Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

На правах рукописи

Белошапка Иулия Валериевна

УДК 512.54, 514.7, 514.8

О теории гармонических отображений в группы петель и теории представлений дискретных нильпотентных групп

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел
01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:
доктор физико-математических наук, академик РАН А. Н. Паршин,
доктор физико-математических наук, профессор А. Г. Сергеев

Москва — 2015

Оглавление

Глава 1

Введение

1.1 Многомерные локальные поля и группы, возникающие в их контексте

Рассмотрим алгебраическое многообразие X (или схему) размерности n больше единицы. Пусть $X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_{n-1} \subset X_n = X$ — флаг неприводимых подмногообразий ($\dim(X_i) = i$). Тогда можно определить кольцо $K_{X_0,\dots,X_n}$, соответствующее этому флагу. Если все подмногообразия регулярно вложены, то это кольцо является n-мерным локальным полем.

Определение 1.1. Пусть k — совершенное поле. Поле K имеет структуру n-мерного локального поля с последним полем вычетов k, если $n = 0$ и $K = k$, или если $n \geq 1$ и K — поле частных такого полного кольца дискретного нормирования O_K, что его поле вычетов $\bar{K}$ является локальным полем размерности $n-1$ с последним полем вычетов k.

Таким образом, n-мерное локальное поле имеет следующую индуктивную структуру:

$$K =: K^{(0)} \supset O_K \to \bar{K} =: K^{(1)} \supset O_{K^{(1)}} \to$$

$$\to \bar{K}^{(1)} =: K^{(2)} \supset O_{K^{(2)}} \to \cdots \to \bar{K}^{(n)} = k,$$

где через O_K мы обозначаем кольцо нормирования, а через $\bar{K}$ поле вычетов. Простейшим примером n-мерного локального поля является поле итерированных формальных рядов Лорана $k((t_n))((t_{n-1}))\dots((t_1))$. В этом случае

$$K^{(i)} = k((t_n))\dots((t_{i+1}))\ , O_{K^{(i)}} = k((t_n))\dots((t_{i+2}))[[t_{i+1}]].$$

Разберем отдельно случай двумерных локальных полей. Примерами двумерных локальных полей являются $\mathbb{F}_q((t_2))((t_1))$, где F_q — поле из q элементов, $\mathbb{Q}_p((t))$, а также, к ним можно добавить поля $\mathbb{C}((t))$ и $\mathbb{R}((t))$, возникающих из двумерных схем, определенных над $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ (см. ниже).

Пусть X — гладкая неприводимая поверхность над полем k (или арифметическая поверхность), а P — замкнутая точка поверхности X. Пусть $C \subset X$ — неприводимая кривая, содержащая точку P. Через $O_{X,P}$ обозначим локальное кольцо в точке P, то есть кольцо рациональных функций, регулярных в точке P. Через O_C обозначим кольцо рациональных функций, не имеющих полюсов на кривой C. Если X и C гладкие в точке P, выберем локальный параметр $t \in O_{X,P}$ кривой C в точке P и выберем такой элемент $u \in O_{X,P}$, что $u|_C \in O_{C,P}$ — локальный параметр в точке P. Через $\wp$ обозначим идеал в кольце $O_{X,P}$, определяющий кривую C в окрестности точки P. Теперь определим двумерное локальное поле $K_{P,C}$, сопоставляемое паре P, C с помощью следующей процедуры пополнений и локализаций:

$$\hat{O}_{X,P} = k(P)[[u,t]] \supset \wp = (t)$$

$(\hat{O}_{X,P})_\wp$ — поле дискретного нормирования с полем вычетов $k(P)((u))$

$$\hat{O}_{P,C} := \widehat{(\hat{O}_{X,P})_\wp} = k(P)((u))[[t]]$$

$$\hat{K}_{P,C} := \mathrm{Frac}\,\hat{O}_{P,C} = k(P)((u))((t)).$$

Фиксируем флаг $P \in C$ на X и предположим для простоты, что точка P является гладкой точкой кривой C. Подкольцо дискретного нормирования $\hat{O}_{P,C}$ локального поля $K_{P,C}$ отображается в локальное кольцо $k(C)_P$ на C. Это локальное кольцо содержит в свою очередь подкольцо дискретного нормирования $\hat{O}_P$, обозначим его прообраз в $\hat{O}_{P,C}$ через $\hat{O}'_{P,C}$. Положим

$$\Gamma_{P,C} := K^*_{P,C}/\hat{O}'_{P,C}$$

абелева группа $\Gamma_{P,C}$ — абелева группа, неканонически изоморфная $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Однако существует каноническая точная последовательность групп

$$0 \to \mathbb{Z} \to \Gamma_{P,C} \to \mathbb{Z} \to 0. \qquad (1.1.1)$$

Отображение в $\mathbb{Z}$ соответствует дискретному нормированию ν_C на кривой C, а подгруппа $\mathbb{Z}$ соответствует дискретному нормированию ν_P на кривой C в точке P. Выбор таких локальных координат u и t в окрестности точки P, что локально $C = \{t = 0\}$, дает расщепление точной последовательности (1.1.1). Группа $\Gamma_{P,C}$, таким образом, изоморфна $\{t^n u^m, n, m \in \mathbb{Z}\} \in K^*_{P,C}$. Группа преобразований локальных координат $u \to u, t \to tu^k, k \in \mathbb{Z}$ сохраняет точную последовательность (1.1.1), и таким образом, определяет вложение $\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\Gamma_{P,C})$, являющееся каноническим.

Имеем каноническое центральное расширение групп

$$1 \to k(C)^*_P \to \tilde{K}^*_{P,C} \to K^*_{P,C} \to 1 \qquad (1.1.2)$$

в котором соответствующий коммутатор определяется кососимметрической формой $\langle\cdot,\cdot\rangle : K^*_{P,C} \times K^*_{P,C} \to k(C)^*_P$ ручного символа (без знака):

$$\langle f, g\rangle = f^{\nu(C)(g)} g^{-\nu(C)(f)} (\mod \wp) \in k(C)^*_P$$

где $\wp$ — идеал, определяющий кривую C. Для подгруппы $\hat{O'}^*_{P,C}$ существует каноническое сечение центрального расширения (1.1.2). Обозначим через $\tilde{O}^*_{P,C}$ образ $\hat{O}^*_{P,C}$ в поле $\tilde{K}^*_{P,C}$ относительно этого сечения. Если мы теперь профакторизуем точную последовательность (1.1.2) по подгруппе $\hat{O}^*_P$ центра $k(C)^*_P$ и по подгруппе $\tilde{O}^*_{P,C}$, мы получим новое центральное расширение:

$$0 \to \mathbb{Z} \to \hat{\Gamma}_{P,C} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to 0. \qquad (1.1.3)$$

Известно, что $H^2(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, и расширение (1.1.3) является порождающим этой группы. Коммутатор в этом центральном расширении определяет невырожденную симплектическую форму на группе $\Gamma_{P,C}$ со значениями в $\mathbb{Z}$. Зафиксируем локальные параметры u и t в точке P. Тогда группа $\hat{\Gamma}_{P,C}$ изоморфна группе унипотентных матриц 3×3 с целыми коэффициентами

$$\begin{pmatrix} 1 & n & c \\ 0 & 1 & p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Обозначим эту группу через $\mathrm{Heis}(3, \mathbb{Z})$. Группа $\mathrm{Heis}(3, \mathbb{Z})$ является нильпотентной конечно порожденной группой класса нильпотентности 3.

Пусть теперь $X \xrightarrow{\pi} \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ — регулярная неприводимая схема размерности 2 с сюръективным отображением π и гладким общим слоем. Пусть $\mathcal{P}$ — сечение отображения π, тогда ему можно сопоставить поле вида $\mathbb{R}((t))$

или $\mathbb{C}((t))$. Для этого вложим $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$ или в $\mathbb{C}$ и возьмем кривую $X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ или $X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$. Эти кривые определены, соответственно, над полями $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Сечение $\mathcal{P}$ определяет точку P на этих кривых. Интересующие нас поля $\mathbb{R}((t))$ (или $\mathbb{C}((t))$) будут (одномерными) локальными полями на кривых $X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ (или $X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$) в точке P, а t будет формальным локальным параметром в этой точке. Заметим, что такую операцию можно провести с вложением $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}_p$ и получить двумерное локальное поле $\mathbb{Q}_p((t))$. Таким образом, поля $\mathbb{R}((t))$ и $\mathbb{C}((t))$ являются архимедовыми аналогами поля $\mathbb{Q}_p((t))$, как и поля $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ являются архимедовыми аналогами поля $\mathbb{Q}_p$ для схемы $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ размерности 1.

Пусть $K = \mathbb{R}((t))$. Тогда $K^* = t^{\mathbb{Z}}\, \mathbb{R}^*\, U$ — гомоморфизм групп, соответствующий разложению $f = a_m t^m + a_{m+1} t^{m+1} + \dots = a_m t^m (1 + c_1 t + \dots)$, где $(1 + c_1 t + \dots) \in U$ — обратимый элемент. Имеем отображение вычисления функции в нуле:

$$a_0 + a_1 t + \dots \to a_0.$$

Пусть $f = a_m t^m + a_{m+1} t^{m+1} + \dots = a_m t^m (1 + c_1 t + \dots)$ и $g = b_n t^n + b_{n+1} t^{n+1} + \dots = b_n t^n (1 + \dots)$, тогда $f^{-n} = a_m^{-n} t^{-mn} (1 + \dots)$ и $g^m = b_n^m t^{mn} (1 + \dots)$. Тогда $f^{-n} g^m = a_m^{-n} b_n^m (1 + \dots) \xrightarrow{t=0} a_m^{-n} b_n^m$. Таким образом, форма

$$\langle f, g \rangle = a_m^{-n} b_n^m, \quad \langle K^*, K^* \rangle \to R^*$$

задает каноническое центральное расширение групп

$$1 \to \mathbb{R}^* \to \tilde{K^*} \to \mathbb{R}^* \times \mathbb{Z} \times U \to 1. \tag{1.1.4}$$

Как и в 1.1.3, профакторизуем полученную точную последовательность по максимальным компактным подгруппам (в группе $\mathbb{R}^* \times \mathbb{Z} \times U$ — это подгруппа $\{\pm 1\} \times U$, в $\mathbb{R}^*$ — это $\{\pm 1\}$). Получим точную последовательность

$$1 \to \mathbb{R}^*_+ \to \tilde{\Gamma}'_K \to \mathbb{R}^*_+ \times \mathbb{Z} \to 1. \tag{1.1.5}$$

Эта последовательность изоморфна (с помощью экспоненциального отображения групп) последовательности

$$0 \to \mathbb{R} \to \tilde{\Gamma}_K \to \mathbb{R} \oplus \mathbb{Z} \to 1. \tag{1.1.6}$$

Группа $\tilde{\Gamma}_K$, таким образом, изоморфна группе унипотентных матриц 3×3 с одним целым коэффициентом n и двумя вещественными коэффициентами p и c:

$$\begin{pmatrix} 1 & n & c \\ 0 & 1 & p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Обозначим эту группу через $\mathrm{Heis}(3, \mathbb{Z}|\mathbb{R})$. Группа $\mathrm{Heis}(3, \mathbb{Z}|\mathbb{R})$ является нильпотентной группой класса нильпотентности 2.

1.2 Бесконечномерный грассманиан как однородное пространство вида $G(K)/G(O_K)$

Пусть G — алгебраическая группа. Тогда для любого поля K определена группа $G(K)$ рациональных точек над полем K. Основным объектом изучения в диссертации будут группы, связанные с группами $G(K)$, где K — двумерное локальное поле (над $\mathbb{F}_q$) или архимедово поле вида $\mathbb{R}((t))$ (или $\mathbb{C}((t))$).

В предыдущем параграфе мы определили нильпотентные группы, связанные с двумерными локальными полями. Сейчас мы рассмотрим связь между группами $G(K)$ для $K = \mathbb{C}((t))$ и $G = GL(n)$ и группами петель и грассмановыми многообразиями.

Прежде чем рассматривать поле степенных рядов, обратимся к соответствующей теории для произвольного поля K. Пусть $V = K^n$. Тогда грассманово многообразие

$$\mathrm{Gr}_k(V) = \{W \subset V : \dim W = k\}$$

является однородным пространством группы $G = \mathrm{GL}(V)$ и

$$\mathrm{Gr}_k(V) = G(K)/P(K), \tag{1.2.1}$$

где P — параболическая подгруппа в G, стабилизирующая фиксированное подпространство $W_0 \in \mathrm{Gr}_k(V)$.

В случае $K = \mathbb{C}$ это чисто алгебраическое определение можно дополнить аналитической конструкцией:

$$\mathrm{Gr}_k(V) = U(n)/U(n) \cap P(\mathbb{C}), \tag{1.2.2}$$

где $U(n) \in G$ — группа унитарных матриц.

Перейдем теперь от поля $K = \mathbb{C}$ к полю $K = \mathbb{C}((t))$ и посмотрим, что в этой конструкции является аналогом грассманова многообразия.

Теперь $G = \mathrm{GL}(n, K)$ и $V = K^n \supset W_0 = O_K^n$. Можно определить

$$\mathrm{Gr}(V) = \{\text{такие подпространства } \ W \subset V, \text{ что}$$

$$\dim_{\mathbb{C}} W/W \cap W_0 \leq \infty \ \text{ и } \ \dim_{\mathbb{C}} W_0/W \cap W_0 \leq \infty\}.$$

Тогда $\mathrm{Gr}(V) = G(K)/G(O_K)$. Это бесконечномерное многообразие над $\mathbb{C}$, и алгебраическая структура ind-схемы на нем может быть определена через возрастающую цепочку конечномерных многообразий

$$\mathrm{Gr}(V)(k) = \{W \in \mathrm{Gr}(V) : t^k W_0 \subset W \subset t^{-k} W_0\}. \qquad (1.2.3)$$

Заметим, что как и в конечномерном случае, эта конструкция чисто алгебраическая, и в качестве K можно взять поле вида $L((t))$, где L — произвольное поле. Пусть теперь $K = \mathbb{C}((t))$. Тогда аналитический вариант многообразия $\mathrm{Gr}(V)$ строится с помощью групп петель (см. [31]).

Если G — группа Ли, то положим $LG = C^\infty(S^1, G)$ и

$$L^+G = \{f \in LG, \text{ для которых существует отображение}$$
$$g : \bar{D} \to G, \text{ голоморфное в D и непрерывное в } \bar{D},$$
$$\text{и такое, что } \; g|_{\partial\bar{D}} = f\}.$$

Здесь $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \subset \bar{D} = \{|z| \leq 1\} \supset D = \{|z| < 1\}$.

Определим аналитический бесконечномерный грассманиан как

$$L\,\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})/L^+\,\mathrm{GL}(n,\mathbb{C}).$$

Согласно [31] он соответствует в новой ситуации поля $\mathbb{C}((t))$ конечномерному грассманиану 1.2.1 для поля $\mathbb{C}$. Аналогом утверждения 1.2.2 будет соотношение

$$L\,\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})/L^+\,\mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) = C^\infty(S^1, U(n))/U(n),$$

где группа $U(n)$ рассматривается как подмножество $C^\infty(S^1, U(n))$, то есть как подгруппа постоянных отображений в группу $U(n)$.

1.3 Основные результаты диссертации

Основным результатом главы 2 является твисторное описание гармонических сфер в пространстве петель с помощью вложения пространства петель в грассманиан Гильберта–Шмидта. Сформулируем соответствующие утверждения (см. теорему 2.5 и теорему 2.4):

Теорема 1. *Пусть σ — такое упорядоченное подмножество $\{1,\dots,n\}$, что $k\in\sigma$, $l\notin\sigma$. Тогда отображение π_σ в флаговое многообразие Гильберта–Шмидта $F_{\mathbf{r}}(H)$ с почти комплексной структурой $\mathcal{J}^2_\sigma$ в многообразие $G_r(H)$:*

$$\pi_\sigma : F_{\mathbf{r}}(H)\longrightarrow G_r(H)$$

является твисторным расслоением. Это значит, что для любой J^2_σ-голоморфной кривой $\psi : M\to F_{\mathbf{r}}(H)$ ее проекция $\varphi=\pi_\sigma\circ\psi : M\to G_r(H)$ является гармоническим отображением.

Для римановой поверхности $M=\mathbb{P}^1$ имеем следующее обращение сформулированной выше теоремы:

Теорема 2. *Пусть $\varphi:\mathbb{P}^1\to G_r(H)$ — гармоническое отображение. Тогда существует флаговое расслоение Гильберта–Шмидта*

$$\pi_\sigma : F_{\mathbf{r}}(H)\longrightarrow G_r(H)$$

и такое $\mathcal{J}^2_\sigma$-голоморфное отображение $\psi:\mathbb{P}^1\to F_{\mathbf{r}}(H)$, что φ совпадает с проекцией $\pi_\sigma\circ\psi$ отображения ψ.

Исследование таких отображений мотивируется следующими соображениями. Хорошо известная теорема Атьи [3] устанавливает взаимно–однозначное соответствие между пространством модулей G-инстантонов на 4-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$ и пространством центрированных голоморфных отображений из сферы Римана $\mathbb{P}^1$ в пространство петель ΩG компактной группы Ли G. Гипотеза А. Г. Сергеева о гармонических сферах, которая получается "овеществлением" из выше приведенной формулировки, утверждает, что также должно существовать естественное взаимно–однозначное соответствие между пространством модулей G-полей Янга–Миллса на $\mathbb{R}^4$ и пространством центрированных гармонических отображений из сферы Римана $\mathbb{P}^1$ в пространство петель ΩG.

Доказательство теоремы Атьи опирается на теорему Дональдсона [15], которая устанавливает взаимно–однозначное соответствие между пространством модулей G-инстантонов на $\mathbb{R}^4$ и множеством классов изоморфизма голоморфных $G^{\mathbb{C}}$-расслоений на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, тривиальных на объединении $\mathbb{P}^1_\infty \cup \mathbb{P}^1_\infty$ "бесконечно удаленных"проективных прямых. Теорему Дональдсона можно рассматривать как двумерную редукцию известной теоремы Атьи–Уорда, сопоставляющей инстантонам на $\mathbb{R}^4$ голоморфные расслоения на 3-мерном проективном пространстве $\mathbb{P}^3$, тривиальные на слоях твисторного расслоения $\mathbb{P}^3 \setminus \mathbb{P}^1_\infty \to \mathbb{R}^4$. Доказательство теоремы Дональдсона основано на методе монад, который используется для построения голоморфных векторных расслоений на проективных пространствах, этот метод является "чисто голоморфным". Поэтому для доказательства гипотезы о гармонических сферах необходим "вещественный"аналог теоремы Дональдсона для гармонических расслоений.

Такого рода аналог был предложен в работе [36], в которой также была дана идея доказательства гипотезы А. Г. Сергеева о гармонических сферах. Для ее реализации необходимо иметь твисторное описание гармонических сфер в грассманиане Гильберта–Шмидта, которое и является основным предметом изучения в главе 2.

В контексте построения теории многомерных аделей возник вопрос классификации неприводимых представлений нильпотентных конечно порожденных групп. Для случая двумерных локальных полей такие группы сводятся к группе Гейзенберга $\mathrm{Heis}(3, \mathbb{Z})$ унипотентных матриц 3×3 с целыми коэффициентами и группе Гейзенберга $\mathrm{Heis}(3, \mathbb{Z}|2\mathbb{R})$ унипотентных матриц 3×3 с одним целым и двумя вещественными коэффициентами. Теория представлений и пространство модулей неприводимых представлений группы $\mathrm{Heis}(3, \mathbb{Z})$ были описаны в [1]. В разделе 3.1 мы опишем соответствующую теорию представлений и пространство модулей неприводимых представлений для группы $\mathrm{Heis}(3, \mathbb{Z}|2\mathbb{R})$, во многом следуя [30].

Задачу описания пространства модулей неприводимых представлений этих нильпотентных групп можно рассматривать как попытку обобщения метода орбит Кириллова [22], применимого для односвязных вещественных или комплексных нильпотентных групп Ли. Метод орбит параметризует классы эквивалентности унитарных представлений коприсоединенными орбитами — орбитами действия группы G на двойственном пространстве $\mathfrak{g}^*$ к алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Формула характеров Кириллова может быть также в некотором виде обобщена на наш случай.

В главе 3.2 для следующего после $\mathrm{Heis}(3, \mathbb{Z})$ класса нильпотентности 3 унипотентных матриц 4×4 с целыми коэффициентами мы исследуем все неприводимые представления с конечным весом, доказываем их индуцированность с одномерных представлений (см. 3.1) и исследуем возможные подгруппы индукции.

Теорема 3. 1. *Пусть H — подгруппа группы G унипотентных матриц 4×4 с целыми коэффициентами и* $\mathrm{End}_G\left(\mathrm{ind}_H^G(\chi)\right) = \mathbb{C}$. *Тогда представление* $\mathrm{ind}_H^G(\chi)$ *неприводимо.*

2. *Пусть π — неприводимое представление с конечным весом. То-*

гда среди его весовых подгрупп всегда найдется подгруппа одного из следующих рангов: $(0,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)$ *и* $(3,3)$.

3. *Если представление* π *бесконечномерно, то этот список короче:* $(1,2),(1,3),(2,1),(2,2)$ *и* $(2,3)$.

Все утверждения, доказанные в главе 3.2, являются шагами в направлении доказательства гипотезы А. Н Паршина, которую мы сформулируем ниже.

Хорошо известно, что все комплексные неприводимые представления нильпотентных конечных групп мономиальны, т. е. индуцированы с характеров подгрупп (см. [37, § 8.5, теорема 16]). А. А. Кириллов [21] (см. также [22, теорема 5.1]) и Ж. Диксмье [14, теорема 2] независимо доказали аналогичное утверждение для унитарных неприводимых представлений связных нильпотентных групп Ли.

Позже в статье [11] Я. Браун привел утверждение о том, что унитарные неприводимые представления нильпотентных (дискретных) конечно порожденных групп мономиальны тогда и только тогда, когда они являются представлениями с конечным весом. Напомним, что представление π группы G называется представлением с конечным весом, если существуют подгруппа $H \subset G$ и характер χ группы H, для которых векторное пространство $\mathrm{Hom}_H(\chi, \pi|_H)$ ненулевое и конечномерное.

На пленарном докладе на Международном конгрессе математиков в 2010 году А. Н. Паршин [28, § 5.4(i)] (см. также [1, стр. 296]) сформулировал в качестве гипотезы следующее утверждение: критерий Брауна верен для всех комплексных неприводимых представлений нильпотентных конечно порожденных групп, без какой-либо топологической структуры на представлениях. В данном контексте под мономиальным представлением подразумевается представление, конечно индуцированное (см. определение 4.11) с характера некоторой подгруппы.

Известно, что гипотеза Паршина верна в некоторых частных случаях. Во-первых, такими же рассуждениями, как и в случае конечных групп, можно показать, что все конечномерные комплексные неприводимые представления нильпотентных конечно порожденных групп мономиальны (см., например, [11, лемма 1] или предложение 4.40).

Во-вторых, гипотеза верна для абелевых конечно порожденных групп, поскольку все неприводимые представления таких групп являются только характерами (это следует из обобщения леммы Шура, см., например, [6, утверждение 2.11] или предложение 4.28). Для следующего случая, а именно, для случая нильпотентных конечно порожденных групп класса нильпотентности два, гипотеза была доказана С. А. Арналь и А. Н. Паршиным [1].

Наконец, легко показать одну из импликаций гипотезы: если комплексное неприводимое представление мономиально, то оно является представлением с конечным весом (см. предложение 4.38).

Мы доказываем гипотезу Паршина в полной общности, что является основным результатом главы 4 (см. теорему 4.41 и ее уточнение в замечании 4.48).

Теорема 4. *Пусть G — нильпотентная конечно порожденная группа, а π — (возможно, бесконечномерное) комплексное неприводимое представление группы G. Тогда представление π мономиально то-*

гда и только тогда, когда π является представлением с конечным весом.

Мы также доказываем более общий результат о представлениях над произвольным полем, которое может быть алгебраически незамкнутым или иметь положительную характеристику (см. теорему 4.39, теорему 4.41 и предложение 4.38).

Теорема 5. *Пусть G — нильпотентная конечно порожденная группа, а π — неприводимое представление группы G над произвольным полем K. Предположим, что существуют подгруппа $H' \subset G$ и конечномерное неприводимое представление ρ' группы H' над полем K, для которых векторное пространство $\mathrm{Hom}_{H'}(\rho', \pi|_{H'})$ ненулевое и конечномерное. Тогда существуют подгруппа $H \subset G$ и конечномерное неприводимое представление ρ группы H над полем K, для которых конечно индуцированное представление $\mathrm{ind}_H^G(\rho)$ изоморфно представлению π.*

Заметим, что в общем случае пары (H, ρ) и (H', ρ') из теоремы 5 могут быть различны. Из теоремы 5 напрямую следует теорема 4 (см. п. 4.3.1).

Существенной составляющей доказательства теоремы 5 является следующее утверждение, представляющее независимый интерес для теории представлений. А именно, для представлений, конечно индуцированных с неприводимых представлений нормальных подгрупп, имеет место обращение леммы Шура (см. предложение 4.32 и замечание 4.33(i); для простоты мы формулируем здесь это утверждение для случая комплексных представлений).

Предложение 6. *Пусть H — нормальная подгруппа произвольной группы G. Пусть ρ — такое комплексное неприводимое представление группы H, что конечно индуцированное представление $\mathrm{ind}_H^G(\rho)$ удовлетворяет условию $\mathrm{End}_G\left(\mathrm{ind}_H^G(\rho)\right) = \mathbb{C}$. Тогда представление $\mathrm{ind}_H^G(\rho)$ неприводимо.*

Заметим, что неприводимость индуцированных представлений нильпотентных групп Ли детально изучалась Я. Якобсеном и Х. Стеткером [19].

Теорема 4 (см. также предложение 4.46) может быть использована для описания пространств модулей неприводимых представлений нильпотентных конечно порожденных групп. Для случая класса нильпотентности два это было сделано А. Н. Паршиным в [29].

Пространства модулей представлений нильпотентных конечно порожденных групп естественно возникают при изучении алгебраических многообразий при помощи многомерных аделей. Ожидается, что пространства модулей таких представлений будут использованы в вопросах, касающихся L-функций многообразий над конечными полями, более детально см. в [28].

Еще одной мотивировкой для изучения представлений без топологических структур и построения их пространств модулей является теория И Н. Бернштейна гладких комплексных представлений редуктивных p-адических групп (см., например, [7]).

Заметим, что существуют комплексные неприводимые представления нильпотентных конечно порожденных групп, не удовлетворяющие равносильным условиям теоремы 4. Соответствующие примеры были построены Я. Брауном [11, § 2] для унитарных представлений и независимо С. Д. Берманом, В. В. Шарая [9] и Д. Сигалом [32, теоремы A, B] для представлений без топологических структур. С. Д. Берман и Е. Ш. Керер [8] провели детальный анализ немономиальных представлений группы Гейзенберга над кольцом целых чисел.

Ярким отличием между контекстом статьи Я. Брауна [11] и теоремой 4 является то, что Я. Браун рассматривает унитарные представления, в то время как в теореме 4 мы рассматриваем комплексные представления без какой-либо топологической структуры. Это ведет к многочисленным различиям, наиболее значительным среди которых является следующее. Категория унитарных представлений полупроста. С другой стороны, между представлениями без топологических структур существуют нетривиальные расширения. Более того, в общем случае для таких представлений не выполняется обращение леммы Шура (см. пример 4.31 и пример из п. 4.2.3); именно это является причиной, по которой нам нужно предложение 6.

Наше доказательство теоремы 5 основано на нескольких ключевых идеях из [11], в частности, мы используем некоторый теоретико-групповой результат о нильпотентных группах (см. предложение 4.9). Следуя Я. Брауну, мы изменяем пару (H', ρ') из теоремы 5, получая пару (H, ρ). К сожалению, один из шагов в данной стратегии Я. Брауна основан на неверном утверждении, а именно, [11, лемма 6] (см. замечание 4.26).

Таким образом мы поменяли эту стратегию. Удивительным явлением является то, что в процессе построения пары (H, ρ) появляются такие вспомогательные пары (H_0, ρ_0), для которых векторное пространство $\mathrm{Hom}_{H_0}(\rho_0, \pi|_{H_0})$ ненулевое, но, возможно, бесконечномерное. Однако, такие пары удовлетворяют другому условию конечности, а именно, они являются так называемыми совершенными парами (см. определение 4.16(ii)).

Наша стратегия доказательства теоремы 5 может быть использована для получения корректного доказательства критерия Брауна для унитарных представлений.

Результаты диссертации опубликованы в статьях (A1), (A2) и (A3).

Автор выражает глубокую благодарность своим научным руководителям А. Н. Паршину и А. Г. Сергееву за постановку задачи, помощь, постоянное внимание и многочисленные советы на всех этапах подготовки диссертации. Автор также выражает глубокую благодарность С. О. Горчинскому, К. А. Шрамову и С. Ю. Немировскому за полезные обсуждения и замечания.

Глава 2

Гармонические сферы в грассманиане Гильберта–Шмидта

2.1 Мотивировка: гипотеза о гармонических сферах

Поводом для изучения гармонических отображений из сферы Римана в грассманиан Гильберта–Шмидта явилась гипотеза о гармонических сферах, устанавливающая соответствие между полями Янга–Миллса и гармоническими сферами в пространствах петель. Саму гипотезу мы обсудим позже, а сейчас напомним необходимые факты об инстантонах и полях Янга–Миллса с одной стороны и гармонических отображениях с другой.

2.1.1 Инстантоны и поля Янга–Миллса

Пусть G — компактная группа Ли, а A — гладкая G-связность на $\mathbb{R}^4$, которую можно отождествить с 1-формой

$$A = \sum_{\mu=1}^{4} A_\mu(x) dx_\mu$$

с гладкими коэффициентами $A_\mu(x)$, принимающими значения в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G. Через F_A обозначим кривизну связности A, которую можно отождествить с 2-формой на $\mathbb{R}^4$

$$F_A = \sum_{\mu,\nu=1}^{4} F_{\mu\nu}(x) dx_\mu \wedge dx_\nu$$

с гладкими коэффициентами

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$$

где $\partial_\mu := \partial/\partial x_\mu$, $\mu = 1, 2, 3, 4$, и $[\cdot,\cdot]$ обозначает коммутатор в алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Определим функционал *Янга–Миллса* по формуле

$$S(A) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^4} \operatorname{tr}(F_A \wedge *F_A)$$

где $*$ — это оператор Ходжа на $\mathbb{R}^4$, а след tr вычисляется с помощью какого-нибудь фиксированного инвариантного скалярного произведения на алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Функционал $S(A)$ инвариантен относительно *калибровочных преобразований*, задающихся по формуле

$$A \longmapsto A_g := g^{-1} dg + g^{-1} A g$$

где $g : \mathbb{R}^4 \to G$ — гладкое отображение, и группа G действует на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ с помощью присоединенного представления.

Экстремали функционала $S(A)$ с конечным значением действия $S(A) < \infty$ называются *полями Янга–Миллса*.

Для полей Янга–Миллса существует топологический инвариант, принимающий значения в целых числах, который называется *топологическим* *зарядом* и вычисляется по формуле

$$k(A) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{tr}(F_A \wedge F_A).$$

Если мы запишем кривизну F_A в форме

$$F_A = F_+ + F_-$$

где $F_\pm = \frac{1}{2}(*F_A \pm F_A)$, то формулы для действия и топологического заряда можно переписать в следующем виде

$$S(A) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^4} \left(\|F_+\|^2 + \|F_-\|^2\right) d^4x,$$
$$k(A) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} \left(-\|F_+\|^2 + \|F_-\|^2\right) d^4x$$

где норма $\|\cdot\|^2$ вычисляется с помощью инвариантного скалярного произведения на алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Сравнивая последние две формулы, получаем неравенство

$$S(A) \geq 4\pi^2 |k(A)|$$

в котором равенство достигается для $k > 0$ на связностях, кривизна которых удовлетворяет условию

$$*F_A = -F_A \tag{2.1.1}$$

а для $k < 0$ на связностях, кривизна которых удовлетворяет условию

$$*F_A = F_A. \tag{2.1.2}$$

Определение 2.1. Решения уравнения (2.1.1) с конечным значением $S(A) < \infty$ называются *инстантонами*, а решения уравнения (2.1.2) с конечным значением $S(A) < \infty$ называются *анти-инстантонами.*

Инстантоны и анти-инстантоны являются локальными минимумами функционала $S(A)$, однако, существуют и неминимальные экстремали этого функционала.

2.1.2 Гармонические сферы

Пусть $\varphi : \mathbb{P}^1 \to N$ — гладкое отображение из сферы Римана $\mathbb{P}^1$ в ориентированное риманово многообразие N. Мы называем такое отображение *гармоническим*, если оно экстремально относительно функционала энергии, который задается интегралом Дирихле

$$E(\varphi) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{C}} |d\varphi|_N^2 \frac{|dz \wedge d\bar{z}|}{(1+|z|^2)^2}$$

в котором модуль дифференциала $d\varphi$ вычисляется с помощью метрики $|\cdot|_N$ многообразия N.

Если многообразие N кэлерово, то есть на N существует комплексная структура, совместимая с римановой метрикой, то голоморфные и антиголоморфные отображения $\varphi : \mathbb{P}^1 \to N$ являются локальными минимумами функционала энергии $E(\varphi)$. Однако, в случае $\dim_{\mathbb{C}} N > 1$ существуют и неминимальные решения.

Сравнивая гармонические отображения с полями Янга–Миллса, мы замечаем очевидную аналогию между ними:

$$\left\{\begin{matrix}\text{(анти)голоморфные}\\ \text{отображения}\end{matrix}\right\} \longleftrightarrow \{\text{(анти)инстантоны}\}$$

и

$$\left\{\begin{matrix}\text{гармонические}\\ \text{отображения}\end{matrix}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{поля Янга–}\\ \text{Миллса}\end{matrix}\right\}.$$

Дадим теперь математическое обоснование этому наблюдению.

2.1.3 Твисторная интерпретация инстантонов

Твисторная интерпретация инстантонов связана со следующим *твисторным расслоением*

$$\pi : \mathbb{P}^3 \setminus \mathbb{P}^1_\infty \longrightarrow \mathbb{R}^4 \qquad (2.1.3)$$

на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^4$, где $\mathbb{P}^3$ — это 3-мерное комплексное проективное пространство (см. [2]). Слой этого расслоения в точке $x \in \mathbb{R}^4$ можно отождествить с пространством комплексных структур на касательном пространстве $T_x\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{R}^4$, совместимых с метрикой и ориентацией.

С помощью этого твисторного расслоения $\pi : \mathbb{P}^3 \setminus \mathbb{P}^1 \to \mathbb{R}^4$ *пространство модулей G-инстантонов*, то есть фактор пространства всех G-инстантонов на $\mathbb{R}^4$ по модулю калибровочных преобразований, допускает следующую интерпретацию, которая дается *теоремой Атьи–Уорда*:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{пространство}\\ \text{модулей } G\text{-}\\ \text{инстантонов на}\\ \mathbb{R}^4\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{(центрированные) классы экви-}\\ \text{валентности голоморфных } G^{\mathbb{C}}\text{-}\\ \text{расслоений на } \mathbb{P}^3\text{, голоморфно}\\ \text{тривиальных на } \pi\text{-слоях}\end{array}\right\}.$$

Этот результат допускает следующую 2-мерную редукцию на пространство $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, описываемую теоремой Дональдсона:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{пространство}\\ \text{модулей } G\text{-}\\ \text{инстантонов на}\\ \mathbb{R}^4\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{(центрированные) классы эквивалент-}\\ \text{ности голоморфных } G^{\mathbb{C}}\text{-расслоений на}\\ \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1\text{, голоморфно тривиальных на}\\ \text{объединении } \mathbb{P}^1_\infty \cup \mathbb{P}^1_\infty\end{array}\right\}.$$

2.1.4 Твисторная интерпретация гармонических сфер

Используя интерпретацию твисторного расслоения на $\mathbb{R}^4$ как расслоения совместимых с метрикой и ориентацией комплексных структур, можно распространить определение твисторного расслоения на любое четномерное риманово многообразие N. А именно, твисторное расслоение $\pi : Z \to N$ на N определяется как расслоение комплексных структур на N, совместимых с метрикой и ориентацией многообразия. Слой этого расслоения можно отождествить с однородным пространством $\mathrm{SO}(2n)/\mathrm{U}(n)$, где $2n$ — размерность многообразия N. На твисторном пространстве Z, как было показано в [4], можно ввести естественную почти комплексную структуру, которая обозначается через $\mathcal{J}^1$.

Однако для описания гармонических сфер в N необходимо ввести другую почти комплексную структуру, которая определяется следующим образом. Связность Леви–Чивита на многообразии N индуцирует связность на твисторном расслоении $\pi : Z \to N$. Новая почти комплексная структура на Z, которая обозначается через $\mathcal{J}^2$ равна J^1 на направлениях, горизонтальных относительно данной связности, и $-\mathcal{J}^1$ на вертикальных направлениях. Эта структура была введена в [16], и никогда не является интегрируемой. Гармонические сферы в N допускают следующее описание в терминах этой почти комплексной структуры.

Теорема 2.2 (Иллс–Соломон [16]). *Проекции $\varphi = \pi \circ \psi$ отображений $\psi : \mathbb{P}^1 \to Z$, голоморфных относительно почти комплексной структуры $\mathcal{J}^2$, являются гармоническими.*

Указанная теорема позволяет строить гармонические сферы в многообразии N из почти голоморфных сфер в твисторном пространстве Z. В этом и состоит основная идея твисторного подхода к построению гармонических отображений — редуцировать изначально "вещественную"задачу описания гармонических сфер в римановом многообразии N к "комплексной" задаче описания почти голоморфных сфер в почти комплексном многообразии Z.

В разделе 2.2.2 мы покажем, как можно использовать эту идею для построения гармонических сфер в комплексном грассмановом многообразии $G_r(\mathbb{C}^d)$.

2.1.5 Теорема Атьи

Перейдем теперь к случаю, когда риманово многообразие N бесконечномерно, а точнее, является пространством петель компактной группы Ли. Пусть G — компактная группа Ли. Рассмотрим фактор

$$\Omega G := LG/G$$

группы петель $LG = C^\infty(S^1, G)$ по модулю подгруппы постоянных отображений $S^1 \to g_0 \in G$, которую можно отождествить с самой группой G. Пространство ΩG является пространством Фреше, на котором есть LG-инвариантная комплексная структура (см. [33]). Эта структура определяется через представление пространства петель ΩG как однородного пространства комплексной группы петель $LG^{\mathbb{C}}$:

$$\Omega G = LG^{\mathbb{C}}/L_+G^{\mathbb{C}}$$

где $G^{\mathbb{C}}$ — это комплексификация группы G, а подгруппа $L_+G^{\mathbb{C}}$ состоит из таких петель $\gamma \in LG^{\mathbb{C}}$, которые гладко продолжаются до голоморфных отображений из единичного диска Δ в группу $G^{\mathbb{C}}$. Кроме комплексной структуры, на ΩG есть также LG-инвариантная симплектическая структура (см. [33]), совместимая с введенной выше комплексной структурой в том смысле, что вместе с симплектической структурой они порождают естественную риманову метрику на пространстве ΩG.

Напомним, что по теореме Дональдсона пространство модулей G-инстантонов можно отождествить с

$$\left\{\begin{array}{l}\text{пространство}\\ \text{модулей } G\text{-}\\ \text{инстантонов на}\\ \mathbb{R}^4\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{(центрированные) классы эквивалент-}\\ \text{ности голоморфных } G^{\mathbb{C}}\text{-расслоений на}\\ \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1\text{, голоморфно тривиальных на}\\ \text{объединении } \mathbb{P}^1_\infty \cup \mathbb{P}^1_\infty\end{array}\right\}.$$

По теореме Атьи правую сторону в этом соответствии можно отождествить с пространством голоморфных сфер в пространстве петель ΩG. Более точно, существует взаимно-однозначное соответствие между:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{(центрированные) классы}\\ \text{эквивалентности голо-}\\ \text{морфных } G^{\mathbb{C}}\text{-расслоений}\\ \text{на } \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1\text{, голоморфно}\\ \text{тривиальных на объедине-}\\ \text{нии } \mathbb{P}^1_\infty \cup \mathbb{P}^1_\infty\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{центрированные го-}\\ \text{ломорфные сферы}\\ f : \mathbb{P}^1 \to \Omega G\text{, которые}\\ \text{переводят } \infty \text{ в ноль}\\ \text{пространства } \Omega G\end{array}\right\}.$$

2.1.6 Гипотеза о гармонических сферах

Из теоремы Дональдсона и теоремы Атьи следует, что существует взаимно-однозначное соответствие между следующими пространствами:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{пространство}\\ \text{модулей } G\text{-}\\ \text{инстантонов на}\\ \mathbb{R}^4\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{центрированные голо-}\\ \text{морфные сферы } f :\\ \mathbb{P}^1 \to \Omega G\end{array}\right\}.$$

Таким образом, имеется соответствие между локальными минимумами двух функционалов, введенных ранее, а именно, функционала Янга–Миллса, определенного на калибровочных G-полях на $\mathbb{R}^4$, и функционала энергии, определенного на гладких сферах в пространстве петель ΩG. Напомним, что локальными минимумами функционала Янга–Миллса являются инстантоны и анти-инстантоны на $\mathbb{R}^4$, в то время как локальными минимумами функционала энергии являются голоморфные и антиголоморфные сферы в пространстве петель ΩG. Заменяя локальные минимумы всеми экстремальными точками этих функционалов, мы приходим к *гипотезе о гармонических сферах*, утверждающей, что должно существовать взаимно-однозначное соответствие между следующими пространствами:

$$\left\{\begin{matrix}\text{пространство модулей}\\ G\text{-полей Янга–Миллса}\\ \text{на } \mathbb{R}^4\end{matrix}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{центрированные гар-}\\ \text{монические сферы } f:\\ \mathbb{P}^1 \to \Omega G\end{matrix}\right\}.$$

Этот переход от локальных минимумов ко всем экстремальным точкам функционалов можно рассматривать как в некотором роде "овеществление". Действительно, если мы заменим гладкие сферы в правой части соответствия на гладкие функции $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, тогда указанная процедура сведется к замене голоморфных и антиголоморфных функций на произвольные гармонические функции (которые в этом случае представляются суммой голоморфных и антиголоморфных функций). В случае гладких сфер в пространстве петель ΩG этот переход от голоморфных и антиголоморфных сфер к гармоническим становится нетривиальным из-за нелинейности уравнений Эйлера–Лагранжа для функционала энергии.

К сожалению, прямое обобщение теоремы Атьи–Дональдсона на гармонический случай не представляется возможным, так как доказательство теоремы Дональдсона, использующее метод монад, является "чисто голоморфным"и напрямую не обобщается на гармонические отображения. Однако, в [36] был предложен другой путь доказательства сформулированной гипотезы. А именно, можно попробовать редуцировать доказательство гипотезы о гармонических сферах к голоморфному случаю с помощью "поднятия"обеих сторон соответствия на ассоциированные с ними твисторные пространства.

Ключевым в таком подходе является продолжение твисторной конструкции гармонических отображений, изложенной в разделе 2.1.4, на случай отображений в бесконечномерные многообразия. Более точно, нам потребуется бесконечномерное обобщение процедуры построения гармонических отображений в комплексное грассманово многообразие $G_r(\mathbb{C}^d)$, изложенное в разделе 2.2.2.

2.2 Гармонические отображения в комплексные грассмановы многообразия

В этом разделе мы изучим гармонические отображения из римановых поверхностей в комплексные грассмановы многообразия $G_r(\mathbb{C}^d)$.

2.2.1 Гармонические отображения в римановы многообразия

Сначала мы напомним общие свойства гармонических отображений в римановы многообразия.

Пусть $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ — гладкое отображение риманова многообразия M с римановой метрикой g в риманово многообразие N с римановой метрикой h. Определим *энергию* отображения φ как интеграл Дирихле

$$E(\varphi) = \frac{1}{2} \int_M |d\varphi(p)|^2 \mathrm{vol}_g \,. \tag{2.2.1}$$

Норму дифференциала можно вычислить в локальных координатах следующим образом. Через (x^i) обозначим локальные координаты в точке $p \in M$ и через (u^α) — локальные координаты в точке $q = \varphi(p) \in N$. Тогда

$$|d\varphi(p)|^2 = \sum_{i,j} \sum_{\alpha,\beta} g^{ij} \, \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} \, \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x^j} \, h_{\alpha\beta}$$

где $\varphi^\alpha = \varphi^\alpha(x)$ — компоненты отображения φ, (g_{ij}) и $(h_{\alpha\beta})$ — метрические тензоры многообразий M и N соответственно, (g^{ij}) — обратная матрица к (g_{ij}), а vol_g — элемент объема матрики g.

Гладкое отображение $\varphi : M \to N$ называется *гармоническим*, если оно является экстремальной точкой функционала $E(\varphi)$ относительно всех гладких отображений φ с компактными носителями.

Уравнения Эйлера–Лагранжа для функционала энергии $E(\varphi)$, называемые иначе *уравнениями гармонических отображений*, в локальных координатах (x^i) на многообразии M и локальных координатах (u^α) на N:

$$\Delta_M \varphi^\gamma + \sum_{i,j} g^{ij} \sum_{\alpha,\beta} {}^N\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(\varphi) \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi^\beta}{\partial x_j} = 0 \tag{2.2.2}$$

где Δ_M — это стандартный оператор Лапласа–Бельтрами на M, задаваемый формулой

$$\Delta_M \varphi^\gamma = \sum_{i,j} g^{ij} \left\{ \frac{\partial^2 \varphi^\gamma}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_k {}^M\Gamma^k_{ij} \frac{\partial \varphi^\gamma}{\partial x_k} \right\} \,.$$

Здесь через ${}^M\Gamma^k_{ij}$ мы обозначаем символ Кристоффеля многообразия M; соответственно, ${}^N\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ — символ Кристоффеля связности Леви–Чивита многообразия N.

В частном случае, когда многообразие $N = \mathbb{R}^n$, уравнение (2.2.2) становится линейным и сводится к уравнению Лапласа–Бельтрами

$$\Delta_M \varphi^\gamma = 0 \ , \quad \gamma = 1, \ldots, n$$

на компоненты отображения φ.

Предположим, что риманово многообразие (M, g) снабжено комплексной (или почти комплексной) структурой ${}^M J$, совместимой с римановой метрикой g, и, аналогично, риманово многообразие (N, h) снабжено комплексной (или почти комплексной) структурой ${}^N J$, совместимой с римановой метрикой h.

Напомним, что гладкое отображение $\varphi : M \to N$ называется *(псевдо)голоморфным*, если касательное отображение $\varphi_* : TM \to TN$ коммутирует с (почти) комплексными структурами на M и на N, то есть

$$\varphi_* \circ {}^M J = {}^N J \circ \varphi_* \ ,$$

и называется *анти(псевдо)голоморфным*, если отображение φ_* антикоммутирует с (почти) комплексными структурами на M и на N.

Комплексифицированное касательное расслоение $T^{\mathbb{C}} M = TM \otimes \mathbb{C}$ можно разложить в прямую сумму

$$T^{\mathbb{C}} M = T^{1,0} M \oplus T^{0,1} M$$

подрасслоений со слоями, которые являются $(\pm i)$-собственными подпространствами оператора почти комплексной структуры ${}^M J$. Если продолжить комплексно-линейно касательное отображение φ_* на комплексифицированные касательные расслоения, мы получим отображение $\varphi_* \colon T^{\mathbb{C}} M \to$

$T^{\mathbb{C}}N$, которое в соответствии с указанным выше разложением раскладывается в сумму четырех операторов:

$$\partial'\varphi\colon T^{1,0}M \to T^{1,0}N \quad , \quad \partial''\varphi\colon T^{0,1}M \to T^{1,0}N \ , \tag{2.2.3}$$

$$\partial'\bar{\varphi} = \overline{\partial''\varphi}\colon T^{1,0}M \to T^{0,1}N \quad , \quad \partial''\bar{\varphi} = \overline{\partial'\varphi}\colon T^{0,1}M \to T^{0,1}N \ . \tag{2.2.4}$$

Введенные операторы можно рассматривать как сечения расслоения $(T^*M)^{\mathbb{C}} \otimes \varphi^{-1}(T^{\mathbb{C}}N)$. В этих обозначениях отображение φ является псевдоголоморфным (соответственно, антипсевдоголоморфным) тогда и только тогда, когда $\partial''\varphi = 0$ (соответственно, $\partial'\varphi = 0$).

Можно показать (см. [17]), что для (почти) кэлеровых многообразий (псевдо)голоморфные и анти(псевдо)голоморфные отображения $\varphi : M \to N$ являются локальными минимумами функционала энергии $E(\varphi)$, но в общем случае существуют неминимальные экстремальные точки функционала $E(\varphi)$, то есть существуют неминимальные гармонические отображения.

Ограничимся теперь случаем, когда многообразие M — компактная риманова поверхность. Через ∇ обозначим связность в расслоении $\varphi^{-1}(T^{\mathbb{C}}N)$ на M, индуцированную связностью ${}^N\nabla$ на римановом многообразии N. Если z — локальная комплексная координата на M, то

$$\delta\varphi = \varphi_*(\partial/\partial z), \quad \bar{\delta}\varphi = \varphi_*(\partial/\partial \bar{z})$$

где $\delta\varphi$ и $\bar{\delta}\varphi$ рассматриваются как сечения расслоения $\varphi^{-1}(T^{\mathbb{C}}N)$. (Мы обозначаем через $\delta = \nabla_{\partial/\partial z}$, $\bar{\delta} = \nabla_{\partial/\partial \bar{z}}$ компоненты связности ∇.) Дифференциал $d\varphi$ можно представить в форме

$$d\varphi = dz \otimes \delta\varphi + d\bar{z} \otimes \bar{\delta}\varphi,$$

и уравнение гармонического отображения (2.2.2) можно представить в следующем виде

$$\bar{\delta}\delta\varphi = \left(\nabla_{\partial/\partial\bar{z}}\varphi_*\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = 0\ . \tag{2.2.5}$$

Эквивалентная формулировка

$$\delta\bar{\delta}\varphi = \left(\nabla_{\partial/\partial z}\varphi_*\right)\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\right) = 0\ .$$

Если многообразие N кэлерово, то в соответствии с уравнением (2.2.3),

$$\delta\varphi = \partial'\varphi + \overline{\partial''\varphi}\ , \quad \bar{\delta}\varphi = \partial''\varphi + \overline{\partial'\varphi}\ ,$$

и уравнение гармонического отображения φ принимает форму

$$\bar{\delta}\partial'\varphi = 0\ , \tag{2.2.6}$$

или, эквивалентно,

$$\delta\partial''\varphi = 0\ .$$

По теореме Кошуля–Мальгранжа (см. [23]) всякое комплексное векторное расслоение E на римановой поверхности M со связностью ∇ обладает такой единственной комплексной структурой $\mathcal{J}$, что расслоение $E \to M$ становится голоморфным векторным расслоением относительно комплексной структуры $\mathcal{J}$, для которой $\bar{\partial}_J$-оператор совпадает с $(0,1)$-компонентой $\nabla^{0,1}$ связности ∇. Эта комплексная структура $\mathcal{J}$ называется *КМ-структурой*. Утверждение также верно для главного расслоения с комплексной группой Ли в качестве слоя.

В терминах этой комплексной структуры, условие гармоничности отображения (2.2.5) значит, что $\delta\varphi$ — это голоморфное сечение расслоения $\varphi^{-1}(T^{\mathbb{C}}N)$ относительно КМ-структуры на расслоении $\varphi^{-1}(T^{\mathbb{C}}N)$, индуцированной связностью ${}^N\nabla$. Таким же образом, условие (2.2.6) означает, что $\partial'\varphi$ является голоморфным сечением расслоения $\varphi^{-1}(T^{1,0}N)$.

2.2.2 Комплексные грассмановы многообразия и флаговые расслоения

Теперь мы собираемся использовать твисторный подход для конструкции гармонических сфер, которую мы изложили в разделе 2.1.4 для случая, когда многообразие N совпадает с комплексным грассмановым многообразием $G_r(\mathbb{C}^d)$. В этом случае естественно выбрать в качестве твисторного расслоения на $G_r(\mathbb{C}^d)$ расслоение комплексных структур на многообразии $G_r(\mathbb{C}^d)$, инвариантных относительно действия унитарной группы $\mathrm{U}(d)$. Такие расслоения совпадают с флаговыми расслоениями на многообразии $G_r(\mathbb{C}^d)$, которые мы сейчас определим.

Начнем с напоминания определения флагового многообразия в $\mathbb{C}^d$. Для этого фиксируем разложение числа d в сумму натуральных чисел $d = r_1 + \cdots + r_n$ и обозначим $\mathbf{r} := (r_1, \ldots, r_n)$.

Флаговое многообразие $F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^d)$ в пространстве $\mathbb{C}^d$ *типа* $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n)$ с $d = r_1 + \ldots + r_n$ состоит из флагов $\mathcal{W} = (W_1, \ldots, W_n)$, то есть вложенной последовательности комплексных подпространств

$$W_1 \subset \ldots \subset W_n = \mathbb{C}^d,$$

такой что размерность подпространства $E_1 := W_1$ равна r_1 и размерности подпространств $E_i := W_i \ominus W_{i-1}$ равны r_i для $1 < i \leq n$.

В частности, для $\mathbf{r} = (r, d-r)$ флаговое многообразие

$$\mathcal{F}_{(r,d-r)}(\mathbb{C}^d) = \{\mathcal{E} = (E, E^{\perp}) : \dim E = r\} = G_r(\mathbb{C}^d)$$

совпадает с грассмановым многообразием r-мерных подпространств в пространстве $\mathbb{C}^d$.

Имеем следующее однородное представление флагового многообразия

$$\mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^d) = \mathrm{U}(d)/\,\mathrm{U}(r_1)\times\cdots\times\mathrm{U}(r_n)\ .$$

Имеется также другое, комплексное однородное, представление для этого многообразия:

$$\mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^d) = \mathrm{GL}(d,\mathbb{C})/\,\mathcal{P}_{\mathbf{r}}$$

где $\mathcal{P}_{\mathbf{r}}$ — это параболическая подгруппа блочных верхнетреугольных матриц вида

$$\begin{pmatrix} \underbrace{\boxed{*}\ r_1}_{r_1} & * & * & \ldots & * \\ 0 & \underbrace{\boxed{*}\ r_2}_{r_2} & * & \ldots & * \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \overset{r_n}{r_n\ \boxed{*}} \end{pmatrix}$$

с блоками размерностей $r_i \times r_i$.

Из этих однородных представлений следует, что на $\mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^d)$ существует естественная комплексная структура, которую мы обозначаем через $\mathcal{J}^1$. Более того, $\mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^d)$ с этой комплексной структурой флаговое многообразие становится кэлеровым.

В частном случае, если $\mathbf{r} = (r, d-r)$, мы получаем известное однородное представление грассманова многообразия:

$$G_r(\mathbb{C}^d) = \mathrm{U}(d)/\mathrm{U}(r)\times\mathrm{U}(d-r) = \mathrm{GL}(d,\mathbb{C})/P_{(r,d-r)}\ .$$

Теперь мы построим набор однородных флаговых расслоений на грассмановом многообразии $G_r(\mathbb{C}^c)$. Пусть $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^N)$ — флаговое многообразие типа $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n)$ в пространстве $\mathbb{C}^d$ с однородным представлением

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^N) = \mathrm{U}(d)/\mathrm{U}(r_1) \times \cdots \times \mathrm{U}(r_n) \ .$$

На уровне алгебр Ли это представление соответствует разложению комплексифицированной алгебры Ли $\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}(d)$ в прямую сумму

$$\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}(d) \cong \mathfrak{gl}(d, \mathbb{C}) \cong \overline{\mathbb{C}^d} \otimes \mathbb{C}^d \cong \big(\bar{E}_1 \oplus \cdots \oplus \bar{E}_n\big) \otimes (E_1 \oplus \cdots \oplus E_n) \cong$$
$$\cong \big[\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}(r_1) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{u}^{\mathbb{C}}(r_n)\big] \oplus \left[\bigoplus_{i<j} \big(\bar{E}_i E_j \oplus \bar{E}_j E_i\big)\right] \ . \quad (2.2.7)$$

(В последней формуле мы опустили знаки в тензорном произведении в $\bar{E}_i E_j$ и его сопряженном, чтобы сделать формулы более читаемыми. То же правило мы будем использовать и дальше.)

Из этого разложения алгебры Ли $\mathfrak{u}^{\mathbb{C}}(d)$ следует, что комплексифицированное касательное расслоение $T_o^{\mathbb{C}}\mathcal{F}$ в начале координат $o \in \mathcal{F}$ совпадает с

$$T_o^{\mathbb{C}}\mathcal{F} = \bigoplus_{i<j} D_{ij}^{\mathbb{C}} := \bigoplus_{i<j} \big(\bar{E}_i E_j \oplus \bar{E}_j E_i\big) \ .$$

Каждая компонента D_{ij} может быть снабжена двумя комплексными структурами: для одной из них ее $(1,0)$-подпространство совпадает с пространством $\bar{E}_i E_j$, для другой комплексной структуры — с $\bar{E}_j E_i$. По теореме Бореля–Хирцебруха [10] всякая $U(d)$-инвариантная комплексная структура J на $\mathcal{F}$ определяется выбором одной из двух комплексных структур на каждой компоненте D_{ij}. Почти комплексная структура $\mathcal{J}^1$, для которой

$$T_o^{1,0}\mathcal{F} = \bigoplus_{i<j} \bar{E}_i E_j \ ,$$

называется *канонической*.

Фиксируем упорядоченное подмножество $\sigma \subset \{1, \ldots, n\}$ и положим $r := \sum_{i \in \sigma} r_i$. С каждым таким подмножеством σ мы можем связать однородное расслоение

$$\pi_\sigma\colon\ \mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^N) = \frac{U(d)}{U(r_1) \times \ldots \times U(r_n)} \longrightarrow \frac{U(d)}{U(r) \times U(d-r)} = G_r(\mathbb{C}^d) \tag{2.2.8}$$

отображающее $(E_1, \ldots, E_n) \longmapsto E = \bigoplus_{i \in \sigma} E_i$.

Комплексифицированное касательное расслоение $T^{\mathbb{C}}\mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^N)$ раскладывается в прямую сумму вертикальных и горизонтальных подрасслоений. А именно, вертикальное подпространство в начале координат совпадает с $\bigoplus\limits_{i,j} D_{ij}^{\mathbb{C}}$, где $i < j$ и либо $i, j \in \sigma$, либо $i, j \notin \sigma$. Соответственно, горизонтальное подпространство в начале координат равно $\bigoplus\limits_{i,j} D_{ij}^{\mathbb{C}}$, где $i < j$ и либо $i \in \sigma, j \notin \sigma$, либо $i \notin \sigma, j \in \sigma$.

Вместе с канонической комплексной структурой $\mathcal{J}^1$ введем новую $\mathrm{U}(d)$-инвариантную почти комплексную структуру $\mathcal{J}_\sigma^2$ на $\mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^N)$, полагая ее равной $\mathcal{J}_\sigma^2 = \mathcal{J}^1$ на горизонтальных касательных векторах и $\mathcal{J}_\sigma^2 = -\mathcal{J}^1$ на вертикальных касательных векторах.

Вместе с почти комплексной структурой на $\mathcal{F}_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^N)$ имеем следующий аналог теоремы Иллса–Саламона из раздела 2.1.4.

Теорема 2.3 (Берстол–Саламон). *Флаговое расслоение*

$$\pi_\sigma : (F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^d), \mathcal{J}_\sigma^2) \longrightarrow G_r(\mathbb{C}^d),$$

с почти комплексной структурой $\mathcal{J}_\sigma^2$ является твисторным, то есть проекция $\varphi = \pi_\sigma \circ \psi$ любого голоморфного отображения $\psi : M \to F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^d)$ из римановой поверхности M в $G_r(\mathbb{C}^d)$ является гармоническим отображением $\varphi : M \to G_r(\mathbb{C}^d)$. В случае, если $M = \mathbb{P}^1$ – сфера Римана, об-

ращение этого утверждения также верно: всякая гармоническая сфера $\varphi : \mathbb{P}^1 \to G_r(\mathbb{C}^d)$ в $G_r(\mathbb{C}^d)$ может быть получена как проекция голоморфной сферы в некотором флаговом расслоении $\pi_\sigma : F_{\mathbf{r}}(\mathbb{C}^d) \to G_r(\mathbb{C}^d)$.

В разделе 2.3.2 мы обобщим эту теорему на гармонические отображения в грасманнианы Гильберта–Шмидта.

2.3 Гармонические отображения в грассманиан Гильберта–Шмидта

В этом разделе мы докажем основной результат главы — бесконечномерное обобщение теоремы Берстола–Саламона из раздела 2.2.2.

2.3.1 Грассманианы Гильберта–Шмидта

Рассмотрим комплексное гильбертово пространство H, на котором задана *поляризация.* Это означает, что пространство H можно разложить в прямую сумму

$$H = H_+ \oplus H_- \tag{2.3.1}$$

замкнутых бесконечномерных подпространств $H_\pm$. Например, в случае гильбертова пространства $H = L_0^2(S^1, \mathbb{C})$ квадратично-интегрируемых функций на S^1 с нулевым средним, имеется следующая поляризация:

$$H_\pm = \{\gamma \in H : \gamma = \sum_{\pm k > 0} \gamma_k e^{ik\theta}\}.$$

Любой ограниченный линейный оператор $A \in L(H)$ относительно поляризации (2.3.1) можно записать в следующей блочной форме

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a : H_+ \to H_+ \ , & b : H_- \to H_+ \\ c : H_+ \to H_- \ , & d : H_- \to H_- \end{pmatrix} \ .$$

Через $\mathrm{GL}(H)$ обозначим группу линейных ограниченных операторов в H с ограниченным обратным и введем *группу Гильберта–Шмидта* $\mathrm{GL}_{\mathrm{HS}}(H)$, состоящую из операторов $A \in \mathrm{GL}(H)$, для которых "внедиагональные члены"b и c являются операторами Гильберта–Шмидта. Другими словами, группа $\mathrm{GL}_{\mathrm{HS}}(H)$ состоит из операторов $A \in \mathrm{GL}(H)$, для которых "внедиагональные члены"b и c "малы"по сравнению с "диагональными членами"a и d. Через $\mathrm{U}_{\mathrm{HS}}(H)$ обозначим пересечение $\mathrm{GL}_{\mathrm{HS}}(H)$ с группой $\mathrm{U}(H)$ унитарных операторов в H.

Как и в конечномерной ситуации, имеется грассманово многообразие $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H)$, которое называется грассманианом Гильберта–Шмидта, связанное с группой $\mathrm{GL}_{\mathrm{HS}}(H)$.

Грассманиан Гильберта–Шмидта $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H)$ состоит из всех таких замкнутых подпространств $W \subset H$, что ортогональная проекция $\mathrm{pr}_+ : W \to H_+$ является оператором Фредгольма, а ортогональная проекция $\mathrm{pr}_- : W \to H_-$ является оператором Гильберта–Шмидта. Эквивалентно: $W \in \mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H)$ тогда и только тогда, когда это подпространство совпадает с таким образом ортогональной проекции $w : H_+ \to H$, что компонента $w_+ := \mathrm{pr}_+ \circ w$ является оператором Фредгольма, а компонента $w_- := \mathrm{pr}_- \circ w$ является оператором Гильберта–Шмидта.

Другими словами, $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H)$ состоит из подпространств $W \subset H$, которые "мало"отличаются от пространств H_+ в том смысле, что проекция $\mathrm{pr}_+ : W \to H_+$ "близка"к изоморфизму, а проекция $\mathrm{pr}_- : W \to H_-$ "мала".

Имеем следующее однородное представление $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H)$:

$$\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H) = \mathrm{U}_{\mathrm{HS}}(H)/\,\mathrm{U}(H_+) \times \mathrm{U}(H_-).$$

Так как $\mathrm{U}_{\mathrm{HS}}(H)$ действует транзитивно на грассманиане $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H)$, можно построить $\mathrm{U}_{\mathrm{HS}}(H)$-инвариантную кэлерову метрику на $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H)$ из скалярного произведения на касательном пространстве $T_{H_+}\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H)$ в начале координат $H_+ \in \mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H)$, инвариантного относительно действия подгруппы изотропии $\mathrm{U}(H_+)\times\mathrm{U}(H_-)$. Касательное пространство $T_{H_+}\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H)$ совпадает с пространством операторов Гильберта–Шмидта $\mathrm{HS}(H_+, H_-)$ и инвариантное скалярное произведение на нем задается по формуле

$$(A, B) \longmapsto \mathrm{Re}\left\{\mathrm{tr}(AB^\dagger)\right\}, \quad A, B \in \mathrm{HS}(H_+, H_-)\ .$$

Заметим, что мнимая часть комплексного скалярного произведения $\mathrm{tr}(AB^\dagger)$ определяет невырожденную инвариантную 2-форму на $T_{H_+}\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H)$, которая продолжается до $\mathrm{U}_{\mathrm{HS}}(H)$-инвариантной симплектической структуры на многообразии $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H)$. Следовательно, мы имеем кэлерову структуру на $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H)$, относительно которой оно становится кэлеровым гильбертовым многообразием.

Существуют очевидные препятствия к немедленному обобщению результатов, полученных в разделе 2.2.2 для конечномерных грассманианов, на многообразие $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H)$. А именно, подпространства $W \in \mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H)$ бесконечномерны, то есть в некотором смысле имеют одинаковую "бесконечную" размерность, и возникает проблема их сравнения. Однако существует замена понятия размерности для бесконечномерного грассманиана Гильберта–Шмидта, называемая ”виртуальной размерностью”, ее можно использовать для сравнения бесконечномерных подпространств.

Более детально, многообразие $\mathrm{Gr_{HS}}(H)$ имеет счетное количество связных компонент, нумеруемых индексом оператора Фредгольма w_+ для подпространства $W \in \mathrm{Gr_{HS}}(H)$. Мы говорим, что пространство W имеет *виртуальную размерность* r, если индекс оператора w_+ равен r. Через $\mathrm{G}_r(H)$ обозначим компоненту $\mathrm{Gr_{HS}}(H)$, состоящую из подпространств W виртуальной размерности r.

Тогда имеем следующее разложение многообразия $\mathrm{Gr_{HS}}(H)$ в несвязное объединение ее связных компонент $\mathrm{G}_r(H)$:

$$\mathrm{Gr_{HS}}(H) = \bigcup_r \mathrm{G}_r(H) \ . \tag{2.3.2}$$

Благодаря этому разложению изучение гармонических отображений из римановых поверхностей в $\mathrm{Gr_{HS}}(H)$ можно свести к изучению гармонических отображений в грассманианы $\mathrm{G}_r(H)$ виртуальной размерности r, с которыми можно работать так же, как и с грассмановыми многообразиями $G_r(\mathbb{C}^d)$.

2.3.2 Гармонические отображения в грассманианы Гильберта–Шмидта

Пусть M — риманова поверхность. Через $M \times H$ обозначим тривиальное расслоение $M \times H \to M$, где H — комплексное поляризованное гильбертово пространство (2.3.1). Рассмотрим подрасслоения $E \subset M \times H$ со слоями $E_p \in \mathrm{Gr_{HS}}(H)$ для точки $p \in M$. Всякое расслоение E такого вида определяет отображение $\varphi_E : M \longrightarrow \mathrm{Gr_{HS}}(H)$, задаваемое сопоставлением $\varphi_E(p) :=$ слой E_p в точке $p \in M$. Обратно, всякое отображение $\varphi : M \to \mathrm{Gr_{HS}}(H)$ определяет подрасслоение $E \subset M \times \mathrm{Gr_{HS}}(H)$.

Рассмотрим гладкое отображение из римановой поверхности M в грассманиан $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H)$. Через π и $\pi^\perp$ обозначим ортогональные проекции из $M \times H$ на подрасслоение E и его ортогональное дополнение $E^\perp$ соответственно. На расслоении E существует комплексная КМ-структура (существующая благодаря тому, что структурная группа является комплексной группой Ли–Фреше). В терминах локальной координаты z на поверхности M она определяется с помощью $\bar\partial$-оператора вида

$$\partial''_E = \pi \circ \frac{\partial}{\partial z} \circ \pi.$$

Обратный образ $\varphi_E^{-1}(T^{\mathbb{C}}\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H))$ комплексифицированного касательного расслоения $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H)$ относительно отображения φ_E допускает разложение

$$\varphi_E^{-1}(T^{\mathbb{C}}\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H)) \cong \overline{E}E^\perp \oplus \overline{E^\perp}E \ .$$

Используя разложения дифференциала φ_E, получаем следующие компоненты

$$A'_E := \pi^\perp \circ \frac{\partial}{\partial z} \circ \pi \ , \quad A''_E := \pi^\perp \circ \frac{\partial}{\partial \bar z} \circ \pi \ .$$

(Далее мы иногда будем опускать знак $\circ$, чтобы упростить формулы.) В частности, расслоение $E \subset M \times H$ голоморфно $\iff$ $A''_E = 0$, и в этом случае КМ-структура на расслоении E совпадает с комплексной структурой, индуцированной из расслоения $M \times H$. Тогда

$$0 = \pi^\perp \left[\frac{\partial}{\partial z}(\pi + \pi^\perp)\frac{\partial}{\partial \bar z} - \frac{\partial}{\partial \bar z}(\pi + \pi^\perp)\frac{\partial}{\partial z}\right]\pi =$$
$$= A'_E\partial''_E + \partial'_{E^\perp}A''_E - A''_E\partial'_E - \partial''_{E^\perp}A'_E = A'_E\partial''_E - \partial''_{E^\perp}A'_E \ .$$

Другими словами, $A'_E \in \mathrm{Hom}(E, E^\perp)$ голоморфно относительно КМ-структур на расслоениях E и $E^\perp$.

В общем случае, мы называем расслоение $E \subset M \times H$ *гармоническим*, если

$$A'_E \circ \partial''_E = \partial''_{E^\perp} \circ A'_E \ .$$

Гармоничность расслоения E эквивалентна гармоничности отображения $\varphi_E : M \to G_r(H)$ (см. [13]). Заметим также, что расслоение E является гармоническим $\iff$ его ортогональное дополнение $E^\perp$ является гармоническим.

Теперь мы перейдем к гармоническим отображениям в грассманиан Гильберта–Шмидта.

2.3.3 Голоморфные отображения во флаговые многообразия Гильберта–Шмидта

Определим сначала флаговое многообразие Гильберта–Шмидта. Для этого зафиксируем n-набор $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$ целых чисел. *Флаговое многообразие Гильберта–Шмидта* $F_{\mathbf{r}}(H)$ состоит из флагов вида

$$\mathcal{E} \equiv (E_1, \dots E_n)$$

где $E_k \equiv W_{\text{in}}$, $E_l \equiv W_{\text{out}}$ — замкнутые бесконечномерные подпространства в H и

$$E_1, \dots, E_{k-1}, E_{k+1}, \dots, E_{l-1}, E_{l+1}, \dots, E_n$$

— конечномерные подпространства со следующими свойствами:

1. проекция $\mathrm{pr}_+ : W_{\text{in}} \to H_+$ является оператором Фредгольма индекса r_k, а проекция $\mathrm{pr}_- : W_{\text{in}} \to H_-$ оператором Гильберта–Шмидта;
2. проекция $\mathrm{pr}_- : W_{\text{out}} \to H_-$ — оператор Фредгольма индекса r_l, а проекция $\mathrm{pr}_+ : W_{\text{out}} \to H_+$ — оператор Гильберта–Шмидта;

3. подпространства E_i, где $i = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, l-1, l+1, \dots, n$ — r_i-мерные подпространства в H;

4. все подпространства E_i, где $i = 1, \dots, n$, попарно ортогональны и их прямая сумма составляет все пространство H: $E_1 \oplus \ldots \oplus E_n = H$.

Для упрощения обозначений мы будем говорить, что $\mathcal{E} = (E_1, \dots E_n)$ — виртуальный флаг виртуальной размерности $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$, подразумевая, что числа r_k (соответственно, r_l) целые и равны виртуальной размерности пространства $E_k = W_{\mathrm{in}}$ (соответственно, $E_l = W_{\mathrm{out}}$), в то время как числа r_i положительны и равны размерностям пространств E_i для $i \neq k, l$.

Касательное пространство к флаговому многообразию $F_{\mathbf{r}}(H)$ в начале координат, как и в конечномерном случае, является прямой суммой четырех компонент

$$T^{\mathbb{C}}(F_{\mathbf{r}}(H)) \cong \bigoplus_{1\le i,j\neq k,l, i<j\le n} \left[\overline{E}_i E_j \oplus \overline{E}_j E_i\right] \oplus \bigoplus_{1\le i\le n, i\neq k} \left[\overline{W}_{\mathrm{in}} E_i \oplus \overline{E}_i W_{\mathrm{in}}\right]$$
$$\oplus \bigoplus_{1\le i\le n, i\neq l} \left[\overline{W}_{\mathrm{out}} E_i \oplus \overline{E}_i W_{\mathrm{out}}\right] \oplus \left[\overline{W}_{\mathrm{in}} W_{\mathrm{out}} \oplus \overline{W}_{\mathrm{out}} W_{\mathrm{in}}\right].$$

Касательное пространство к многообразию $\mathrm{Gr}_{\mathrm{HS}}(H))$ выглядит таким же образом, как и для флагового многообразия, если положить $E_i = 0$ для всех E_i, кроме $i = k, l$.

Обобщая ситуацию, изученную в разделе 2.3.2, рассмотрим произвольный набор $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_n)$ попарно ортогональных подрасслоений E_i тривиального расслоения $M \times H$ виртуальной размерности $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$, которые дают разложение $M \times H$ в прямую сумму

$$M \times H = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i.$$

Мы будем называть набор таких подрасслоений $\mathcal{E} = (E_1, \ldots, E_n)$ *движущимся флагом* на M. Он определяет, как и раньше, отображение $\psi_{\mathcal{E}} : M \to F_{\mathbf{r}}(H) \equiv \mathcal{F}$, сопоставляющее точке $p \in M$ флаг, определенный подпространствами $(E_{1,p}, \ldots, E_{n,p})$. Обратно, гладкое отображение $\psi\colon M \to \mathcal{F}$ определяет движущийся флаг $\mathcal{E} = (E_1, \ldots, E_n)$, для которого $E_i = \psi^{-1}T_i$ совпадает с обратным образом естественного тавтологического расслоения $T_i \to F_{\mathbf{r}}(H)$: слой T_i в $\mathcal{E} \in \mathcal{F}$ есть по определению подпространство E_i, $1 \leq i \leq n$.

Как и в случае грассманиана, дифференциал $\psi_{\mathcal{E}}$ определяется локально компонентами

$$A'_{ij} = \pi_i \circ \frac{\partial}{\partial z} \circ \pi_j \ , \quad A''_{ij} = \pi_i \circ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \circ \pi_j \ ,$$

где $\pi_i\colon M \times H \to E_i$ — ортогональная проекция. Заметим, что по построению $A''_{ij} = -(A'_{ji})^*$.

На каждом подрасслоении E_i тривиального расслоения $M \times H$ существует КМ-структура, которая совпадает с комплексной структурой, индуцированной из тривиального расслоения $M \times H$. Также, компоненты A'_{ij} и A''_{ij} удовлетворяют условиям гармоничности и голоморфности, описанным в разделе 2.3.2.

Введем теперь почти комплексную структуру на флаговом многообразии Гильберта–Шмидта $F_{\mathbf{r}}(H)$, аналогичную почти комплексной структуре $\mathcal{J}^2_\sigma$ из раздела 2.2.2. Как и в случае конечномерного грассманиана, почти комплексная структура на $F_{\mathbf{r}}(H)$ определяется выбором $(1,0)$-компоненты в каждом прямом слагаемом

$$T^{\mathbb{C}}(F_{\mathbf{r}}(H)) \cong \bigoplus_{1 \leq i < j \leq n} \left[\overline{E}_i E_j \oplus \overline{E}_j E_i\right] . \qquad (2.3.3)$$

Для того чтобы определить почти комплексную структуру $\mathcal{J}^2_\sigma$, фиксируем упорядоченный набор $\sigma \subset \{1, \ldots, n\}$ и для каждой пары $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i < j$, выберем $(1,0)$-компоненту в (i,j)-слагаемом в разложении (2.3.3), равную $\overline{E}_j E_i$ для $i, j \in \sigma$ или $i, j \notin \sigma$ и $\overline{E}_i E_j$ для $i \in \sigma$, $j \notin \sigma$ или $i \notin \sigma$, $j \in \sigma$.

2.3.4 Твисторное расслоение над грассманианом Гильберта–Шмидта

Построим теперь флаговое расслоение Гильберта–Шмидта над грассманианом Гильберта–Шмидта. Фиксируем упорядоченное подмножество $\sigma \subset \{1, \ldots, n\}$ и положим $r = \sum_{i \in \sigma} r_i$. Определим *флаговое расслоение Гильберта–Шмидта*

$$\pi_\sigma : F_{\mathbf{r}}(H) \longrightarrow G_r(H)$$

задаваемое отображением

$$\mathcal{E} = (E_1, \ldots, E_n) \longmapsto E := \bigoplus_{i \in \sigma} E_i.$$

Справедлив следующий результат.

Теорема 2.4. *Пусть σ — такое упорядоченное подмножество $\{1, \ldots, n\}$, что $k \in \sigma$, $l \notin \sigma$. Тогда отображение π_σ флагового многообразия Гильберта–Шмидта $F_{\mathbf{r}}(H)$, наделенного почти комплексной структурой $\mathcal{J}^2_\sigma$, в многообразие $G_r(H)$:*

$$\pi_\sigma : F_{\mathbf{r}}(H) \longrightarrow G_r(H)$$

является твисторным расслоением. Это означает, что для любой $\mathcal{J}^2_\sigma$-голоморфной кривой $\psi : M \to F_{\mathbf{r}}(H)$ ее проекция $\varphi = \pi_\sigma \circ \psi : M \to G_r(H)$ является гармоническим отображением.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать, что для любого движущегося флага $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_n)$, соответствующего $\mathcal{J}_\sigma^2$-голоморфному отображению $\psi_\mathcal{E} : M \to \mathcal{F}$, расслоение $E := \bigoplus_{i\in\sigma} E_i$ является гармоническим. Из голоморфности отображения $\psi_\mathcal{E}$ следует, что

$$A'_{ij} = 0 = A''_{ji} \quad \text{если} \quad \begin{cases} i > j & \text{и} \quad i, j \in \sigma \text{ или } i, j \notin \sigma, \\ i < j & \text{и} \quad i \in \sigma, j \notin \sigma \text{ или } i \notin \sigma, j \in \sigma. \end{cases}$$

Нужно показать, что расслоение E является гармоническим, то есть

$$A'_E \circ \partial''_E = \partial''_{E^\perp} \circ A'_E.$$

Возьмем $s < t$ с $s \in \sigma$, $t \notin \sigma$. Тогда

$$0 = \pi_t \sum_i \left[\frac{\partial}{\partial \bar z} \pi_i \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \pi_i \frac{\partial}{\partial \bar z} \right] \pi_s = \sum_i (A''_{ti} A'_{is} - A'_{ti} A''_{is}) =$$

$$\sum_{i\notin\sigma} A''_{ti} A'_{is} - \sum_{i\in\sigma} A'_{ti} A''_{is} = \left(\sum_{i\notin\sigma} A''_{ti} \right) \left(\sum_{i\notin\sigma} A'_{is} \right) - \left(\sum_{i\in\sigma} A'_{ti} \right) \left(\sum_{i\in\sigma} A''_{is} \right)$$

$$= \pi_t \left(\partial''_{E^\perp} \circ A'_E - A'_E \circ \partial''_E \right) \pi_s. \quad (2.3.4)$$

Аналогичные соотношения выполняются для $s > t$, откуда следует, что $A'_E \circ \partial''_E = \partial''_{E^\perp} \circ A'_E$, то есть расслоение E является гармоническим. $\square$

Если M — сфера Римана $\mathbb{P}^1$, можно доказать и обращение теоремы 2.4, основываясь на бесконечномерном обобщении теоремы Биркгофа–Гротендика о классификации голоморфных векторных расслоений на $\mathbb{P}^1$, которое мы обсудим в следующем разделе 2.3.5.

2.3.5 Бесконечномерная версия теоремы Биркгофа–Гротендика

Напомним, что теорема Биркгофа–Гротендика утверждает, что всякое голоморфное векторное расслоение E ранга d на $\mathbb{P}^1$ эквивалентно прямой сумме линейных расслоений $\mathcal{O}(\kappa_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}(\kappa_d)$ для некоторых целых чисел $\kappa_1 \geq \ldots \geq \kappa_d$.

В терминах функций перехода голоморфное векторное расслоение E на $\mathbb{P}^1$ определяется обратимой голоморфной $d \times d$-матричнозначной функцией f, определенной в окрестности $U_0 \cap U_\infty$ экватора сферы Римана $\mathbb{P}^1$. Множества $U_0 := \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}$ и $U_\infty := \mathbb{P}^1 \setminus \{0\}$ образуют стандартное открытое покрытие сферы $\mathbb{P}^1$. В этих терминах теорема Биркгофа–Гротендика эквивалентна факторизации функции перехода f в следующем виде

$$f(z) = f_0(z) d(z) f_\infty(z)$$

где f_0 (соответственно, f_∞) — голоморфные обратимые матричнозначные функции на U_0 (соответственно, U_∞) и $d(z)$ диагональная матричнозначная функция вида

$$d(z) = \operatorname{diag}(z^{\kappa_1}, \ldots, z^{\kappa_d}).$$

Существует другая формулировка теоремы Биркгофа–Гротендика в форме фильтрации Хардера–Нарасимхана. Предположим, что E — голоморфное векторное расслоение ранга d на $\mathbb{P}^1$, которое можно отождествить с подрасслоением ранга d тривиального расслоения на $\mathbb{P}^1$. Тогда существует фильтрация расслоения E голоморфными подрасслоениями

$$0 = \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{B}_k = E,$$

с присоединенными факторами вида

$$\mathcal{B}_i / \mathcal{B}_{i-1} \cong \underbrace{L^{\beta_i} \oplus \ldots \oplus L^{\beta_i}}_{b_i \text{ раз}},$$

где L^{β_i} — β_i-ая степень тавтологического линейного расслоения L на $\mathbb{P}^1$ и $\beta_1 > \cdots > \beta_k$. Подрасслоение $\mathcal{B}_i$ можно определить как наименьшее подрасслоение E, содержащее образы всех мероморфных сечений расслоения E с дивизорами степени, больше или равными β_i. С помощью эрмитовой метрики на $\mathbb{C}^d$, мы можем отождествить присоединенные факторы $\mathcal{B}_i/\mathcal{B}_{i-1}$ с ортогональными дополнениями B_i расслоений $\mathcal{B}_{i-1}$ в $\mathcal{B}_i$. В бесконечномерном случае из теоремы Биркгофа–Гротендика, доказанной в [34], [35], следует, что всякое голоморфное гильбертово расслоение E на $\mathbb{P}^1$ со структурной группой $\mathrm{GL}_{\mathrm{HS}}(H)$, состоящей из операторов вида $I+T$, где T — оператор Гильберта–Шмидта, эквивалентно прямой сумме конечного числа линейных расслоений и тривиального бесконечномерного гильбертова расслоения.

В терминах функций перехода голоморфное расслоение Гильберта–Шмидта E определяется голоморфной операторнозначной функцией $F(z) = I + T(z)$ со значениями в группе $\mathrm{GL}_{\mathrm{HS}}(H)$, определенная в окрестности $U_0 \cap U_\infty$. В этих терминах теорема Биркгофа–Гротендика эквивалентна факторизации функции перехода F в следующем виде

$$F(z) = F_0(z)D(z)F_\infty(z)$$

где $F_0(z) = I + T_0(z)$ (соответственно, $F_\infty(z) = I + T_\infty(z)$) — голоморфная операторнозначная функция в окрестности U_0 (соответственно, U_∞) со значениями в группе $\mathrm{GL}_{\mathrm{HS}}(H)$ и $D(z)$ — диагональная операторная функция вида

$$D(z) = \mathrm{diag}(z^{\kappa_1}, z^{\kappa_2}, \ldots)$$

где $\kappa_1 \geq \kappa_2 \geq \ldots$ — некоторые целые числа, и только конечное их число отлично от нуля.

В терминах фильтрации Хардера–Нарасимхана эта теорема означает, что существует фильтрация расслоения E голоморфными подрасслоениями

$$0 = \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{B}_s = E, \qquad (2.3.5)$$

при этом присоединенные факторы имеют вид

$$\mathcal{B}_i / \mathcal{B}_{i-1} \cong \underbrace{L^{\beta_i} \oplus \ldots \oplus L^{\beta_i}}_{b_i \text{ раз}} \cong b_i L^{\beta_i}$$

для $i = 1, \ldots, s$, $i \neq k$, и

$$\mathcal{B}_k / \mathcal{B}_{k-1} \cong E_k = W_{\text{in}}$$

где $\beta_1 > \cdots > \beta_s$. Используя эрмитову метрику на гильбертовом пространстве H, мы можем отождествить присоединенный фактор $\mathcal{B}_i/\mathcal{B}_{i-1}$ с ортогональным дополнением B_i расслоения $\mathcal{B}_{i-1}$ в расслоении $\mathcal{B}_i$. Заметим, что индуцированная комплексная структура на $\mathcal{B}_i/\mathcal{B}_{i-1}$ совпадает с комплексной КМ-структурой B_i.

2.3.6 Твисторное описание гармонических сфер в грассманианах Гильберта–Шмидта

Теперь мы готовы сформулировать обращение теоремы 2.4.

Теорема 2.5. *Пусть $\varphi : \mathbb{P}^1 \to G_r(H)$ – гармоническое отображение. Тогда существует флаговое расслоение Гильберта–Шмидта*

$$\pi_\sigma : F_{\mathbf{r}}(H) \longrightarrow G_r(H)$$

и такое $\mathcal{J}^2_\sigma$-голоморфное отображение $\psi : \mathbb{P}^1 \to F_{\mathbf{r}}(H)$, что φ совпадает с проекцией $\pi_\sigma \circ \psi$ отображения ψ.

Доказательство. Доказательство теоремы проводится аналогично конечномерному случаю (см. [12]).

Сопоставим гармоническому отображению $\varphi : \mathbb{P}^1 \to G_r(H)$ расслоение E на $\mathbb{P}^1$ и снабдим это расслоение комплексной КМ-структурой. Расслоение E, наделенное этой комплексной структурой, становится голоморфным расслоением Гильберта–Шмидта. Поэтому по теореме Биркгофа–Гротендика (в форме Хардера–Нарасимхана) существует фильтрация расслоения E голоморфными подрасслоениями

$$0 = \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{B}_s = E,$$

с присоединенными факторами вида

$$\mathcal{B}_i / \mathcal{B}_{i-1} \cong b_i L^{\beta_i}$$

для $i = 1, \ldots, s$, $i \neq k$ и такими, что $\mathcal{B}_k / \mathcal{B}_{k-1} \cong E_k = W_{\text{in}}$ и $\beta_1 > \cdots > \beta_s$ (полагаем $\beta_k = 0$, $b_k = 1$).

Можно построить аналогичную фильтрацию и для ортогонального дополнения $E^\perp$ расслоения E на $\mathbb{P}^1 \times H \to \mathbb{P}^1$:

$$0 = \mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{C}_t = E^\perp$$

с присоединенными факторами вида

$$\mathcal{C}_i / \mathcal{C}_{i-1} \cong c_i L^{\gamma_i}$$

для $i = 1, \ldots, t$, $i \neq l$, и такими, что

$$\mathcal{C}_l / \mathcal{C}_{l-1} \cong E_l = W_{\text{out}}$$

и $\gamma_1 > \cdots > \gamma_t$ (полагаем также $\gamma_l = 0$, $c_l = 1$). Мы снова отождествляем факторы $\mathcal{C}_i / \mathcal{C}_{i-1}$ с ортогональными дополнениями в $\mathcal{C}_i$ подрасслоений C_i расслоений $\mathcal{C}_{i-1}$.

Построим теперь из подрасслоений $B_1, \dots, B_s, C_1, \dots, C_t$ общий набор из $n = s + t$ подрасслоений, которые обозначим через $E_1, \dots, E_n$, так что каждое подрасслоение E_i изоморфно прямой сумме e_i копий расслоения L^{δ_i} и $\delta_1 \leq \dots \leq \delta_n$. (Если для какого-нибудь j имеем $\delta_j = \delta_{j+1}$, то располагаем соответствующие подрасслоения E_j, E_{j+1} таким образом, чтобы подрасслоение E_j соответствовало некоторому B_p , а подрасслоение E_{j+1} — некоторому C_q.) Введем подмножество $\sigma \subset \{1, 2, \dots, n\}$, определенное единственным образом равенствами

$$E = \bigoplus_{i \in \sigma} E_i, \quad E^\perp = \bigoplus_{i \notin \sigma} E_i.$$

Обозначим через $\mathcal{E} := (E_1, \dots, E_n)$ движущийся флаг, определяемый расслоениями $E_1, \dots, E_n$, а через $\psi_{\mathcal{E}} : \mathbb{P}^1 \to F_{\mathbf{r}}(H)$ отображение, сопоставляемое расслоению $\mathcal{E}$. Нужно показать, что это отображение $\mathcal{J}^2_\sigma$-голоморфно. Другими словами, что

$$A'_{ij} = 0 = A''_{ji} \quad \text{если} \quad \begin{cases} i > j & \text{и} \quad i, j \in \sigma \text{ или } i, j \notin \sigma, \\ i < j & \text{и} \quad i \in \sigma, j \notin \sigma \text{ или } i \notin \sigma, j \in \sigma. \end{cases}$$

Предположим сначала, что $i > j$ и $i, j \in \sigma$. Тогда $\delta_i > \delta_j$, и подрасслоение E_i содержится в некотором голоморфном подрасслоении $\mathcal{B}_p$ расслоения E, ортогональном E_j. Поэтому $A''_{ji} = 0$, и следовательно, $A'_{ij} = 0$. Случай $i, j \notin \sigma$ разбирается так же.

Предположим теперь, что $i < j$ и $i \notin \sigma, j \in \sigma$. Тогда расслоение $E_j = B_p$ для некоторого $B_p \subset \mathcal{B}_p$. Так как расслоение E гармоническое, дифференциал $dz \otimes A'_E$ голоморфен (см. уравнения (2.2.5), (2.2.6) в разделе 2.2.1). Здесь мы рассматриваем A'_E как сечение голоморфного расслоения $\mathrm{Hom}(E, E^\perp)$. Так как образ $A'_E(\mathcal{B}_p)$ натянут на мероморфные сечения расслоения $E^\perp$ с дивизорами степени больше, чем $\delta_j + 1$, имеем

$$A'_E(E_j) \subset \bigoplus_{q \notin \sigma,\, q > j} E_q.$$

Следовательно, $A'_{ij} = 0$ для $i < j$ и $A''_{j\,i} = 0$. Случай $i \in \sigma, j \notin \sigma$ разбирается аналогично, используя тот факт, что подрасслоение $E^\perp$ гармоническое, если расслоение E обладает этим свойством. $\square$

2.3.7 Сокращение длин гармонических расслоений

Рассмотрим снова фильтрацию Хардера–Нарасимхана (2.3.5) из раздела 2.3.5:

$$0 = \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{B}_s = E$$

с присоединенными факторами

$$\mathcal{B}_i / \mathcal{B}_{i-1} \cong \underbrace{L^{\beta_i} \oplus \ldots \oplus L^{\beta_i}}_{b_i \text{ раз}} \cong b_i L^{\beta_i}$$

для $i = 1, \ldots, s$, $i \neq k$, и $\mathcal{B}_k / \mathcal{B}_{k-1} \cong E_k = W_{\text{in}}$ с $\beta_1 > \cdots > \beta_s$. Число $\beta_1 - \beta_s$ называется *длиной* расслоения E.

Берстол и Саламон в [12] предложили процедуру уменьшения длины гармонического расслоения E, которая похожа на "вычитание унитона" Уленбек и конструкцию Валли уменьшения энергии гармонического расслоения. Конструкция Берстола–Саламона напрямую продолжается на случай бесконечномерных гармонических расслоений. Так как рассуждение по существу повторяет соответствующее рассуждение из [12], мы только формулируем основной результат.

Теорема 2.6. *Для заданного гармонического расслоения $E \subset H \times P^1$ существует такая конечная последовательность гармонических расслоений E^0,$E^1, \ldots, E^N = E$, что*

(i) $0 =$ *длина*$(E^0) <$ *длина*$(E^1) < \ldots <$ *длина*$(E^N) = \beta_1 - \beta_s$,

(ii) расслоение E^{i-1} получается из расслоения E^i или $(E^i)^\perp$ удалением голоморфного или антиголоморфного подрасслоения.

По этой теореме, любое гармоническое расслоение может быть сведено к случаю гармонического расслоения нулевой длины. Последние описываются следующим предложением.

Предложение 2.7. *Всякое гармоническое расслоение нулевой длины имеет вид*

$$E = F \ominus F_1 \ ,$$

где F_1 и F — голоморфные подрасслоения тривиального расслоения $\mathbb{P}^1 \times H$, удовлетворяющие условию $\frac{\partial}{\partial z}\Gamma(F_1) \subset \Gamma(F)$.

Глава 3

Неприводимые представления некоторых нильпотентных групп и описание их пространств модулей

3.1 Представления группы Гейзенберга с одним целым и двумя вещественными коэффициентами и пространство модулей ее неприводимых представлений

Пусть H, P, C — абелевы группы, и дано билинейное отображение

$$\langle -, - \rangle : H \times P \to C.$$

Группой Гейзенберга G мы называем множество $H \times P \times C$ с законом композиции

$$(h_1, p_1, c_1) \cdot (h_2, p_2, c_2) = (h_1 + h_2, p_1 + p_2, c_1 + c_2 + h_1 p_2).$$

Пусть $G_\chi = H_\chi PC$, где

$$H_\chi = \{h \in H \mid \chi_C(\langle h, \rangle p) = 1 \quad \forall\, p \in P\},$$

и χ_C — характер подгруппы C. Тогда G_χ — нормальный делитель группы G, который зависит только от характера χ_C. Пусть далее $H \simeq \mathbb{Z}, P \simeq C \simeq \mathbb{R}$, числа $s, t \in \mathbb{C}$ и $\chi_P(p) = e^{2\pi isp}$, $\chi_C(c) = e^{2\pi itc}$ — характеры подгрупп P и C соответственно. Тогда подгруппа H_χ тривиальна, если $t \neq 0$, и $H_\chi \simeq \mathbb{Z}$, если $t = 0$.

Определение 3.1. Пусть V_χ — пространство комплекснозначных функций f на группе G, удовлетворяющих следующим двум условиям:

- $f(hg) = \chi(h)f(g)$, $h \in H$;
- носитель функции f содержится в конечном числе классов смежности подгруппы H, то есть

$$\mathrm{Supp}(f) \subset \bigcup_{i \in I} Hg_i, \quad |I| < \infty.$$

Правые сдвиги определяют представление $\pi_\chi = \mathrm{ind}_H^G(\chi)$ группы G в пространстве V_χ. Тогда π_χ *индуцировано характером* χ *подгруппы* H или *мономиально.*

Теорема 3.2. 1. *Если* $t \neq 0$, *то:*

(1) представления π_χ *не содержат нетривиальных инвариантных подпространств относительно действия группы* G*;*

(2) пространства V_χ *бесконечномерны;*

(3) линейные преобразования, коммутирующие с действием группы G*, скалярны;*

(4) *пусть* $\chi_1 \sim (t_1, s_1)$, $\chi_2 \sim (t_2, s_2)$. *Представления* π_{χ_1} *и* π_{χ_2} *эквивалентны тогда и только тогда, когда существует такое* $h \in \mathbb{Z}$, *что*

$$\begin{cases} t_1 = t_2 \\ s_1 = s_2 + ht_1. \end{cases}$$

2. *Если* $t = 0$, *то* $G_\chi = G$ *и* π_χ *— одномерное представление группы* G.

Доказательство. 1. Разберем случай $t \neq 0$.

(1) Отождествим пространство представления V_χ с

$$D(H) \simeq D(\mathbb{Z}) = \{\delta_m |\ m \in \mathbb{Z}\}.$$

Тогда $\pi_\chi(h, p, c)\delta_m = e^{2\pi i(sp+t(c+mp))}\delta_{m-h}$. Рассмотрим отображение $\delta_m \mapsto x^m$, $D(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{C}[x, x^{-1}]$. Рассмотрим следующее действие группы G на многочлен Лорана $f(x)$:

$$\begin{aligned} &\pi(0, 0, c)f(x) = e^{2\pi itc}f(x), \\ &\pi(0, p, 0)f(x) = e^{2\pi isp}f(e^{2\pi itp}x), \\ &\pi(h, 0, 0)f(x) = x^{-h}f(x). \end{aligned}$$

Предположим, что существует $W \subset V_\chi$ — G-инвариантное подпространство. Пусть I_W — его образ при отображении $D(\mathbb{Z})$ в $\mathbb{C}[x, x^{-1}]$, который образует в $\mathbb{C}[x, x^{-1}]$ нетривиальный идеал. Обозначим $X \subset \mathbb{C}^*$ — конечное непустое множество нулей $I_W \subset \mathbb{C}$. Но $f(x) \in I_W$, поэтому $f(e^{2\pi itp}x) \in I_W$, поэтому $f(e^{2\pi itp}x) = 0$ для всех $p \in \mathbb{R}$ и $x \in X$, а значит $\{e^{2\pi itp}x \mid (p, x) \in \mathbb{R} \times X\}$ — бесконечное множество. Так как $t \neq 0$, то $I_W \equiv 0$, и следовательно представление π_χ неприводимо.

(2) Операторы $\pi_\chi(g)$ —мономиальные матрицы в базисе δ_m пространства $D(\mathbb{Z})$, где $m \in \mathbb{Z}$, следовательно $\dim V_\chi = \dim\ \mathrm{ind}_{PC}^G(\chi) = [G : PC] = \infty$.

(3) Утверждение верно для группы Гейзенберга с целыми коэффициентами $Heis(3,\mathbb{Z}) \subset Heis(3,\mathbb{Z}|2\mathbb{R}) = G$, а следовательно верно и в нашем случае (см. [30], [29]).

(4) Напомним, что спектром подгруппы $K \subset G$ относительно представления π в пространстве V называется

$$\mathrm{Spec}(K) = \{\chi : K \to \mathbb{C}^* \ \mid\ \exists\ v \in V\ \pi(k)v = \chi(k)v\ \forall k \in K\}.$$

Эквивалентность представлений π_1 и π_2 влечет совпадение их спектров относительно всех подгрупп группы G. $\mathrm{Spec}(C) = \{\chi_C\}$, $\mathrm{Spec}(P) = \{\chi_P\chi_C^h,\ h \in \mathbb{Z}\}$, следовательно

$$\begin{cases} t_1 = t_2 \\ s_1 = s_2 + ht_1 \end{cases}$$

для некоторого целого h. С другой стороны, если существует $h \in \mathbb{Z}$ такое, что

$$\begin{cases} t_1 = t_2 \\ s_1 = s_2 + ht_1, \end{cases}$$

то сплетающим оператором будет преобразование $\delta_m \mapsto \delta_{m-h}$.

2. Проверяется непосредственно.

$\square$

Определение 3.3. Пусть $\pi\colon G \to \mathrm{End}(V)$ — представление группы G. Представление π является *представлением с конечным весом* или π *удовлетворяет условию конечности веса*, если существует такая подгруппа

$H \subset G$ и такой характер χ этой подгруппы, что пространство

$$V(\chi, H) = \{v \in V \mid \pi(h)v = \chi(h)v \quad \forall h \in H\}$$

нетривиально и конечномерно.

Следуя [1], формулируем

Теорема 3.4. *Пусть π — неприводимое представление группы G в счетномерном комплексном пространстве V с конечным весом относительно подгруппы PC, тогда существует характер $\chi : PC \to \mathbb{C}^*$ такой, что $\pi \sim \pi_\chi$, то есть представление π мономиально.*

Утверждение доказывается теми же рассуждениями, что и в [1].

Определим след Tr $\pi_\chi(g)$ представления π_χ как комплекснозначную функцию на группе, вычисляемую как след оператора представления $\pi_\chi(g)$ в базисе δ_m пространства $D(\mathbb{Z})$, где $m \in \mathbb{Z}$. Легко видеть, что таким образом определенный ряд никогда не сходится. Расширим группу G как полупрямое произведение $\hat{G} = G \rtimes A$, где $A = \mathrm{Hom}(H, P) \simeq \mathbb{R}$. Тогда для $a \in A$, $h \in H$, $p \in P$ и $c \in C$ группа A действует на группу G так:

$$a(h, p, c) = (h, p + ah, c + \frac{1}{2}ah(h-1)).$$

Согласно [30], представление π_χ группы G можно продолжить до представления $\widehat{\pi}_\chi$ группы $\hat{G}$ на том же пространстве, $\widehat{\pi}_\chi = \pi_\chi \otimes \chi_A$, где χ_A — характер подгруппы A, $\chi_A(a) = e^{2\pi i u a}$. Действие группы $\hat{G}$ будет таким:

$$\hat{\pi}_\chi(m, p, c, a)\delta_n = e^{2\pi i(tc + sp + sa(n-m) + \frac{1}{2}ta(n-m)(n-m-1) + t(n-m)p)}\delta_{n-m}.$$

Тогда след представления $\widehat{\pi}_\chi(g)$ группы $\hat{G}$ определен при $Re(at) < 0$ и равен нулю при $m \neq 0$, $m \in H$. Обозначим характер расширенной группы через $\hat{\chi} = (\chi, \chi_A) = (e^{2\pi it}, e^{2\pi is}, e^{2\pi iu})$. Имеем

$$G \to \hat{G} \to A \xrightarrow{\chi_A} \mathbb{C}^*,$$

$$\mathrm{Tr}\ \widehat{\pi}_{\hat{\chi}}(g) = \mathrm{Tr}\ \hat{\pi}_\chi(g) e^{2\pi iau}.$$

По приведенным выше рассуждениям о спектрах подгрупп, дополнительно рассматривая $\mathrm{Spec}(A)$, получаем, что представления $\pi_{\hat{\chi}_1}$ и $\pi_{\hat{\chi}_2}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда существует $h \in H$ такое, что

$$\begin{cases} t_1 = t_2 \\ s_1 = s_2 + ht_1 \\ u_1 = u_2 + hs_1 + \frac{1}{2}h(h-1)t_1. \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Через $\mathbb{M}_G = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}/\sim$ обозначим пространство модулей неприводимых индуцированных представлений, где представления $\widehat{\pi}_{\hat{\chi}_1}$ и $\widehat{\pi}_{\hat{\chi}_2}$ эквивалентны, если существует такое число $h \in \mathbb{Z}$, что выполняются условия (3.1.1).

Предложение 3.5. *Представления* $\pi_{\hat{\chi}_1}$ *и* $\pi_{\hat{\chi}_2}$ *эквивалентны тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Tr}\ \widehat{\pi}_{\hat{\chi}_1}(g) = \mathrm{Tr}\ \widehat{\pi}_{\hat{\chi}_2}(g)$ *для всех* $g \in \hat{G}$*, при* $Re(at_1) < 0$ *и* $Re(at_2) < 0$.

Доказательство. Равенство следов представлений в случае их эквивалентности проверяется непосредственно.

Докажем утверждение в обратную сторону. Рассмотрим отображение:

$$F : (t, s, u) \longmapsto (e^{2\pi it}, e^{2\pi is}, e^{2\pi iu}, e^{2\pi^2 it}, e^{2\pi^2 is}, e^{2\pi^2 iu}) =$$

$$= (\lambda, z, \tau, \lambda^{'}, z^{'}, \tau^{'}).$$

Сделав при необходимости замену $F(c_1t, c_2s, u) = \hat{F}(t, s, u)$, можно считать, что числа t, s, πt, πs иррациональны и $Im(t) \neq 0$.

$$\mathrm{Tr}\ \widehat{\pi}_{\hat{\chi}}(0, p, c, a) = e^{2\pi i(tc+sp+au)} \sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i(tmp+sam+\frac{1}{2}tam(m-1))} =$$

$$= \tau^a \lambda^c z^p \sum_{m\in\mathbb{Z}} z^{am} \lambda^{mp+\frac{1}{2}am(m-1)}.$$

Согласно [30], комплексные числа (λ, z, τ) определяют линейное расслоение над семейством эллиптических кривых E_λ, где $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $|\lambda| \neq 1$, так как $Im(t) \neq 0$. Так как $e^{2\pi it} = \lambda$, отображение

$$exp(2\pi i -) : \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}t) \to \mathbb{C}^*/\lambda^{\mathbb{Z}}$$

является изоморфизмом, то есть $E_\lambda = C^*/\lambda^{\mathbb{Z}}$ — эллиптическая кривая. Коцикл

$$\tau \mapsto \tau z^h \lambda^{\frac{1}{2}h(h-1)}$$

определяет расслоение L степени 1, а $L^{\otimes k}$ степени k, $k \in \mathbb{Z}$, на эллиптической кривой E_λ. Функции

$$\theta_{p,k}(\lambda, z) = z^p \sum_{m\in\mathbb{Z}} z^{km} \lambda^{mp+\frac{1}{2}km(m-1)}$$

при $0 \leq p \leq k-1$ составляют базис голоморфных сечений расслоения $L^{\otimes k}$ на E_λ. Имеем:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, hook] \arrow[d] & H^0(E_\lambda, L^{\otimes k})\backslash\{0\} \arrow[d] \\ E_\lambda \arrow[r, hook] & \mathbb{P}(H^0(E_\lambda, L^{\otimes k})). \end{tikzcd}$$

Таким образом получаем вложение пространства модулей $\mathbb{M}_G$ индуцированных представлений в аффинное пространство и равенства:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 \\ z_1 = z_2 \lambda^h \\ \tau_1 = \tau_2 z_1^h \lambda^{\frac{1}{2}h(h-1)}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda'_1 = \lambda'_2 \\ z'_1 = z'_2 {\lambda'}_1^h \\ \tau'_1 = \tau'_2 {z'}_1^h {\lambda'}_1^{\frac{1}{2}h(h-1)}. \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$\begin{cases} t_1 = t_2 \\ s_1 = s_2 + ht_1 \\ u_1 = u_2 + hs_1 + \frac{1}{2}h(h-1)t_1, \end{cases}$$

что и требовалось. □

Мы убедились, что таким образом определенные характеры представления π_χ выполняют свою классическую функцию — совпадают для разных представлений тогда и только тогда, когда эти представления эквивалентны. Сформулируем теперь наш аналог формулы характеров.

Предложение 3.6. *Для группы $\hat{G} = Heis(3, \mathbb{Z}|2\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}$ имеем:*

- *При $t \to 0$ представление π_χ раскладывается в бесконечную прямую сумму одномерных представлений $\mu = \mu' \otimes \chi_P \otimes 1$, где μ' пробегает все характеры подгруппы H.*

- *Элементы (h, p, c, a) и (h', p', c', a'), где $h, h' \neq 0$ сопряжены в $\hat{G}$, если $h = h'$, $a = a'$. Если $h = 0$, то элемент $(0, p, c, a)$ сопряжен $(0, p', c', a')$ тогда и только тогда, когда существует число $n \in \mathbb{Z}$*

такое, что

$$\begin{cases} p' = p + an \\ c' = c + pn + \frac{1}{2}an(n-1) \\ a = a'. \end{cases}$$

- *Если элементы* $g = (0, p, c, a)$, $g' = (0, p', c', a')$ *не сопряжены в* $\hat{G}$, *то*

$$\int_{\mathbb{M}_G} \mathrm{Tr}\ \widehat{\pi}_{\hat{\chi}}(g) \overline{\mathrm{Tr}\ \widehat{\pi}_{\hat{\chi}}(g')} d\mu = 0.$$

- *При* $Re(at) < 0$ *выполняется равенство*

$$\chi_P(p)\chi_C(c) = lim_{l \to \infty} \mathrm{Tr}\ \widehat{\pi}_{\chi}(0, p, c, la)$$

для $p \in P$, $c \in c$, $l \in \mathbb{N}$.

3.2 О неприводимых представлениях с конечным весом одной дискретной нильпотентной группы

Мы сохраняем обозначения предыдущего раздела. Пусть G — группа унипотентных матриц 4×4 с целыми коэффициентами, $\pi : G \to \mathrm{End}(V)$ ее неприводимое представление в комплексном не более чем счетномерном пространстве. Группа G является нильпотентной группой класса нильпотентности 3.

Теорема 3.7. *Неприводимое представление* π *мономиально, то есть индуцировано с одномерного представления некоторой своей подгруппы, тогда и только тогда, когда оно является представлением с конечным весом.*

Лемма 3.8. *Пусть $V(H, \chi)$ нетривиальное конечномерное весовое подпространство пространства представления V, $g \in G$ - элемент группы G, коммутирующий со всеми элементами подгруппы H. Тогда существует характер $\chi' : H' \to \mathbb{C}^*$, $H' =< H, g >$ такой, что $V(H', \chi')$ нетривиально и конечномерно.*

Утверждение следует из того, что $\pi(g)V(H, \chi) = V(H, \chi)$, $\pi(h)\pi(g) = \pi(g)\pi(h)$ для всех $h \in H$, то есть $\pi(H')$ действует на конечномерном пространстве $V(H, \chi)$, а коммутирующие операторы имеют одинаковый жорданов базис для конечномерных пространств, следовательно имеют хотя бы один общий собственный вектор, это и дает продолжение характера χ на H'.

Следствие 3.9. *Если весовая подгруппа не содержит элемента, порождающего центр группы G, то его всегда можно добавить в весовую подгруппу, получая таким образом условие конечности веса относительно большей подгруппы.*

Всюду далее считаем, что весовая подгруппа H содержит центр группы G.

Имеем следующую точную последовательность:

$$1 \to [G, G] \to G \xrightarrow{\mathrm{pr}} G/[G, G] \to 1$$

Для всякой подгруппы $H \subset G$ имеем

$$1 \to [G, G] \cap H \to H \to \mathrm{pr}(H) \to 1.$$

Будем обозначать элемент группы G

$$g \sim \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

здесь целые числа a, d и f

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

определяют проекцию g в $G/[G,G]$, числа b и e

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & e \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

определяют образ G в $[G,G]/Z(G)$, и число c определяет

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

пересечение с центром $Z(G)$.

Приведем без доказательства следующие утверждения.

Предложение 3.10. *[1] Пусть π — такое неприводимое представление нильпотентной дискретной группы G, что существует нормальная под-*

группа $H \subset G$, для которой выполняется условие конечности веса представления π. Тогда представление π мономиально.

Предложение 3.11. *[11] Пусть π — неприводимое конечномерное представление нильпотентной дискретной группы G, тогда π мономиально.*

Перейдем к основной теореме этого раздела.

Теорема 3.12. *Неприводимое представление π группы G унипотентных матриц 4×4 с целыми коэффициентами мономиально тогда и только тогда, когда оно является представлением с конечным весом.*

Необходимость в условии теоремы 3.12 следует из критерия Макки и двойственности Фробениуса ([24], [38]), по которым вычисляются $\mathrm{End}_G\left(\mathrm{ind}_H^G(\chi)\right)$. А именно, из неприводимости представления $\mathrm{ind}_H^G(\chi) = \pi$ следует, что характер χ однократно входит в представление π. Имеем

$$\mathrm{End}_G\left(\mathrm{ind}_H^G(\chi)\right) = \bigoplus_{\{g \in G | [H^g \cap H : H] < \infty\}} \mathrm{Hom}_{H^g \cap H}\left(\chi|_{H^g \cap H}, \chi|_{H^g \cap H}\right).$$

Будем теперь доказывать достаточность в утверждении теоремы 3.12, разбирая различные ранги весовых подгрупп. Мы разберем все логические возможности рангов весовых подгрупп (m, n), $0 \le m \le 3$, $0 \le n \le 2$ и их характеров, либо сводя их к весовым подгруппам большего ранга, либо доказывая неприводимость соответствующих индуцированных представлений. Таким образом, мы получим список рангов весовых подгрупп, индукция с которых может быть неприводима. Остальные ранги не реализуются либо из тех соображений, что подгрупп с соответстующими рангами не существует, либо эти подгруппы могут быть увеличены с сохранением весового условия. Для нильпотентных конечно порожденных групп верна лемма Шура. А именно, если представление π неприводимо, то $\mathrm{End}_G(\pi) = \mathbb{C}$. Обращение этой леммы в случае неунитарных представлений в общем случае неверно, в главе 4 будут построены примеры. Тем не менее для случая унипотентных матриц 4×4 с целыми коэффициентами и индуцированных с весовых подгрупп представлений мы неявно докажем обращение леммы Шура. Для всех весовых подгрупп H из нетривиальности $\mathrm{End}_G\left(ind_H^G(\chi)\right)$ будет следовать, что в весовую подгруппу H можно добавить какие-нибудь элементы с сохранением весового условия, в то время как из $\mathrm{End}_G\left(\mathrm{ind}_H^G(\chi)\right) = \mathbb{C}$ будет следовать, что соответствующее представление неприводимо.

- Ранг $(0,0)$.

  Условие конечности веса относительно подгруппы такого ранга означает, что представление π конечномерно, а для конечномерных представлений утверждение выполняется по предложению 3.11.

- Ранг $(1,0)$.

  Ранг весовой подгруппы может быть увеличен добавлением коммутирующего элемента, который можно добавить по лемме 3.8. Пусть кроме образующего элемента центра $Z(G)$ в весовую подгруппу входит образующий вида:

$$h_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & a & b & 0 \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Но тогда элемент

$$g_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & f \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

коммутрирует с h_1 и, очевидно, с центральным элементом, то есть со всей подгруппой H, поэтому его можно добавить в весовую подгруппу.

- Ранг $(0, 1)$.

  Имеем

$$h_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & e \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

  Но тогда элемент

$$g_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  коммутрирует с h_1, следовательно, со всей подгруппой H. Поэтому его можно добавить в весовую подгруппу, тем самым увеличив ее ранг.

- Ранг $(1, 1)$.

Образующие весовой подгруппы имеют вид

$$h_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & a & b_1 & 0 \\ 0 & 1 & d & e_1 \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, h_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, h_3 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через λ значение характера χ на образующем элементе центра группы G, тогда $\chi(h_1 h_2 h_1^{-1} h_2^{-1}) = \lambda^{ae_2 - b_2 f} = 1$, так как χ — характер подгруппы H. Поэтому либо $ae_2 - b_2 f = 0$, либо $\lambda^N = 1$ для некоторого целого N (вероятно, меньшего по модулю числа $|ae_2 - b_2 f|$).

1. Если $\lambda^N = 1$, то весовая подгруппа может быть дополнена порождающими $g_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & N & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $g_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & N \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, таким образом мы получим весовое условие относительно большей подгруппы.

2. Пусть теперь $\lambda^N \neq 1$ ни для какого целого N. Тогда $ae_2 - b_2 f = 0$, то есть пары целых чисел пропорциональны: $(b_2, e_2) = const \cdot (a, f)$.

$a.$) Разберем сначала случай, когда $a \neq 0$, $f \neq 0$. Пусть $W = ind_H^G(\chi)$, где H — весовая подгруппа. Отождествим пространство представления с дельта-функциями на смежных классах по весовой подгруппе, то есть функциями равных единице на смежном классе

$\begin{pmatrix} 1 & a_0 & b_0 & 0 \\ 0 & 1 & m & n \\ 0 & 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, где $a_0 < a$, $b_0 < ca$, и равных нулю на остальных смежных классах. Предположим, что существует инвариантное подпространство $W_0 \subset W$. С помощью действия группы G на функции из W_0 и взятия их линейных оболочек, мы покажем, что можно получить функцию с носителем в $\delta(a_0, b_0, m, n, k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ по модулю H, что приведет нас к противоречию, так как из $\delta(a_0, b_0, m, n, k)$ действие группы G и взятием линейных оболочек, очевидно, можно получить любую функцию пространства W.

Подействуем элементом h_2 на произвольную функцию из инвариантного подпространства $W_0 \subset W$. Рассмотрим это действие на мономах, и везде дальше будем рассматривать действия порождающих весовой подгруппы только на них (так как произвольная функция из W является линейной комбинацией таких мономов): $\delta(a_0, b_0, m, n, k)$:

$$\pi(h_2)\delta(a_0, b_0, m, n, k) = \chi(h_2)\lambda^{-ak+fa_0}\delta(a_0, b_0, m, n, k),$$

следовательно с помощью действия h_2 на функцию из инвариантного подпространства и взятия линейных комбинаций, можем получить функцию из W_0, у которой $a_0 = k = 0$.

Пусть

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

тогда $\pi(g_1)\delta(0, b_0, m, n, 0) = \delta(0, 0, m, n+1, 0)$. Подействуем теперь на полученную на предыдущем шаге функцию, не содержащую a_0 и k, элементом h_1 :

$$\pi(h_1)\delta(0, b_0, m, n, 0) = \chi(h_1)\chi(h_2)^m \lambda^{-afm-an+fb_0}\delta(0, b_0, m, n+2fm, 0),$$

таким образом, носитель функции меняется только по n. Возьмем функцию из W_0 с носителем по $a_0 = k = 0$ и с минимальным носителем по m, b_0 (имеется в виду, что носитель содержится в минимальном числе смежных классов по m, b_0), подействуем на нее элементом h_1, скалярный коэффициент при каком-нибудь мономе (дельта-функции) должен измениться, если изменился только скалярный множитель, то вычтем с соответствующим коэффициентом из функции ее образ при действии h_1, получим функцию с меньшим носителем по m, b_0. Если изменился не только скалярный множитель, но и носитель по n, то с помощью g_1 сделаем коэффициенты при измененном мономе у функции и ее образа при действии h_1 одинаковыми (это не меняет носителя по m, b_0 и скалярных коэффициентов), и снова вычтем, получим функцию с меньшим носителем по m, b_0. Таким образом получим функцию в W_0, содержащую единственный смежный класс по m, b_0, которые сдвигами

$$g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

делаем равными нулю. Теперь при действии h_1 на $\delta(0,0,0,n,0)$ имеем:

$$\pi(h_1)\delta(0,0,0,n,0) = \chi(h_1)\lambda^{-an}\delta(0,0,0,n,0),$$

то есть носитель функции по n тоже можно свести к $n = 0$. Таким образом, мы показали, что $\delta(0,0,0,0,0) \in W_0$, следовательно $W_0 = W$.

b.) Пусть теперь $f = 0$, $a \neq 0$. Случай $f \neq 0$, $a = 0$ разбирается аналогично. Тогда образ элемента

$$g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\pi(g_2)$ коммутирует со всеми элементами подгруппы $\pi(H)$ (так как $\lambda^{fb} = \lambda^0 = 1$), поэтому мы его добавляем в весовую подгруппу, и в предыдущих обозачениях имеем $b_0 = 0$. Аналогично, действуя элементом h_2, получаем, что от зависимости от k можем избавиться (от a_0 не можем, так как $f = 0$). Подействуем теперь элементом h_1:

$$\pi(h_1)\delta(a_0,0,m,n,0) = \chi(h_1)\chi(g_2)^{da_0}\lambda^{e_2a_0-an}\delta(a_0,0,m,n,0),$$

таким образом, если $d \neq 0$ или $e_2 \neq 0$, то коэффициентым при мономах меняются пропорционально a_0 и n, то есть можем свести к функции, у которой $a_0 = n = 0$. Если $d = e_2 = 0$, то с H также коммутируют элементы

$$g_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, g_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и это дает нормальную весовую подгруппу, а для нее верно утверждение по предложению 3.10.

$c.$) Если $f = 0$, $a = 0$, то весовая подгруппа сводится к нормальной подгруппе с образующими

$$h_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, h_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$h_3 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, h_4 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и утверждение верно по предложению 3.10.

- Ранг $(1, 2)$.

Так как промежуточный ранг n равен 2, образующие весовой подгруппы всегда можно привести к следующему виду

$$h_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & a & b_1 & 0 \\ 0 & 1 & d & e_1 \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, h_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$h_3 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, h_4 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Имеем $\lambda^{b_2 f} = \lambda^{e_2 a} = 1$, так как $h_1 h_2 h_1^{-1} h_2^{-1} = h_4^{b_2 f}$ и $h_1 h_3 h_1^{-1} h_3^{-1} = h_4^{e_2 a}$, а χ — характер подгруппы H. Пусть b_2 и e_2 минимальные, удовлетворяющие этому условию $\lambda^{b_2 f} = \lambda^{e_2 a} = 1$, иначе по лемме можем меньшие кратные элементы в весовую подгруппу добавить, как коммутирующие в образе π на пространстве $V(H, \chi)$. Всякая функция в пространстве представления $W = ind_H^G(\chi)$ может быть приведена к виду конечной линейной комбинации элементов вида $\delta(a_0, b_0, m, e_0, k)$, где $a_0 < a$, $e_0 < e_2$ и $b_0 < b_2$.

a.) Разберем случай $a \neq 0$, $f \neq 0$. Подействуем элементом h_3 на функцию из W_0 - инвариантного подпространства W:

$$\pi(h_3)\delta(a_0, b_0, m, e_0, 0) = \chi(h_3)\lambda^{e_2 a_0}\delta(a_0, b_0, m, e_0, 0),$$

таким образом, есть функция в W_0 с $a_0 = 0$ (тут важно, что e_2 минимально, поэтому множитель $\lambda^{e_2 a_0} \neq 1$, так как $a_0 < a$). Подействуем элементом h_1 на функцию из W_0 с $a_0 = 0$:

$$\pi(h_1)\delta(0, b_0, m, e_0, 0) = \chi(h_1)\chi(h_2)^{b(m)}\chi(g_3)^{e(k,m,n)}\lambda^{adk - afm - an - bk + b_0 f}\delta(0, b_0', m, e_0',$$

где остаток от деления на e_2: $e_0^{'} = [-dk + fm + n] \bmod e_2$, $e(k, m, n) = \frac{-dk+fm+n-e_0^{'}}{e_2}$, а остаток от деления на b_2: $b_0^{'} = [-am+b_0] \bmod b_2$, $b(m) = \frac{-am+b_0-b_0^{'}}{b_2}$. Носитель функции по b_0, e_0 конечен, по m и k носитель функции не меняется, а скалярные коэффициенты при мономах при действии h_1 меняются каждый раз, таким образом находим функцию в W_0 с $m = k = b_0 = e_0 = 0$.

b.) Разберем теперь случай $a \neq 0$, $f = 0$. Аналогично предыдущему, находим функцию с $a_0 = 0$. Подействуем h_1 на функцию из W_0 с $a_0 = 0$:

$$\pi(h_1)\delta(0, b_0, m, e_0, 0) = \chi(h_1)\chi(h_2)^{b(m)}\chi(h_3)^e\lambda^{adk-an-bk}\delta(0, b_0^{'}, m, e_0^{'}, 0),$$

где остаток от деления на e_2: $e_0^{'} = [-dk+n] \bmod e_2$, $e(k, n) = \frac{-dk+n-e_0^{'}}{e_2}$, а остаток от деления на b_2: $b_0^{'} = [-am + b_0] \bmod b_2$, $b(m) = \frac{-am+b_0-b_0^{'}}{b_2}$. Если $b \neq 0$ или $d \neq 0$, то по предыдущему, пользуясь тем, что носитель по m и k не меняется, а по e_0 и b_0 меняется, но по конечному множеству, при этом меняются коэффициенты при мономах пропорционально носителям функции, находим функцию в W_0 с $m = k = b_0 = e_0 = 0$. Если же $b = d = 0$, то нужно добавить в весовую подгруппу элемент

$$g_5 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ae_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

тем самым перейдя к весовой подгруппе большего ранга.

c.) В случае $a = f = 0$, то как и в конце предыдущего пункта сводим к нормальной весовой подгруппе, порожденной элементами

$$\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

- Ранг $(2,0)$.

  Предполагаем изначально, что не существует такого целого N, что $\lambda^N = 1$, иначе сразу можем перейти к весовой подгруппе большего ранга: можем добавить оба элемента

$$\begin{pmatrix}1&0&N&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&N\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

  коммутирующие в образе π с $\pi(H)$ на весовом пространстве $V(H,\chi)$.

  Несложно показать, что образующие такой весовой группы должны иметь следующий вид (иначе в промежуточном ранге обязательно будет еще один образующий элемент весовой подгруппы — коммутатор этих двух образующих):

$$h_1 \sim \begin{pmatrix}1&a&b_1&0\\0&1&0&e_1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}, h_2 \sim \begin{pmatrix}1&0&b_2&0\\0&1&0&e_2\\0&0&1&f\\0&0&0&1\end{pmatrix}, h_3 \sim \begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Таким образом, любую функцию в пространстве представления $W = \mathrm{ind}_H^G(\chi)$ можно представить как конечную линейную комбинацию элементов вида $\delta(a_0, l, m, n, f_0)$, где $a_0 < a$, $f_0 < f$. Подействуем элементом g_1 на функцию из W_0 — инвариантного подпространства W:

$$\pi(h_1)\delta(a_0, l, m, n, f_0) = \chi(h_1)\lambda^{-an+e_1a_0-b_1f_0}\delta(a_0, l - am, m, n, f_0),$$

а h_2 действует так:

$$\pi(h_2)\delta(a_0, l, m, n, f_0) = \chi(h_2)\lambda^{e_2a_0-b_2f_0+fl}\delta(a_0, l, m, n + fm, f_0),$$

то есть меняется носитель функции по l и по n, но по этим переменным в группе G есть сдвиги, которые не меняют остальных носителей и коэффициентов при мономах:

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

такие что

$$\pi(g_1)\delta(a_0, l, m, n, f_0) = \delta(a_0, l + 1, m, n, f_0),$$

$$\pi(g_2)\delta(a_0, l, m, n, f_0) = \delta(a_0, l, m, n + 1, f_0).$$

Поэтому сначала с помощью сдвигов по n или l, стартуя с функции содержащей минимальный носитель по m, мы построим функцию с $m = 0$, а дальше носитель функции при действии h_1 и h_2 меняться уже не будет, в то время как коэффициенты будут меняться пропорционально всем носителям, иначе те элементы, которые не меняют центрального характера, нужно добавить в весовую подгруппу, как коммутирующие в образе π с весовой подгруппой H.

- Ранг $(2,1)$. Предполагаем снова, что не существует такого целого N, что $\lambda^N = 1$, иначе можем перейти к весовой подгруппе большего ранга $(2,2)$.

  Образующие такой весовой группы должны иметь следующий вид:

$$h_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & a_1 & b_1 & 0 \\ 0 & 1 & d_1 & e_1 \\ 0 & 0 & 1 & f_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, h_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & 1 & d_2 & e_2 \\ 0 & 0 & 1 & f_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$h_3 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & e_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, h_4 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

  Изучим условия на эти образующие, получающиеся из того, что весовая группа ранга $(2,1)$, и не больше. Во-первых, $h_3h_1 = h_1h_3$ и $h_3h_2 = h_2h_3$, иначе соответствующие коммутаторы являются нетривиальными элементами центра и $\lambda^N = 1$ для некоторого N. Но так как $\lambda^N \neq 1$ для ранга $(2,1)$, то по предыдущему $(a_1, f_1) \sim (a_2, f_2) \sim (b_3, e_3)$ — пропорциональные пары целых чисел. Во-вторых, $h_1h_2h_1^{-1}h_2^{-1} \in H$, поэтому $h_1h_2h_1^{-1}h_2^{-1} = h_3^r h_4$ для некоторого целого r, но

$$h_1h_2h_1^{-1}h_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_1d_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -f_1d_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

откуда либо $d_2 = 0$, либо $f_1 = 0$ (либо $a_1 = 0$, а не $f_1 = 0$, но такой случай разбирается аналогично $f_1 = 0$).

$a.$) При $d_2 = 0$ любая функция из W представляется как конечная линейная комбинация мономов вида $\delta(a_0, b_0, m, n, f_0)$, где $a_0 < a_1$, $b_0 < a_1$, $f_0 < f_1$ и пусть $a_1 \neq 0$, $f_1 \neq 0$. В этом случае носитель по b_0 конечен, по a_0, f_0, m не меняется при действии весовой подгруппы, а по n есть сдвиг, при этом скалярные коэффициенты при мономах пропорционально носителям меняются при действии:

$$\pi(h_3)\delta(a_0, b_0, m, n, f_0) = \chi(h_3)\lambda^{f_1a_0 - a_1f_0}\delta(a_0, b_0, m, n, f_0),$$

так находим функцию с $a_0 = f_0 = 0$ и аналогично предыдущему с помощью действия h_2 и h_1 и сдвига по n, находим функцию с $b_0 = m = n = 0$. Если теперь и $f_1 = 0$ (тогда уже $a_1 \neq 0$), то элемент $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ можно добавить в весовую группу как коммутирующий с весовой подгруппой в образе представления π на $V(H, \chi)$, поэтому $b_0 = 0$, $d_1 \neq 0$, мономы имеют вид $\delta(a_0, 0, d_0, n, k)$. Аналогично при действии весовой подгруппы по a_0, d_0 носитель конечен, по k не меняется, по n есть групповые сдвиги, и коэффициенты при действии весовой подгруппы всякий раз меняются за счет нетривиальности центрального характера λ.

$b.$) При $f_1 = 0$ любая функция из W представляется как конечная линейная комбинация мономов вида $\delta(a_0, 0, d_0, n, k)$, где $a_0 < a_1$, $d_0 < d_2$, так как элемент $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ в этом случае можно добавить в весовую группу как коммутирующий. Этот случай разбирается аналогично $d_2 = f_1 = 0$.

- Ранг $(2, 2)$.

В этом случае обязательно $\lambda^N = 1$ для некоторого N. Образующие имеют вид:

$$h_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & a_1 & b_1 & 0 \\ 0 & 1 & d_1 & e_1 \\ 0 & 0 & 1 & f_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, h_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & 1 & d_2 & e_2 \\ 0 & 0 & 1 & f_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, h_3 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$h_4 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & e_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, h_5 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\chi(h_3) = w$, $\chi(h_4) = r$. Если для каждого из этих комплексных чисел верно, что $w^M = r^K = 1$ для некоторых целых M,

K, то в весовую подгруппу можно добавить еще один коммутирующий в образе π на $V(H, \chi)$ с весовой подгруппой элемент, и таким образом представление $W = \mathrm{ind}_H^G(\chi)$ конечномерно и, следовательно, мономиально по предложению 3.11.

Поэтому пусть $r^K \neq 1$ ни для какого целого K (аналогично разбирается случай $w^M \neq 1$ ни для какого целого M), тогда всякая функция из $W = \mathrm{ind}_H^G(\chi)$ представляется в виде конечной линейной комбинации мономов вида $\delta(a_0, b_0, m, e_0, f_0)$, $\delta(a_0, b_0, d_0, e_0, k)$ или $\delta(j, b_0, d_0, e_0, f_0)$ в зависимости от образующих h_1 и h_2 (равенства или неравенства нулю a_i, d_i, f_i, $i = 1,\ 2$). Но действия образующих весовой подгруппы устроены в этом случае так, что носитель по m, k или j не меняется, остальные носители меняются на конечном множестве. Коэффициенты меняются пропорционально носителям при действии h_1, h_2, если мы изначально добавили в весовую подгруппу все элементы, коммутирующие с весовой подгруппой H в образе π на $V(H, \chi)$. Пользуясь тем, что $r^K \neq 1$, можем исключить бесконечный носитель и снова получить элемент $\delta(0, 0, 0, 0, 0)$ в подпространстве W_0, следовательно, $W_0 = W$.

- Ранг $(3, 0)$ и $(3, 1)$.

  Легко проверить, что подгрупп с такими рангами в группе G не существует (три образующие с ненулевой проекцией в $G/[G, G]$ обязательно дают ранг 2 в $[G, G]/Z(G)$).

- Ранг $(3, 2)$.

  В этом случае представление $\pi = \mathrm{ind}_H^G(\chi)$ конечномерно, а для конечномерных представлений условие теоремы выполняется по предложению 3.11. Это завершает доказательство.

Таким образом, мы доказали теорему:

Теорема 3.13. 1. *Пусть H — подгруппа группы G унипотентных матриц 4×4 с целыми коэффициентами и* $\mathrm{End}_G\left(\mathrm{ind}_H^G(\chi)\right) = \mathbb{C}$. *Тогда представление* $\mathrm{ind}_H^G(\chi)$ *неприводимо.*

2. *Пусть π — неприводимое представление с конечным весом. Тогда среди его весовых подгрупп всегда найдется подгруппа одного из следующих рангов:* $(0,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3)$ *и* $(3,3)$.

3. *Если представление π бесконечномерно, то этот список короче:* $(1,2), (1,3), (2,1), (2,2)$ *и* $(2,3)$.

Глава 4

Неприводимые представления конечно порожденных нильпотентных групп

4.1 Предварительные результаты

4.1.1 Обозначения

Зафиксируем поле K (изначально мы не делаем никаких дополнительных предположений относительно K). Для краткости, под векторным пространством мы подразумеваем (возможно, бесконечномерное) векторное пространство над полем K. Под представлением группы мы подразумеваем (возможно, бесконечномерное) представление над полем K.

На протяжении всей главы через G мы будем обозначать группу, а через H — подгруппу группы G. Для произвольного подмножества $E \subset G$ будем обозначать через $\langle E \rangle$ подгруппу группы G, порожденную множеством E.

Далее, через π обозначим представление группы G, через ρ — представление группы H, а через $\chi\colon H \to K^*$ обозначим характер группы H. Через $\pi|_H$ обозначим ограничение представления π на группу H.

Для элемента $g \in G$ обозначим через $H^g \subset G$ сопряженную подгруппу $H^g = gHg^{-1}$, а через ρ^g обозначим представление группы H^g, определенное по формуле $\rho^g(ghg^{-1}) = \rho(h)$, где $h \in H$.

Если нам понадобится сделать дополнительные предположения относительно поля K, групп или представлений, то мы будем это указывать явно.

4.1.2 Один результат из теории групп

Через $N_G(H)$ обозначим нормализатор подгруппы H в группе G.

Определение 4.1. Пусть $S(H) \subset G$ — множество всех таких элементов $g \in G$, что индекс подгруппы $H^g \cap H$ в группе H конечен.

Очевидно, имеем вложение $N_G(H) \subset S(H)$.

Пример 4.2. Пусть G является группой $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, а H является подгруппой верхнетреугольных матриц в $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Тогда прямое вычисление показывает, что $S(H) = H$.

Следующая конструкция позволит нам дать верхнюю оценку на множество $S(H)$ (см. лемму 4.5 ниже).

Определение 4.3. Пусть H^* — наименьшая подгруппа группы G, обладающая следующими двумя свойствами: H^* содержит H, и если элемент $g \in G$ удовлетворяет условию $g^i \in H^*$ для некоторого положительного целого числа i, то $g \in H^*$.

Легко показать, что группа H^* корректно определена, т. е. группа H^* существует (и единственна) для любой подгруппы $H \subset G$.

Замечание 4.4.

(i) Имеем равенство $(H^*)^* = H^*$.

(ii) Для любого элемента $g \in G$ имеем $(H^g)^* = (H^*)^g$ (ср. с [11, лемма 4(1)]).

Напомним, что группа называется *нетеровой*, если любая возрастающая цепочка ее подгрупп стабилизируется. Очевидно, данное условие равносильно тому, что любая подгруппа конечно порождена.

Лемма 4.5. *Предположим, что группа G нетерова. Тогда имеется вложение $S(H) \subset N_G(H^*)$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный элемент $g \in S(H)$. По определению индекс подгруппы $H^g \cap H$ в группе H конечен. Следовательно, существует такое положительное целое число i, что для любого элемента $h \in H$ имеем $h^i \in H^g$. Поэтому имеется вложение $H \subset (H^g)^*$. По замечанию 4.4 мы видим, что $H^* \subset (H^*)^g$. Применяя сопряжение положительными степенями элемента g, получаем возрастающую цепочку подгрупп

$$H^* \subset (H^*)^g \subset \ldots \subset (H^*)^{g^i} \subset (H^*)^{g^{i+1}} \subset \ldots$$

Поскольку группа G нетерова, эта цепочка стабилизируется. Следовательно, имеется равенство $H^* = (H^*)^g$, т. е. $g \in N_G(H^*)$. □

Следующий пример показывает, что лемма 4.5 неверна для произвольной группы G.

Пример 4.6. Пусть G является свободной группой, порожденной элементами x и y. Пусть H является подгруппой группы G, порожденной элементами $x^{-n}yx^n$, где n пробегает все положительные целые числа. Легко показать, что группа H свободно порождена этими элементами, и таким образом группа G не нетерова. Поскольку $H \subset H^x$, имеем $H^x \cap H = H$ и $x \in S(H)$. Однако подгруппа H^x содержит элемент y, который не принадлежит подгруппе H^* (на самом деле, имеется равенство $H = H^*$). Следовательно, $x \notin N_G(H^*)$.

До конца этого пункта мы будем предполагать, что группа G *нильпотентна и конечно порождена.* Оказывается, что в этом случае о множестве $S(H)$ можно сказать намного больше. Следующий ключевой результат был изначально получен Мальцевым (см. примечание в доказательстве [25, теорема 8]); полное доказательство множно найти, например, в [5, лемма 2.8].

Предложение 4.7. *Индекс группы H в группе H^* конечен.*

Другими словами, предложение 4.7 утверждает, что группа H^* — это наибольшая подгруппа группы G, содержащая группу H в качестве подгруппы конечного индекса. Равносильно, группа H^* совпадает с множеством всех корней из элементов группы H.

Замечание 4.8. Применяя предложение 4.7, можно показать, что имеется равенство $(H_1 \cap H_2)^* = H_1^* \cap H_2^*$ для всех подгрупп $H_1, H_2 \subset G$ (ср. с [11, лемма 4(2)]).

Используя предложение 4.7, Я. Браун [11, лемма 4(3),(4)] показал следующий факт.

Предложение 4.9. *Имеется равенство $N_G(H^*) = N_G(H)^*$, и данная подгруппа группы G совпадает с множеством, состоящим из всех эле-*

ментов $g \in G$, для которых индекс подгруппы $H^g \cap H$ в обеих группах H и H^g конечен.

Объединяя лемму 4.5 с предложением 4.9, мы получаем следующий полезный результат.

Теорема 4.10. *Предположим, что группа G нильпотентна и конечно порождена. Тогда верно следующее:*

(i) подмножество $S(H) \subset G$ является подгруппой;

(ii) индекс подгруппы $N_G(H)$ в группе $S(H)$ конечен;

(iii) для любой подгруппы конечного индекса $H' \subset H$ имеется равенство $S(H') = S(H)$.

Доказательство. Напомним, что нильпотентная конечно порожденная группа нетерова [26, теорема 2.18]. Поэтому из леммы 4.5 следует вложение $S(H) \subset N_G(H^*)$. По предложению 4.9 имеем обратное вложение, и поэтому множество $S(H)$ совпадает с подгруппой $N_G(H^*) = N_G(H)^*$, что доказывает п. (i). По предложению 4.7 индекс подгруппы $N_G(H)$ в группе $S(H) = N_G(H)^*$ конечен, что доказывает п. (ii). Если индекс подгруппы H' в группе H конечен, то выполняется равенство $(H')^* = H^*$. Из этого следует п. (iii), поскольку, как мы показали выше, $S(H') = N_G\big((H')^*\big)$ и $S(H) = N_G(H^*)$. □

4.1.3 Эндоморфизмы конечно индуцированных представлений

Напомним, что ρ является представлением подгруппы $H \subset G$. Через V обозначим пространство представления ρ. Пусть $V \times_H G$ является фактором множества $V \times G$ по диагональному действию группы H, заданному по формуле

$$h(v, g) = \big(\rho(h)v, hg\big)\,.$$

Имеем естественное отображение

$$p\,:\,V \times_H G \longrightarrow H\backslash G$$

в множество правых классов смежности группы G по H. Заметим, что имеются (правые) действия группы G правыми сдвигами на множествах $V \times_H G$ и $H\backslash G$, и отображение p коммутирует с этими действиями. Таким образом, можно сказать, что $V \times_H G$ — это "G-эквивариатное дискретное векторное расслоение" на $H\backslash G$.

Определение 4.11. *Конечно индуцированное представление* $\mathrm{ind}_H^G(\rho)$ — это представление группы G, пространство представления которого состоит из всех сечений отображения p, имеющих конечный носитель на $H\backslash G$. Правые сдвиги на элементы группы G определяют действие G на этом пространстве.

По *двойственности Фробениуса* (см., например, [38, глава I, § 5.7]) для любого представления π группы G имеется канонический изоморфизм векторных пространств

$$\mathrm{Hom}_G\left(\mathrm{ind}_H^G(\rho), \pi\right) \simeq \mathrm{Hom}_H\left(\rho, \pi|_H\right)\,. \tag{4.1.1}$$

Если индекс подгруппы H в группе G конечен, то имеется также канонический изоморфизм векторных пространств

$$\mathrm{Hom}_G\left(\pi, \mathrm{ind}_H^G(\rho)\right) \simeq \mathrm{Hom}_H\left(\pi|_H, \rho\right)\,. \tag{4.1.2}$$

Действительно, естественный аналог изоморфизма (4.1.2) верен для индуцированных представлений, построенных как в определении 4.11, но без предположения конечности носителей сечений (см., например, [38, глава I, § 5.4]). В случае, когда индекс подгруппы H в группе G конечен, такая индукция совпадает с конечной индукцией.

Для элемента $g \in G$ через $\bar{g} \in H\backslash G/H$ обозначим соответствующий двойной класс смежности HgH. Заметим, что представление $\mathrm{ind}_{H^g\cap H}^{H}(\rho^g|_{H^g\cap H})$ группы H зависит только от двойного класса смежности $\bar{g} \in H\backslash G/H$ с точностью до канонического изоморфизма.

По *формуле Макки* (см., например, [38, глава I, § 5.5]) имеется канонический изоморфизм представлений группы H

$$\mathrm{ind}_H^G(\rho)|_H \simeq \bigoplus_{\bar{g}\in H\backslash G/H} \mathrm{ind}_{H^g\cap H}^{H}(\rho^g|_{H^g\cap H})\,. \tag{4.1.3}$$

Применяя изоморфизмы (4.1.1) и (4.1.3), получаем канонический изоморфизм векторных пространств

$$\mathrm{End}_G\left(\mathrm{ind}_H^G(\rho)\right) \simeq \bigoplus_{\bar{g}\in H\backslash G/H} \mathrm{Hom}_H\left(\rho, \mathrm{ind}_{H^g\cap H}^{H}(\rho^g|_{H^g\cap H})\right). \tag{4.1.4}$$

Замечание 4.12. Из изоморфизма (4.1.3) следует, что представление ρ канонически отождествляется с прямым слагаемым представления $\mathrm{ind}_H^G(\rho)|_H$. В частности, из этого вытекает, что естественный гомоморфизм $\mathrm{End}_H(\rho) \to \mathrm{End}_G\big(\mathrm{in}$ инъективен.

Лемма 4.13. *Если индекс подгруппы H в группе G конечен, то у представления $\mathrm{ind}_H^G(\rho)$ группы G не существует ненулевых конечномерных подпредставлений.*

Доказательство. Предположим, что существует ненулевое конечномерное подпредставление τ представления $\mathrm{ind}_H^G(\rho)$. Пусть $X \subset H\backslash G$ — объединение носителей всех сечений из пространства представления τ (см. определение 4.11). Так как представление τ конечномерно, и представление $\mathrm{ind}_H^G(\rho)$ конечно индуцировано, то множество X конечно. Легко проверить, что множество X инвариантно относительно действия группы G правыми сдвигами на множестве классов смежности $H\backslash G$.

С другой стороны, группа G действует транзитивно на множестве $H\backslash G$, следовательно $X = H\backslash G$. Но по предположению леммы множество классов смежности $H\backslash G$ бесконечно, что приводит к противоречию. □

Очевидно, подмножество $S(H) \subset G$ (см. определение 4.1) инвариантно относительно правых и левых сдвигов на элементы группы H. Объединяя изоморфизм (4.1.4), лемму 4.13 и изоморфизм (4.1.2), мы получаем следующий факт.

Предложение 4.14. *Пусть представление ρ конечномерно. Тогда имеется канонический изоморфизм векторных пространств*

$$\mathrm{End}_G\left(\mathrm{ind}_H^G(\rho)\right) \simeq \bigoplus_{\bar{g}\in H\backslash S(H)/H} \mathrm{Hom}_{H^g\cap H}\left(\rho|_{H^g\cap H}, \rho^g|_{H^g\cap H}\right).$$

Заметим, что векторное пространство $\mathrm{Hom}_{H^g\cap H}\left(\rho|_{H^g\cap H}, \rho^g|_{H^g\cap H}\right)$ зависит только от двойного класса смежности $\bar{g} \in H\backslash G/H$ с точностью до канонического изоморфизма.

Замечание 4.15. Дж. Макки [24, Theorem 3′] доказал аналог предложения 4.14 для унитарных представлений. Заметим, что для унитарных представлений множество $S(H)$ заменяется на подмножество $S(H)' \subset S(H)$, состоящее из всех элементов $g \in G$, для которых индекс подгруппы $H^g \cap H$ в обеих группах H и H^g конечен. Пример 4.6 показывает, что $S(H)' \neq S(H)$ для произвольной группы G. Тем не менее, из леммы 4.5 и предложения 4.9 следует равенство $S(H)' = S(H)$ для случае, когда группа G нильпотентна и конечно порождена.

В свете предложения 4.14 естественно ввести следующее определение.

Определение 4.16.

(i) Множество $S(H, \rho) \subset G$ состоит из всех элементов $g \in S(H)$, для которых

$$\mathrm{Hom}_{H^g \cap H}\left(\rho|_{H^g \cap H}, \rho^g|_{H^g \cap H}\right) \neq 0\,.$$

(ii) Пара (H, ρ) называется *совершенной*, если подмножество $S(H, \rho) \subset G$ является подгруппой, подгруппа H нормальна в группе $S(H, \rho)$, и индекс подгруппы H в группе $S(H, \rho)$ конечен.

Очевидно, имеется вложение $H \subset S(H, \rho)$. Также, легко показать, что подмножество $S(H, \rho) \subset G$ инвариантно относительно правых и левых сдвигов на элементы группы H.

Замечание 4.17.

(i) Предположим, что для элемента $g \in S(H, \rho)$ представления $\rho|_{H^g \cap H}$ и $\rho^g|_{H^g \cap H}$ неприводимы. Так как любой ненулевой морфизм между неприводимыми представлениеми является изоморфизмом, то имеется изоморфизм представлений $\rho|_{H^g \cap H} \simeq \rho^g|_{H^g \cap H}$. В частности, это выполнено в двух следующих случаях: если представление $\rho = \chi$ одномерно; если представление ρ неприводимо, подмножество $S(H, \rho) \subset G$ является подгруппой, и подгруппа H нормальна в группе $S(H, \rho)$.

(ii) Предположим, что представление ρ неприводимо, и существует подгруппа $F \subset G$, для которой множество $S(H, \rho)$ содержится в группе F (в частности, имеем $H \subset F$), и группа H нормальна в F. Тогда группа F действует на группе H сопряжениями, и, следовательно, группа F действует на множестве классов изоморфизма представлений группы H. Из п. (i) следует, что множество $S(H, \rho)$ совпадает со стабилизатором в F класса изоморфизма представления ρ относительно последнего действия. Следовательно, множество $S(H, \rho) \subset G$ является подгруппой, и группа H нормальна в группе $S(H, \rho)$.

Из предложения 4.14 легко выводится следующий факт.

Следствие 4.18. *Если представление ρ конечномерно, то следующие условия равносильны:*

(i) естественный гомоморфизм $\mathrm{End}_H(\rho) \to \mathrm{End}_G\left(\mathrm{ind}_H^G(\rho)\right)$ *является изоморфизмом;*

(ii) имеется равенство $S(H, \rho) = H$.

Замечание 4.19. Если представление $\rho = \chi$ одномерно, то по предложению 4.14 имеется канонический изоморфизм векторных пространств

$$\mathrm{End}_G\left(\mathrm{ind}_H^G(\chi)\right) \simeq \bigoplus_{H \backslash S(H,\chi)/H} K\,.$$

4.1.4 Неприводимые пары

Определение 4.20.

(i) *Неприводимой парой* называется пара (H, ρ), где $H \subset G$ — подгруппа группы G, а ρ — (ненулевое) конечномерное неприводимое представление группы H. *Весовой парой* называется пара (H, χ), где χ — характер группы H.

(ii) Для неприводимой пары (H, ρ) конечномерное представление σ группы H называется *ρ-изотипическим*, если $\sigma \simeq \rho^{\oplus r}$ для некоторого положительного целого числа r.

(iii) Определим следующий частичный порядок на множестве неприводимых пар: положим $(H, \rho) \leqslant (H', \rho')$ тогда и только тогда, когда $H \subset H'$, и представление $\rho'|_H$ является ρ-изотипическим.

Для весовых пар (H, χ) и (H', χ') имеем $(H, \chi) \leqslant (H', \chi')$ тогда и только тогда, когда $H \subset H'$ и $\chi'|_H = \chi$.

Лемма 4.21. *Пусть дана неприводимая пара (H, ρ). Тогда любой подфактор ρ-изотипического представления группы H также ρ-изотипичен.*

Доказательство. Предположим сначала, что σ является неприводимым подпредставлением в $\rho^{\oplus r}$ для некоторого положительного целого числа r. Рассматривая проекции $\rho^{\oplus r} \to \rho$ на каждое из r естественных прямых слагаемых в представлении $\rho^{\oplus r}$, мы видим, что существует ненулевая проекция $f\colon \sigma \to \rho$, скажем, на i-ое прямое слагаемое. Из неприводимости представлений σ и ρ следует, что морфизм f является изоморфизмом. Более того, представление σ выделяется прямым слагаемым в представлении $\rho^{\oplus r}$. Действительно, соответствующий морфизм $\rho^{\oplus r} \to \sigma$ можно положить равным нулю на всех компонентах, кроме i-ой, и положить равным обратному к морфизму f на i-ой компоненте.

Пусть теперь $\sigma \subset \rho^{\oplus r}$ является произвольным подпредставлением. Так как представление σ конечномерно, то существует неприводимое подпредставление $\sigma' \subset \sigma$. Из показанного выше следует, что $\sigma' \simeq \rho$, и σ' является прямым слагаемым в представлении $\rho^{\oplus r}$. Поскольку имеется вложение $\sigma \subset \rho^{\oplus r}$, мы получаем, что σ' также является прямым слагаемым в представлении σ. Таким образом, применяя индукцию по размерности представления σ, мы доказываем, что σ является ρ-изотипическим представлением.

Используя двойственность для конечномерных представлений, мы получаем, что любой фактор представления $\rho^{\oplus r}$ также является ρ-изотипическим представлением. Это завершает доказательство. $\square$

Напомним, что через π мы обозначаем представление группы G.

Определение 4.22.

(i) Назовем *π-неприводимой парой* такую неприводимую пару (H, ρ), что векторное пространство $\mathrm{Hom}_H(\rho, \pi|_H)$ ненулевое. Будем говорить, что π-неприводимая пара *конечна*, если векторное пространство $\mathrm{Hom}_H(\rho, \pi|_H)$ конечномерно. *(Конечная) π-весовая пара* определяется аналогично.

(ii) Представление π *является представлением с конечным весом*, если существует конечная π-весовая пара.

Мы будем использовать следующее простое наблюдение.

Замечание 4.23. Пусть (H, ρ) является π-неприводимой весовой парой. Предположим, что подмножество $S(H, \rho) \subset G$ является подгруппой, и подгруппа H нормальна в группе $S(H, \rho)$. Пусть W является ρ-изотипическим подпространством пространством представления π, т. е. W является пространством представления образа естественного морфизма представлений группы H

$$\rho \otimes_K \mathrm{Hom}_H(\rho, \pi|_H) \longrightarrow \pi|_H \, ,$$

где группа H действует тривиально на векторном пространстве $\mathrm{Hom}_H(\rho, \pi|_H)$. Тогда пространство W инвариантно относительно действия группы $S(H, \rho)$. Также, по лемме 4.21 представление группы H в пространстве W является ρ-изотипическим.

Следующее утверждение позволяет продолжать π-неприводимые пары.

Лемма 4.24. *Пусть (H, ρ) — π-неприводимая пара, а $g \in G$ — такой элемент, что $H^g = H$ и $\rho^g \simeq \rho$. Предположим, что выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

(i) π-неприводимая пара (H, ρ) конечна;

(ii) существует такое положительное целое число n, что $g^n \in G$.

Тогда существует такая π-неприводимая пара (H', ρ'), что $(H, \rho) < (H', \rho')$, где $H' = \langle H, g \rangle$.

Доказательство. Так как всякое конечномерное представление содержит неприводимое подпредставление, то по лемме 4.21 достаточно найти такое ненулевое конечномерное подпредставление представления $\pi|_{H'}$, что его ограничение на группу H является ρ-изотипическим.

Если условие (i) выполнено, то по замечанию 4.23 существует конечномерное подпредставление представления $\pi|_{H'}$, поскольку $H' \subset S(H, \rho)$.

Предположим, что выполнено условие (ii). Пусть U_0 — пространство представления образа любого ненулевого морфизма представлений $\rho \to$

$\pi|_H$, и положим

$$U = \sum_{i=1}^{n} \pi(g^i) U_0 \,.$$

Очевидно, пространство U инвариантно относительно действия оператора $\pi(g)$. Так как $H^g = H$, то мы видим, что пространство U инвариантно также и относительно действия операторов $\pi(h)$ для всех $h \in H$. Наконец, так как $\rho^g \simeq \rho$, то представление группы H в пространстве U является является фактором представления $\rho^{\oplus n}$. Следовательно по лемме 4.21 представление H в пространстве U является ρ-изотипическим. Поэтому U дает необходимое конечномерное подпредставление представления $\pi|_{H'}$. $\square$

Пример 4.25. Пусть $K = \mathbb{C}$, группа G является конечной циклической группой $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, элемент $g \in G$ является образующей группы G, подгруппа H тривиальна, представление ρ является тривиальным характером группы H, а представление π — это прямая сумма бесконечномерного тривиального представления группы G и нетривиального характера ψ группы G. Тогда условие (ii) леммы 4.24 выполняется. Выполняется равенство $H' = G$, а для представления ρ' имеются две возможности: ρ' является либо тривиальным характером, либо характером ψ. Заметим, что векторное пространство $\mathrm{Hom}_{H'}(\rho', \pi)$ бесконечномерно в первом случае и одномерно во втором случае.

Замечание 4.26. В частности, пример 4.25 показывает, что [11, лемма 6] неверна (ошибка в доказательстве заключается в использовании усредняющего оператора, который может быть равным нулю).

4.2 Неприводимость индуцированных представлений

4.2.1 Неприводимость и неприводимость по Шуру

Определение 4.27. Представление π группы G называется *неприводимым по Шуру*, если $\mathrm{End}_G(\pi) = K$.

Следующее утверждение является аналогом классической леммы Шура; доказательство см., например, в [6, утверждение 2.11] или [7, глава 5, § 4.2].

Предложение 4.28. *Предположим, что поле K алгебраически замкнуто и несчетно. Тогда любое не более чем счетномерное над K неприводимое представление произвольной группы является неприводимым по Шуру.*

Следующие примеры показывают, что предложение 4.28 неверно для произвольного поля K, даже если ослабить условие $\mathrm{End}_G(\pi) = K$ до условия конечномерности $\mathrm{End}_G(\pi)$ над полем K.

Пример 4.29.

(i) Предположим, что поле K алгебраически замкнуто и счетно. Через $K(t)$ обозначим поле рациональных функций от t над полем K. Пусть G является группой $K(t)^*$, состоящей из ненулевых рациональных функций, и пусть $\pi = K(t)$ с действием группы G, заданным умножением рациональных функций. Тогда представление π счетномерно и неприводимо, в то время как $\mathrm{End}_G(\pi) = K(t) \neq K$.

(ii) Предположим, что расширение полей $K \subset L$ таково, что L счетномерно как K-векторное пространство (при этом само поле K может быть несчетным). Пусть $G = L^*$ и $\pi = L$ с действием группы G, заданным умножением элементов поля L. Тогда представление π счетномерно над K и неприводимо, в то время как $\mathrm{End}_G(\pi) = L \neq K$.

Замечание 4.30. Из предложения 4.28 следует, что для счетных групп неприводимость по Шуру имеет место для неприводимых представлений над алгебраически замкнутым несчетным полем.

В общем случае неприводимость не следует из неприводимости по Шуру, как показывает следующий пример.

Пример 4.31. Предположим, что подгруппа $H \subset G$ удовлетворяет условию $S(H) = H$ (см. пример 4.2). В частности, индекс подгруппы H в группе G бесконечен. Предположим, что поле K алгебраически замкнуто и несчетно. Пусть τ — такое конечномерное (неприводимое) представление группы G, что его ограничение $\tau|_H$ неприводимо (например, τ является характером). Рассмотрим представление $\pi = \mathrm{ind}_H^G(\tau|_H)$ группы G. По следствию 4.18 и предложению 4.28 представление π неприводимо по Шуру.

С другой стороны, из изоморфизма (4.1.1) следует, что существует ненулевой морфизм из представления π в τ. Этот морфизм не является изоморфизмом, так как размерность представления π бесконечна, а размерность представления τ конечна. Поэтому представление π не является неприводимым.

Тем не менее следующее утверждение показывает, что из некоторой оценки на эндоморфизмы все же следует неприводимость для широкого класса представлений. Этот факт необходим нам для доказательства основной теоремы (см. п. 4.3.2).

Предложение 4.32. *Предположим, что группа H нормальна в группе G, представление ρ группы H неприводимо, и естественный гомоморфизм* $\mathrm{End}_H(\rho) \to \mathrm{End}_G\left(\mathrm{ind}_H^G(\rho)\right)$ *является изоморфизмом. Тогда представление* $\mathrm{ind}_H^G(\rho)$ *неприводимо.*

Доказательство. Обозначим через V пространство представления $\mathrm{ind}_H^G(\rho)$. Заметим, что представление $\mathrm{ind}_H^G(\rho)$ неприводимо тогда и только тогда, когда произвольный ненулевой вектор $v \in V$ порождает V как представление группы G. Покажем, что это условие выполняется.

Так как группа H нормальна в группе G, имеем $H\backslash G/H = G/H$, и для любого $g \in G$ выполняется $H^g = H = H^g \cap H$. Поэтому изоморфизмы (4.1.3), (4.1.4) принимают вид

$$\mathrm{ind}_H^G(\rho)|_H \simeq \bigoplus_{\bar{g}\in G/H} \rho^g\,, \tag{4.2.1}$$

$$\mathrm{End}_G\left(\mathrm{ind}_H^G(\rho)\right) \simeq \bigoplus_{\bar{g}\in G/H} \mathrm{Hom}_H(\rho, \rho^g)\,, \tag{4.2.2}$$

соответственно. Для любого $\bar{g} \in G/H$ через $V_{\bar{g}}$ обозначим пространство представления ρ^g. В этих обозначениях изоморфизм (4.2.1) приобретает вид

$$V \simeq \bigoplus_{\bar{g}\in G/H} V_{\bar{g}}\,. \tag{4.2.3}$$

Рассмотрим произвольный ненулевой вектор $v \in V$. Из изоморфизма (4.2.3) следует, что вектор v можно разложить в сумму

$$v = \sum_{\bar{g}\in G/H} v_{\bar{g}}\,, \qquad v_{\bar{g}} \in V_{\bar{g}}\,,$$

в которой только конечное количество слагаемых отлично от нуля. Обозначим через k количество ненулевых слагаемых. Предположим, что $k \geqslant 2$.

Пусть $\bar{g} \in G/H$ — такой элемент, что $v_{\bar{g}} \neq 0$. Обозначим через $I_{\bar{g}}$ ядро действия групповой алгебры $K[H]$ на вектор $v_{\bar{g}}$. Так как представление ρ неприводимо, то представление ρ^g группы H тоже неприводимо, и поэтому вектор $v_{\bar{g}}$ порождает $V_{\bar{g}}$ как представление группы H. Таким образом, имеем изоморфизм представлений группы H

$$K[H]/I_{\bar{g}} \simeq \rho^g \,.$$

Далее, из изоморфизма $\mathrm{End}_H(\rho) \simeq \mathrm{End}_G\left(\mathrm{ind}_H^G(\rho)\right)$ и изоморфизма (4.2.2) следует, что неприводимые представления ρ^g, $\bar{g} \in G/H$, попарно неизоморфны. Следовательно, если $v_{\bar{g}_1} \neq 0$ и $v_{\bar{g}_2} \neq 0$, то $I_{\bar{g}_1}$ и $I_{\bar{g}_2}$ — различные ненулевые идеалы. Переставляя при необходимости элементы g_1 и g_2, мы видим, что существует такой элемент групповой алгебры $P \in K[H]$, что $P \in I_{\bar{g}_1}$ и $P \notin I_{\bar{g}_2}$, т. е. $P(v_{\bar{g}_1}) = 0$ и $P(v_{\bar{g}_2}) \neq 0$ (на самом деле, никакой из идеалов $I_{\bar{g}_1}$ и $I_{\bar{g}_2}$ не содержит другой, так как представления ρ^{g_1} и ρ^{g_2} неприводимы). По построению вектор

$$P(v) = \sum_{\bar{g} \in H \backslash G} P(v_{\bar{g}}) \,, \qquad P(v_{\bar{g}}) \in V_{\bar{g}} \,,$$

ненулевой и содержит строго меньшее количество ненулевых слагаемых относительно разложения (4.2.3).

Предположим теперь, что $k = 1$, т. е. $v = v_{\bar{g}} \neq 0$ для некоторого $\bar{g} \in G/H$. Как было объяснено выше, вектор $v_{\bar{g}}$ порождает $V_{\bar{g}}$ как представление группы H. Более того, действие элемента $g' \in G$ переводит $v_{\bar{g}}$ в ненулевой вектор $v_{\bar{g}\bar{g}'} \in V_{\bar{g}\bar{g}'}$, который в свою очередь порождает $V_{\bar{g}\bar{g}'}$ как представление группы H. Таким образом, вектор $v_{\bar{g}}$ порождает V как представление группы G, и это завершает доказательство предложения. $\square$

Частный случай предложения 4.32 был доказан С. А. Арналь и А. Н. Паршиным [1, теорема 2].

Замечание 4.33.

(i) Предположим, что представление ρ неприводимо, а представление $\mathrm{ind}_H^G(\rho)$ неприводимо по Шуру. Тогда выполняются предположения предложения 4.32 (см. замечание 4.12).

(ii) Предположим, что выполняются предположения предложения 4.32. Тогда представление $\mathrm{ind}_H^G(\rho)$ неприводимо по Шуру в двух следующих случаях: $\rho = \chi$ является характером; группа H счетна, а поле K алгебраически замкнуто и несчетно (см. замечание 4.30).

(iii) Если группа G несчетна, а поле K алгебраически замкнуто и несчетно, то верно обращение предложения 4.32 (см. замечание 4.30).

Пример 4.31 показывает, что предложение 4.32 не обязательно верно, если подгруппа $H \subset G$ не нормальна. Более того, следующий пример показывает, что обращение предложения 4.32 неверно для произвольного поля K.

Пример 4.34. Пусть $K = \mathbb{Q}(i)$, $G = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $H = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, и $\rho = \chi$ является примитивным характером группы $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ над полем K (мы рассматриваем любое из двух возможных вложений группы $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ в группу $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$). Двумерное представление $\mathrm{ind}_H^G(\chi)$ неприводимо, поскольку характер χ не продолжается до характера всей группы G над полем K. С другой стороны, имеется изоморфизм K-алгебр

$$\mathrm{End}_G\left(\mathrm{ind}_H^G(\chi)\right) \simeq K(\zeta)\,,$$

где ζ — примитивный корень из единицы степени 8. Поэтому естественный гомоморфизм K-алгебр

$$\mathrm{End}_H(\chi) \longrightarrow \mathrm{End}_G\left(\mathrm{ind}_H^G(\chi)\right)$$

не является изоморфизмом.

Из предложения 4.32 выводится следующий общий результат.

Следствие 4.35. *Предположим, что существует такая последовательность вложенных подгрупп*

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_{n-1} \supset G_n = H\,,$$

что группа G_i нормальна в G_{i-1} для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Предположим, что представление ρ группы H неприводимо, и естественный гомоморфизм $\mathrm{End}_H(\rho) \to \mathrm{End}_G\left(\mathrm{ind}_H^G(\rho)\right)$ является изоморфизмом. Тогда представление $\mathrm{ind}_H^G(\rho)$ неприводимо.

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по n. Объединяя изоморфизмы представлений

$$\mathrm{ind}_H^G(\rho) \simeq \mathrm{ind}_{G_{n-1}}^G\left(\mathrm{ind}_H^{G_{n-1}}(\rho)\right)$$

с замечанием 4.12, мы видим, что естественный гомоморфизм $\mathrm{End}_H(\rho) \to \mathrm{End}_{G_{n-1}}\big(\mathrm{i}$ является изоморфизмом. Следовательно, по предложению 4.32 представление $\mathrm{ind}_H^{G_{n-1}}(\rho)$ неприводимо. Мы завершаем доказательство, применяя предположение индукции к подгруппе $G_{n-1} \subset G$. $\square$

4.2.2 Индуцированные представления нильпотентных групп

Предположим, что группа G нильпотентна, т. е. ее нижний центральный ряд конечен:

$$G = \gamma_0(G) \supset \gamma_1(G) \supset \ldots \supset \gamma_{n-1}(G) \supset \gamma_n(G) = \{e\}\,.$$

Лемма 4.36. *Для произвольной подгруппы $H \subset G$ существует такая последовательность вложенных подгрупп*

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_{n-1} \supset G_n = H\,,$$

что группа G_i нормальна в G_{i-1} для любого i, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Доказательство. Пусть $G_i = \langle H, \gamma_i(G)\rangle$ — подгруппа группы G, порожденная подгруппой H и подгруппой $\gamma_i(G)$, $0 \leqslant i \leqslant n$. Для того чтобы показать, что группа G_i нормальна в G_{i-1}, достаточно убедиться в том, что $[G_{i-1}, G_i] \subset G_i$. Это следует из вложений

$$[H, H] \subset H \subset G_i\,,$$

$$[\gamma_{i-1}(G), H] \subset [\gamma_{i-1}(G), G] = \gamma_i(G) \subset G_i\,,$$

$$[\gamma_{i-1}(G), \gamma_i(G)] \subset [G, \gamma_i(G)] = \gamma_{i+1}(G) \subset G_i\,,$$

$$[H, \gamma_i(G)] \subset [G, \gamma_i(G)] = \gamma_{i+1}(G) \subset G_i\,.$$

□

Объединяя следствия 4.18 и 4.35 с леммой 4.36, получаем следующий полезный результат.

Теорема 4.37. *Пусть группа G нильпотента, а (H, ρ) — неприводимая пара (см. определение 4.20(i)). Предположим, что $S(H, \rho) = H$ (см. определение 4.16(i)). Тогда представление $\mathrm{ind}_H^G(\rho)$ группы G неприводимо.*

Напомним, что если поле K алгебраически замкнуто, то любое неприводимое конечномерное представление над полем K является неприводимым по Шуру. Таким образом, в этом случае теорема 4.37 утверждает следующее: неприводимость следует из неприводимости по Шуру для представлений вида $\mathrm{ind}_H^G(\rho)$, где (H, ρ) — неприводимая пара в нильпотентной конечно порожденной группе (если поле K еще и несчетно, тогда выполнена и обратная импликация).

В следующем пункте мы покажем, что неприводимость не следует из неприводимости по Шуру для произвольных представлений нильпотентных конечно порожденных групп.

4.2.3 Пример: группа Гейзенберга

Напомним, что *группой Гейзенберга* над коммутативным кольцом с единицей называется группа унипотентных матриц размера 3×3 с единицами на диагонали и с коэффициентами из этого кольца. Положим

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Имеем соотношение $xy = z\,yx$.

Далее мы рассматриваем группу Гейзенберга G над кольцом целых чисел. Зафиксируем ненулевой элемент $c \in K$. Оказывается, что представления группы G, для которых элемент z действует умножением на c, допускают следующее геометрическое описание.

Пусть R является K-алгеброй многочленов Лорана $K[t, t^{-1}]$. Напомним, что K-многообразие $\mathbb{G}_m = \mathrm{Spec}(R)$ является одномерным тором над полем

K. Пусть $\gamma\colon R \to R$ — такой автоморфизм K-алгебры R, что $\gamma(t) = c\,t$. Равносильно, γ — автоморфизм многообразия $\mathbb{G}_m$, являющийся групповым сдвигом на элемент $c \in \mathbb{G}_m$. Пусть Γ — циклическая абелева группа, порожденная автоморфизмом γ. По построению группа Γ действует на K-алгебре R и на алгебраическом многообразии $\mathbb{G}_m$.

Назовем Γ-*эквивариантным* R-*модулем* R-модуль M вместе с таким K-линейным действием группы Γ на модуле M, что $\gamma(fm) = \gamma(f)\gamma(m)$ для всех элементов $f \in R$, $m \in M$. Например, очевидно, на R есть каноническая структура Γ-эквивариантного R-модуля.

В геометрических терминах Γ-эквивариантный R-модуль — это то же самое что Γ-эквивариантный квазикогерентный пучок на $\mathbb{G}_m$. В частности, R как Γ-эквивариантный R-модуль соответствует структурному пучку тора $\mathbb{G}_m$ с его канонической Γ-эквивариантной структурой.

Пусть π — представление группы G, для которого $\pi(z) = c$. Обозначим через M пространство представления π. Определим структуру R-модуля на M, для которой t действует оператором $\pi(y)$. Пусть γ действует на M оператором $\pi(x)$. Тогда пространство M становится Γ-эквивариантным R-модулем вследствие соотношения $\pi(x)\pi(y) = c\,\pi(y)\pi(x)$.

Легко проверить, что сопоставление $\pi \longmapsto M$ определяет эквивалентность (на самом деле, изоморфизм) между категорией таких представлений группы G, что z действует умножением на c, и категорией Γ-эквивариантных R-модулей.

Предположим теперь, что число $c \in K$ не является корнем из единицы. Пусть P является R-модулем, состоящим из всех рациональных функций на $\mathbb{G}_m$, имеющих полюс не выше первого порядка в точках $c^i \in \mathbb{G}_m$, $i \in \mathbb{Z}$, и регулярных во всех остальных точках. Определим также R-модуль

$$Q = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} R/(t - c^i)\,.$$

Соответствующий квазикогерентный пучок на $\mathbb{G}_m$ — это прямая сумма пучков-небоскребов в точках c^i, $i \in \mathbb{Z}$.

Действие группы Γ на торе $\mathbb{G}_m$ задает естественные Γ-эквивариантные структуры на R-модулях P и Q. Более того, имеем точную последовательность Γ-эквивариантных R-модулей

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow P \longrightarrow Q \longrightarrow 0\,.$$

Заметим, что из Q в P нет ненулевых морфизмов, так как R-модуль Q — модуль кручения, а R — модуль без кручения. В частности, приведенная выше точная последовательность не расщепляется.

Покажем, что R и Q — неприводимые Γ-эквивариантные R-модули. Пусть $I \subset R$ является Γ-эквивариантным подмодулем. Тогда I — идеал в R, так как I является R-подмодулем. С другой стороны, для любого Γ-эквивариантного модуля верно, что его носитель в $\mathbb{G}_m$ инвариантен относительно действия Γ. Используя это соображение для Γ-эквивариантного модуля R/I и тот факт, что c не является корнем из единицы, мы получаем, что либо $I = 0$, либо $I = R$, и поэтому Γ-эквивариантный R-модуль R неприводим. Неприводимость Γ-эквивариантного R-модуля Q доказывается аналогично.

Далее, Γ-эквивариантные R-модули R и Q неизоморфны, так как они неизоморфны как R-модули. Таким образом, модуль P является нетривиальным расширением между двумя неприводимыми неизоморфными Γ-эквивариантными R-модулями Q и R. В частности, P не является неприводимым.

Докажем, что P неприводим по Шуру как Γ-эквивариантный R-модуль. Покажем сначала, что модуль R является неприводимым по Шуру Γ-эквивариантным R-модулем. Действительно, кольцо эндоморфизмов модуля R изоморфно R как R-модуль. Далее, кольцо эндоморфизмов R, сохраняющих Γ-эквивариантную структуру, можно отождествить с Γ-инвариантной частью в R. Так как c не является корнем из единицы, то Γ-инвариантная часть в R — это поле K.

Пусть теперь $\varphi\colon P \to P$ — эндоморфизм модуля P как Γ-эквивариантного R-модуля. Композиция

$$R \xrightarrow{\varphi|_R} P \longrightarrow Q$$

равна нулю, так как R и Q — неизоморфные неприводимые Γ-эквивариантные R-модули. Следовательно подмодуль R инвариантен относительно эндоморфизма φ. Так как Γ-эквивариантный R-модуль R неприводим по Шуру, то $\varphi|_R = \lambda$ для некоторого элемента $\lambda \in K$. Эндоморфизм Γ-эквивариантного R-модуля P

$$\varphi - \lambda \;:\; P \longrightarrow P$$

равен нулю на подмодуле $R \subset P$. Поэтому морфизм $\varphi - \lambda$ пропускается через фактор-отображение $P \to P/R \simeq Q$. Как было показано выше, из Q в P нет ненулевых морфизмов. Следовательно, имеем $\varphi - \lambda = 0$, т. е. $\varphi = \lambda$, и модуль P является неприводимым по Шуру.

Применяя приведенную выше эквивалентность категорий, мы видим, что неприводимость не следует из неприводимости по Шуру для (возможно, комплексных) представлений группы Гейзенберга над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$.

4.3 Основные результаты

4.3.1 Мономиальные представления и представления с конечным весом

Напомним, что представление π группы G называется *мономиальным*, если существует весовая пара (H, χ) (см. определение 4.20(i)), для которой $\pi \simeq \mathrm{ind}_H^G(\chi)$.

Предложение 4.38. *Предположим, что группа G счетна, а поле K алгебраически замкнуто и несчетно. Пусть π является неприводимым представлением группы G над K. Тогда выполняется следующее:*

(i) если π изоморфно конечно индуцированному представлению $\mathrm{ind}_H^G(\rho)$, где $H \subset G$ — подгруппа, а ρ — представление подгруппы H, то векторное пространство $\mathrm{Hom}_H(\rho, \pi|_H)$ одномерно;

(ii) если π мономиально, то π является представлением с конечным весом (см. определение 4.22(ii)).

Доказательство. Во-первых, п. (i) следует из изоморфизма (4.1.1) и замечания 4.30. Во-вторых, п. (ii) следует напрямую из п. (i). □

Перейдем теперь к изложению нашего ключевого результат.

Теорема 4.39. *Пусть G — нильпотентная конечно порожденная группа, а π — неприводимое представление группы G над произвольным полем*

K, для которого существует конечная π-неприводимая пара (см. определение 4.22(i)). Тогда существует такая неприводимая пара (H, ρ) (см. определение 4.20(i)), что $\pi \simeq \mathrm{ind}_H^G(\rho)$.

Доказательство теоремы 4.39 приведено в п. 4.3.2. Оно состоит в явном построении требуемой пары (H, ρ), которое проводится следующим образом (мы отсылаем к шагам из п. 4.3.2). Мы начинаем с максимальной конечной π-неприводимой пары относительно порядка, введенного в определении 4.20(iii) (см. шаг 1). Затем мы заменяем ее на некоторую подгруппу конечного индекса, получая таким образом совершенную π-неприводимую пару (H_0, χ_0) (см. шаг 2). Отметим, что пара (H_0, ρ_0) не обязательно конечна. Теперь существование совершенной π-неприводимой пары позволяет нам рассмотреть максимальную совершенную π-неприводимую пару (H, ρ). Мы доказываем равенство $S(H, \rho) = H$ (см. шаг 3). Наконец, из теоремы 4.37 следует, что представление $\mathrm{ind}_H^G(\rho)$ неприводимо, а двойственность Фробениуса дает ненулевой морфизм неприводимых представлений $\mathrm{ind}_H^G(\rho) \to \pi$, который обязательно должен быть изоморфизмом (см. шаг 4).

Следующий результат хорошо известен, а его доказательство по существу повторяет доказательство [37, § 8.5, теорема 16] (ср. с [11, лемма 1]). Мы приводим доказательство для удобства читателя.

Предложение 4.40. *Пусть G — нильпотентная конечно порожденная группа, а π — такое неприводимое представление группы G над алгебраически замкнутым полем K, что π конечномерно. Тогда π мономиально.*

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по размерности представления π. Можно предполагать, что представление π точное. Существует абелева нормальная подгруппа $E \subset G$, не содержащаяся в центре группы G. Действительно, в качестве E можно взять подгруппу, порожденную центром группы G и любым нецентральным элементом предыдущего члена нижнего центрального ряда группы G.

Так как поле K алгебраически замкнуто, существует характер χ группы E, для которого векторное пространство $\mathrm{Hom}_E(\chi, \pi|_E)$ ненулевое. Таким образом (E, χ) является (конечной) π-весовой парой (см. определение 4.22(i)). Пусть W является χ-изотипическим подпространством пространства представления π (см. замечание 4.23), т. е. W состоит из всех векторов пространства представления π, на которых группа E действует характером χ.

Объединяя замечания 4.17(ii) и 4.23, мы получаем, что подмножество $S(E, \chi) \subset G$ является подгруппой, а подпространство W инвариантно относительно действия группы $S(E, \chi)$. Положим $H = S(E, \chi)$, и пусть ρ — указанное выше представление группы H в W. Из изоморфизма (4.1.1) следует, что естественное вложение $\rho \to \pi|_H$ задает ненулевой морфизм представлений $f\colon\ \mathrm{ind}_H^G(\rho) \to \pi$. Покажем, что f является изоморфизмом.

Легко проверить, что образ морфизма f в пространстве представления π равен сумме подпространств

$$\sum_{\bar{g} \in G/H} g(W)\,.$$

Поскольку E действует на $g(W)$ характером χ^g, а подгруппа $H \subset G$ является стабилизатором характера χ (ср. с замечанием 4.17(ii)), мы видим, что, на самом деле, это является прямой суммой подпространств:

$$\sum_{\bar{g}\in G/H} g(W) = \bigoplus_{\bar{g}\in G/H} g(W)\,.$$

Из этого следует, что морфизм f инъективен. Поскольку π неприводимо, f является изоморфизмом[1].

Так как представление π точное, и группа E не содержится в центре группы G, мы видим, что представление $\pi|_E$ не является χ-изотипическим, и поэтому размерность представления ρ строго меньше размерности представления π. Мы завершаем доказательство, применяя предположение индукции к представлению ρ группы H. □

Объединяя теорему 4.39 с предложением 4.40, мы получаем основной результат этой главы.

Теорема 4.41. *Пусть G — нильпотентная конечно порожденная группа, а π — такое неприводимое представление группы G над алгебраически замкнутым полем K, что π является представлением с конечным весом. Тогда представление π мономиально.*

Доказательство. По теореме 4.39 существует такая неприводимая пара (H,ρ), что $\pi \simeq \mathrm{ind}_H^G(\rho)$. Так как представление ρ конечномерно, то по предложению 4.40 существует такая весовая пара (H',χ), что $H' \subset H$ и $\rho \simeq \mathrm{ind}_{H'}^H(\chi)$. Это доказывает теорему. □

4.3.2 Доказательство теоремы 4.39

Доказательство проводится в несколько шагов.

[1]Данное рассуждение повторяет доказательство [1, теорема 2]. Из теоремы 4.37 можно также легко вывести, что f является изоморфизмом.

Шаг 1.

Напомним, что группа G нетерова, поскольку она нильпотентна и конечно порождена [26, теорема 2.18]. Следовательно, существует максимальная конечная π-неприводимая пара, т. е. такая конечная π-неприводимая пара (H,ρ), что (H,ρ) максимальна среди всех конечных π-неприводимых пар относительно порядка на неприводимых парах (см. определение 4.20(iii)).

Шаг 2.

Докажем, что существует совершенная π-неприводимая пара (см. определение 4.16(ii)). Пусть (H,ρ) — максимальная конечная π-неприводимая пара, которая существует по шагу 1. Положим (см. определение 4.1 для $S(H)$)

$$H_0 = \bigcap_{g\in S(H)} H^g\,. \tag{4.3.1}$$

Пусть ρ_0 — произвольное (ненулевое) неприводимое подпредставление представления $\rho|_{H_0}$ (напомним, что представление ρ конечномерно). Очевидно, что (H_0,ρ_0) является π-неприводимой парой, так как пара (H,ρ) является π-неприводимой. Отметим, что мы не утверждаем, что пара (H_0,ρ_0) является конечной π-неприводимой парой (ср. с примером 4.25).

Покажем, что пара (H_0,ρ_0) совершенна. По теореме 4.10(i),(ii), подмножество $S(H)\subset G$ является подгруппой, а индекс подгруппы $N_G(H)$ в группе $S(H)$ конечен. Поэтому пересечение в формуле (4.3.1) берется по конечному числу подгрупп $H^g\cap H$ конечного индекса в H, и поэтому индекс подгруппы H_0 в группе H тоже конечен. Также, по построению группа H_0 нормальна в группе $S(H)$. Так как индекс подгруппы H_0 в группе H конечен, то по теореме 4.10(iii) имеется равенство $S(H_0)=S(H)$. Таким образом, имеем вложение групп

$$H_0 \subset H \subset N_G(H) \subset S(H_0) = S(H)\,.$$

По замечанию 4.17(ii), примененному к $F = S(H)$, подмножество $S(H_0, \rho_0) \subset G$ является подгруппой, а подгруппа H_0 нормальна в $S(H_0, \rho_0)$. Остается доказать, что индекс подгруппы H_0 в $S(H_0, \rho_0)$ также конечен. Предположим обратное. По предложению 4.7 группа $S(H_0, \rho_0)$ не содержится в группе H^*, т. е. существует такой элемент $g \in S(H_0, \rho_0)$, что $g^i \notin H$ ни для какого положительного целого i. В частности, $g^i \notin H$ для любого положительного целого числа i, так как индекс подгруппы H_0 в группе H конечен.

Снова по теореме 4.10(ii) индекс подгруппы $N_G(H) \cap S(H_0, \rho_0)$ в группе $S(H_0, \rho_0)$ конечен, так как $S(H_0, \rho_0)$ является подгруппой в $S(H_0) = S(H)$. Поэтому, заменяя элемент g на его положительную степень, мы можем предполагать, что $H^g = H$.

Пусть C — бесконечная циклическая группа, порожденная элементом g. Тогда группа C действует на H сопряжениями, и таким образом группа C действует на множестве классов изоморфизма неприводимых представлений группы H. Утверждается, что C-орбита класса изоморфизма представления ρ конечна. Действительно, пусть Υ — множество классов изоморфизма неприводимых представлений группы H, которые являются факторами представления $\mathrm{ind}_{H_0}^{H}(\rho_0)$. Из вложения $C \subset S(H_0, \rho_0)$ следует, что множество Υ инвариантно относительно указанного выше действия группы C. Поскольку индекс подгруппы H_0 в группе H конечен, представление $\mathrm{ind}_{H_0}^{H}(\rho_0)$ конечномерно. Следовательно, множество Υ конечно. Наконец, из изоморфизма (4.1.1) следует, что класс изоморфизма представления ρ принадлежит Υ. Поэтому C-орбита класса изоморфизма представления ρ конечна, так как она содержится в множестве Υ. Таким образом, заменяя элемент g на его положительную степень, мы можем предполагать, что $\rho^g = \rho$.

Так как (H, ρ) — конечная π-неприводимая пара, то выполняется условие (i) леммы 4.24. Применяя данную лемму, мы видим, что существует π-неприводимая пара (H', ρ'), для которой $(H, \rho) < (H', \rho')$, где $H' = \langle H, g \rangle$. Поскольку $\rho'|_H \simeq \rho^{\oplus r}$ для некоторого положительного целого числа r, мы видим, что

$$\mathrm{Hom}_{H'}(\rho', \pi|_{H'}) \subset \mathrm{Hom}_H(\rho^{\oplus r}, \pi|_H) \simeq \mathrm{Hom}_H(\rho, \pi|_H)^{\oplus r}\,.$$

Следовательно, π-неприводимая пара (H', ρ') конечна, что противоречит максимальности конечной π-неприводимой пары (H, ρ).

Шаг 3.

Объединяя шаг 2 вместе с тем фактом, что группа G нетерова (ср. с шагом 1), мы видим, что существует максимальная совершенная π-неприводимая пара (H, ρ). Докажем теперь, что $S(H, \rho) = H$. Предположим обратное.

Так как пара (H, ρ) совершенна, то имеем корректно определенную фактор-группу $S(H, \rho)/H$, которая конечна и нильпотентна. Поэтому существует такой элемент $z \in S(H, \rho)$, что $z \notin H$, и образ элемента z в $S(H, \rho)/H$ содержится в центре $S(H, \rho)/H$. Для элемента z выполняется условие (ii) леммы 4.24. Применяя данную лемму, мы получаем π-неприводимую пару (H', ρ'), для которой $(H, \rho) < (H', \rho')$, где $H' = \langle H, z \rangle$.

Покажем, что пара (H', ρ') совершенна. Для этого сначала докажем, что $S(H', \rho')$ содержится в $S(H, \rho)$. Так как индекс подгруппы H в группе H' конечен, то по теореме 4.10(iii) имеем равенство $S(H) = S(H')$.

Рассмотрим элемент $g \in S(H', \rho')$, т. е. $g \in S(H')$, и существует ненулевой морфизм $\rho'|_{(H')^g \cap H'} \to (\rho')^g|_{(H')^g \cap H'}$. Поскольку $(H, \rho) < (H', \rho')$, имеем $\rho'|_H \simeq \rho^{\oplus r}$ для некоторого положительного целого числа r. Следовательно, имеются изоморфизмы представлений

$$\rho'|_{H^g \cap H} \simeq (\rho|_{H^g \cap H})^{\oplus r}\,, \quad (\rho')^g|_{H^g \cap H} \simeq (\rho^g|_{H^g \cap H})^{\oplus r}\,.$$

Очевидно, $H^g \cap H$ является подгруппой в $(H')^g \cap H'$. Поэтому имеется вложение

$$\mathrm{Hom}_{(H')^g \cap H'}\left(\rho'|_{(H')^g \cap H'}, (\rho')^g|_{(H')^g \cap H'}\right) \subset$$
$$\subset \mathrm{Hom}_{H^g \cap H}\left(\rho|_{H^g \cap H}, \rho^g|_{H^g \cap H}\right)^{\oplus r^2}\,.$$

Так как индекс подгруппы H в группе H' конечен, то по теореме 4.10(iii) имеем равенство $S(H) = S(H')$. Следовательно, индекс подгруппы $H^g \cap H$ в группе H конечен. Из всего сказанного выше следует, что $g \in S(H, \rho)$, т. е. имеется вложение $S(H', \rho') \subset S(H, \rho)$.

Более того, так как образ элемента z в фактор-группе $S(H, \rho)/H$ содержится в центре, то подгруппа H' нормальна в $S(H, \rho)$. Поэтому по замечанию 4.17(ii), примененному к $F = S(H, \rho)$, подмножество $S(H', \rho') \subset G$ является подгруппой, а подгруппа H' нормальна в $S(H', \rho')$.

Наконец, индекс подгруппы H' в группе $S(H', \rho')$ конечен, потому что имеется вложение групп

$$H \subset H' \subset S(H', \rho') \subset S(H, \rho)\,,$$

и индекс подгруппы H в группе $S(H, \rho)$ конечен, так как пара (H, ρ) совершенна. Мы показали, что π-неприводимая пара (H', ρ') совершенна, что противоречит максимальности совершенной π-неприводимой пары (H, ρ).

Шаг 4.

Как и в шаге 3, пусть (H, ρ) — максимальная совершенная π-неприводимая пара. Так как по шагу 3 имеется равенство $S(H, \rho) = H$, то из теоремы 4.37 следует, что представление $\mathrm{ind}_H^G(\rho)$ неприводимо.

С другой стороны, поскольку (H, ρ) является π-неприводимой парой, из изоморфизма (4.1.1) следует, что существует ненулевой морфизм представлений из $\mathrm{ind}_H^G(\rho)$ в π. Так как представления $\mathrm{ind}_H^G(\rho)$ и π неприводимы, то этот морфизм является изоморфизмом, что доказывает теорему 4.39.

Замечание 4.42. Предположим, что поле K алгебраически замкнуто и несчетно. Тогда π-неприводимая пара (H, ρ) из шага 4 доказательства теоремы 4.39 конечна по предложению 4.38(i).

Напомним, что *рангом* нильпотентной конечно порожденной группы G называется сумма рангов присоединенных факторов нижнего центрального ряда (см., например, [5, глава 0]). Легко показать, что индекс подгруппы H в группе G конечен тогда и только тогда, когда группы G и H имеют одинаковый ранг.

Замечание 4.43. Предположим, что поле K алгебраически замкнуто и несчетно. Пусть (H', ρ') — такая максимальная конечная π-неприводимая пара, что ранг группы H' также максимален. Из доказательства теоремы 4.39 и замечания 4.42 следует, что существует такая конечная π-неприводимая пара (H, ρ), что $\pi \simeq \mathrm{ind}_H^G(\rho)$, и существует подгруппа H_0 конечного индекса в обеих группах H и H'. Равносильно, имеем равенство $H^* = (H')^*$.

4.3.3 Изоморфные конечно индуцированные представления

Пусть G — произвольная группа, H_1 и H_2 — подгруппы группы G, а ρ_1 и ρ_2 — представления групп H_1 и H_2, соответственно. Пусть $S(H_1, H_2)$ — множество, состоящее из всех элементов $g \in G$, для которых индекс подгруппы $H_2^g \cap H_1$ в группе H_1 конечен.

Лемма 4.44. *Предположим, что представление ρ_1 конечномерно, а представления $\mathrm{ind}_{H_i}^G(\rho_i)$, $i = 1, 2$, неприводимы. Тогда следующие условия равносильны:*

(i) имеется изоморфизм представлений $\mathrm{ind}_{H_1}^G(\rho_1) \simeq \mathrm{ind}_{H_2}^G(\rho_2)$;

(ii) существует такой элемент $g \in S(H_1, H_2)$, что $\rho_1|_{H_2^g \cap H_1} \simeq \rho_2^g|_{H_2^g \cap H_1}$;

(iii) существует такой элемент $g' \in S(H_2, H_1)$, что $\rho_2|_{H_1^{g'} \cap H_2} \simeq \rho_1^{g'}|_{H_1^{g'} \cap H_2}$.

Доказательство. Из рассуждений, подобных доказательству предложения 4.14, и более общей формы изоморфизма Макки (4.1.3) (см., например, [38, глава I, §5.5]) следует канонический изоморфизм векторных пространств:

$$\mathrm{Hom}_G\left(\mathrm{ind}_{H_1}^G(\rho_1), \mathrm{ind}_{H_2}^G(\rho_2)\right) \simeq \bigoplus_{\bar{g} \in H_2 \backslash S(H_1, H_2)/H_1} \mathrm{Hom}_{H_2^g \cap H_1}\left(\rho_1|_{H_2^g \cap H_1}, \rho_2^g|_{H_2^g \cap H_1}\right).$$

Это доказывает лемму. □

Лемма 4.45. *Предположим, что группа G конечно порождена и нильпотентна, а множество $S(H_2, H_1)$ непусто. Тогда множество $S(H_1, H_2)$ совпадает с множеством всех таких элементов $g \in G$, что $(H_2^*)^g = H_1^*$.*

Доказательство. Рассмотрим элемент $g \in S(H_1, H_2)$. Рассуждениями, подобными доказательству леммы 4.5, можно показать, что имеется вложение $H_1^* \subset (H_2^*)^g$. Аналогично, для любого $g' \in S(H_2, H_1)$ имеется вложение $H_2^* \subset (H_1^*)^{g'}$, следовательно,

$$H_1^* \subset (H_2^*)^g \subset (H_1^*)^{gg'}.$$

Так как группа G нетерова, то эти вложения на самом деле являются равенствами. Поэтому имеем $(H_2^*)^g = H_1^*$.

Предположим теперь, что $(H_2^*)^g = H_1^*$. По замечаниям 4.4(i) и 4.8 получаем равенство $(H_2^g \cap H_1)^* = H_1^*$. По предложению 4.7 индекс подгруппы $H_2^g \cap H_1$ в группе $(H_2^g \cap H_1)^* = H_1^*$ конечен. Таким образом, индекс подгруппы $H_2^g \cap H_1$ в группе H_1 тоже конечен, т. е. $g \in S(H_1, H_2)$. $\square$

Из леммы 4.45 выводится следующий критерий изоморфизма конечно индуцированных представлений (ср. с [11, теорема 2]).

Предложение 4.46. *Пусть G — конечно порожденная нильпотентная группа, а (H_1, ρ_1), (H_2, ρ_2) — две неприводимые пары. Предположим, что представления $\mathrm{ind}_{H_1}^G(\rho_1)$ и $\mathrm{ind}_{H_2}^G(\rho_2)$ неприводимы. Тогда имеется изоморфизм представлений $\mathrm{ind}_{H_1}^G(\rho_1) \simeq \mathrm{ind}_{H_2}^G(\rho_2)$ тогда и только тогда, когда существует элемент $g \in G$, для которого $(H_2^*)^g = H_1^*$ и имеется ненулевой морфизм представлений $\rho_1|_{H_2^g \cap H_1} \to \rho_2^g|_{H_2^g \cap H_1}$.*

Следующий пример показывает, что в общем случае условие предложения 4.46 нельзя усилить до условия $H_2^g = H_1$.

Пример 4.47. Пусть $K = \mathbb{C}$, а G является группой Гейзенберга над конечным кольцом $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Группа G конечна, нильпотентна и порождена элементами x, y и z (см. п. 4.2.3). Возьмем примитивный корень из единицы

$\zeta \in \mathbb{C}$ степени n. Определим подгруппы $H_1 = \langle x, z \rangle$ и $H_2 = \langle y, z \rangle$ в группе G.

Определим характеры $\chi_i \colon H_i \to K^*$, $i = 1, 2$ по формулам

$$\chi_1(x) = 1\,, \qquad \chi_2(y) = 1\,, \qquad \chi_1(z) = \chi_2(z) = \zeta\,.$$

Тогда подгруппы $H_i \subset G$ нормальны, группа G/H_1 порождена образом элемента y, группа G/H_2 порождена образом элемента x, и имеются равенства $\chi_1^{y^k}(x) = \zeta^k$, $\chi_2^{x^k}(y) = \zeta^{-k}$ для произвольного целого числа k. Из изоморфизма (4.1.4) следует, что представления $\mathrm{ind}_{H_i}^G(\chi_i)$ неприводимы по Шуру, и поэтому неприводимы, так как они являются комплексными представлениями конечной группы (ср. с теоремой 4.37).

Более того, множество $H_1 \backslash G / H_2$ содержит только один элемент, $H_1 \cap H_2$ является группой, порожденной элементом y, и, следовательно, имеется равенство $\chi_1|_{H_1 \cap H_2} = \chi_2|_{H_1 \cap H_2}$. Поэтому предложение 4.46 влечет изоморфизм представлений $\mathrm{ind}_{H_i}^G(\chi_1) = \mathrm{ind}_{H_2}^G(\chi_2)$.

С другой стороны, подгруппы H_1 и H_2 не сопряжены, так как их образы в фактор-группе по коммутанту различны (заметим, что группы H_1^* и H_2^* совпадают со всей группой G, и, таким образом, тривиально сопряжены).

Замечание 4.48. Объединяя замечание 4.43 и предложение 4.46, мы получаем следующее уточнение теоремы 4.41. Предположим, что поле K алгебраически замкнуто и несчетно. Пусть (H', χ') является конечной π-весовой парой, для которой ранг группы H' максимален среди всех конечных π-весовых пар. Тогда класс сопряженности подгруппы $(H')^* \subset G$ не зависит от выбора подгруппы H'. Более того, для любого представителя D из этого класса сопряженности существуют подгруппа конечного индекса $H \subset D$

и характер χ подгруппы H, для которых имеется изоморфизм представлений $\pi \simeq \mathrm{ind}_H^G(\chi)$.

4.3.4 Немономиальные неприводимые представления

Берман, Шарая [9] и Сигал [32, теоремы A, B] независимо построили примеры немономиальных комплексных неприводимых представлений для произвольных нильпотентных конечно порожденных групп со следующим свойством: они не содержат нормальной конечной подгруппы, для которой фактор-группа абелева.

Случай произвольной группы сводится к группе Гейзенберга над кольцом целых чисел. В этом случае можно построить неприводимое представление, которое не только не является мономиальным, но и не является конечно индуцированным ни с какого другого (неприводимого) представления собственной подгруппы. Для полноты изложения приведем набросок конструкции, следуя [32].

Мы будем использовать факты и обозначения из п. 4.2.3. Таким образом, G — группа Гейзенберга над $\mathbb{Z}$, а $c \in K$ — произвольный ненулевой элемент, не являющийся корнем из единицы. Нам понадобится еще одна интерпретация категории представлений группы G, для которых элемент z действует умножением на c.

Пусть $A = R * \Gamma$ обозначает скрученную групповую алгебру группы Γ с коэффициентами из $R = K[t, t^{-1}]$. В явном виде, алгебра A изоморфна $R[\gamma, \gamma^{-1}]$ как R-модуль, а произведение в A однозначно определяется формулой $\gamma t = c\,t\gamma$. Таким образом, K-алгебра A некоммутативна, и подкольцо $R \subset A$ не лежит в центре алгебры A (в частности, A не является

R-алгеброй).

Для краткости, под A-модулем мы подразумеваем левый A-модуль. Легко показать, что Γ-эквивариантный R-модуль — это то же самое, что A-модуль. Поэтому категория представлений группы G, для которых элемент z действует умножением на c, эквивалентна категории A-модулей. Действительно, алгебра A изоморфна фактору $K[G]/(z-c)$ групповой алгебры $K[G]$.

Легко проверить, что матрица

$$\alpha = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

определяет автоморфизм группы Гейзенберга, переводящий x в $x^p y^r$, y в $x^q y^s$, и переводящий элемент z в самого себя[2]. В соответствии с этим α действует на K-алгебре A по формуле

$$\alpha(\gamma) = \gamma^p t^r\,, \qquad \alpha(t) = \gamma^q t^s\,.$$

Для произвольного A-модуля M обозначим через M_α такой A-модуль, что $M_\alpha = M$ как K-векторное пространство, а элемент $a \in A$ действует на M_α как $\alpha^{-1}(a)$. Равносильно, $M_\alpha \simeq A \otimes_{(A,\alpha)} M$, т. е. M_α является расширением скаляров модуля M относительно гомоморфизма алгебр $\alpha\colon A \to A$.

Заметим, что α не происходит из Γ-эквивариантного автоморфизма кольца R или, равносильно, из автоморфизма тора $\mathbb{G}_m$, поскольку α перемешивает γ и t. Это является главной причиной рассмотрения алгебры A.

[2]Данные формулы не задают действие группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ на группе G. Тем не менее, П. Кан [20] и Д. В. Осипов [27] показали, что группа автоморфизмов группы G (неканонически) изоморфна полупрямому произведению $\mathbb{Z}^2 \rtimes \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Пусть теперь π — представление группы G, для которого элемент z действует умножением на c, а M — соответствующий A-модуль. Предположим, что $\pi \simeq \mathrm{ind}_H^G(\rho)$ для некоторой собственной подгруппы $H \subset G$ и представления ρ группы H. Мы можем предполагать, что подгруппа $H \subset G$ максимальна.

Таким образом, индекс подгруппы H в группе G является простым числом $p \geqslant 2$. Более того, существует такая матрица

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\,, \qquad 0 \leqslant i < p\,, \tag{4.3.2}$$

что подгруппа $\alpha(H)$ порождается элементами x^p, y и z. Пусть B — подалгебра алгебры A, порожденная элементами γ^p и t. Имеем вложение колец

$$R \subset B \subset A\,.$$

Заметим, что группа H изоморфна группе Гейзенберга, а представления группы H, для которых z действует умножением на c, соответствуют B-модулям. Следовательно, существует B-модуль N и изоморфизм A-модулей $M_\alpha \simeq A \otimes_B N$.

Данные рассуждения приводят к следующему утверждению.

Предложение 4.49. *Пусть M — такой A-модуль, что для любого элемента $\alpha \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ как в формуле* (4.3.2) *A-модуль M_α не изоморфен модулю $A \otimes_B N$ ни для какого B-модуля N. Пусть π — представление группы G, соответствующее модулю M. Тогда представление π неизоморфно $\mathrm{ind}_H^G(\rho)$ ни для какой собственной подгруппы $H \subset G$ и представления ρ группы H.*

Обозначим через F поле частных кольца R, т. е. F — поле рациональных функций на торе $\mathbb{G}_m$.

Замечание 4.50. Для произвольного B-модуля N рассмотрим $A \otimes_B N$ как R-модуль. Имеется изоморфизм R-модулей (ср. с изоморфизмом (4.2.1))

$$A \otimes_B N \simeq \bigoplus_{i=0}^{p-1} N_{\gamma^i} ,$$

где $N_{\gamma^i} = N$ как K-векторное пространство, а элемент $f \in R$ действует на N_{γ^i} как $\gamma^{-i}(f)$. В частности, размерность F-векторного пространства $F \otimes_R (A \otimes_B N)$ либо бесконечна, либо делится на p.

Построим теперь неприводимый A-модуль, удовлетворяющий условию предложения 4.49. Рассмотрим скрученное действие группы Γ на F, задаваемое по формуле

$$\gamma \ : \ f(t) \longmapsto (t-1)f(ct) .$$

Пусть M является Γ-эквивариантным R-подмодулем в F, порожденным постоянной функцией 1. Легко проверить, что модуль M состоит из всех рациональных функций на $\mathbb{G}_m$, имеющих полюс не выше первого порядка в точках c^i, $i < 0$, и регулярных во всех остальных точках (отметим, что i пробегает только отрицательные числа). Также, по построению имеем изоморфизм A-модулей $M \simeq A/(\gamma - t + 1)$.

Для любого R-подмодуля $L \subset M$ фактор-модуль M/L является R-модулем кручения, а его носитель на $\mathbb{G}_m$ содержится в множестве $\{c^i\}_{i<0}$. Поэтому данный носитель неинвариантен относительно действия группы Γ на $\mathbb{G}_m$, если только он не пуст. Это доказывает, что M — неприводимый Γ-эквивариантный R-модуль.

Далее, пусть α как в формуле (4.3.2). Тогда $\alpha(\gamma) = \gamma$ и $\alpha(t) = \gamma^i t$. Следовательно, модуль M_α изоморфен A-модулю

$$A/(\gamma - \gamma^i t + 1) = A/(\gamma^i - \gamma t^{-1} - t^{-1})\,.$$

Из этого следует, что размерность F-векторного пространства $F \otimes_R M_\alpha$ равна i. Так как $0 \leqslant i < p$, то по замечанию 4.50 мы видим, что A-модуль M_α не изоморфен $A \otimes_B N$ ни для какого B-модуля N. Поэтому модуль M удовлетворяет условию предложения 4.49.

Таким образом, мы показали, что существует неприводимое (возможно, комплексное) представление группы Гейзенберга над $\mathbb{Z}$, которое не индуцировано ни с какого представления собственной подгруппы.

Приложение A

Публикации по теме диссертации

[A1] I. Beloshapka, A. Sergeev, *Harmonic spheres in the Hilbert–Schmidt Grassmannian*, Topology, Geometry, Integrable Systems, and Mathematical Physics: Novikov's Seminar 2012?2014, Advances in the Mathematical Sciences, American Mathematical Society Translations: Series 2, vol. **234**, (2014), 13–31.

[A2] И. Белошапка, *О голоморфных представлениях группы Гейзенберга с одним целыми и двумя вещественными коэффициентами*, УМН, **69**:5(419) (2014), 161–162.

[A3] И. Белошапка, *О неприводимых представлениях с конечным весом одной дискретной нильпотентной группы*, УМН, **70**:4(424) (2015), 207–208.

Литература

[1] С. А. Арналь, А. Н. Паршин, *О неприводимых представлениях дискретных групп Гейзенберга*, Матем. заметки, **92**:3 (2012), 323–330.

[2] M. F. Atiyah, *Geometry of Yang–Mills Fields*, Lezioni Fermiani.– Pisa: Scuola Normale Superiore, 1979.

[3] M. F. Atiayh, *Instantons in Two and Four Dimensions*, Comm. Math. Phys. **93**(1984), 437–451.

[4] M. F. Atiyah, N. J. Hitchin, I. M. Singer, *Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry*, Proc. Roy. Soc. London **362**(1978), 425-461.

[5] G. Baumslag, *Lecture notes on nilpotent groups*, Regional Conference Series in Mathematics, **2** (1971), American Mathematical Society, Providence, R.I.

[6] И. Н. Бернштейн, А. В. Зелевинский, *Представления группы $GL(n, F)$, где F — локальное неархимедово поле*, УМН, **31**:3(189) (1976), 5–70.

[7] J. Bernstein, *Draft of: representations of p-adic groups*, lectures at Harvard University written by K. Rumelhart (1992), available at http://www.math.tau.ac.il/∼bernstei .

[8] С. Д. Берман, Е. Ш. Керер, *О представлениях нильпотентной группы без кручения класса два с двумя образующими*, Функц. анализ и его прил., **11**:4 (1977), 70–71.

[9] С. Д. Берман, В. В. Шарая, *О неприводимых комплексных представлениях конечнопорожденных нильпотентных групп*, Украин. Мат. З., **29**:4 (1977), 435–442.

[10] A. Borel A, F. Hirzebruch, *Characteristic classes and homogeneous spaces I*, Amer. J. Math. **80**(1958), 458–538.

[11] I. D. Brown, *Representation of finitely generated nilpotent groups*, Pacific J. Math., **45**:1 (1973), 13–26.

[12] F. Burstall, S. Salamon, *Tournaments, flags and harmonic maps*, Math. Ann. **277**(1987), 249–265.

[13] F. Burstall, J. Wood, *The construction of harmonic maps into complex Grassmannians*, J. Diff. Geom. **23**(1986), 255–297.

[14] J. Dixmier, *Sur les representations unitaires des groupes de Lie nilpotents. I*, Amer. J. Math., **81** (1959), 160–170.

[15] S. K. Donaldson, *Instantons and geometric invariant theory*, Commun. Math. Phys. **93**(1984), 453-460.

[16] J. Eells, S. Salamon, *Twistorial constructions of harmonic maps of surfaces into four-manifolds*, Ann. Scuola Norm. Super. Pisa **12**(1985), 589–640.

[17] J. Eells, J. Sampson, *Harmonic maps of Riemannian manifolds,* Amer. J. Math. **86**(1964), 109–160.

[18] G. Harder, M. S. Narasimhan, *On the cohomology groups of moduli spaces of vector bundles over curves,* Math. Ann. **212** (1975), 215–248.

[19] J. Jacobsen, H. Stetkær, *Ultra-irreducibility of induced representations*, Math. Scand., **68**:2 (1991), 305–319.

[20] P. Kahn, *Automorphisms of the discrete Heisenberg groups*, preprint (2005); available at http://www.math.cornell.edu/m/People/Faculty/kahn .

[21] А. А. Кириллов, *Индуцированные представления нильпотентных групп Ли*, ДАН СССР, **128** (1959), 886–889.

[22] А. А. Кириллов, *Унитарные представления нильпотентных групп Ли*, УМН, **17**:4(106) (1962), 57–110.

[23] J. Koszul, B. Malgrange, *Sur certaines structures fibrées complexes*, Arch. Math. **9**(1958), 102–109.

[24] G. W. Mackey, *On induced representations of groups*, Amer. J. Math., **73**:3, (1951), 576–592.

[25] А. И. Мальцев, *Об одном классе однородных пространств*, Изв. АН СССР. Сер. матем., **13**:1 (1949), 9–32.

[26] A. Mann, *How groups grow*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **395** (2012), Cambridge University Press, Cambridge.

[27] Д. В. Осипов, *Дискретная группа Гейзенберга и ее группа автоморфизмов*, Матем. заметки, **98**:1 (2015), 152–155.

[28] A. N. Parshin, *Representations of higher adelic groups and arithmetic*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, **I** (2010), 362–392, Hindustan Book Agency, New Delhi.

[29] А. Н. Паршин, *О голоморфных представлениях дискретных групп Гейзенберга*, Функц. анализ и его прил., **44**:2 (2010), 92–96.

[30] A. N. Parshin, *Lectures on representations of discrete Heisenberg groups*, Berlin, Humboldt University, preprint (2010).

[31] Э. Прессли, Г. Сигал, *Группы петель*, Мир, М., (1990).

[32] D. Segal, *Irreducible representations of finitely generated nilpotent groups*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **81**:2 (1977), 201–208.

[33] A. G. Sergeev, *Кэлерова геометрия пространств петель, Московский центр непр. матем. образования, М., 2001.*

[34] A.G.Sergeev, Факторизация оператор-функций, непрерывных по Гельдеру, УМН, ***27****:6 (1972), 253.*

[35] А. Г. Сергеев, Факторизация оператор-функций, непрерывных по Гельдеру, Вестник Московского университета. Серия I. Матем., мех., ***28****:3 (1973), 58–65.*

[36] A. G. Sergeev, Harmonic spheres conjecture, Theor. Mathem. Phys. ***164*** *(2012), 1140-1150.*

[37] J.-P. Serre, Linear representations of finite groups, Graduate Texts in Mathematics, **42**, *Springer-Verlag (1977).*

[38] *M.-F. Vignéras, Représentations l-modulaires d'un groupe réductif p-adique avec $l \neq p$, Progress in Mathematics,* **137** *(1996), Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA.*

[39] *J. Wood, The explicit construction and parametrization of all harmonic maps from the two-sphere to a complex Grassmannian, J. reine angew. math.* ***386****(1988), 1–31.*