Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

На правах рукописи

Белошапка Иулия Валериевна

О теории гармонических отображений в группы петель и теории представлений дискретных нильпотентных групп

Специальность:
01.01.06 - математическая логика, алгебра и теория чисел
01.01.01 - вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Москва – 2015

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научные руководители:
ПАРШИН АЛЕКСЕЙ НИКОЛАЕВИЧ - доктор физико-математических наук, академик РАН, заведующий отделом алгебры и теории чисел Математического института им. В.А. Стеклова РАН (специальность 01.01.06)

СЕРГЕЕВ АРМЕН ГЛЕБОВИЧ - доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник отдела комплексного анализа Математического института им. В.А. Стеклова РАН (специальность 01.01.01)

Официальные оппоненты:
РОСЛЫЙ АЛЕКСЕЙ АНДРЕЕВИЧ - кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник "Государственного научного центра РФ - Института Теоретической и Экспериментальной физики" НИЦ "Курчатовский институт"(специальность 01.04.02)

СМИРНОВ АЛЕКСАНДР ЛЕОНИДОВИЧ - доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории алгебры и теории чисел Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В.А.Стеклова Российской академии наук (специальность 01.01.06)

Ведущая организация:
Санкт-Петербургский государственный университет

Защита диссертации состоится 25 февраля 2016 г. в $14^{\underline{00}}$ на заседании диссертационного совета Д.002.022.03 в Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской Академии Наук по адресу: 119991, Москва, ул. Губкина, 8 (9 этаж).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Математического Института им. В. А. Стеклова РАН и на сайте

http://www.mi.ras.ru/dis/ref15/beloshapka/dis.pdf.

Автореферат разослан ___ января _ 2016 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д.002.022.03

д. ф.-м. н. И. Д. Шкредов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Задачи математической физики, связанные с калибровочными теориями поля и полями Янга–Миллса представляют большой интерес для математиков и физиков уже долгие годы. В работе Атьи была установлена связь между голоморфными отображениями римановой сферы в пространства петель компактных групп Ли и инстантонами на евклидовом 4-мерном пространстве (т.е. решениями уравнений дуальности Янга–Миллса на $\mathbb{R}^4$). Поскольку в те годы Атьей было сформулировано в качестве гипотезы предположение об отсутствии критических точек функционала Янга–Миллса на $\mathbb{R}^4$, отличных от локальных минимумов, называемых инстантонами, поля Янга–Миллса в контексте этого соответствия не изучались. Позже в физических работах предположение было опровергнуто построением конкретных примеров полей Янга–Миллса на $\mathbb{R}^4$, не являющихся инстантонами или анти-инстантонами.

Теорема Атьи устанавливает взаимно–однозначное соответствие между пространством модулей G-инстантонов на 4-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ и пространством центрированных голоморфных отображений из сферы Римана $\mathbb{P}^1$ в пространство петель ΩG компактной группы Ли G. Основываясь на этом соответствии, А. Г. Сергеев сформулировал в качестве гипотезы утверждение о том, что гармонические отображения римановой сферы в пространства петель компактных групп Ли аналогичным образом связаны с решениями полных уравнений Янга–Миллса на $\mathbb{R}^4$. Указанная гипотеза остается пока не доказанной, но она мотивирует изучение гармонических отображений из римановых поверхностей в пространства петель. Это новое направление теории гармонических отображений, связанное с изучением гармонических отображений в бесконечномерные кэлеровы многообразия.

Гармонические отображения в римановы многообразия (в отличие от гармонических функций) начали изучать в середине двадцатого века, но наибольший интерес к теории гармонических отображений возник в 90-х годах именно благодаря появлению твисторного подхода. Основная идея твисторного подхода состоит в сведении задачи изучения гармонических отображений из компактных римановых поверхностей в компактные кэлеровы многообразия к более узкой (и более исследованной) задаче: построению голоморфных кривых в компактных кэлеровых многообразиях.

Другая тема нашей работы связана с теорией локальных полей.

В размерности один локальные поля и адельные группы являются хорошо известными инструментами изучения арифметики. Впервые они были введены К. Шевалле в 1930-х годах и были использованы для решения разнообразных задач теории чисел и алгебраической геометрии. Конструкции, возникающие в этом контексте, связаны с полями алгебраических чисел и полями алгебраических функций одной переменной над конечными полями, то есть над схемами размерности один. В 1970-х годах А. Н. Паршин начал развивать подобную теорию для больших размерностей: для локальных полей произвольной размерности и для глобальных полей размерности два. А. А. Бейлинсон распространил ее на схемы произвольной размерности.

В своих работах А. Н. Паршин рассматривает n-мерное локальное поле и кольцо многомерных аделей в терминах флагов алгебраических многообразий или схем, то есть максимальных последовательностей неприводимых алгебраических подмногообразий или схем, упорядоченных по вложению. Мотивацией для таких постановок служит гипотетическое развитие метода Тейта–Ивасавы для L-функций алгебраических многообразий или схем размерности больше единицы. Из-за возможности по-разному выбирать униформизующие элементы на каждом следующем вложенном неприводимом алгебраическом подмногообразии в конструкции возникает каноническая точная последовательность групп, каждое расщепление которой соответствует выбору локальных координат. Группы, возникающие в этой точной последовательности, являются конечно порожденными и нильпотентными. Таким образом, для построения теории многомерных локальных полей возникает необходимость классификации неприводимых представлений конечно порожденных нильпотентных групп без какой-либо топологической структуры на них.

Между пространствами петель групп Ли и группами связанными с локальными полями имеется глубокая связь.

Пусть G — алгебраическая группа. Тогда для любого поля K определена группа $G(K)$ рациональных точек над полем K. Основным объектом изучения в диссертации являются группы, связанные с группами $G(K)$, где K — двумерное локальное поле (над $\mathbb{F}_q$) или архимедово поле вида $\mathbb{R}((t))$ (или $\mathbb{C}((t))$). Пространство петель калибровочной группы Ли $U(n)$ допускает следующее алгебраическое описание: пусть $K = \mathbb{C}((t))$ и $G = \mathrm{GL}\,(V)$, тогда пространство петель группы $U(n)$ может быть некоторым образом отождествлено с бесконечномерным грассманианом вида $G(K)/G(O_K)$ (более подробно в первой главе диссертации). В то же время конечно порожденные нильпотентные группы, возникающие в контексте двумерных локальных полей также имеют вид $G(K)/G(O_K)$, где K — двумерное локальное поле (над $\mathbb{F}_q$) или архимедово поле вида $\mathbb{R}((t))$ (или $\mathbb{C}((t))$), а G — некоторая алгебраическая группа.

Цель работы

Цель работы — исследование гипотезы А. Г. Сергеева о гармонических сферах в пространстве петель калибровочной группы Ли G и пространствах модулей G-полей Янга–Миллса, а также доказательство гипотезы А. Н. Паршина о неприводимых представлениях конечно порожденных нильпотентных групп. Представления нильпотентных групп рассматриваются без какой-либо топологической структуры и над произвольным полем. Также исследуются пространства модулей неприводимых мономиальных представлений некоторых конечно порожденных нильпотентных групп.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа изложена на 132 страницах и состоит из введения и трех глав. Библиография включает 39 наименований.

Научная новизна

Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Дано твисторное описание гармонических отображений в грассманиан Гильберта–Шмидта. Изучение таких отображений мотивировано гипотезой А. Г. Сергеева о гармонических сферах в пространстве петель калибровочной группы Ли G.

2. Для следующего после $\mathrm{Heis}\,(3,\mathbb{Z})$ класса нильпотентности 3 унипотентных матриц 4×4 с целыми коэффициентами исследованы все неприводимые представления с конечным весом, доказана их индуцированность с одномерных представлений и исследованы возможные подгруппы индукции.

3. Доказана гипотеза А. Н. Паршина, утверждающая, что все комплексные неприводимые представления нильпотентной конечно порожденной группы мономиальны тогда и только тогда, когда они являются представлениями с конечным весом. Рассматриваются (возможно, бесконечномерные) представления без какой-либо топологической структуры. Кроме того, доказано, что для некоторых индуцированных представлений неприводимость следует из Шур-неприводимости. Оба результата получены в более общей форме для представлений над произвольным полем.

Основные методы исследования

В диссертации используются методы дифференциальной и комплексной геометрии, теории голоморфных расслоений, сигма-моделей, гармонических отображений и полей Янга–Миллса. Также используются методы теории представлений без топологической структуры, пространств модулей и нильпотентных конечно порожденных групп.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Доказанные в диссертации теоремы представляют интерес для теории гармонических отображений и полей Янга–Миллса, а также для теории представлений конечно порожденных нильпотентных групп.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на российских (семинар по алгебраической геометрии МИАН под руководством И. Р. Шафаревича (2015), семинар по многомерному комплексному анализу (Семинар Витушкина)(2014–2015), семинар по комплексным задачам математической физики МИАН под руководством А. Г. Сергеева (2014–2015)) и международных (конференция "Caucasian Mathematical Conference"(Тбилиси, Грузия, 2014), конференция "Complex analysis and mathematical physics"(Пекин, Китай, 2014), конференция "Winter school in mathematical physics"(Дьяблере, Швейцария, 2014)).

Публикации автора по теме диссертации

Основное содержание диссертации опубликовано в трех работах, список которых приведен в конце автореферата [1–3].

Краткое содержание работы

Диссертация состоит из введения и трех глав.

Основным результатом главы 1 является твисторное описание гармонических сфер в пространстве петель с помощью вложения пространства петель в грассманиан Гильберта–Шмидта. Сформулируем соответствующие утверждения:

Теорема 1. *Пусть σ — такое упорядоченное подмножество $\{1, \dots, n\}$, что $k \in \sigma$, $l \notin \sigma$. Тогда флаговое многообразие Гильберта–Шмидта $G_r(H)$ можно наделить почти комплексной структурой $\mathcal{J}^2_\sigma$ так, что отображение π_σ*

$$\pi_\sigma : F_{\mathbf{r}}(H) \longrightarrow G_r(H)$$

будет твисторным расслоением. Это означает, что для любой $\mathcal{J}^2_\sigma$-голоморфной кривой $\psi : M \to F_{\mathbf{r}}(H)$ ее проекция $\varphi = \pi_\sigma \circ \psi : M \to G_r(H)$ является гармоническим отображением.

Для римановой поверхности $M = \mathbb{P}^1$ имеем следующее обращение сформулированной выше теоремы:

Теорема 2. *Пусть $\varphi : \mathbb{P}^1 \to G_r(H)$ — гармоническое отображение. Тогда существует флаговое расслоение Гильберта–Шмидта*

$$\pi_\sigma : F_{\mathbf{r}}(H) \longrightarrow G_r(H)$$

и такое $\mathcal{J}^2_\sigma$-голоморфное отображение $\psi : \mathbb{P}^1 \to F_{\mathbf{r}}(H)$, что φ совпадает с проекцией $\pi_\sigma \circ \psi$ отображения ψ.

Исследование таких отображений мотивируется следующими соображениями. с

Доказательство теоремы Атьи опирается на теорему Дональдсона, которая устанавливает взаимно–однозначное соответствие между пространством модулей G-инстантонов на $\mathbb{R}^4$ и множеством классов изоморфизма голоморфных $G^{\mathbb{C}}$-расслоений на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, тривиальных на объединении $\mathbb{P}^1_\infty \cup \mathbb{P}^1_\infty$ "бесконечно удаленных"проективных прямых. Теорему Дональдсона можно рассматривать как двумерную редукцию известной теоремы Атьи–Уорда, сопоставляющей инстантонам на $\mathbb{R}^4$ голоморфные расслоения на 3-мерном проективном пространстве $\mathbb{P}^3$, тривиальные на слоях твисторного расслоения $\mathbb{P}^3 \setminus \mathbb{P}^1_\infty \to \mathbb{R}^4$. Доказательство теоремы Дональдсона основано на методе монад, который используется для построения голоморфных векторных расслоений на проективных пространствах, этот метод является "чисто голоморфным". Поэтому в работе [1] было предложено перейти к твисторному аналогу гипотезы о гармонических сферах, для доказательства которой уже применимы голоморфные методы. Для реализации этой идеи необходимо иметь твисторное описание гармонических сфер в грассманиане Гильберта–Шмидта, которое и является основным предметом изучения главы 1.

В контексте построения теории многомерных аделей возник вопрос классификации неприводимых представлений нильпотентных конечно порожденных групп. Для случая двумерных локальных полей такие группы сводятся к группе Гейзенберга $\mathrm{Heis}\,(3, \mathbb{Z})$ унипотентных матриц 3×3 с целыми коэффициентами и группе Гейзенберга $\mathrm{Heis}\,(3, \mathbb{Z}|2\mathbb{R})$ унипотентных матриц 3×3 с одним целым и двумя вещественными коэффициентами. Теория представлений и пространство модулей неприводимых представлений группы $\mathrm{Heis}\,(3, \mathbb{Z})$ были описаны в работе С. А. Арналь и А. Н. Паршина. В главе 2 мы опишем соответствующую теорию представлений и пространство модулей неприводимых представлений для группы $\mathrm{Heis}\,(3, \mathbb{Z}|2\mathbb{R})$.

Задачу описания пространства модулей неприводимых представлений этих нильпотентных групп можно рассматривать как попытку обобщения метода орбит Кириллова, применимого для односвязных вещественных или комплексных нильпотентных групп Ли. Метод орбит параметризует классы эквивалентности унитарных представлений коприсоединенными орбитами — орбитами действия группы G на двойственном пространстве $\mathfrak{g}^*$ к алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Формула характеров Кириллова может быть также в некотором виде обобщена на наш случай.

Для следующего после $\mathrm{Heis}\,(3,\mathbb{Z})$ класса нильпотентности 3 унипотентных матриц 4×4 с целыми коэффициентами мы исследуем все неприводимые представления с конечным весом, доказываем их индуцированность с одномерных представлений и исследуем возможные подгруппы индукции. Напомним, что *рангом* нильпотентной конечно порожденной группы G называется сумма рангов присоединенных факторов нижнего центрального ряда.

Теорема 3. 1. *Пусть H — подгруппа группы G унипотентных матриц 4×4 с целыми коэффициентами и $\mathrm{End}\,_G\big(\mathrm{ind}\,_H^G(\chi)\big)=\mathbb{C}$. Тогда представление $\mathrm{ind}\,_H^G(\chi)$ неприводимо.*

2. *Пусть π — неприводимое представление с конечным весом. Тогда среди его весовых подгрупп всегда найдется подгруппа одного из следующих рангов: $(0,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)$ и $(3,3)$.*

3. *Если представление π бесконечномерно, то этот список короче: $(1,2),(1,3),(2,1),(2,2)$ и $(2,3)$.*

Все утверждения, доказанные в главе 2, являются шагами в направлении доказательства гипотезы А. Н Паршина, которую мы сформулируем ниже.

Хорошо известно, что все комплексные неприводимые представления нильпотентных конечных групп мономиальны, т. е. индуцированы с характеров подгрупп. А. А. Кириллов и Ж. Диксмье независимо доказали аналогичное утверждение для унитарных неприводимых представлений связных нильпотентных групп Ли.

Позже Я. Браун привел утверждение о том, что унитарные неприводимые представления нильпотентных (дискретных) конечно порожденных групп мономиальны тогда и только тогда, когда они являются представлениями с конечным весом. Напомним, что представление π группы G называется представлением с конечным весом, если существуют подгруппа $H\subset G$ и характер χ группы H, для которых векторное пространство $\mathrm{Hom}\,_H(\chi,\pi|_H)$ ненулевое и конечномерное.

На пленарном докладе на Международном конгрессе математиков в 2010 году А. Н. Паршин сформулировал в качестве гипотезы следующее утверждение: критерий Брауна верен для всех комплексных неприводимых представлений нильпотентных конечно порожденных групп, без какой-либо топологической структуры на представлениях. В данном контексте под мономиальным представлением подразумевается представление, конечно индуцированное с характера некоторой подгруппы.

Известно, что гипотеза А. Н. Паршина верна в некоторых частных случаях. Во-первых, такими же рассуждениями, как и в случае конечных групп, можно показать, что все конечномерные комплексные неприводимые представления нильпотентных конечно порожденных групп мономиальны.

Во-вторых, гипотеза верна для абелевых конечно порожденных групп, поскольку все неприводимые представления таких групп являются только характерами (это следует из обобщения леммы Шура). Для следующего случая, а именно, для случая нильпотентных конечно порожденных групп класса нильпотентности два, гипотеза была доказана С. А. Арналь и А. Н. Паршиным.

Наконец, легко показать одну из импликаций гипотезы: если комплексное неприводимое представление мономиально, то оно является представлением с конечным весом.

Мы доказываем гипотезу А. Н. Паршина в полной общности, что является основным результатом главы 3.

Теорема 4. *Пусть G — нильпотентная конечно порожденная группа, а π — (возможно, бесконечномерное) комплексное неприводимое представление группы G. Тогда представление π мономиально тогда и только тогда, когда π является представлением с конечным весом.*

Мы также доказываем более общий результат о представлениях над произвольным полем, которое может быть алгебраически незамкнутым или иметь положительную характеристику.

Теорема 5.*Пусть G — нильпотентная конечно порожденная группа, а π — неприводимое представление группы G над произвольным полем K. Предположим, что существуют подгруппа $H' \subset G$ и конечномерное неприводимое представление ρ' группы H' над полем K, для которых векторное пространство $\mathrm{Hom}_{H'}(\rho', \pi|_{H'})$ ненулевое и конечномерное. Тогда существуют подгруппа $H \subset G$ и конечномерное неприводимое представление ρ группы H над полем K, для которых конечно индуцированное представление $\mathrm{ind}_H^G(\rho)$ изоморфно представлению π.*

Заметим, что в общем случае пары (H, ρ) и (H', ρ') из теоремы 5 могут быть различны. Из теоремы 5 напрямую следует теорема 4.

Существенной составляющей доказательства теоремы 5 является следующее утверждение, представляющее независимый интерес для теории представлений. А именно, для представлений, конечно индуцированных с неприводимых представлений нормальных подгрупп, имеет место обращение леммы Шура.

Предложение 6. *Пусть H — нормальная подгруппа произвольной группы G. Пусть ρ — такое комплексное неприводимое представление группы H, что конечно индуцированное представление $\mathrm{ind}\,_H^G(\rho)$ удовлетворяет условию $\mathrm{End}\,_G\big(\mathrm{ind}\,_H^G(\rho)\big) = \mathbb{C}$. Тогда представление $\mathrm{ind}\,_H^G(\rho)$ неприводимо.*

Заметим, что неприводимость индуцированных представлений нильпотентных групп Ли детально изучалась Я. Якобсеном и Х. Стеткером.

Теорема 4 может быть использована для описания пространств модулей неприводимых представлений нильпотентных конечно порожденных групп. Для случая класса нильпотентности два это было сделано А. Н. Паршиным.

Пространства модулей представлений нильпотентных конечно порожденных групп естественно возникают при изучении алгебраических многообразий при помощи многомерных аделей. Ожидается, что пространства модулей таких представлений будут использованы в вопросах, касающихся L-функций многообразий над конечными полями.

Еще одной мотивировкой для изучения представлений без топологических структур и построения их пространств модулей является теория И Н. Бернштейна гладких комплексных представлений редуктивных p-адических групп.

Заметим, что существуют комплексные неприводимые представления нильпотентных конечно порожденных групп, не удовлетворяющие равносильным условиям теоремы 4. Соответствующие примеры были построены Я. Брауном для унитарных представлений и независимо С. Д. Берманом, В. В. Шарая и Д. Сигалом для представлений без топологических структур. С. Д. Берман и Е. Ш. Керер провели детальный анализ немономиальных представлений группы Гейзенберга над кольцом целых чисел.

Ярким отличием между контекстом статьи Я. Брауна и теоремой 4 является то, что Я. Браун рассматривает унитарные представления, в то время как в теореме 4 мы рассматриваем комплексные представления без какой-либо топологической структуры. Это ведет к многочисленным различиям, наиболее значительным среди которых является следующее. Категория унитарных представлений полупроста. С другой стороны, между представлениями без топологических структур существуют нетривиальные расширения. Более того, в общем случае для таких представлений не выполняется обращение леммы Шура; именно это является причиной, по которой нам нужно предложение 6.

Доказательство теоремы 5 основано на нескольких ключевых идеях из работы Я. Брауна, в частности, мы используем некоторый теоретико-групповой результат о нильпотентных группах. Следуя Я. Брауну, мы изменяем пару (H', ρ') из теоремы 5, получая пару (H, ρ). К сожалению, один из шагов в данной стратегии Я. Брауна основан на неверном утверждении.

Таким образом стратегия доказательства была изменена. Удивительным явлением является то, что в процессе построения пары (H, ρ) появляются такие вспомогательные пары (H_0, ρ_0), для которых векторное пространство $\mathrm{Hom}_{H_0}(\rho_0, \pi|_{H_0})$ ненулевое, но, возможно, бесконечномерное. Однако, такие пары удовлетворяют другому условию конечности, а именно, они являются так называемыми совершенными парами.

Стратегия доказательства теоремы 5 может быть использована для получения корректного доказательства критерия Брауна для унитарных представлений.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своим научным руководителям А. Н. Паршину и А. Г. Сергееву за постановку задачи, помощь, постоянное внимание и многочисленные советы на всех этапах подготовки диссертации. Автор также выражает глубокую благодарность С. О. Горчинскому, К. А. Шрамову и С. Ю. Немировскому за полезные обсуждения и замечания.

Публикации автора по теме диссертации

[1] I. Beloshapka, A. Sergeev, *Harmonic spheres in the Hilbert–Schmidt Grassmannian*, Topology, Geometry, Integrable Systems, and Mathematical Physics: Novikov's Seminar 2012?2014, Advances in the Mathematical Sciences, American Mathematical Society Translations: Series 2, vol. **234**, (2014), 13–31.

[2] И. Белошапка, *О голоморфных представлениях группы Гейзенберга с одним целыми и двумя вещественными коэффициентами*, УМН, **69**:5(419) (2014), 161–162.

[3] И. Белошапка, *О неприводимых представлениях с конечным весом одной дискретной нильпотентной группы*, УМН, **70**:4(424) (2015), 207–208.

————————————————————————————————-

Подписано в печать 24.12.2015

Тираж 100 экз.

——————————————————————

Отпечатано в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН

Москва, 119991, ул. Губкина, 8