ИВАНОВ ГРИГОРИЙ МИХАЙЛОВИЧ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ И ИХ СЛАБО ВЫПУКЛЫХ ПОДМНОЖЕСТВ

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
ДИССЕРТАЦИИ НА СОИСКАНИЕ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ
КАНДИДАТА ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

Москва — 2015

Работа выполнена на кафедре высшей математики
Московского физико-технического института
(государственного университета)

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ:

ИВАНОВ Григорий Евгеньевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики ФГАОУ ВПО «Московский физико-технический институт (государственный университет)»

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ:

1. БОРОДИН Пётр Анатольевич – доктор физико-математических наук, доцент кафедры теории функций и функционального анализа механико-математического факультета ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» (специальность – 01.01.01)

2. ТЕРЁХИН Павел Александрович – доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории функций и приближений ФГБОУ ВПО «Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского» (специальность – 01.01.01)

ВЕДУЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ:

ФГБОУ ВПО «Российский университет дружбы народов»

Защита состоится 14 мая 2015 г. в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 002.022.01 при Математическом институте им. В.А. Стеклова по адресу: 119991, Москва. ул. Губкина, д. 8, конференц-зал (9 этаж).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МИАН по адресу: 119991, Москва, ул. Губкина, д. 8 и на сайте http://www.mi.ras.ru/dis/ref15/ivanov/ivanov_dis.pdf

Ученый секретарь диссертационного совета Д 002.022.01
при МИАН, доктор физико-математических наук В.А. Ватутин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Единичная сфера банахова пространства полностью определяет все его свойства, однако, является трудно обозримым объектом. Поэтому многих исследователей привлекал поиск просто вычисляемых и наглядных числовых характеристик сферы, которые, естественно, уже не несут исчерпывающей информации о пространстве, но связаны с отдельными его свойствами. К таким характеристикам относятся в первую очередь модуль выпуклости Кларксона и модуль гладкости Дэя.

Модулем выпуклости нормированного пространства X называется функция $\delta_X : [0, 2] \to \mathbb{R}$, определяемая формулой

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf \left\{ 1 - \frac{\|x+y\|}{2} :\ x, y \in \mathfrak{B}_1(o),\ \|x-y\| \geqslant \varepsilon \right\}.$$

Здесь и далее через $\mathfrak{B}_R(c)$ мы обозначаем замкнутый шар радиуса R с центром в точке c. Через o мы обозначаем нулевой элемент линейного пространства. *Модулем гладкости* нормированного пространства X называется функция $\rho_X : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, определяемая формулой

$$\rho_X(\tau) = \sup \left\{ \frac{\|x+y\| + \|x-y\|}{2} - 1 :\ \|x\| = 1, \|y\| = \tau \right\}.$$

Напомним, что нормированное пространство X называется *равномерно выпуклым*, если $\delta_X(\varepsilon) > 0$ для любого $\varepsilon \in (0, 2]$; нормированное пространство X называется *равномерно гладким*, если $\lim\limits_{\tau \to +0} \frac{\rho_X(\tau)}{\tau} = 0$.

В настоящее время имеется множество различных констант и характеристик банаховых пространств, связанных с их свойствами. Здесь можно упомянуть модули выпуклости Мильмана, модуль невыпуклости Банаша, модули Шмульяна, модуль Бердышева; константы Гротендика, Юнга, фон Неймана; коэффициент Джеймса, коэффициент нормальной структуры и множество других.

Важной характеристикой банахова пространства является отклонение единичной сферы от опорной гиперплоскости. В частности, при исследовании свойств гипомонотонности (монотонности в некотором ослабленном смысле) нормального конуса к единичному шару требуется исследовать асимптотику верхней и нижней оценок указанного отклонения. С этой целью в диссертации вводятся понятия и развивается техника использования модулей опорной выпуклости и опорной гладкости. Выбор названий для этих новых модулей мотивирован тем, что модуль опорной выпуклости (гладкости) эквивалентен в нуле модулю выпуклости (гладкости) банахова пространства.

Начиная с 90-х годов в работах Банаша и его коллег исследуется задача об эквивалентности модуля Банаша и модуля гладкости банахова пространства. При этом был получен ряд оценок на модуль Банаша через модуль гладкости, но эквивалентность не была доказана. Можно отметить, что есть целый ряд модулей, характеризующих гладкость банахова пространства, эквивалентных в нуле модулю гладкости, и аналогичный ряд модулей, эквивалентных в нуле модулю Банаша. Используя введенное понятие модуля опорной выпуклости, в диссертации показывается, что модуль Банаша и модуль гладкости эквивалентны в нуле.

Во второй главе диссертации рассматривается УВО-модуль банахова пространства – величина характеризующая наибольшее возможное уклонение выпуклой оболочки множества из единичного шара от самого множества. Получены оценки сверху на эту величину, а также критерий гильбертовости пространства в терминах УВО-модуля. Приведем необходимые определения.

Уклонением множества $A \subset X$ от множества $B \subset X$ называется величина

$$h^+(A,B) = \sup_{x \in A} \rho(x,B),$$

где $\rho(x,B)$ – расстояние от точки x до множества B. Величина $\alpha(D) = h^+(\operatorname{co} D, D)$ называется *мерой невыпуклости* множества $D \subset X$.

УВО-модулем банахова пространства X называется величина

$$\zeta_X = \sup_{D \subset \mathfrak{B}_1(o)} h^+(\operatorname{co} D, D), \tag{1}$$

где $\mathfrak{B}_1(o)$ – единичный шар в пространстве X.

К настоящему времени получен ряд результатов, в которых мера невыпуклости множества оценивается через его диаметр в различных банаховых пространствах. Многие интересные результаты были получены в работах Н.М. Гулевича, например, следующая точная оценка сверху на меру невыпуклости множества в лебеговых пространствах.

Теорема I. *Для любого ограниченного множества A бесконечномерного пространства $L^p = L^p(\Omega, \mu), 1 \leqslant p \leqslant \infty$, справедливо неравенство*

$$\alpha(A) \leqslant \frac{\operatorname{diam} A}{2^{t_p}}, \quad \textit{где} \quad t_p = \begin{cases} \min\{\frac{1}{p}, 1 - \frac{1}{p}\}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ 0, & p = \infty. \end{cases} \tag{2}$$

При этом оценка (2) является точной.

При решении различных задач слабо выпуклого анализа и нелинейного анализа возникает естественная задача исследования пересечения определенного множества с шаром. В частности, интересен вопрос о мере невыпуклости такого множества. Например, Г.Е. Иванов, фактически исследовав меру невыпуклости слабо выпуклых по Виалю множеств, получил достаточное условие существования непрерывного селектора для отображения со слабо выпуклыми по Виалю значениями (определения различных классов слабо выпуклых множеств будут даны ниже). Этим и вызван интерес к исследованию свойств УВО-модуля в банаховых пространствах.

В первом параграфе второй главы получен ряд оценок сверху на УВО-модуль в различных пространствах. В том числе получены оценки УВО-модулей лебеговых пространств более точные, чем оценка (2). Кроме того, получена точная оценка сверху УВО-модуля конечномерного нормированного пространства в зависимости от его размерности.

Во втором параграфе второй главы получены критерии гильбертовости банахова пространства в терминах УВО-модуля. В настоящий момент известны десятки критериев гильбертовости банахова пространства[1]. Они дают различные характеристики эллипсоидов в классе всех выпуклых замкнутых центрально-симметричных поверхностей в многомерных пространствах.

При доказательстве результатов этого параграфа существенно используются следующие классические результаты Фреше и Бляшке-Какутани соответственно.

Теорема II. *Банахово пространство размерности не меньше трех является гильбертовым тогда и только тогда, когда каждое его трехмерное подпространство гильбертово.*

Теорема III. *Трехмерное пространство X является гильбертовым тогда и только тогда, когда для каждого его двумерного подпространства существует линейный оператор единичной нормы, проектирующий X на это подпространство.*

При вычислениях часто приближают выпуклое множество с помощью суммы Минковского некоторого сеточного множества и шара необходимого радиуса, причем полученная сумма должна покрывать исходное множество. Для корректной работы некоторых алгоритмов важно, чтобы полученное таким образом приближение было односвязным или

[1] Бородин П. А., Тихомиров В. М. Критерии гильбертовости банахова пространства, связанные с теорией приближений // Матем. просв. 1999. Т. 3 С. 189–207.

стягиваемым[2].

В диссертации доказывается аналог теоремы III, показывающий, что при описанном выше приближении выпуклого множества в произвольном трехмерном нормированном пространстве гарантировать стягиваемость этого приближения можно только в евклидовом случае (конечно, если не налагать дополнительных ограничений на выбор сеточного множества и радиус шара).

В связи с этим результатом стоит отметить, что возникает круг задач о характеризации «плотности» упаковки шаров, гарантирующей стягиваемость их объединения в различных нормированных пространствах.

Перейдем к вопросу об актуальности третьей главы диссертации. В работах Е.С. Половинкина первоначально доказана нижеследующая *теорема об усреднении* для множеств из пространства $\mathbb{R}^n$, и показано, что из нее можно получить необходимые и достаточные условия существования интеграла Римана от невыпуклозначного многозначного отображения отрезка в конечномерное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, а также выпуклость значения этого интеграла.

Пусть $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность замкнутых множеств из банахова пространства X, содержащихся в некотором ограниченном подмножестве пространства X. Совокупность всех точек $x \in X$, для каждой из которых найдется последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $x_k \in A_k$ такая, что $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$, называется *нижним пределом* последовательности $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ и обозначается $\liminf\limits_{k\to\infty} A_k$.

Теорема IV (Об усреднении)**.** *Пусть $A_k^p, k \in \mathbb{N}, p \in \overline{1,k}$ – двухпараметрическое семейство замкнутых множеств, лежащих в ограниченном множестве G из евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Определим последовательность множеств $D_k \doteq \frac{1}{k}\sum\limits_{p=1}^{k} A_k^p$ (сумма множеств понимается в смысле Г. Минковского). Тогда предельное множество $\liminf\limits_{k\to\infty} D_k$ является замкнутым выпуклым множеством.*

Позже Е.С. Половинкиным было доказано, что теорема об усреднении справедлива для множеств из гильбертова пространства, но этот результат не был опубликован. В первом параграфе третьей главы диссертации доказывается, что теорема об усреднении верна в суперрефлексивных пространствах.

[2] Двуреченский П. Е., Иванов Г. Е. Алгоритмы вычисления операторов Минковского и их применение в дифференциальных играх // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54:2. С. 224–255.

Важную роль в геометрии банаховых пространств играет исследование свойств опорного отображения единичной сферы, т.е. отображения, сопоставляющего единичному вектору все единичные функционалы, достигающие своей нормы на этом векторе. Изучению различных свойств непрерывности опорного отображения посвящены работы В.Л. Шмульяна, М.И. Кадеца, Е. Асплунда и других авторов. Основным результатом второго параграфа третей главы является критерий ε-полунепрерывности опорного отображения в рефлексивных пространствах. Напомним, что многозначное отображение $F : X \to 2^Y$ называется *ε-полунепрерывным сверху* в точке $x_0 \in X$, если

$$\forall \gamma > 0 \; \exists \; \delta > 0 : \; \forall x \in \mathfrak{B}_\delta(x_0) \quad F(x) \subset F(x_0) + \mathfrak{B}_\gamma(o).$$

Разнообразие приложений выпуклого анализа привело к обобщению понятия выпуклости. Весьма эффективными оказались классы параметрически выпуклых множеств, т.е. классы, характеризующиеся некоторым параметром, определяющим, насколько множество слабо или сильно выпукло. Так, Ж.-Ф. Виаль заменил в определении выпуклого множества отрезок на сильно выпуклый отрезок с константой R, где под сильно выпуклым отрезком с константой R понимается пересечение всех замкнутых шаров радиуса R, содержащих две данные точки – концы сильно выпуклого отрезка. Множество называется *слабо выпуклым по Виалю с константой* R, если для любых двух точек из множества, находящихся на расстоянии не более $2R$ друг от друга, сильно выпуклый отрезок с константой R и концами в этих точках имеет со множеством общую точку, отличную от двух точек, выбранных в качестве концов. Похожее определение слабо выпуклых множеств давалось Г.Ю. Решетняком для множеств с C^2-гладкой границей из $\mathbb{R}^n$. Н.В. Ефимовым и С.Б. Стечкиным рассматривался достаточно близкий к слабо выпуклым по Виалю класс a-выпуклых множеств.

Исследованию свойств слабо выпуклых в смысле Виаля множеств в гильбертовом пространстве посвящена монография Г.Е. Иванова[3]. В частности, в ней получена связь гладкости границы выпуклого множества с его слабой выпуклостью, что позволяет исследовать гладкие объекты методами слабо выпуклого анализа. Кроме того, на основе свойств слабо выпуклых множеств Г.Е. Ивановым получены достаточные условия существования седловой точки в некотором классе линейных дифференциальных игр.

В настоящий момент известно множество эквивалентных определений слабо выпуклых множеств в гильбертовом пространстве, удобных в различных прикладных задачах.

[3] Иванов Г. Е. Слабо выпуклые множества и функции: теория и приложения. Физматлит, 2006. С. 352.

Отметим лишь определение *проксимально гладкого множества с константой* R, данное в работах Ф. Кларка и Р.Т. Рокафеллара для случая гильбертова пространства. Проксимально гладким множеством с константой R называется такое множество, что функция расстояния до него непрерывно дифференцируема в открытой R-окрестности этого множества. Было показано, что в гильбертовом пространстве классы слабо выпуклых по Виалю множеств и проксимально гладких множеств с константой R совпадают. С использованием проксимально гладких множеств был получен ряд новых и важных результатов в оптимизации и в вариационном исчислении.

В последние десятилетия интенсивно исследуются различные классы слабо выпуклых множеств в банаховых пространствах, как правило равномерно выпуклых и равномерно гладких. В исследованиях этого направления возникают новые проблемы, которые условно можно разбить на две группы. Первый ряд проблем связан с тем, что при обобщении на банаховы пространства различных определений слабо выпуклых множеств, эквивалентных в гильбертовом пространстве, вообще говоря, получаются не равные классы множеств. Естественным образом возникают вопросы о взаимосвязи тех или иных определений в произвольном банаховом пространстве, а также достаточных условий на банахово пространство для их совпадения. Исследования взаимосвязи различных описаний слабо выпуклых множеств можно найти в работах Г.Е. Иванова, М.В. Балашова, Л. Тибо, П. Воленски и др. Второй ряд вопросов связан с обобщениями (необходимыми в приложениях) метрических соотношений и различных свойств слабо выпуклых множеств на случай банаховых пространств. В четвертой главе представлены результаты, касающиеся обоих, упомянутых выше, направлений исследований.

Очень важной для приложений оказалась характеризация в гильбертовом пространстве слабо выпуклых по Виалю множеств через свойства монотонности нормального конуса. Так, теорему 1.9.1 монографии Г.Е. Иванова можно переформулировать следующим образом:

Теорема V. *Пусть A – замкнутое множество в гильбертовом пространстве H. Пусть $R > 0$. Следующие условия эквивалентны:*

1. *множество A слабо выпукло по Виалю с константой $R > 0$;*

2. *для любых векторов $x_1, x_2 \in A$, $p_1 \in N(x_1, A)$, $p_2 \in N(x_2, A)$ таких, что*

$\|p_1\| = \|p_2\| = 1$, *выполняется неравенство*

$$\langle p_2 - p_1, x_2 - x_1 \rangle \geqslant -\frac{\|x_2 - x_1\|^2}{R}. \tag{3}$$

Здесь $N(x, A)$ – нормальный конус Фреше к множеству A в точке x (определение приведено ниже).

Эквивалентные в гильбертовом пространстве свойства нормального конуса исследовались и до этого в работах Ф. Кларка, Р. Рокафеллара и других авторов. Стоит отметить, что выполнение неравенства (3) для проксимально гладких множеств в гильбертовом пространстве (а значит и для слабо выпуклых по Виалю) было толчком к построению проксимального субградиента, который является существенной конструкцией в оптимизации на сегодняшний день.

В дальнейшем, естественно, производились попытки обобщения этого результата на случай банаховых пространств. Здесь стоит выделить работы Л. Тибо и его коллег. В этих работах, как правило, рассматриваются другие подходы к определению нормального конуса, затем доказывается совпадение различных нормальных конусов для проксимально гладких множеств в специальных банаховых пространствах (как правило, равномерно выпуклых и равномерно гладких). Пожалуй, самые сильные результаты в этом направлении можно сформулировать в виде следующих двух теорем.

Будем говорить, что две неотрицательные функции f_1, f_2 *эквивалентны в нуле,* если существуют $\varepsilon_0 > 0$ и константы c_1, c_2 такие, что $0 < c_1 < c_2$ и $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ справедливы неравенства $c_1 f_1(c_1\varepsilon) \leqslant f_2(\varepsilon) \leqslant c_2 f_1(c_2\varepsilon)$. Эквивалентность в нуле функций f_1, f_2 будем обозначать, как $f_1(x) \asymp f_2(x)$ при $x \to 0$.

Теорема VI. *Пусть X – равномерно выпуклое и равномерно гладкое банахово пространство. Пусть $\rho_X(\tau) \asymp \tau^2$ при $\tau \to 0$. Тогда проксимально гладкое с константой $r > 0$ множество $A \subset X$ удовлетворяет условию 2) теоремы V для некоторой константы $R > 0$.*

Теорема VII. *Пусть в банаховом пространстве X модули выпуклости и гладкости имеют степенной порядок в нуле. Пусть $\delta_X(\varepsilon) \asymp \varepsilon^2$ при $\varepsilon \to 0$. Тогда если множество A удовлетворяет условию 2) теоремы V, то оно является проксимально гладким с некоторой константой $r > 0$.*

Цель работы:

– исследование количественных характеристик единичного шара банахова пространства, связанных с понятиями выпуклости и гладкости;

– получение критериев гильбертовости банахова пространства в терминах введенных характеристик единичного шара, а также свойства стягиваемости набора шаров;

– изучение взаимосвязи и свойств различных классов слабо выпуклых множеств в банаховых пространствах.

Методы исследования. В работе используются различные методы функционального анализа, геометрии банаховых пространств и топологии.

Научная новизна. Все результаты работы являются новыми. В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Введены понятия модулей опорной выпуклости и гладкости банахова пространства. Исследованы их основные свойства, доказана их эквивалентность в нуле модулю выпуклости и гладкости соответственно. Доказана эквивалентность в нуле модуля Банаша и модуля гладкости пространства.

2. Произведены оценки УВО-модуля пространства, характеризующего максимальную меру невыпуклости множества из единичного шара. Получены точные оценки УВО-модуля конечномерного нормированного пространства в зависимости от размерности пространства.

3. Получен критерий гильбертовости пространства в терминах УВО-модуля. Показано, что трехмерное банахово пространство является евклидовым тогда и только тогда, когда в нем всякий набор шаров одинакового радиуса, покрывающий выпуклую оболочку своих центров, является стягиваемым.

4. Доказана теорема об усреднении множеств для случая суперрефлексивных пространств.

5. Исследованы взаимосвязи различных классов слабо выпуклых множеств в банаховых пространствах.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в геометрии банаховых пространств, теории экстремальных задач, теории дифференциальных включений и нелинейном анализе.

Достоверность результатов. Обоснованность и достоверность результатов и выводов подтверждена:
– обсуждением результатов исследования на российских и международных научных конференциях;
– обсуждением результатов исследования на различных научных семинарах;
– публикациями результатов исследования в рецензируемых научных изданиях, в том числе рекомендованных ВАК РФ.

Апробация работы. Результаты, изложенные в диссертации, в разное время докладывались и обсуждались на

- 54-й научной конференции МФТИ - Всероссийской научной конференции «Современные проблемы фундаментальных и прикладных, естественных и технических наук в современном информационном обществе», Москва – Долгопрудный, 2011.
- 56-й научной конференции МФТИ - Всероссийской научной конференции «Современные проблемы фундаментальных и прикладных, естественных и технических наук в современном информационном обществе», Москва – Долгопрудный, 2013.
- научных семинарах кафедры высшей математики МФТИ, Москва – Долгопрудный, 2010 – 2014.
- научном семинаре «Теория функций» кафедры общих проблем управления механико-математического факультета МГУ, Москва, 2014.
- научном семинаре по теории функций многих действительных переменных и ее приложениям к задачам математической физики в математическом институте им. В.А. Стеклова, Москва, 2014.
- научно-реферативном семинаре «Функциональный анализ» на кафедре математического анализа и теории функции РУДН, Москва, 2014.
- научном семинаре «Геометрическая теория приближений» кафедры теории функций и функционального анализа механико-математического факультета МГУ, Москва, 2014.

- IV Международной школе-семинаре «Нелинейный анализ и экстремальные задачи», Иркутск, 2014.

- Школе-конференции С.Б.Стечкина по теории функций и теории аппроксимаций и их приложениям, Миасс, 2014.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 8 работ, в том числе три [1,2,3] – в изданиях из списка, рекомендованного ВАК РФ. Основные результаты диссертации отражают личный вклад соискателя в опубликованные по теме диссертации работы с соавторами.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы. Общий объем диссертации составляет 97 страниц. Список литературы содержит 68 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первых трех параграфах **первой главы** вводятся основные определения и доказываются технические результаты, касающиеся свойств единичного шара в банаховом пространстве и, в частности, некоторые соотношения для модулей выпуклости и гладкости банахова пространства. Определения и результаты этих параграфов используются при доказательстве основных результатов работы.

В **четвертом параграфе первой главы** даются определения и исследуются свойства модулей опорной выпуклости и опорной гладкости пространства. Дадим необходимые определения. Будем говорить, что вектор $y \in X$ *квазиперпендикулярен* вектору $x \in X \backslash \{o\}$ и писать $y \urcorner x$, если существует ненулевой функционал p, достигающий своей нормы на x, такой, что $\langle p, y \rangle = 0$. Пусть $x, y \in \partial \mathfrak{B}_1(o)$ такие, что $y \urcorner x$. Для любого $r \in [0,1]$ положим $\lambda_X(x,y,r) = \min\{\lambda \in \mathbb{R} : \|x + ry - \lambda x\| = 1\}$. Для выяснения геометрического смысла величины $\lambda_X(x,y,r)$ из точки $a = x + ry$, лежащей в опорной гиперплоскости к единичному шару в точке x, проведем луч ℓ в направлении вектора $(-x)$. При $r \in [0,1]$ этот луч будет пересекаться с единичной сферой. Расстояние от точки a до ближайшей к a точки пересечения луча ℓ с единичной сферой равно $\lambda_X(x,y,r)$.

Назовем *модулями опорной выпуклости и опорной гладкости* функции $\lambda_X^-(\cdot)\,, \lambda_X^+(\cdot) : [0,1] \to \mathbb{R}$, задаваемые соотношениями

$$\lambda_X^-(r) = \inf \lambda_X(x,y,t); \quad \lambda_X^+(r) = \sup \lambda_X(x,y,t),$$

где супремум (инфимум) берется по всем наборам (x, y, t) таким, что $\|x\| = \|y\| = 1$, $y \urcorner x$, $0 \leqslant t \leqslant r$.

В работе доказываются следующие утверждения, показывающие, что в произвольном пространстве модуль опорной выпуклости эквивалентен в нуле модулю выпуклости, а модуль опорной гладкости – модулю гладкости. Эти результаты характеризуют отклонение единичного шара в банаховом пространстве от опорной гиперплоскости и дают точные оценки асимптотики этого отклонения.

Лемма 1. *Для любого банахова пространства X модуль опорной выпуклости эквивалентен модулю выпуклости $\delta_X(\cdot)$ в нуле. Для любого $r \in [0;1]$ верны следующие неравенства:*

$$\delta_X(r) \leqslant \lambda_X^-(r) \leqslant \delta_X(2r)\,.$$

Лемма 2. *Для любого банахова пространства X модуль опорной гладкости эквивалентен модулю гладкости $\rho_X(\cdot)$ в нуле. Для любого $r \in [0, \frac{1}{2}]$ справедливы неравенства*

$$\rho_X\left(\frac{r}{2}\right) \leqslant \lambda_X^+(r) \leqslant \rho_X(2r)\,.$$

На данный момент существует множество различных модулей и характеристик банаховых пространств, возникающих в различных задачах. Естественным образом возникают вопросы об их взаимосвязи. Так, например, долго стоял вопрос об эквивалентности модуля гладкости и модуля Банаша:

$$\delta_X^+(\varepsilon) = \sup\left\{1 - \frac{\|x+y\|}{2} :\ x, y \in \mathfrak{B}_1(o),\ \|x-y\| \leqslant \varepsilon\right\}, \quad \varepsilon \in [0, 2].$$

При этом оценки сверху на модуль Банаша через модуль гладкости пространства были получены, а снизу были произведены лишь оценки через модуль выпуклости пространства. В работе доказана эквивалентность модуля опорной гладкости и модуля Банаша, тем самым получены соотношения между модулем Банаша и модулем гладкости.

Лемма 3. *Для любого банахова пространства X модуль опорной гладкости эквивалентен модулю Банаша $\delta_X^+(\cdot)$ в нуле. Справедливы следующие неравенства:*

$$\delta_X^+(2r) \leqslant \lambda_X^+(r) \qquad \forall r \in [0, 1]\,;$$

$$\lambda_X^+(r) \leqslant 2\delta_X^+(3r) \qquad \forall r \in \left[0, \frac{2}{3}\right].$$

Из леммы 2 и леммы 3 получаем справедливость следующего утверждения.

Следствие 1. *Модуль Банаша и модуль гладкости эквивалентны для произвольного банахова пространства X. Причем, для любого $r \in [0, \frac{1}{2}]$ справедливы неравенства*

$$\frac{1}{2}\rho_X\left(\frac{r}{6}\right) \leqslant \delta_X^+(r) \leqslant \rho_X(r)\,.$$

Из полученных в этом параграфе различных оценок на модули опорной гладкости и выпуклости и свойств модуля выпуклости и модуля Банаша, получена следующая теорема типа Дея-Нордлендера для модулей $\lambda_X^-(\cdot)$ и $\lambda_X^+(\cdot)$.

Теорема 1. *Для любого банахова пространства X выполнены соотношения*

$$\lambda_X^-(r) \leqslant \lambda_H^-(r) = 1 - \sqrt{1 - r^2} = \lambda_H^+(r) \leqslant \lambda_X^+(r) \qquad \forall r \in [0, 1].$$

При этом если хотя бы одно из неравенств обращается в равенство, то пространство X гильбертово.

Во **второй главе** исследуются свойства УВО-модуля банаховых пространств (см. (1)).

В **первом параграфе** второй главы доказываются оценки сверху на УВО-модуль в различных пространствах. Получена следующая точная оценка сверху на УВО-модуль в конечномерных нормированных пространствах в зависимости от размерности пространства.

Теорема 2. *Пусть X_n – линейное нормированное пространство размерности $n \geqslant 2$. Тогда $\zeta_{X_n} \leqslant 2^{\frac{n-1}{n}}$. Причем равенство достигается при $X_n = \ell_1^n = \ell_\infty^n$.*

В диссертации показано, что в произвольном гильбертовом пространстве УВО-модуль имеет наименьшее возможное значение, равное 1.

Используя результаты из работ В.И. Иванова и С.А. Пичугова по оценке константы Юнга в лебеговых пространствах, были получены оценки сверху на УВО-модуль в этих пространствах.

Теорема 3. *Для УВО-модуля пространства $L_p(\Omega, \mu), 1 \leqslant p \leqslant +\infty$ верна следующая оценка*

$$\zeta_{L_p(\Omega,\mu)} \leqslant 2^{\left|\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right|}, \quad \text{где } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{4}$$

В случае $p \in \{1,\ 2,\ \infty\}$ неравенство (4) обращается в равенство.

Оценка (4) точнее оценки, получаемой при подстановке диаметра шара в формулу Н. М. Гулевича (2).

Во **втором параграфе** второй главы доказывается следующий критерий гильбертовости банахова пространства в терминах УВО-модуля.

Теорема 4. *Для банахова пространства X равенство $\zeta_X = 1$ выполняется тогда и только тогда, когда пространство X гильбертово или* $\dim X = 2$.

Теорема 4 есть аналог теоремы Фреше (теоремы II, приведенной выше). Доказательство после применения нескольких простых технических лемм близко к доказательству критерия гильбертовости В.И. Гаркави[4].

При доказательстве теоремы 4 использовалась топологическая тривиальность объединения некоторых наборов шаров в банаховом пространстве. При исследовании топологических свойств объединения шаров автором была получена характеризация трехмерных эллипсоидов через свойства покрытия выпуклых множеств шарами равного радиуса. Дадим необходимые определения.

Будем говорить, что *набор шаров допустимый*, если шаров конечное число, они одинакового радиуса и покрывают выпуклую оболочку своих центров. Напомним, что *стягиваемым* называется множество, гомотопически эквивалентное точке. Мы будем говорить, что набор шаров стягиваем, когда их объединение стягиваемо.

Теорема 5. *Трехмерное банахово пространство евклидово тогда и только тогда, когда всякий допустимый набор шаров в нем стягиваем.*

В связи с теоремой 5 встает ряд вопросов о свойствах допустимых наборов шаров в различных пространствах, интересных для приложений. Например, каково минимальное количество шаров в допустимом нестягиваемом наборе в данном пространстве. Из результатов второй главы следует, что таких шаров должно быть как минимум 4. В конце главы строится пример допустимого набора из 4 шаров в пространстве ℓ_1^3, не являющегося стягиваемым.

Третья глава диссертации посвящена исследованию двух избранных свойств банаховых пространств. Так, в **первом параграфе** теорема об усреднении множеств обобщается на случай суперрефлексивных банаховых пространств. Чтобы не вводить дополнительных определений, мы будем говорить, что банахово пространство X *суперрефлексивно*, если

[4] Гаркави А. Л. О чебышевском центре и выпуклой оболочке множества // УМН. Т. 1964. С. 139–145.

оно имеет эквивалентную равномерно гладкую норму. Согласно работе П. Энфло[5], это определение эквивалентно общепринятому, нам оно необходимо лишь для обозначения соответствующего класса пространств.

Теорема 6. *Пусть* $A_k^p, k \in \mathbb{N}, p \in \overline{1,k}$ *– двухпараметрическое семейство замкнутых множеств, лежащих в ограниченном множестве* G *в суперрефлексивном банаховом пространстве* X*. Пусть* $D_k \doteq \frac{1}{k}\sum\limits_{p=1}^{k} A_k^p$*. Тогда множество* $D \doteq \liminf\limits_{k\to\infty} D_k$ *является замкнутым выпуклым множеством.*

С помощью этого результата Е.С. Половинкиным были получены необходимые и достаточные условия на интегрируемость по Риману многозначного отображения из отрезка в равномерно гладкое банахово пространство и выпуклозначность этого интеграла[6].

Во втором параграфе третьей главы исследуется опорное отображение единичной сферы. Будем говорить, что функционал $p \in X^*$ является *двойственным* вектору $x \in X$, а вектор x будем называть двойственным функционалу p, если $\langle p, x\rangle = \|p\|\cdot\|x\|$. Множество всех функционалов, двойственных вектору x, будем обозначать через $J(x)$. Обозначим $J_1(x) = J(x)\cap\partial\mathfrak{B}_1^*(o)$, отображение J_1 часто называют опорным отображением единичной сферы.

Введем функцию $\Psi : X\times X \to \mathbb{R}$, характеризующую *раствор* между конусами $J(x)$ и $J(y)$ двойственных функционалов к векторам $x, y \in X$:

$$\Psi(x,y) = \inf_{p_x\in J_1(x),\ p_y\in J_1(y)} \|p_x - p_y\|, \quad x, y \in X.$$

Определим функцию $\Upsilon :\ \partial\mathfrak{B}_1(o)\times[0,+\infty) \to [0,+\infty)$ по следующей формуле:

$$\Upsilon(x,\varepsilon) = \sup_{y\in\mathfrak{B}_\varepsilon(x)} \Psi(x,y), \quad x \in \partial\mathfrak{B}_1(o),\ \varepsilon \geqslant 0.$$

Основным результатом второго параграфа третьей главы является следующий критерий ε-полунепрерывности опорного отображения единичной сферы в рефлексивном банаховом пространстве.

Теорема 7. *Пусть* X *– рефлексивное банахово пространство,* $x_0 \in \partial\mathfrak{B}_1(o)$*. Тогда следующие условия эквивалентны:*

[5] Enflo P. Banach spaces which can be given an equivalent uniformly convex norm // Isr. J. Math. 1972. Vol. 13. P. 281–288.

[6] Половинкин Е. С. Интегрирование по Риману многозначных отображений // Труды МФТИ. 2011. Т. 3, № 1(9). С. 117–126.

1) *опорное отображение* J_1 *является* ε*-полунепрерывным сверху в точке* x_0*;*

2) $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \Upsilon(x_0,\varepsilon) = 0.$

Четвертая глава диссертации посвящена слабо выпуклым множествам и их свойствам. В **первом параграфе** этой главы даются основные определения.

Обозначим $U(R,A) = \{x \in X : 0 < \rho(x,A) < R\}$, через $P_A(x)$ обозначим метрическую проекцию x на множество A.

Будем говорить, что множество $A \subset X$ удовлетворяет *P-опорному условию слабой выпуклости с константой* $R > 0$, если из того, что $x \in U(R,A)$ и $a \in P_A(x)$, следует, что

$$A \cap \operatorname{int} \mathfrak{B}_R \left(a + \frac{R}{\|x-a\|}(x-a) \right) = \emptyset.$$

Через $\Omega_P(R)$ будем обозначать класс всех замкнутых множеств $A \subset X$, удовлетворяющих P-опорному условию слабой выпуклости с константой R.

Нормальным конусом (Фреше) к множеству $A \subset X$ в точке $a_0 \in A$ называется множество

$$N(a_0,A) = \Big\{ p \in X^* : \forall \varepsilon > 0 \; \exists\, \delta > 0 : \\ \forall a \in A \cap \mathfrak{B}_\delta(a_0) \quad \langle p, a-a_0 \rangle \leqslant \varepsilon \, \|a-a_0\| \Big\}.$$

Будем говорить, что множество $A \subset X$ удовлетворяет *N-опорному условию слабой выпуклости* с константой $R > 0$, если из того, что $p \in N(a,A) \cap \partial\mathfrak{B}_1^*(o)$, u – единичный вектор, двойственный функционалу p, следует, что

$$A \cap \operatorname{int} \mathfrak{B}_R\,(a + Ru) = \emptyset.$$

Через $\Omega_N(R)$ будем обозначать класс всех замкнутых множеств $A \subset X$, удовлетворяющих N-опорному условию слабой выпуклости с константой R.

Второй параграф четвертой главы посвящен взаимосвязи классов $\Omega_N(R), \Omega_P(R)$. Получены следующие результаты.

Лемма 4. *Пусть X – банахово пространство с дифференцируемой по Фреше нормой, $R > 0$. Тогда $\Omega_N(R) \subset \Omega_P(R)$.*

Лемма 5. *Пусть X – локально равномерно выпуклое банахово пространство, $R > 0$. Тогда $\Omega_P(R) \subset \Omega_N(R)$.*

В **третьем параграфе** четвертой главы приводится доказательство следующей теоремы.

Теорема 8. *Пусть X – равномерно выпуклое банахово пространство и его опорное отображение ε-полунепрерывно сверху. Пусть множество $A \subset X$ замкнуто и слабо выпукло по Виалю с константой $R > 0$. Тогда множество A удовлетворяет P-опорному условию слабой выпуклости с константой R.*

Теорема 8 является обобщением результата М.В. Балашова и Г.Е. Иванова, которые доказали аналогичное утверждение в случае равномерно выпуклого и равномерно гладкого пространства X. Остается открытым вопрос, справедлива ли эта теорема, если требовать только равномерную выпуклость банахова пространства X.

Основным результатом **четвертого параграфа** четвертой главы является следующая теорема.

Теорема 9. *Пусть X – рефлексивное банахово пространство, $R > 0$, $A \in \Omega_N(R)$, $a_0 \in A$, $p \in N(a_0, A) \cap \partial\mathfrak{B}_1^*(o)$, $\delta > 0$, $\varepsilon = \frac{2R}{\delta}\rho_X\left(\frac{\delta}{R}\right)$. Тогда*

$$\langle p, a - a_0 \rangle \leqslant \varepsilon \, \|a - a_0\| \quad \forall a \in A \cap \mathfrak{B}_\delta(a_0).$$

Элементарная в своем доказательстве теорема 9 является основным шагом для доказательства многих дальнейших результатов диссертации. Фактически, в ней дается оценка на «уклонение» единичного шара от опорной гиперплоскости, простота возникающей геометрической картины и была мотивацией для введения модулей опорной выпуклости и опорной гладкости, рассмотренных в главе 1 диссертации.

В частности, прямым следствием теоремы 9 является следующая лемма, в которой дается оценка на расстояние от точки до слабо выпуклого множества.

Лемма 6. *Пусть X – равномерно выпуклое банахово пространство с дифференцируемой по Фреше нормой, $R > 0$, $A \in \Omega_P(R)$. Пусть $x_0, x_1 \in A$ и $\lambda \in [0, 1]$. Тогда справедлива следующая оценка расстояния от точки $x_\lambda = (1 - \lambda)x_0 + \lambda x_1$ до множества A:*

$$\varrho(x_\lambda, A) \leqslant 8R\lambda(1 - \lambda)\rho_X\left(\frac{\|x_1 - x_0\|}{R}\right).$$

Используя результаты четвертого параграфа, в **пятом параграфе** четвертой главы доказывается регулярность в смысле касательных конусов множеств, удовлетворяющих P-опорному условию слабой выпуклости.

Теорема 10. *Пусть X – равномерно выпуклое и равномерно гладкое банахово пространство, множество $A \subset X$ замкнуто и удовлетворяет P-опорному условию слабой выпуклости с некоторой константой $R > 0$. Тогда множество A регулярно в любой точке $x_0 \in A$.*

Множество A называется *регулярным* в точке $x_0 \in A$, если в точке x_0 совпадают касательный конус Булигана (контингентный конус) и касательный конус Кларка ко множеству A.

В **шестом параграфе** четвертой главы, используя понятие УВО-модуля, доказывается следующая теорема.

Теорема 11. *Пусть замкнутое множество $A \in \Omega_P(R)$ из равномерно выпуклого и равномерно гладкого банахова пространства X содержится в шаре радиуса $r < \frac{R}{\zeta_X}$, где ζ_X – УВО-модуль пространства X. Тогда A стягиваемо.*

Теорема 11 усиливает аналогичный результат Г.Е. Иванова для гильбертовых пространств.

Седьмой параграф четвертой главы посвящен исследованию свойств гипомонотонности нормального конуса для слабо выпуклых множеств.

Класс выпуклых и липшицевых функций $\psi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ и таких, что $\psi(0) = 0$, обозначим через $\mathfrak{M}$.

Будем говорить, что функция $N : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ такая, что $N(0) = 0$, удовлетворяет *условию Фигеля*, если существует константа K такая, что функция $N(\cdot)$ в некотором интервале $(0,\varepsilon)$ удовлетворяет условию $\frac{N(s)}{s^2} \leqslant K\frac{N(t)}{t^2}$ для произвольных $0 < t \leqslant s < \varepsilon$. Через $\mathfrak{M}_2$ обозначим класс функций из $\mathfrak{M}$, удовлетворяющих условию Фигеля.

Пусть задана функция $\psi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$. Будем говорить, что множество $A \subset X$ удовлетворяет условию *ψ-гипомонотонности с константой* $R > 0$, если для некоторого $\varepsilon > 0$ и для произвольных

$$x_1, x_2 \in A,\ p_1 \in N(x_1,\, A),\ p_2 \in N(x_2,\, A),\ \|p_1\| = \|p_2\| = 1$$

таких, что $\|x_1 - x_2\| \leqslant \varepsilon$ справедливо неравенство

$$\langle p_2 - p_1, x_2 - x_1\rangle \geqslant -R\psi\left(\frac{\|x_2 - x_1\|}{R}\right).$$

Через $\Omega_N^{\psi}(R)$ будем обозначать класс всех замкнутых множеств $A \subset X$, удовлетворяющих условию ψ-гипомонотонности с константой $R > 0$.

Следующие три теоремы усиливают теоремы V-VII и дают достаточное полное описание взаимосвязи классов $\Omega_N(R)$ и $\Omega_N^{\psi}(R)$.

Теорема 12. *В равномерно гладком и равномерно выпуклом банаховом пространстве* X *для функции* $\psi \in \mathfrak{M}$ *следующие условия эквивалентны:*

1. *существует константа* $k_1 > 0$ *такая, что* $\Omega_N(R) \subset \Omega_N^{k_1\psi}(R)$ *для любого* $R > 0$;
2. $\rho_X(\tau) = \mathrm{O}(\psi(\tau))$ *при* $\tau \to 0$.

Теорема 13. *В равномерно гладком и равномерно выпуклом банаховом пространстве* X *для функции* $\psi \in \mathfrak{M}_2$ *следующие условия эквивалентны*

1. *существует константа* $k_2 > 0$ *такая, что* $\Omega_N^{k_2\psi}(R) \subset \Omega_N(R)$ *для любого* $R > 0$;
2. $\psi(\varepsilon) = \mathrm{O}(\delta_X(\varepsilon))$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Теорема 14. *Если в банаховом пространстве* X *для некоторой функции* $\psi \in \mathfrak{M}$ *существуют константы* $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ *такие, что справедливы вложения классов* $\Omega_N^{k_1\psi}(R) \subset \Omega_N(R) \subset \Omega_N^{k_2\psi}(R)$, *то* $\delta_X(\varepsilon) \asymp \rho_X(\varepsilon) \asymp \varepsilon^2$, *а значит пространство* X *изоморфно гильбертову.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации введены понятия модулей опорной выпуклости и гладкости банахова пространства. Исследованы их основные свойства, доказана их эквивалентность в нуле модулю выпуклости и гладкости соответственно. Получена теорема типа Дея-Нордлендера для этих модулей. Положительно решена проблема об эквивалентности в нуле модуля Банаша и модуля гладкости пространства.

Произведены оценки УВО-модуля пространства, характеризующего максимальную меру невыпуклости множества из единичного шара. Получены точные оценки УВО-модуля конечномерного нормированного пространства в зависимости от размерности пространства. Получен критерий гильбертовости пространства в терминах УВО-модуля. Показано, что трехмерное банахово пространство является евклидовым тогда и только тогда, когда в нем всякий набор шаров одинакового радиуса, покрывающий выпуклую оболочку своих центров, является стягиваемым.

Доказана теорема об усреднении множеств для случая суперрефлексивных пространств. Получен критерий ε-полунепрерывности сверху опорного отображения единичной сферы.

Исследованные свойства банаховых пространств применяются для изучения различных классов слабо выпуклых множеств. Доказано совпадение классов $\Omega_N(R), \Omega_P(R)$ в случае равномерно выпуклых пространств. Приведена асимптотически точная оценка модуля невыпуклости множеств, удовлетворяющих P-опорному условию слабой выпуклости с константой R. Показана регулярность слабо выпуклых множеств в равномерно гладких и равномерно выпуклых банаховых пространствах. Доказана стягиваемость проксимально гладких множеств, содержащихся в шаре радиуса $\frac{R}{\zeta}$, где ζ – УВО-модуль банахова пространства. Исследована взаимосвязь свойств ψ-гиппомонотонности нормального конуса и проксимальной гладкости множества. Получены неулучшаемые результаты в этом направлении.

Сказанное выше дает основание утверждать, что предложенные в работе новые характеристики банаховых пространств такие, как модули опорной выпуклости и опорной гладкости, а также УВО-модуль, являются эффективным инструментом исследования банаховых пространств, позволившим получить новые важные результаты и ответить на насущные открытые вопросы геометрии банаховых пространств.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. *Иванов Г.Е., Иванов Г.М.* Взаимосвязь опорных условий слабой выпуклости для множеств в банаховых пространствах // Труды МФТИ. – 2011. – Т.3, №1. – С. 70-73.

2. *Иванов Г.М., Половинкин Е.С.* Одно обобщение теоремы об усреднении множеств // Математические заметки. –2012. – Т. 92, №3, – С. 410-416.

3. *Иванов Г.М.* Уклонение выпуклой оболочки ограниченных множеств // Труды МФТИ. – 2012. – Т.4, №4. – С. 105-112.

4. *Иванов Г.М.* О полунепрерывности сверху опорного отображения / Фундаментальные и прикладные проблемы современной математики: сб. науч. трудов / МФТИ. – М., 2011. – С. 103-112.

5. *Иванов Г.Е., Иванов Г.М.* Опорные условия и регулярность множеств в банаховых пространствах / Фундаментальные и прикладные проблемы современной математики: сб. науч. трудов / МФТИ. – М., 2011. – С. 77-102.

6. *Иванов Г.М.* Уклонение выпуклой оболочки множества. // Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского / Казанское математическое общество. Теория функций, ее приложения и смежные вопросы – Казань, 2011. – Т.43, – С. 155-157.

7. *Иванов Г.М.* Уклонение выпуклой оболочки множества. // Проблемы фундаментальных и прикладных естественных и технических наук в современном информационном обществе – Т.1: Труды LIV научной конференции. / МФТИ. – М. – Долгопрудный, 2011. – С. 31-32.

8. *Иванов Г.М.* О взаимосвязи проксимальной гладкости множества и Ψ-гипомонотонности его нормального конуса. // Тезисы IV Международной школы-семинара «Нелинейный анализ и экстремальные задачи» / Иркутск: РИО ИДТСУ СО РАН, 2014. – С. 23–25.

Иванов Григорий Михайлович

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ И ИХ СЛАБО ВЫПУКЛЫХ ПОДМНОЖЕСТВ

АВТОРЕФЕРАТ

Подписано в печать 19.02.2015
Тираж 100 экз.
Отпечатано в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН
Москва, 119991, ул. Губкина, 8