix} b & d_1 \\ d_2 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

Замечание 1.6. Для произвольной функции $F : \mathbb{Z}^4 \to \mathcal{A}$, функция $\Phi : \mathbb{Z}^4 \to \mathcal{A}$, определяемая из равенства

$$\Phi(\omega) = F(\omega) + F(U\omega) + F(U^2\omega) + F(U^3\omega) + F(U^4\omega) + F(U^5\omega),$$

удовлетворяет условию теоремы.

Умножив обе части тождества теоремы на q^{2d} и просуммировав по всем натуральным d, получим равенство

$$\sum_{m,n',m',n\in\mathbb{N}}\left(\Phi\begin{pmatrix} m\, m' \\ n\;\; n' \end{pmatrix} - \Phi\begin{pmatrix} m & -m' \\ -n & n' \end{pmatrix}\right) q^{2mn'}q^{2m'n} =$$
$$= \sum_{d_1,d_2\in\mathbb{N}}\left(\sum_{0\le a<d_2}\Phi\begin{pmatrix} 0 & d_1 \\ d_2 & -a \end{pmatrix} - \sum_{0\le b<d_1}\Phi\begin{pmatrix} b & d_1 \\ d_2 & 0 \end{pmatrix}\right) q^{2d_1 d_2} \tag{1.23}$$

для формальных степенных рядов относительно переменной q.

Положим $F(\omega) = x^m y^{n'} u^{m'} v^n$ с формальными переменными x, y, u, v и

$$\omega = \begin{pmatrix} m\, m' \\ n\;\; n' \end{pmatrix}.$$

Тогда (см. замечание 1.6)

$$\Phi(\omega)=x^{m}y^{n'}u^{m'}v^{n}+x^{-m}y^{-n'}u^{-m'}v^{-n}+x^{m'-m}y^{n}u^{-m}v^{-n'-n}+$$

$$+x^{-m'+m}y^{-n}u^{m}v^{n'+n}+x^{-m'}y^{-n-n'}u^{m-m'}v^{n'}+x^{m'}y^{n+n'}u^{-m+m'}v^{-n'}.$$

Нетрудно проверить, что

$$\Phi\begin{pmatrix} m\, m' \\ n\;\; n' \end{pmatrix}-\Phi\begin{pmatrix} m & -m' \\ -n & n' \end{pmatrix}=$$

$$=\left(x^{-m}y^{-n'}-x^{m}y^{n'}\right)\left(u^{-m'}v^{-n}-u^{m'}v^{n}\right)+$$

$$+\left((xu)^{-m}v^{-n'}-(xu)^{m}v^{n'}\right)\left(x^{m'}\left(y/v\right)^{n}-x^{-m'}\left(y/v\right)^{-n}\right)+$$

$$+\left(u^{m}\left(v/y\right)^{n'}-u^{-m}\left(v/y\right)^{-n'}\right)\left((xu)^{-m'}y^{-n}-(xu)^{m'}y^{n}\right).$$

Поэтому

$$\sum_{0\le a<d_2}\Phi\begin{pmatrix} 0 & d_1 \\ d_2 & -a \end{pmatrix}-\sum_{0\le b<d_1}\Phi\begin{pmatrix} b & d_1 \\ d_2 & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=u^{d_1}v^{d_2}\sum_{0\le a<d_2}y^{-a}+u^{-d_1}v^{-d_2}\sum_{0\le a<d_2}y^{a}+x^{d_1}\left(y/v\right)^{d_2}\sum_{0\le a<d_2}v^{a}+$$

$$+x^{-d_1}\left(y/v\right)^{-d_2}\sum_{0\le a<d_2}v^{-a}+(xu)^{-d_1}y^{-d_2}\sum_{0\le a<d_2}\left(v/y\right)^{-a}+(xu)^{d_1}y^{d_2}\sum_{0\le a<d_2}\left(v/y\right)^{a}-$$

$$-u^{d_1}v^{d_2}\sum_{0\le b<d_1}x^{b}-u^{-d_1}v^{-d_2}\sum_{0\le b<d_1}x^{-b}-x^{d_1}\left(y/v\right)^{d_2}\sum_{0\le b<d_1}(xu)^{-b}-$$

$$-x^{-d_1}\left(y/v\right)^{-d_2}\sum_{0\le b<d_1}(xu)^{b}-(xu)^{-d_1}y^{-d_2}\sum_{0\le b<d_1}u^{b}-(xu)^{d_1}y^{d_2}\sum_{0\le b<d_1}u^{-b}=$$

$$=\frac{1-xy}{(x-1)(1-y)}\left(u^{d_1}v^{d_2}-u^{-d_1}v^{-d_2}\right)+\frac{xuy-1}{(xu-1)(1-y)}\left(u^{d_1}\left(\frac{v}{y}\right)^{d_2}-u^{-d_1}\left(\frac{v}{y}\right)^{-d_2}\right)+$$

$$+\frac{1-uv}{(v-1)(1-u)}\left(x^{d_1}y^{d_2}-x^{-d_1}y^{-d_2}\right)+\frac{xuv-1}{(xu-1)(1-v)}\left(x^{d_1}\left(\frac{y}{v}\right)^{d_2}-x^{-d_1}\left(\frac{y}{v}\right)^{-d_2}\right)+$$

$$+\frac{xy-v}{(v-y)(x-1)}\left((xu)^{d_1}v^{d_2}-(xu)^{-d_1}v^{-d_2}\right)+\frac{uv-y}{(1-u)(v-y)}\left((xu)^{d_1}y^{d_2}-(xu)^{-d_1}y^{-d_2}\right).$$

Положим
$$\tilde{K}(x,y)=\sum_{d_1,d_2\in\mathbb{N}}(x^{-d_1}y^{-d_2}-x^{d_1}y^{d_2})q^{2d_1d_2}.$$
Опираясь на очевидное равенство
$$\tilde{K}(x,y)=-\tilde{K}(1/x,1/y),$$
перепишем (1.23) в виде
$$\tilde{K}(x,y)\tilde{K}(u,v)+\tilde{K}(xu,v)\tilde{K}\left(\frac{1}{x},\frac{v}{y}\right)+\tilde{K}\left(\frac{1}{u},\frac{y}{v}\right)\tilde{K}(xu,y)-$$
$$-\frac{xy-1}{(x-1)(1-y)}\tilde{K}(u,v)-\frac{xuy-1}{(xu-1)(1-y)}\tilde{K}\left(\frac{1}{u},\frac{y}{v}\right)-\frac{uv-1}{(v-1)(1-u)}\tilde{K}(x,y)-$$
$$-\frac{xuv-1}{(xu-1)(1-v)}\tilde{K}\left(\frac{1}{x},\frac{v}{y}\right)-\frac{v-xy}{(v-y)(x-1)}\tilde{K}(xu,v)-\frac{y-uv}{(1-u)(v-y)}\tilde{K}(xu,y)=0.$$
То есть
$$\tilde{K}(x,y)\tilde{K}(u,v)+\frac{xy-1}{(x-1)(y-1)}\tilde{K}(u,v)+\frac{uv-1}{(v-1)(u-1)}\tilde{K}(x,y)+$$
$$+\tilde{K}(xu,v)\tilde{K}\left(\frac{1}{x},\frac{v}{y}\right)+\frac{xy-v}{(v-y)(x-1)}\tilde{K}(xu,v)+\frac{xuv-1}{(xu-1)(v-1)}\tilde{K}\left(\frac{1}{x},\frac{v}{y}\right)+$$
$$+\tilde{K}\left(\frac{1}{u},\frac{y}{v}\right)\tilde{K}(xu,y)+\frac{y-uv}{(u-1)(v-y)}\tilde{K}(xu,y)+\frac{xuy-1}{(xu-1)(y-1)}\tilde{K}\left(\frac{1}{u},\frac{y}{v}\right)=$$
$$=\left(\tilde{K}(x,y)+\frac{xy-1}{(x-1)(y-1)}\right)\left(\tilde{K}(u,v)+\frac{uv-1}{(v-1)(u-1)}\right)-$$
$$-\frac{(xy-1)(uv-1)}{(x-1)(y-1)(u-1)(v-1)}+\left(\tilde{K}(xu,v)+\frac{xuv-1}{(xu-1)(v-1)}\right)\times$$
$$\times\left(\tilde{K}\left(\frac{1}{x},\frac{v}{y}\right)+\frac{xy-v}{(v-y)(x-1)}\right)-\frac{(xy-v)(xuv-1)}{(x-1)(v-1)(v-y)(xu-1)}+$$
$$+\left(\tilde{K}\left(\frac{1}{u},\frac{y}{v}\right)+\frac{y-uv}{(u-1)(v-y)}\right)\left(\tilde{K}(xu,y)+\frac{xuy-1}{(xu-1)(y-1)}\right)-$$
$$-\frac{(y-uv)(xuy-1)}{(y-1)(u-1)(v-y)(xu-1)}=0.$$

Так как

$$\tilde{K}(x,y) + \frac{xy-1}{(x-1)(y-1)} = \frac{1}{2}K(x,y)$$

и сумма остальных трёх слагаемых равна нулю, то последнее соотношение преобразуется в интересующее нас тождество (1.21).

1.8. Смешанное трёхчленное тождество

Напомним, что

$$\vartheta_1(z) = \vartheta_1(z;q) = -i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2}e^{(2n+1)iz}, \quad \vartheta_3(z) = \vartheta_3(z;q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}e^{2inz}$$

и

$$H(z,w) = H(z,w;q) = \mathrm{ctg}\ z + \mathrm{ctg}\ w + 4\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} q^{2mn}\sin(2mz+2nw)$$

— классические тэта-функции Якоби.

В работах по теории эллиптических функций, опираясь на теорию функций комплексного переменного, Вейерштрасс доказал серию так называемых "трёхчленных тождеств" для тэта-функций. Одно из них (см. [25], стр. 209) имеет следующий вид

$$\vartheta_3(a)\vartheta_3(b)\vartheta_1(c)\vartheta_1(d) + \vartheta_3(a')\vartheta_3(b')\vartheta_1(c')\vartheta_1(d') + \vartheta_3(a'')\vartheta_3(b'')\vartheta_1(c'')\vartheta_1(d'') = 0,$$

где

$$a' = \frac{1}{2}(a+b+c+d), \qquad a'' = \frac{1}{2}(a+b+c-d),$$

$$b' = \frac{1}{2}(a+b-c-d), \qquad b'' = \frac{1}{2}(a+b-c+d),$$

$$c' = \frac{1}{2}(a-b+c-d), \qquad c'' = \frac{1}{2}(a-b+c+d),$$

$$d' = \frac{1}{2}(-a+b+c-d), \qquad d'' = \frac{1}{2}(a-b-c-d).$$

После замен

$$a \to -z_2, \quad b \to z_3,$$

$$c \to z_1 + z_4, \quad d \to z_1 - z_2 - z_3 - z_4$$

и использования нечетности функции ϑ_1 и чётности функции ϑ_3 оно примет вид

$$\vartheta_3(z_2)\vartheta_3(z_3)\vartheta_1(z_1+z_4)\vartheta_1(z_1-z_2-z_3-z_4)+$$

$$+\vartheta_3(z_3-z_1)\vartheta_3(z_2-z_1)\vartheta_1(z_2+z_3+z_4)\vartheta_1(z_4)+$$

$$+\vartheta_3(z_3+z_4)\vartheta_3(z_2+z_4)\vartheta_1(-z_1+z_2+z_3)\vartheta_1(z_1)=0.$$

Умножив обе части последнего равенства на ϑ_1', разделив на

$$\vartheta_1(z_1)\vartheta_1(z_4)\vartheta_1(z_1-z_2-z_3-z_4)$$

и воспользовавшись соотношением

$$\frac{\vartheta_1(z+w)\vartheta_1'}{\vartheta_1(z)\vartheta_1(w)}=H(z,w),$$

придём к следующему утверждению.

Теорема 10. *Для любых комплексных* z_1,z_2,z_3,z_4 *и* $|q|<1$ *выполняется тождество*

$$\vartheta_3(z_2;q)\vartheta_3(z_3;q)H(z_1,z_4;q)+$$

$$+\vartheta_3(z_3-z_1;q)\vartheta_3(z_2-z_1;q)H(z_1-z_2-z_3-z_4,-z_1;q)+ \tag{1.24}$$

$$+\vartheta_3(z_3+z_4;q)\vartheta_3(z_2+z_4;q)H(-z_4,-z_1+z_2+z_3+z_4;q)=0.$$

Напомним, что

1) b_1,b_2,l_1,l_2,m_2,m_3 — целые числа;

2) d,a,c,m_1,m_4 — положительные целые числа;

3) $R(m_1,m_2,m_3,m_4)=(m_4,m_3-m_4,m_2-m_4,m_1+m_2+m_3-m_4)$. При этом

$$R^3=-E,\quad R^6=E,$$

где E — тождественное преобразование.

Доказательство тождества (1.24) базируется на теореме 6.

При замене $a+b_1$ на l_1 и $a+b_2$ на l_2 в правой части тождества (1.11) получаем, что

$$l_1+l_2=2a+b_1+b_2>a>0.$$

С учетом вышесказанного тождество (1.11) теоремы 6 приобретает следующий вид:

$$\sum_{b_1^2+b_2^2+2ac=d} \Phi(a,b_1,b_2,c) = \sum_{\substack{l_1^2+l_2^2=d \\ 0<a<l_1+l_2}} \Phi(a,l_1-a,l_2-a,l_1+l_2-a). \tag{1.25}$$

Пусть

$$x=e^{2iz_1}, v=e^{2iz_2}, u=e^{2iz_3}, y=e^{2iz_4}.$$

Тогда

$$\vartheta_3(z_1;q)=T(x;q)=\sum_{b=-\infty}^{\infty} x^b q^{b^2},$$

$$\frac{1}{2i}H(z_2,z_3;q)=\frac{1}{2}K(u,v;q)=\frac{uv-1}{(u-1)(v-1)}+\sum_{d_1,d_2=1}^{\infty}(u^{-d_1}v^{-d_2}-u^{d_1}v^{d_2})q^{2d_1d_2} \tag{1.26}$$

и тождество теоремы 10 приобретает следующий вид:

$$\begin{gathered} T(u;q)T(v;q)K\left(x,y;q\right)+T\left(\frac{u}{x};q\right)T\left(\frac{v}{x};q\right)K\left(\frac{x}{vuy},\frac{1}{x};q\right)+ \\ +T(uy;q)T(vy;q)K\left(\frac{1}{y},\frac{vuy}{x};q\right)=0. \end{gathered} \tag{1.27}$$

Для доказательства последнего положим в теореме 6

$$G(m_1,m_2,m_3,m_4)=x^{m_1}v^{m_2}u^{m_3}y^{m_4}-x^{-m_1}v^{-m_2}u^{-m_3}y^{-m_4}.$$

Тогда

$$\Phi(m_1,m_2,m_3,m_4)=x^{m_1}v^{m_2}u^{m_3}y^{m_4}-x^{-m_1}v^{-m_2}u^{-m_3}y^{-m_4}+$$

$$+x^{m_1+m_2+m_3-m_4}v^{-m_1-m_3}u^{-m_1-m_2}y^{-m_1}-x^{-m_1-m_2-m_3+m_4}v^{m_1+m_3}u^{m_1+m_2}y^{m_1}+$$

$$+x^{-m_4}v^{-m_3+m_4}u^{-m_2+m_4}y^{-m_1-m_2-m_3+m_4}-x^{m_4}v^{m_3-m_4}u^{m_2-m_4}y^{m_1+m_2+m_3-m_4}.$$

Нетрудно проверить, что

$$S_1(d)=\sum_{b_1^2+b_2^2+2ac=d}\Phi(a,b_1,b_2,c)=\sum_{b_1^2+b_2^2+2ac=d}\Bigg(v^{b_1}u^{b_2}\left(x^ay^c-x^{-a}y^{-c}\right)+$$

$$+\left(\frac{u}{x}\right)^{b_1}\left(\frac{v}{x}\right)^{b_2}\left(\left(\frac{vuy}{x}\right)^{-a}x^{-c}-\left(\frac{vuy}{x}\right)^{a}x^{c}\right)+$$

$$+(uy)^{b_1}(vy)^{b_2}\left(y^{-a}\left(\frac{x}{vuy}\right)^{-c}-y^a\left(\frac{x}{vuy}\right)^{c}\right)\Bigg).$$

Для правой части тождества (1.25) получим

$$S_2(d)=\sum_{\substack{l_1^2+l_2^2=d\\0<a<l_1+l_2}}\Phi(a,l_1-a,l_2-a,l_1+l_2-a)=$$

$$=\sum_{l_1^2+l_2^2=d}\Bigg((vy)^{l_1}(uy)^{l_2}\sum_{0<a<l_1+l_2}\left(\frac{x}{vuy}\right)^a-(vy)^{-l_1}(uy)^{-l_2}\sum_{0<a<l_1+l_2}\left(\frac{x}{vuy}\right)^{-a}+$$

$$+u^{-l_1}v^{-l_2}\sum_{0<a<l_1+l_2}y^{-a}-u^{l_1}v^{l_2}\sum_{0<a<l_1+l_2}y^a+$$

$$+\left(\frac{v}{x}\right)^{l_1}\left(\frac{u}{x}\right)^{l_2}\sum_{0<a<l_1+l_2}x^a-\left(\frac{v}{x}\right)^{-l_1}\left(\frac{u}{x}\right)^{-l_2}\sum_{0<a<l_1+l_2}x^{-a}\Bigg)=$$

$$=\sum_{\substack{l_1^2+l_2^2=d\\l_1+l_2>0}}\Bigg(\frac{vuy}{x-vuy}\left(\frac{u}{x}\right)^{-l_1}\left(\frac{v}{x}\right)^{-l_2}-\frac{x}{vuy-x}\left(\frac{u}{x}\right)^{l_1}\left(\frac{v}{x}\right)^{l_2}+$$

$$+\frac{y}{1-y}(uy)^{-l_1}(vy)^{-l_2}-\frac{1}{y-1}(uy)^{l_1}(vy)^{l_2}+\frac{y}{y-1}u^{l_1}v^{l_2}-\frac{1}{1-y}u^{-l_1}v^{-l_2}\Bigg)+$$

$$+\sum_{\substack{l_1^2+l_2^2=d\\l_1+l_2>0}}\Bigg(\frac{vuy}{vuy-x}(vy)^{-l_1}(uy)^{-l_2}-\frac{x}{x-vuy}(vy)^{l_1}(uy)^{l_2}+$$

$$+\frac{1}{x-1}v^{l_1}u^{l_2}-\frac{x}{1-x}v^{-l_1}u^{-l_2}+\frac{1}{1-x}\left(\frac{v}{x}\right)^{-l_1}\left(\frac{u}{x}\right)^{-l_2}-\frac{x}{x-1}\left(\frac{v}{x}\right)^{l_1}\left(\frac{u}{x}\right)^{l_2}\Bigg).$$

Выполнив в последней сумме замены $l_1 \to l_2$ и $l_2 \to l_1$, находим

$$S_2(d) = \sum_{\substack{l_1^2+l_2^2=d \\ l_1+l_2>0}} \left(\frac{xy-1}{(x-1)(y-1)} \left(u^{-l_1}v^{-l_2} + u^{l_1}v^{l_2}\right) + \right.$$

$$+\frac{x(1-vuy)}{(x-1)(vuy-x)} \left(\left(\frac{u}{x}\right)^{-l_1} \left(\frac{v}{x}\right)^{-l_2} + \left(\frac{u}{x}\right)^{l_1} \left(\frac{v}{x}\right)^{l_2} \right) +$$

$$\left. +\frac{y(vu-x)}{(1-y)(vuy-x)} \left((uy)^{-l_1} (vy)^{-l_2} + (uy)^{l_1} (vy)^{l_2} \right) \right) =$$

$$= \sum_{\substack{l_1^2+l_2^2=d \\ l_1,\, l_2 \in \mathbb{Z} \\ (l_1,l_2)\neq(0,0)}} \left(\frac{xy-1}{(x-1)(y-1)} u^{l_1}v^{l_2} + \right.$$

$$\left. +\frac{x(1-vuy)}{(x-1)(vuy-x)} \left(\frac{u}{x}\right)^{l_1} \left(\frac{v}{x}\right)^{l_2} + \frac{y(vu-x)}{(1-y)(vuy-x)} (uy)^{l_1} (vy)^{l_2} \right).$$

Так как

$$\frac{xy-1}{(x-1)(y-1)} + \frac{x(1-vuy)}{(x-1)(vuy-x)} + \frac{y(vu-x)}{(1-y)(vuy-x)} = 0,$$

то ограничение $(l_1, l_2) \neq (0, 0)$ можно снять.

Пусть

$$\tilde{K}(x, y) = \sum_{d_1,d_2=1}^{\infty} (x^{-d_1}y^{-d_2} - x^{d_1}y^{d_2})q^{2d_1d_2}.$$

Домножим обе части тождества (1.25) на q^d и просуммируем по всем натуральным d. Принимая во внимание равенство

$$\sum_{b=-\infty}^{\infty} u^b q^{b^2} = 1 + \sum_{b=1}^{\infty} (u^{-b} + u^b) q^{b^2},$$

приходим к соотношению

$$-T(u; q)T(v; q)\tilde{K}(x, y; q) - T\left(\frac{u}{x}; q\right) T\left(\frac{v}{x}; q\right) \tilde{K}\left(\frac{x}{vuy}, \frac{1}{x}; q\right) -$$

$$-T(uy; q)T(vy; q)\tilde{K}\left(\frac{1}{y}, \frac{vuy}{x}; q\right) = \frac{xy-1}{(x-1)(y-1)} T(u; q)\, T(v; q) +$$

$$+\frac{x(1-vuy)}{(x-1)(vuy-x)} T\left(\frac{u}{x}; q\right) T\left(\frac{v}{x}; q\right) + \frac{y(vu-x)}{(1-y)(vuy-x)} T(uy; q)\, T(vy; q).$$

С помощью равенства (1.26) оно преобразуется в равенство (1.27).

ГЛАВА 2

О целочисленных последовательностях Сомос-8 и Сомос-9

Пусть Γ — произвольная дискретная аддитивная подгруппа (решётка) в поле комплексных чисел. Сигма-функция Вейерштрасса, ассоциированная с решёткой Γ, определяется во формуле

$$\sigma_\Gamma(z) = z \prod_{w\in\Gamma\setminus\{0\}} (1 - \frac{z}{w})\ e^{\frac{z}{w}+\frac{1}{2}(\frac{z}{w})^2}.$$

В вырожденных случаях:

1) для $\Gamma = \{0\}$ $\qquad \sigma_\Gamma(z) = z$;

2) для $\Gamma = \{mw | m \in \mathbb{Z}\}$ с $w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$

$$\sigma_\Gamma(z) = z \prod_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left(1 - \frac{z}{nw}\right)\ e^{\frac{z}{nw}+\frac{1}{2}(\frac{z}{nw})^2} = \frac{w}{\pi}\sin\frac{\pi z}{w} e^{\frac{\pi^2}{6}(\frac{z}{w})^2}.$$

Сигма-функция является нечётной функцией с простыми полюсами в узлах решётки Γ.

Напомним, что для невырожденной решётки Γ, порождённой элементами 1 и τ с $Im\tau > 0$,

$$\sigma_\Gamma(z) = \frac{1}{\pi\vartheta_1'}\exp\left(-\frac{1}{24}\frac{(\pi z)^2\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}\right)\vartheta_1\left(\frac{1}{2}\pi z; q\right).$$

В работах [10], [11] и [12], а также в некоторых других неопубликованных работах было доказано что, за исключением некоторых вырожденных случаев, последовательность Сомос-4 имеет вид

$$A(n) = e^{an^2+bn+c}\sigma_\Gamma(z_0 + nz), \tag{2.1}$$

где a, b, c, z_0 и $z \neq 0$ — произвольные комплексные числа, а Γ — любая решётка на комплексной плоскости.

Мы доказываем, что если A — целочисленная последовательность Сомоса вида (2.1), l, t и $N \neq 0$ — целые, то при некоторых ограничениях на A, l, t и N, целочисленная последовательность $B : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, определяемая равенством,

$$B(n) = lA(n) + tA(n + N),$$

является последовательностями Сомос-8 или Сомос-9.

2.1. Эллиптические системы последовательностей

В докладе [3] была предложена следующая конструкция.

Пусть $A, B : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ — две последовательности, тождественно не равные нулю, для которых найдутся $4k$ других последовательностей

$$C_1^{(0)}, \ldots, C_k^{(0)}, D_1^{(0)}, \ldots, D_k^{(0)} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C},$$

$$C_1^{(1)}, \ldots, C_k^{(1)}, D_1^{(1)}, \ldots, D_k^{(1)} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$$

таких, что для любых целых m, n выполняются равенства

$$A(m+n)B(m-n) = \sum_{j=1}^{k} C_j^{(0)}(m) D_j^{(0)}(n), \tag{2.2}$$

$$A(m+n+1)B(m-n) = \sum_{j=1}^{k} C_j^{(1)}(m) D_j^{(1)}(n). \tag{2.3}$$

В таком случае мы назовём пару (A, B) эллиптической системой ранга $k = R(A, B)$, где k — минимально возможное натуральное для представлений (2.2) и (2.3).

Из теории эллиптических функций (теоремы сложения для тэта-функций) непосредственно следует, что пара (A, A) вида (2.1) является эллиптической системой ранга 2.

Для любых целых $m_0, \ldots, m_k$ и $n_0, \ldots, n_k$ из (2.2) и (2.3) соответственно следуют равенства

$$\begin{gathered}\mathcal{D}_{A,B}^{(0)} \begin{pmatrix} m_0, \ldots, m_k \\ n_0, \ldots, n_k \end{pmatrix} = \\ = \det \begin{pmatrix} A(m_0+n_0)B(m_0-n_0) & \cdots & A(m_0+n_k)B(m_0-n_k) \\ \cdots & A(m_i+n_j)B(m_i-n_j) & \cdots \\ A(m_k+n_0)B(m_k-n_0) & \cdots & A(m_k+n_k)B(m_k-n_k) \end{pmatrix} = 0,\end{gathered} \tag{2.4}$$

$$\begin{gathered}\mathcal{D}_{A,B}^{(1)} \begin{pmatrix} m_0, \ldots, m_k \\ n_0, \ldots, n_k \end{pmatrix} = \\ = \det \begin{pmatrix} A(1+m_0+n_0)B(m_0-n_0) & \cdots & A(1+m_0+n_k)B(m_0-n_k) \\ \cdots & A(1+m_i+n_j)B(m_i-n_j) & \cdots \\ A(1+m_k+n_0)B(m_k-n_0) & \cdots & A(1+m_k+n_k)B(m_k-n_k) \end{pmatrix} = 0.\end{gathered} \tag{2.5}$$

2.2. Целочисленные последовательности Сомос-8

Пусть A — целочисленная последовательность Сомоса вида (2.1), l и t — целые. Определим целочисленную последовательность $B : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ по формуле

$$B(n) = lA(n) + tA(n + 2N) \tag{2.6}$$

с фиксированным целым $N \neq 0$.

Теорема 11. *Если* $\mathcal{D}^{(0)}_{B,B}\begin{pmatrix}3, 2, 1, 0\\3, 2, 1, 0\end{pmatrix} \neq 0$, *то* B *— целочисленная последовательность Сомос-8.*

Доказательство. С помощью равенства (2.6) получаем, что

$$B(m+n)B(m-n) = (lA(m+n) + tA(m+n+2N))(lA(m-n) + tA(m-n+2N)) =$$

$$= l^2A(m+n)A(m-n) + t^2A(m+n+2N)A(m-n+2N)+$$

$$+ltA(m+n)A(m-n+2N) + ltA(m+n+2N)A(m-n).$$

Для последовательностей A при любых целых m и n справедливо разложение

$$A(m+n)A(m-n) = C^{(0)}_1(m)D^{(0)}_1(n) + C^{(0)}_2(m)D^{(0)}_2(n).$$

Отсюда следует, что

$$B(m+n)B(m-n) = l^2C^{(0)}_1(m)D^{(0)}_1(n) + l^2C^{(0)}_2(m)D^{(0)}_2(n) + t^2C^{(0)}_1(m+2N)D^{(0)}_1(n)+$$

$$+t^2C^{(0)}_2(m+2N)D^{(0)}_2(n) + ltC^{(0)}_1(m+N)D^{(0)}_1(n-N) + ltC^{(0)}_2(m+N)D^{(0)}_2(n-N)+$$

$$+ltC^{(0)}_1(m+N)D^{(0)}_1(n+N) + ltC^{(0)}_2(m+N)D^{(0)}_2(n+N) =$$

$$= \tilde{C}^{(0)}_1(m)\tilde{D}^{(0)}_1(n) + \tilde{C}^{(0)}_2(m)\tilde{D}^{(0)}_2(n) + \tilde{C}^{(0)}_3(m)\tilde{D}^{(0)}_3(n) + \tilde{C}^{(0)}_4(m)\tilde{D}^{(0)}_4(n),$$

где

$$\tilde{C}_1^{(0)}(m) = l^2 C_1^{(0)}(m) + t^2 C_1^{(0)}(m+2N), \quad \tilde{D}_1^{(0)}(n) = D_1^{(0)}(n),$$

$$\tilde{C}_2^{(0)}(m) = l^2 C_2^{(0)}(m) + t^2 C_2^{(0)}(m+2N), \quad \tilde{D}_2^{(0)}(n) = D_2^{(0)}(n),$$

$$\tilde{C}_3^{(0)}(m) = lt C_1^{(0)}(m+N), \qquad \tilde{D}_3^{(0)}(n) = D_1^{(0)}(n-N) + D_1^{(0)}(n+N),$$

$$\tilde{C}_4^{(0)}(m) = lt C_2^{(0)}(m+N), \qquad \tilde{D}_4^{(0)}(n) = D_2^{(0)}(n-N) + D_2^{(0)}(n+N).$$

Поэтому пара (B, B) — эллиптическая система с $R(B, B) \le 4$. Тогда, в соответствии с (2.4), для любого целого n

$$\mathcal{D}_{B,B}^{(0)}\begin{pmatrix} n+4, 3, 2, 1, 0 \\ 4, \quad 3, 2, 1, 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \mathcal{D}_{B,B}^{(0)}\begin{pmatrix} 3,2,1,0 \\ 3,2,1,0 \end{pmatrix} B(n+8)B(n) - \mathcal{D}_{B,B}^{(0)}\begin{pmatrix} 3,2,1,0 \\ 4,2,1,0 \end{pmatrix} B(n+7)B(n+1) +$$

$$+ \mathcal{D}_{B,B}^{(0)}\begin{pmatrix} 3,2,1,0 \\ 4,3,1,0 \end{pmatrix} B(n+6)B(n+2) - \mathcal{D}_{B,B}^{(0)}\begin{pmatrix} 3,2,1,0 \\ 4,3,2,0 \end{pmatrix} B(n+5)B(n+3) +$$

$$+ \mathcal{D}_{B,B}^{(0)}\begin{pmatrix} 3,2,1,0 \\ 4,3,2,1 \end{pmatrix} B(n+4)B(n+4) = 0.$$

Разделив все части последнего равенства на коэффициент при $B(n+8)B(n)$, получим утверждение теоремы 11. □

Пример 1. Положив в (2.6) $l = 1$, $t = 2$ и $N = 1$, получим целочисленную последовательность B

$$\ldots,\ B(-6) = 1647,\ B(-5) = 360,\ B(-4) = 73,\ B(-3) = 29,$$

$$B(-2) = 11,\ B(-1) = 5,\ B(0) = 4,\ B(1) = 3,\ B(2) = 3,$$

$$B(3) = 5,\ B(4) = 7,\ B(5) = 16,\ B(6) = 49,\ \ldots,$$

каждый член которой удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$B(n+8)B(n) = \frac{5}{2}B(n+7)B(n+1) + \frac{75}{2}B(n+6)B(n+2) -$$

$$-15B(n+5)B(n+3) - 54B(n+4)B(n+4).$$

2.3. Целочисленные последовательности Сомос-9

Пусть A — целочисленная последовательность Сомоса вида (2.1) такая же, как в разделе 2.2, l и t — целые. Определим целочисленную последовательность $B : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ по формуле

$$B(n) = lA(n) + tA(n+2N+1) \tag{2.7}$$

с фиксированным целым N и целыми l и t.

Теорема 12. *Если* $\mathcal{D}^{(1)}_{B,B}\begin{pmatrix}3,2,1,0\\3,2,1,0\end{pmatrix} \neq 0$, *то* B — *целочисленная последовательность Сомос-9.*

Доказательство. В соответсвии с (2.7),

$$B(m+n+1)B(m-n) =$$

$$= \big(lA(m+n+1) + tA(m+n+2N+2)\big)\big(lA(m-n) + tA(m-n+2N+1)\big) =$$

$$= l^2A(m+n+1)A(m-n) + t^2A(m+n+2N+2)A(m-n+2N+1) +$$

$$+ltA(m+n+1)A(m-n+2N+1) + ltA(m+n+2N+2)A(m-n).$$

Так как при любых целых m и n

$$A(m+n)A(m-n) = C^{(0)}_1(m)D^{(0)}_1(n) + C^{(0)}_2(m)D^{(0)}_2(n),$$

$$A(m+n+1)A(m-n) = C^{(1)}_1(m)D^{(1)}_1(n) + C^{(1)}_2(m)D^{(1)}_2(n),$$

то

$$B(m+n+1)B(m-n) =$$

$$= \tilde{C}^{(1)}_1(m)\tilde{D}^{(1)}_1(n) + \tilde{C}^{(1)}_2(m)\tilde{D}^{(1)}_2(n) + \tilde{C}^{(1)}_3(m)\tilde{D}^{(1)}_3(n) + \tilde{C}^{(1)}_4(m)\tilde{D}^{(1)}_4(n),$$

где

$$\tilde{C}_1^{(1)}(m) = l^2 C_1^{(1)}(m) + t^2 C_1^{(1)}(m+2N+1), \qquad \tilde{D}_1^{(1)}(n) = D_1^{(1)}(n),$$

$$\tilde{C}_2^{(1)}(m) = l^2 C_2^{(1)}(m) + t^2 C_2^{(1)}(m+2N+1), \qquad \tilde{D}_2^{(1)}(n) = D_2^{(1)}(n),$$

$$\tilde{C}_3^{(1)}(m) = ltC_1^{(0)}(m+N+1), \qquad \tilde{D}_3^{(1)}(n) = D_1^{(0)}(n-N) + D_1^{(0)}(n+N+1),$$

$$\tilde{C}_4^{(1)}(m) = ltC_2^{(0)}(m+N+1), \qquad \tilde{D}_4^{(1)}(n) = D_2^{(0)}(n-N) + D_2^{(0)}(n+N+1).$$

Поэтому пара (B, B) — эллиптическая система с $R(B, B) \le 4$. Тогда, в соответствии с (2.5), для любого целого n

$$\mathcal{D}_{B,B}^{(1)} \begin{pmatrix} n+4, 3, 2, 1, 0 \\ 4, \quad 3, 2, 1, 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \mathcal{D}_{B,B}^{(1)} \begin{pmatrix} 3, 2, 1, 0 \\ 3, 2, 1, 0 \end{pmatrix} B(n+9)B(n) - \mathcal{D}_{B,B}^{(1)} \begin{pmatrix} 3, 2, 1, 0 \\ 4, 2, 1, 0 \end{pmatrix} B(n+8)B(n+1) +$$

$$+ \mathcal{D}_{B,B}^{(1)} \begin{pmatrix} 3, 2, 1, 0 \\ 4, 3, 1, 0 \end{pmatrix} B(n+7)B(n+2) - \mathcal{D}_{B,B}^{(1)} \begin{pmatrix} 3, 2, 1, 0 \\ 4, 3, 2, 0 \end{pmatrix} B(n+6)B(n+3) +$$

$$+ \mathcal{D}_{B,B}^{(1)} \begin{pmatrix} 3, 2, 1, 0 \\ 4, 3, 2, 1 \end{pmatrix} B(n+5)B(n+4) = 0.$$

Разделив все части последнего равенства на коэффициент при $B(n+9)B(n)$, получим утверждение теоремы 12. $\square$

Пример 2. Положив в (2.7) $l = 1$, $t = 2$ и $N = 0$, получим целочисленную последовательность B

$$\ldots,\ B(-6) = 2157,\ B(-5) = 432,\ B(-4) = 105,\ B(-3) = 37,$$

$$B(-2) = 13,\ B(-1) = 7,\ B(0) = 4,\ B(1) = 3,\ B(2) = 3,$$

$$B(3) = 3,\ B(4) = 5,\ B(5) = 8,\ B(6) = 17,\ \ldots,$$

каждый член которой удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$B(n+9)B(n)=\frac{9}{4}B(n+8)B(n+1)+55B(n+7)B(n+2)+$$

$$+\frac{255}{4}B(n+6)B(n+3)-255B(n+4)B(n+4).$$

Список литературы

1. Atkin A. O. L., Swinnerton-Dyer P. *Some properties of partitions*, Proc. London Math. Soc. (3), **4** (1954), 84–106.
2. Berndt Bruce C. *Ramanujan's notebooks. Part III*, Springer-Verlag, New York, 1991.
3. Bykovskii V. *Elliptic systems of sequences and functions*, 2015. http://www.skoltech.ru/app/data/uploads/sites/29/2015/02/Skolkovo/Bykovskii.pdf.
4. Dickson L. E. *History of the theory of numbers*, New York: Chelsea Pub. Co., **2** (1952).
5. Fricke R. *Die Elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen,* Berlin: Springer, **1** (2011).
6. Fomin S., Zelevinsky A. *The Laurent Phenomenon*, Adv. Appl. Math., **28** (2002), 119–144.
7. Gale D. *Mathematical Entertainments: The Strange and Surprising Saga of the Somos Sequences*, Math. Intel., **13** (1991), 40–42.
8. Gauss C. F. *Gauss Werke II*, Göttingen, 1863.
9. Gordon B. *Some identities in combinatorial analysis*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2), **12** (1961), 285–290.
10. Hone A. N. W., Swart C. S. *Integrality and the Laurent phenomenon for Somos 4 and Somos 5 sequences*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **145** (2008), 65–85.
11. Hone A. N. W. *Elliptic curves and quadratic recurrence sequences*, Bulletin of the London Mathematical Society, **37** (2005), 161–171.
12. Hone A. N. W. Sigma function solution of the initial value problem for Somos 5 sequences *Trans. Amer. Math. Soc.* , **359** (2007), 5019–5034.

13. Huard J. G., Ou Z. M., Spearman B. K. and Williams K. S. *Elementary evaluation of certain convolution sums involving divisor function*, Number Theory for the Millennium II, edited by M. A. Bennett, B. C. Berndt, N. Boston, H. G. Diamond, A. J. Hildebrand, W. Philipp, A. K. Peters, Natick, Massachusetts (2002), 229–274.

14. Hurwitz A. *Über die Weierstrass'sche σ-Funktion.* In Festschrift für H.A. Schwarz, Berlin, 1914, 133–141. [Ges. Abh. Bd. 3, pp. 722–730]

15. Jacobi C. G. J. *Gesammelte Werke*, Berlin, **1** (1881).

16. Jacobi C. G. J. *Gesammelte Werke*, Berlin, **1** (1881), 49–239.

17. Jacobi C. G. J. *Gesammelte Werke*, Berlin, **1** (1881), 497–538.

18. Jacobi C. G. J. *Gesammelte Werke*, Berlin, **2** (1881), 289–352.

19. Monina M. D. "Three-term Identity for Products of Jacobi Theta Functions of One or Two Variables", *Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory*, **5**: 1–2 (2015), 21–25.

20. Ouspensky J. "Sur les relations entre les nombres des classes des formes quadratiques binaires et positives. Premier Memoire, I", *Известия Академии Наук. VI серия*, **19**: 12–15 (1925), 599–620.

21. Somos M. *Problem 1470*, Crux Mathematicorum 15 (1989), 208.

22. Uspensky J. V., Heaslet M. A. *Elementary Number Theory*, New York and London: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1939.

23. Watson G. N. *Theorems stated by Ramanujan (VII): Theorems on a continued fraction*, J. London Math. Soc., **4** (1929), 39–48.

24. Weber H. M. *Lehrbuch der Algebra*, Braunschweig, **3** (1908).

25. Weierstraß K. *Math. Werke. Bd. 5*, Berlin, 1915.

26. Williams Kenneth S. *Number theory in the spirit of Liouville*, London Mathematical Society Student Texts, 76, Cambridge University Press, 2011.

27. Бударина Н. В., Быковский В. А. "Арифметическая природа тождесв для тройного и пятикратного произведений", *Дальневосточный математический журнал*, **11**: 2 (2011), 140–148.

28. Быковский В. А. *Модули Эйхлера-Шимуры*, Владивосток: Дальнаука, 2001, препринт ДВО РАН, ХО ИПМ Хабаровское отделение Института прикладной математики.

29. Быковский В. А. “Обобщение арифметических тождеств Лиувилля и Скорупы”, *Доклады Академии наук*, **432**: 6 (2010), 736–737.

30. Быковский В. А., Монина М. Д. “Об арифметической природе некоторых тождеств теории эллиптических функций”, *Дальневосточный математический журнал*, **13**: 1 (2013), 15–34.

31. Быковский В. А., Монина М. Д. “Арифметические тождества, ассоциированные с квадратичными формами, и их приложения”, *Доклады Академии наук*, **449**: 5 (2013), 503–506.

32. Венков Б. А. *Элементарная теория чисел*, М. ; Ленинград: ОНТИ НКТП СССР, 1937.

33. Клячко А. А. *Модулярные формы и представления симметрических групп*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **116** (1982), 174–85.

34. Мамфорд Д. *Лекции о тэта-функциях*, Москва: Мир, 1988.

35. Монина М. Д. “Арифметическая интерпретация трёхчленного тождества из теории эллиптических функций”, *Дальневосточный математический журнал*, **14**: 1 (2014), 66–72.

36. Монина М. Д. “Об одном трёхчленном тождестве из теории тэта-функций”, *Дальневосточный математический журнал*, **14**: 2 (2014), 242–247.

37. Монина М. Д. “О целочисленных последовательностях Сомос-8 и Сомос-9”, *Дальневосточный математический журнал*, **15**: 1 (2015), 70–75.

38. Полищук А. Е. *Абелевы многообразия, тэта-функции и преобразование Фурье*, Москва: МЦНМО, 2010.

39. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. *Курс современного анализа*, Москва: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1963.