РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ им. А. Ю. ИШЛИНСКОГО

На правах рукописи

Назайкинский Владимир Евгеньевич

ОБОБЩЕНИЯ КАНОНИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА МАСЛОВА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

01.01.03 – математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва 2014

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского Российской академии наук.

Официальные оппоненты:	Данилов Владимир Григорьевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики МИЭМ Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»
	Кордюков Юрий Аркадьевич, доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений Института математики с вычислительным центром Российской академии наук
	Радкевич Евгений Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова
Ведущая организация:	Федеральное государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования«Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Защита состоится 20 ноября 2014 года в 14:00 часов на заседании диссертационного совета Д 002.022.02 при ФГБУН Математический институт им. В. А. Стеклова РАН по адресу: 119991, Москва, ГСП-1, ул. Губкина, д. 8, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Математического института им. В. А. Стеклова РАН и на сайте института по адресу www.mi.ras.ru/index.php?&c=dis_ann

Автореферат разослан «_____» _______________ 2014 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета,

доктор физико-математических наук Ю. Н. Дрожжинов

Общая характеристика работы

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Канонический оператор Маслова [22] (см. также [19, 23, 28–30]) применяется для построения коротковолновых (высокочастотных или быстроосциллирующих) асимптотических решений широкого класса дифференциальных уравнений с вещественными характеристиками. Асимптотики в виде канонического оператора представляют собой далеко идущее обобщение лучевых разложений в задачах оптики, электродинамики и т. д. и ВКБ-асимптотик в уравнениях квантовой механики. Эти асимптотики основаны на некоторых решениях уравнений классической (гамильтоновой) механики и в каком-то смысле автоматически и глобально позволяют написать по ним решения уравнений квантовой и волновой механики с учетом наличия в задаче фокальных точек и каустик. В основе конструкции канонического оператора Маслова лежит фундаментальный геометрический объект — лагранжево многообразие в фазовом пространстве, отвечающем конфигурационному пространству, на котором рассматривается исходное дифференциальное уравнение. Канонический оператор по сути осуществляет редукцию исходного дифференциального уравнения в частных производных на конфигурационном пространстве к обыкновенному дифференциальному уравнению вдоль траекторий гамильтонова векторного поля на лагранжевом многообразии. Лагранжево многообразие не универсально даже для фиксированного дифференциального уравнения, оно, как и решение редуцированного обыкновенного дифференциального уравнения — амплитуда — зависит от рассматриваемой для исходного уравнения задачи. Очень важно, что амплитуда на лагранжевом многообразии — гладкая функция, в том числе и в окрестности лагранжевых особенностей, в отличие от амплитуды в обычных лучевых или ВКБ-разложениях. Для многих типов задач (и для разных исходных дифференциальных уравнений) имеются рецепты или алгоритмы построения соответствующих многообразий и амплитуд. Если таковые построены, то ответ в исходной задаче для соответствующего дифференциального уравнения дается каноническим оператором, примененным к амплитуде; этот ответ автоматически включают в себя такие объекты и операции в лучевых разложениях, как поведение в каустических областях, переход через каустики, сращивание различных асимптотических представлений и т.д.

Представление решения в виде канонического оператора можно назвать формулой достаточно условно, это скорее алгоритм или набор вполне определенных правил, позволяющих реализовать решение в виде более или менее явных аналитических формул, содержащих либо быстроосциллирующие экспоненты, либо интегралы от таких экспонент. Здесь нужно отметить, во-первых, что эти формулы, как правило, не являются одинаковыми и универсальными для всех значений независимых переменных; в разных (зависящих от задачи) областях они имеют разные (асимптотические) представления, и во-вторых, даже в фиксированных областях эти представления могут определяться не единственным образом, удачный их выбор может существенно упростить (локальный) вид решения и позволить выразить его, например, через хорошо известные специальные или даже элементарные функции.

Развитие мощных интерактивных систем математических вычислений, таких как Wolfram Mathematica®, предъявляет новые требования к инструментарию построения асимптотических формул. Эти системы позволяют в режиме диалога менять входные параметры вычислений и визуализировать результаты вычислений в наглядной графической форме, тем самым позволяя в режиме «реального времени» анализировать решение задачи. Но для того, чтобы это было возможно, асимптотические формулы должны быть максимально простыми и удобными в реализации средствами указанных систем. Существующие формулы канонического оператора Маслова не всегда удовлетворяют это условию. Часто бывает так, что формула есть, а эффективно воспользоваться ею нельзя. Таким образом, актуальна задача получения возможно более простых выражений для канонического оператора, особенно в окрестности каустик, где вычисления включают интегрирование быстроосциллирующих функций.

Несмотря на всю свою универсальность, стандартный канонический оператор не дает ответа во многих задачах с вырождением. Одной из таких задач является построение асимптотических решений для волнового уравнения с вырождением на границе. Эта задача важна и с физической точки зрения, поскольку такое уравнение можно использовать для моделирования в линейном приближении наката длинных волн (в частности, волн цунами) на пологий берег. Поэтому актуальна задача обобщения асимптотик, задаваемых каноническим оператором, на случай уравнений с вырождением такого рода.

Применения канонического оператора не ограничиваются асимптотиками решений уравнений математической физики. Частным случаем интегральных операторов Фурье–Маслова (операторов, ядрами Шварца которых служат функции, представимые с помощью канонического оператора) являются квантованные канонические и контактные (однородные канонические) преобразования, которые играют важную роль в эллиптической теории — первые служат естественным обобщением [33, 34] геометрических эндоморфизмов комплексов в теории Лефшеца [38], а для последних Вайнстейном [49] была поставлена проблема индекса, решенная впоследствии для случая замкнутых гладких многообразий Эпстейном и Мельроузом [41] и Лейштнамом, Нестом и Цыганом [43]. Эллиптическая теория на многообразиях с особенностями (см., например, [45]) является одним из естественных вариантов эллиптической теории вне рамок классической ситуации гладких многообразий, и актуальна задача вычисления индекса в этом случае. При этом, естественно, нуждается в обобщении и само определение интегральных операторов Фурье–Маслова.

Цели и задачи диссертационной работы:

(а) Разработать метод построения осциллирующих и локализованных асимптотических решений волнового уравнения в области с переменной скоростью, обращающейся в нуль на границе области.

(б) Изучить структуру быстроосциллирующих решений уравнений с вещественными характеристиками в окрестности каустик и разработать метод построения простых интегральных представлений для таких решений.

(в) Распространить результаты теории индекса квантованных контактных преобразований со случая замкнутых гладких многообразий на многообразия с коническими особенностями и выяснить, как будет описываться вклад конических точек.

(г) Вычислить асимптотику числа состояний и энтропии для модели газа Бозе–Маслова и построить для него термодинамическое лагранжево многообразие, на котором определен соответствующий туннельный канонический оператор Маслова.

Научная новизна. В диссертационной работе впервые получены следующие результаты.

1. В рамках канонического оператора Маслова предложен и разработан метод построения новых интегральных представлений быстроосциллирующих функций в окрестности каустик и фокальных точек на основе специального класса систем координат на лагранжевых многообразиях (эйконал-координаты). Полученное этим методом представление существенно упрощает локальный вид решения в окрестности каустик и эффективно при построении широкого класса асимптотических решений линейных гиперболических уравнений и систем с переменными коэффициентами (в частности, решений вида волновых пучков и решений задач с локализованными начальными данными или правыми частями).

2. Доказано, что в задачах о распространении волн с локализованными начальными данными локализованную в окрестности точки начальную функцию можно представить с помощью канонического оператора на инвариантном относительно гамильтониана задачи лагранжевом многообразии, представляющем собой объединение траекторий соответствующей системы Гамильтона, выпущенных из косферы на этой точкой, что позволяет существенно упростить формулы для асимптотических решений и сделать их эффективными в компьютерной реализации.

3. Предложен и разработан метод построения асимптотик решений многомерного волнового уравнения, вырождающегося на границе области. Этот метод основан на новом фазовом пространстве, отвечающем таким уравнениям, которое получается как расширение стандартного фазового пространства

и на обобщении канонического оператора Маслова на лагранжевы подмногообразия такого фазового пространства, и приводит, в частности, к новым простым формулам для максимальной амплитуды в точках границы области решения задачи Коши для такого волнового уравнения с локализованными начальными данными специального вида.

4. Для задаваемого квантованным каноническим преобразованием (интегральным оператором Фурье–Маслова) невырожденного эндоморфизма эллиптического комплекса на гладком компактном многообразии в том случае, когда у классического канонического преобразования имеются гладкие многообразия неподвижных точек и эти многообразия либо симплектические, либо лагранжевы, получены асимптотические формулы, выражающие вклад таких многообразий в число Лефшеца эндоморфизма.

5. Доказаны формулы индекса для удовлетворяющих некоторым условиям симметрии квантованных контактных (однородных канонических) преобразований на компактном многообразии с коническими особенностями, выражающие индекс в виде полусуммы индекса квантованного контактного преобразования на гладком компактном многообразии — дубле исходного многообразия с вырезанными окрестностями конических точек — и явно выписываемого инварианта конормального символа. Инвариант конормального символа выражен через кратности его особых точек в комплексной плоскости.

6. Получены асимптотические формулы для энтропии и числа состояний газа Бозе–Маслова, и н этой основе построено термодинамическое лагранжево многообразие, на котором определен отвечающий газу Бозе–Маслова туннельный канонический оператор.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертационная работа носит теоретический характер. Асимптотические методы решения задач математической физики сами по себе представляют теоретический интерес. Полученное в работе новое интегральное представление канонического оператора Маслова в окрестности фокальных точек может быть использовано для построения эффективных формул, позволяющих провести аналитическо-численное исследование доставляемых каноническим оператором асимптотических решений, при котором система Гамильтона решается численно, а дальнейший расчет ведется по аналитическим формулам с минимальным числом интегрирований. Асимптотические решения волнового уравнения с локализованными начальными данными в области, на границе которой скорость распространения волн обращается в нуль, могут быть использованы для исследования моделей, описывающих в линейном приближении распространение и накат на берег длинных волн, в частности, волн цунами. Формулы индекса для интегральных операторов Фурье–Маслова на многообразиях с особенностями представляют интерес в эллиптической теории на многообразиях с особенностями и показывают, какие изменения претерпевают соответствующие инварианты, хорошо известные в случае замкнутых гладких многообразий, при наличии конических особых точек и каким образом можно описывать вклад конических точек в эти формулы. Асимптотика статистической суммы в подходе В.П. Маслова к квантованию термодинамики задается туннельным каноническим оператором. Вычисление асимптотики числа состояний и энтропии для газа Бозе–Маслова дает пример такого туннельного канонического оператора и важно с точки зрения развития упомянутого подхода.

Методы исследования. В диссертации используются методы математической физики, методы функционального анализа, асимптотические методы, включая канонический оператор Маслова и интегральные операторы Фурье, методы теории функций от некоммутирующих операторов, симплектическая геометрия, дифференциальная геометрия и эллиптическая теория.

Степень достоверности и апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались на семинарах лаборатории механики природных катастроф Института проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, отдела математической физики Математического института им. В.А. Стеклова РАН, отдела теоретической физики Математического института им. В.А. Стеклова РАН, Института математики Потсдамского университета (Германия), 55 и 56 научных конференциях МФТИ, а также на международных конференциях «Jean Leray ’99» (Карлскруна, Швеция, 1999), Spring School «Operator Algebras and Index Theory on Manifolds with Singularities»

(Потсдам, Германия, 2000), «PDE 2000» (Клаусталь, Германия, 2000), «The fourth international conference of differential and functional-differential equations» (Москва, 2005), «XVI Крымская осенняя математическая школа-симпозиум» (Батилиман, Украина, 2005), «C^*-algebras and elliptic theory. II», (Бендлево, Польша, 2006), «Асимптотические методы и математическая физика» (Москва, 2010), «XXI Крымская осенняя математическая школа-симпозиум» (Батилиман, Украина, 2010), «Асимптотические методы теории дифференциальных уравнений» (Челябинск, 2011), «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы» (Москва, 2011), «XXII Крымская осенняя математическая школа-симпозиум» (Батилиман, Украина, 2011), «Days on Diffraction 2012» (С.-Петербург, 2012), «International Conference on Applied Mathematics» (Ираклион, Греция, 2013).

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 17 печатных работах в рецензируемых журналах из списка ВАК, входящих в международные индексы цитирования.

Личный вклад автора. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, обзора литературы, четырех глав, заключения и списка литературы (108 наименований). Объем диссертации составляет 159 страниц.

Благодарности. Автор признателен В. П. Маслову и С. Ю. Доброхотову за внимание и поддержку.

Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

В первой главе строится новое интегральное представление канонического оператора Маслова в окрестности фокальных точек и рассматриваются вопросы, связанные с локализацией быстроосциллирующих решений.

Пусть Λ^2 — лагранжево многообразие в фазовом пространстве $\mathbb{R}^4_{(x,p)}$ с некоторой мерой $d\mu$, и пусть $K^h_{(\Lambda^2,d\mu)}\colon C_0^\infty(\Lambda^2) \to L^2(\mathbb{R}^2_x)$ — канонический оператор Маслова [22, 29] на Λ^2 с малым параметром h. Если $\alpha^* = (x^*, p^*) \in \Lambda^2$ — фокальная точка (т.е. касательная плоскость к Λ^2 в этой точке не проектируется диффеоморфно на x-плоскость), такая что форма $p\,dx|_{\Lambda^2}$ не вырождается в точке α^*, то новое интегральное представление для оператора $K^h_{(\Lambda^2,d\mu)}$ в действии на функцию φ с носителем в достаточно малой окрестности точки α^* строится следующим образом. Пусть τ — действие (т.е. решение уравнения Пфаффа $d\tau = p\,dx|_{\Lambda^2}$) на Λ^2 в окрестности точки α^*, совпадающее в неособых точках с действием, зафиксированным в конструкции канонического оператора. Вблизи α^* на Λ^2 существует система координат вида (τ, ψ), так что уравнения многообразия Λ^2 локально записываются в виде $x = X(\tau, \psi)$, $p = P(\tau, \psi)$. Обозначим через (τ^*, ψ^*) такие значения координат, что $x^* = X(\tau^*, \psi^*)$, $p^* = P(\tau^*, \psi^*)$.

Лемма. *Уравнение* $\langle P(\tau, \psi), x - X(\tau, \psi)\rangle = 0$ *определяет гладкую функцию* $\tau = \tau(x, \psi)$, $(x, \psi) \subset V_1 \times V_2$, *где* V_1 *и* V_2 — *достаточно малые окрестности точек* X^* *и* ψ^* *соответственно, такую что* $\tau^* = \tau(x^*, \psi^*)$, *причем дифференциал* $d(\tau_\psi)$ *не вырожден ни в одной точке множества* $\Pi = \{(x, \psi) \in V_1 \times V_2\colon \tau_\psi(x, \psi) = 0\}$ *(которое, таким образом, является двумерной поверхностью), отображение* $(x, \psi) \mapsto (x, \tau_x(x, \psi))$ — *диффеоморфизм поверхности* Π *на окрестность* $\widetilde{U} \subset \Lambda^2$ *точки* (x^*, p^*), *а детерминант* $\det(P, P_\psi)\big|_{\tau=\tau(x,\psi)}$ *не обращается в нуль при* $(x, \psi) \in V_1 \times V_2$.

Пусть $U \subset \widetilde{U}$ — такая окрестность точки α^*, что $X(\tau, \psi) \in V \Subset V_1$ при $(\tau, \psi) \in U$, и пусть $\varkappa(x) \in C_0^\infty(U_1)$ — срезающая функция, равная 1 в V.

Теорема 1. *Если $\varphi \in C_0^\infty(V)$, то*

$$[K^h_{(\Lambda^2,d\mu)}\varphi](x,h) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}-i\frac{\pi m}{2}}\varkappa(x)}{\sqrt{2\pi h}}\int\Big[e^{i\tau/h}\varphi(\tau,\psi)\sqrt{\mu|\det(P,P_\psi)|}\Big]_{\tau=\tau(x,\psi)}d\psi \\ + O(h),$$

где m — индекс Маслова особой карты V (определяющийся точно так же, как и в стандартной конструкции канонического оператора).

Далее в главе 1 на основе построенного нового представления канонического оператора Маслова рассматриваются вопросы, связанные с локализацией быстроосциллирующих решений.

Основные результаты первой главы опубликованы в работах [1, 11].

Во второй главе строятся асимптотические решения волновых уравнений с вырождением на границе области.

Такие уравнения часто встречаются в приложениях. Например, они возникают при моделировании в линейном приближении наката на берег волн цунами [32, 47]. Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(c^2(x)\frac{\partial\eta}{\partial x_j}\right) = 0, \qquad \eta = \eta(x,t), \quad x\in\Omega, \quad t\in[0,T], \qquad (1)$$

где $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, гладкий в $\overline{\Omega}$ коэффициент $c^2(x)$ строго положителен в Ω и равен нулю на $\partial\Omega$, а градиент $\nabla(c^2(x))$ не обращается в нуль на $\partial\Omega$. Наибольший интерес с физической точки зрения представляют собой решения уравнения (1) с конечным интегралом энергии $J^2(t) = \|\eta_t\|^2_{L^2} + \|c(x)\nabla\eta\|_{L^2}$, и мы обозначим через L соответствующее самосопряженное расширение в $L^2(\Omega)$ минимального оператора, порожденного дифференциальным выражением $-\langle\nabla, c^2(x)\nabla\rangle$.

Гамильтониан уравнения (1) имеет вид $H(x,p) = c(x)|p|$, и траектории соответствующей системы Гамильтона на $T_0^*\Omega$ уходят на бесконечность по импульсам за конечное время, одновременно подходя к $\partial\Omega$ по переменным x. Чтобы решить задачу Коши для уравнения (1) с быстроосциллирующими или локализованными начальными данными, необходимо правильно описать, что происходит с траекториями *после* ухода на бесконечность (т. е. найти закон отражения от границы) и построить канонический оператор на возникающих при этом неограниченных лагранжевых многообразиях. В одномерном случае это было сделано в [48] (только для случая быстроосциллирующих решений), однако непосредственно перенести эти результаты на многомерный случай затруднительно.

Построим фазовое пространство Φ, соответствующее рассматриваемой задаче. Пусть $U \subset \overline{\Omega}$ — достаточно малая воротниковая окрестность в $\overline{\Omega}$ края $\partial\Omega$, $\psi(x)$ — положительная в Ω определяющая функция края $\partial\Omega$, и $a(x)$ — гладкое векторное поле в U, такое, что $\langle a(x), \psi'(x)\rangle = 1$ при $x \in U$. В прямом произведении $T^*U \times \mathbf{R} \times (0, \infty)$ с координатами (y, η, q, E), $(y, \eta) \in T^*U$, $q \in \mathbf{R}$, $E \in (0, \infty)$, рассмотрим подмножество V точек, таких что $\langle a(y), \eta\rangle = 0$ и $\psi(y) = q^2 E$ и его подмножество V_∞, выделяемое условием $q = 0$. В пространстве $T_0^*\Omega$ с координатами (x, p) определим гладкое $(2n-1)$-мерное подмногообразие условием $\langle a(x), p\rangle = 0\}$ и зададим отображение $f\colon V \setminus V_\infty \longrightarrow T_0^*U \setminus W_0 \subset T_0^*\Omega$ формулами $x = y$, $p = \eta + \psi'(x)/q$. Это отображение является диффеоморфизмом. Положим теперь $\Phi = V \sqcup_f T_0^*\Omega$ (т.е. в дизъюнктном объединении $V \sqcup T_0^*\Omega$ отождествим точки, связанные диффеоморфизмом f).

Теорема 2. *Множество Φ наделено естественной структурой гладкого симплектического многообразия, а $T_0^*\Omega$ — его открытое плотное симплектическое подмногообразие. Гамильтониан $H(x,p)$ продолжается по непрерывности до гладкой функции на Φ, и траектории соответствующего гамильтонова векторного поля на Φ неограниченно продолжимы вперед и назад по времени.*

На области Ω определена шкала гильбертовых пространств $\{\mathfrak{H}^s(\Omega)\}$, в которой естественно рассматривать точные и асимптотические решения вырождающихся уравнений. Норма в пространстве $\mathfrak{H}^s(\Omega)$ эквивалентна обычной соболевской норме (с параметром h при производной) для функций с носителем вне воротниковой окрестности границы области, а для функций с носителем в окрестности какой-либо точки границы эквивалентная норма получается следующим образом: границу следует выпрямить, так чтобы область задавалась неравенством $x_1 > 0$, и тогда эквивалентная норма есть норма в пространстве $\mathfrak{H}^s(\mathbb{R}^n_+)$, где $\mathbb{R}^n_+ \equiv \{x \in \mathbb{R}^n \colon x_1 > 0\}$, а $\{\mathfrak{H}^s(\mathbb{R}^n_+)\}$ — гильбертова шкала [37, § IV.9], ассоциированная с оператором $1 - h^2\Delta_1$,

$$\Delta_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

Пусть $\Lambda \subset \Phi$ — лагранжево многообразие, снабженное некоторой мерой $d\mu$ и отмеченной точкой. Построим канонический оператор Маслова

$$K^h_{(\Lambda,d\mu)} \colon C_0^\infty(\Lambda) \to \bigcap_s \mathfrak{H}^s(\Omega).$$

Достаточно описать его действие на функции φ с носителем в окрестности точек из $\Lambda_\infty = \Lambda \cap \Phi_\infty$, где $\Phi_\infty = \Phi \setminus T_0^*\Omega$ (поскольку для функций с носителем в $\Lambda \setminus \Lambda_\infty$ можно воспользоваться стандартными формулами). Опишем конструкцию в двумерном случае. Пусть $\alpha^* \in \Lambda_\infty$, и пусть для определенности область Ω в окрестности проекции точки α^* на $\mathbb{R}^2_x$ задается неравенством вида $x_1 > f(x_2)$. Введем на Φ в окрестности точки α^* канонические координаты (q, y, η, ξ) формулами

$$x_1 = f(y) + q^2\eta, \quad x_2 = y, \quad p_1 = q^{-1}, \quad p_2 = \xi - q^{-1}f'(y),$$

так что $dp_1 \wedge dx_1 + dp_2 \wedge dx_2 = d\eta \wedge dq + d\xi \wedge dy$. По лемме о локальных координатах (см. [18]) хотя бы одна из четырех пар функций (q, y), (q, ξ), (η, y), (η, ξ) есть система локальных координат на Λ в окрестности точки α^*, и каждой из таких канонических систем координат мы сопоставим выражения для локального канонического оператора, действующего на функции с носителем в малой окрестности U точки α^*. Выпишем для определенности выражение для канонического оператора в канонических координатах (η, y):

$$\begin{aligned}&[K^h_{(\Lambda,d\mu)}\varphi](x)\\ &\qquad = \frac{1}{h}\int_0^\infty \mathbf{J}_0\biggl(\frac{2}{h}\sqrt{\eta(x_1 - f(x_2))}\biggr) e^{\frac{i}{h}(\tau(\alpha) - 2Q(\alpha)\eta)} \varphi(\alpha)\big|_{\alpha=\alpha(\eta,x_2)} \sqrt{\mu(\eta, x_2)}\, d\eta,\end{aligned}$$

где $\alpha \mapsto (X(\alpha), P(\alpha))$ — уравнения, задающие многообразие Λ в окрестности точки α^*, $Q(\alpha) = P_1^{-1}(\alpha)$, $\tau(\alpha)$ — действие на Λ, $\alpha = \alpha(\eta, y)$ — задание точки α в канонических координатах (η, y), $\mu(\eta, y)$ — плотность меры $d\mu$ в канонических координатах (η, y), ветвь квадратного корня выбирается в соответствии с индексом Маслова карты U, а

$$\mathbf{J}_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{iz\cos\theta}\, d\theta$$

— функция Бесселя нулевого порядка.

На Λ выписываются условия квантования, и при их выполнении глобальный канонический оператор $K^h_{(\Lambda, d\mu)}$ на Λ строится стандартным образом с помощью разбиения единицы.

Теорема 3. *Если $\varphi \in C_0^\infty(\Lambda)$, то функция $K^h_{(\Lambda,d\mu)}\varphi$ лежит в $\bigcap_s \mathfrak{H}^s(\Omega)$.*

Следствие 1. *Если $\varphi \in C_0^\infty(\Lambda)$, то функция $K^h_{(\Lambda,d\mu)}\varphi$ лежит в области определения $\mathcal{D}(L)$ оператора L.*

Эта теорема позволяет использовать канонический оператор на Λ для построения быстроосциллирующих решений уравнения (1) с конечным интегралом энергии.

Обратимся теперь к решениям уравнения (1) уравнения (1) с локализованными начальными данными вида

$$\eta|_{t=0} = \zeta(x) V\left(\frac{x - x_0}{\mu}\right), \quad \eta_t|_{t=0} = 0, \tag{2}$$

где x_0 — внутренняя точка области Ω, $V(y)$ — гладкая функция, достаточно быстро убывающая на бесконечности, а $\zeta(x)$ — срезающая функция с носителем в Ω, равная 1 в окрестности точки x_0.

Редукция этой задачи к задаче Коши с быстроосциллирующими начальными данными может быть осуществлена на основе представления локализованных функций через канонический оператор Маслова, введенного в [20] (в задачах без вырождения оно использовалось в [39, 40] и др.). Мы введем усовершенствованное представление этого рода, в котором лагранжево многообразие в каноническом операторе Маслова может быть выбрано инвариантным относительно гамильтонова векторного поля, что в конечном итоге приводит к более эффективным формулам для решения задачи Коши. Итак, сформулируем сначала общую теорему о таком усовершенствованном представлении.

Пусть $\Lambda^2 \subset \mathbf{R}^4$ — лагранжево многообразие, такое что (i) Λ^2 содержит окружность $\Lambda^1_0 = \{(x,p) \in \mathbf{R}^4 \colon x = x_0,\ p = \mathbf{n}(\psi)\}$, где $\mathbf{n}(\psi) = {}^t(\cos\psi, \sin\psi)$, а ψ пробегает окружность $\mathbf{S}^1 = \mathbf{R} \pmod{2\pi}$; (ii) сужение на Λ^2 формы $p\,dx$ не вырождается ни в одной точке многообразия Λ_2. Зафиксируем на Λ^2 действие τ, равное нулю на Λ^1_0, продолжим функцию ψ с окружности Λ^1_0 в ее окрестность на Λ_2 произвольным гладким образом и снабдим многообразие Λ^2 мерой, равной $d\tau \wedge d\psi$ вблизи Λ^1_0. Выберем также аргумент якобиана $D(x_1,x_2)/D(\tau,\psi)$ равным нулю при малых $\tau > 0$. Эти данные однозначно определят канонический оператор Маслова $K^h_{\Lambda^2}$ на Λ^2 в окрестности окружности Λ^1_0. Пусть $\mathrm{e}(\tau)$ — срезающая функция, равная единице в окрестности нуля. Следующая теорема обобщает выражение локализованной функции через канонический оператор, данное в [20].

Теорема 4. *Пусть преобразование Фурье функции $V(y)$, $y \in \mathbf{R}^2$, удовлетворяет оценкам $|\widetilde{V}^{(\beta)}(p)| \le C_{\beta s}|p|^{-|\beta|}(1+|p|)^{-s}$, $|\beta|, s = 0,1,2,\dots$. Тогда справедливо представление*

$$V\Big(\frac{x-x_0}{\mu}\Big) = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi}}e^{-i\pi/4}\int\limits_0^\infty \big[K^{\mu/\rho}_{\Lambda^2}\big(\widetilde{V}(\rho\mathbf{n}(\psi))\mathrm{e}(\tau)\big)\big](x)\sqrt{\rho}\,d\rho + O(\mu). \qquad (3)$$

Здесь $O(\mu)$ понимается как в смысле равномерной нормы остатка и его μ-производных, так и в смысле L^2-нормы градиента (которая в конкретных задачах имеет смысл энергетической нормы).

Вернемся теперь к задаче Коши (1), (2). В качестве лагранжева многообразия Λ^2 в фазовом пространстве Φ возьмем объединение $\bigcup_{t\in\mathbb{R}} g^t_H(\Lambda^1_0)$, где $\{g^t_H\}$ — фазовый поток системы Гамильтона, отвечающей гамильтониану $H(x,p) = c(x)|p|$. (На самом деле можно лишь гарантировать, что отображение $\Lambda^2 \to \Phi$ есть локальное вложение, но для конструкции канонического оператора этого достаточно.) Это многообразие инвариантно относительно гамильтонова векторного поля, а окрестность подмногообразия Λ_0^1 в Λ^2, которая только и существенна в представлении (3), удовлетворяет предположениям, в которых сформулирована теорема 4. Справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Решение задачи* (1), (2) *дается формулой*

$$\eta(x,t) = \mathrm{Re}\left\{ \sqrt{\frac{\mu c_0}{2\pi}} e^{-i\pi/4} \int_0^\infty e^{-i\rho c_0 t/\mu} K_\Lambda^{\mu/\rho}[\mathrm{e}(\tau - t)\widetilde{V}(\rho \mathbf{n}(\psi))] \sqrt{\rho}\, d\rho \right\} + O(\mu).$$

При каждом t решение $\eta(x,t)$ есть $O(\mu)$ вне произвольно малой не зависящей от μ окрестности проекции γ_t кривой $g_H^t(\Lambda_0^1)$ на x-пространство; иными словами, функция $\eta(x,t)$ локализована в окрестности множества γ_t.

Для начальных данных специального вида, например,

$$W_0(z) = \frac{A}{(1 + (z_1/b_1)^2 + (z_2/b_2)^2)^{3/2}},$$

выписываются простые явные выражения для максимальной амплитуды решения задачи (1), (2) в точках границы области.

Кроме того, дается конструкция асимптотик для некоторых других самосопряженных расширений, а также анализируется вопрос о построении асимптотических решений задачи с локализованной правой частью для уравнения вида (1) и обобщения на случай уравнений вида

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{jk}(x) \frac{\partial \eta}{\partial x_k} \right) = 0$$

с соответствующими условиями на матрицу $A(x) = (a_{jk}(x))$, а именно $A(x) = \varphi(x)B(x)$, где $B(x)$ — симметрическая вещественная матрица, гладко зависящая от x и строго положительно определенная при всех $x \in \overline{\Omega}$, а $\varphi(x)$ — определяющая функция границы $\partial\Omega$.

Основные результаты главы 2 опубликованы в работах [2–4, 6, 7, 11–14, 17].

В третьей главе изучаются квантованные однородные канонические (контактные) преобразования на многообразиях с коническими особенностями и доказана формула индекса для квантованных контактных преобразований на многообразиях с коническими особенностями.

Задача о вычислении индекса интегральных операторов Фурье (более точно, квантованных контактных преобразований) была поставлена Вайнстейном [49] и решена (для операторов на гладких многообразиях) в [41, 43]. В диссертации получена теорема об индексе для интегральных операторов Фурье–Маслова на многообразиях с коническими особенностями. Сформулируем ее здесь в одном из вариантов.

Объясним прежде всего, что такое интегральные операторы Фурье–Маслова на многообразиях с коническими особенностями (см., например, [31], а также [44]).

Пусть N_1, N_2 — многообразия с коническими особенностями, а T^*N_1 и T^*N_2 — кокасательные расслоения к N_1 и N_2, определяемые как *сжатые кокасательные расслоения* [44] многообразий с краем $N_1^\wedge$ и $N_2^\wedge$, получаемых из N_1 и N_2 раздутием конических точек. Таким образом, многообразия T^*N_1 и T^*N_2 тоже суть многообразия с краем. Они снабжены естественной симплектической формой, имеющей особенность на крае; в конических координатах (см. [46]) форма эта имеет вид $\omega^2 = -r^{-1}dp \wedge dr + dq \wedge d\varphi$, где φ — координата на базе конуса, r — радиальная координата, p — конормальная переменная, а q — импульсная переменная, двойственная к φ. Пусть $g\colon T^*N_1\backslash\{0\} \to T^*N_2\backslash\{0\}$ — $\mathbf{R}_+$-однородное каноническое преобразование (т.е. отображение, гладкое вплоть до границы и сохраняющее симплектическую форму). График $L(g) = \{(z, g(z))\} \subset T^*N_1\backslash\{0\}\times T^*N_2\backslash\{0\}$ отображения g является лагранжевым подмногообразием в $T^*N_1\backslash\{0\} \times T^*N_2\backslash\{0\}$ относительно симплектической формы $\pi_2^*\omega_2^2 - \pi_1^*\omega_1^2$, где π_j — проекция произведения на j-й сомножитель, а ω_j^2 — симплектическая форма на T^*N_j. Пусть Λ — линейное расслоение Маслова над $L(g)$, а $a\colon L(g) \to \Lambda$ — сечение, однородное степени m. Используя на $L(g)$ координаты, «снятые» с T^*N_1, можно считать

a сечением расслоения над T^*N_1. Определим интегральный оператор Фурье

$$T(g,a) = H^{s,\gamma}(N_1) \to H^{s-m,\gamma}(N_2)$$

в весовых пространствах Соболева [45] на N_1 и N_2 стандартным образом как оператор с интегральным ядром $\mathcal{K}_{L_g}(a)$, где $\mathcal{K}_{L_g}$ — канонический оператор Маслова на L_g (в его однородном варианте). При подходящем выборе элементов конструкции канонического оператора конормальный символ $T_0(p)$ оператора $T(g,a)$ корректно определен как семейство операторов $T_0(p)\colon H^s(\Omega_1) \to H^{s-m}(\Omega_2)$, где Ω_1 и Ω_2 — базы конусов на многообразиях N_1 и N_2.

Оператор $T(g,a)$ будем называть формально эллиптическим, если a не обращается в нуль и *эллиптическим* на данной весовой прямой $\{\operatorname{Im} p = \gamma\}$), если конормальный символ $T_0(p)$ обратим всюду на этой весовой прямой. В последнем случае он фредгольмов в пространствах Соболева с соответствующим весовым показателем.

Теорема 6. *Пусть $T(g,a)$ — эллиптический интегральный оператор Фурье–Маслова, конормальный символ $T_0(p)$ которого гомотопен в классе конормальных символов формально эллиптических интегральных операторов Фурье конормальному символу $T_0(-p)$. Тогда*

$$\operatorname{ind} T(g,a) = \frac{1}{2}\{\operatorname{ind} \mathcal{T} + \operatorname{sf} T_{0t}\},$$

где $\operatorname{sf} T_{0t}$ — спектральный поток гомотопии T_{0t}, связывающей $T_0(p)$ и $T_0(-p)$, а $\mathcal{T} = \mathcal{T}(G,A) : H^s(\mathcal{N}_1) \to H^s(\mathcal{N}_2)$ — интегральный оператор Фурье–Маслова на замкнутых многообразиях $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$, получаемых как дубли раздутий $N_1^\wedge$ и $N_2^\wedge$, причем каноническое преобразование G и амплитуда A выписываются явно.

Выражение для индекса $\operatorname{ind} \mathcal{T}$ интегрального оператора Фурье на паре замкнутых многообразий без края дается формулой Лейштнама–Неста–Цыгана [43], так что теорема 6 выражает индекс интегрального оператора Фурье на многообразии с коническими особенностями при условиях симметрии в терминах этой формулы и спектрального потока гомотопии конормальных символов.

В третьей главе получены также результаты, касающиеся формулы Лефшеца. Здесь уже речь идет не о «гладкостном» варианте интегральных операторов Фурье–Маслова, а о варианте, включающем малый параметр h, и получаемые формулы являются асимптотическими по своей природе.

Опишем основной результат.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C^\infty(M,F_1) & \xrightarrow{\widehat{D}} & C^\infty(M,F_2) & \longrightarrow & 0 \\ & & \big\downarrow{\scriptstyle \widehat{T}_1} & & \big\downarrow{\scriptstyle \widehat{T}_2} & & \\ 0 & \longrightarrow & C^\infty(M,F_1) & \xrightarrow{\widehat{D}} & C^\infty(M,F_2) & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{4}$$

где F_1 и F_2 — векторные расслоения над M,

$$\widehat{T}_1 = \widehat{T}_1(g,\varphi_1), \qquad \widehat{T}_2 = \widehat{T}_2(g,\varphi_1)$$

— интегральные операторы Фурье–Маслова, ассоциированные с некоторым каноническим преобразованием $g\colon T^*M \to T^*M$, а $\widehat{D}$ — h^{-1}-дифференциальный эллиптический оператор на M. По определению, требование эллиптичности означает, что для $\widehat{D}$ существует h^{-1}-псевдодифференциальный регуляризатор, т. е. h^{-1}-псевдодифференциальный оператор $\widehat{R}$ на M, такой что символы операторов $1-\widehat{D}\widehat{R}$ и $1-\widehat{R}\widehat{D}$ принадлежат классу Хёрмандера $S^{-\infty}(M)$.

Для случая, когда каноническое преобразование g может иметь многообразия неподвижных точек, в [34] была доказана следующая теорема.

Теорема 7 ([34]). *Пусть множество* $\operatorname{fix}(g)$ *неподвижных точек канонического преобразования g представляет собой конечное дизъюнктное объединение гладких компактных многообразий G_k без края, и пусть для всех k ядро оператора $1-g_*$ в каждой точке многообразия G_k совпадает с касательным пространством к G_k (условие невырожденности). Тогда число Лефшеца диаграммы* (4) *имеет асимптотику*

$$\mathcal{L} = \left(\frac{1}{2\pi h}\right)^{\max\dim G_k/2} \left[\sum_k e^{\frac{i}{h}S_k} \int\limits_{G_k} (\operatorname{Tr}\varphi_1(\alpha) - \operatorname{Tr}\varphi_2(\alpha))\, dm_k(\alpha) + O(h)\right], \tag{5}$$

где суммирование производится по многообразиям G_k максимальной размерности, S_k — значение (с необходимостью постоянное) производящей функции на многообразии G_k, а dm_k — некоторая невырожденная форма объема на G_k.

Явные выражения для dm_k не были найдены в [34].

Мы вычисляем формы dm_k явно в следующих двух случаях, «крайних» с точки зрения свойств сужения формы ω^2 на G_k:

1. Размерность $\dim G_k$ четна, и $\operatorname{rank} \omega^2|_{G_k} = \dim G_k$. Иначе говоря, G_k — симплектическое подмногообразие в T^*M (здесь ω^2 — стандартная симплектическая форма на T^*M).

2. Размерность $\dim G_k$ совпадает с $\dim M$, и G_k — лагранжево подмногообразие в T^*M.

Основные результаты главы 3 опубликованы в статьях [8–10, 15].

В четвертой главе изучаются некоторые аспекты теории туннельного канонического оператора.

Давно известно о существовании параллелей между термодинамикой и классической механикой (см., например, [21]). Формулы метода термодинамических потенциалов (см., например, [42]), выражающие термодинамические переменные через производные термодинамического потенциала по двойственным «естественным» переменным, с точностью до обозначений тождественны формулам, выражающим в классической механике импульсы как производные производящей функции по координатам [18], а переход от одних наборов естественных переменных к другим (или, что то же самое, от одного термодинамического потенциала к другому) есть не что иное, как преобразование Лежандра. Термодинамические переменные разбиваются на пары сопряженных переменных (давление–объем, энтропия–температура, число частиц–химический потенциал), и множество равновесных состояний термодинамической системы представляет собой в пространстве термодинамических переменных *лагранжево многообразие* [22], задаваемое термодинамическими потенциалами как производящими функциями.

В статистической физике, как и в квантовой механике, имеется естественный малый параметр. Это $1/N$, где N — число частиц. В сочетании с тем фактом, что в термодинамике, которая представляет собой «классический предел» статистической физики при $N \to \infty$, имеются естественные лагранжевы многообразия, это наводит на мысль, что и в этой ситуации квантование лагранжева многообразия должно приводить к приближению по параметру, стремящемуся к нулю, на этот раз в статистической физике. Эта идея подтверждается известной формулой [21]

$$F(v,T) = \lim_{N\to\infty} (kT/N) \ln \Sigma$$

для удельной свободной энергии, где k — постоянная Больцмана, v — удельный объем, T — температура, а Σ — статистическая сумма. Из этой формулы получается, что при больших N $\Sigma \sim e^{-NF(v,T)/kT}$. Эта формула стоит к общему квантованию лагранжева многообразия в термодинамике в таком же отношении, как ВКБ-приближение — к каноническому оператору.

Идея квантования термодинамического лагранжева многообразия была развита в работах [25], [26]. Отметим, что это квантование весьма сильно отличается от своего квантовомеханического аналога. Там речь идет о быстроосциллирующих функциях, в изучаемой же нами ситуации никаких осцилляций нет, а рассматриваются быстроубывающие функции. Поэтому вместо обычного канонического оператора рассматривается так называемый *туннельный* канонический оператор [24].

Логарифм функции, задаваемой туннельным каноническим оператором на термодинамическом лагранжевом многообразии, был назван в [25] *статистическим потенциалом*, и основной постулат заключается в том, что туннельный канонический оператор задает асимптотику статистической суммы при больших N, так что статистический потенциал точнее описывает свойства термодинамической системы, чем термодинамические потенциалы.

Разумеется, в термодинамике наряду с феноменологической квазиклассикой, или геометрическим квантованием в духе Н. Бора, имеется и задача о квазиклассическом предельном переходе, т. е. о строгом *вычислении асимптотики статистической суммы при* $N \to \infty$. В общем случае эта задача является значительно более сложной и далека от решения. В модельных примерах иногда удается, например, записав выражение для статистической суммы в виде бесконечномерного интеграла по траекториям (см. Фейнман–Хибс [36], а также Фейнман [35]), вычислить асимптотику этого интеграла в неособом случае при $N \to \infty$ методом Лапласа, что позволяет получить не только экспоненту, но и предэкспоненциальный множитель, а из последнего — и меру на лагранжевом многообразии.

В данной главе рассматривается одна из моделей, играющих важную роль в разработанной В. П. Масловым новой термодинамике (см., напр., [27]). Рассмотрим идеальный бозе-газ невзаимодействующих частиц, уровни энергии которых (с учетом кратности) представляют собой последовательность $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ положительных чисел, такую что ее считающая функция

$$\rho(\lambda) = \#\{j \colon \lambda_j \le \lambda\} \tag{6}$$

имеет при $\lambda \to \infty$ асимптотику

$$\rho(\lambda) = c_0 \lambda^{1+\gamma}(1 + O(\lambda^{-\varepsilon})) \tag{7}$$

для некоторых $c_0 > 0$, $\gamma > -1$, $\varepsilon > 0$. Показатель γ связан с числом d степеней свободы частицы формулой $d = 2 + 2\gamma$. Разумеется, число степеней свободы отдельной частицы — целое число. Маслов рассмотрел ситуацию, когда число степеней свободы при одной средней энергии у различных молекул различно, так же, как скорости и энергии отдельных молекул. Тогда среднее число степеней свободы по всем молекулам может быть нецелым числом и принимать весь спектр значений. Это приводит к статистике типа Бозе статистики для частиц дробной "размерности", которая отвечает дробному числу степеней свободы d.

Бозе-газ невзаимодействующих частиц, для которого соотношение (7) выполнено с некоторым произвольно заданным $\gamma > 0$, будем называть *газом Бозе–Маслова.*

Поставим задачу о вычислении статистического потенциала и построении термодинамического лагранжева многообразия для газа Бозе–Маслова.

Пусть $\mathcal{N}(E)$, $E > 0$ — число различных последовательностей $\{N_j\}_{j=1}^{\infty}$ неотрицательных целых чисел, таких что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j N_j \leq E.$$

Если λ_j — это уровни энергии частиц газа Бозе–Маслова, то N_j — это соответствующие числа заполнения, $\mathcal{N}(E)$ — число состояний газа с полной энергией, не превышающей E, а его логарифм $\mathcal{S}(E) = \ln \mathcal{N}(E)$ — *энтропия* газа при заданной энергии E. Заметим, что число частиц мы здесь не фиксируем, и в качестве большого параметра выступает сама энергия E (разумеется, среднее число частиц при $E \to \infty$ также будет стремиться к бесконечности). Вид зависимости $\mathcal{S}(E)$ при больших E и определяет статистический потенциал и соответствующее термодинамическое лагранжево многообразие в соответствии с уравнением

$$\beta = \frac{\partial \mathcal{S}(E)}{\partial E},$$

где $\beta = T^{-1}$ — обратная температура.

Теорема 8. *Пусть $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность положительных чисел, такая что ее считающая функция (6) имеет при $\lambda \to \infty$ асимптотику (7) с некоторыми $c_0 > 0$, $\gamma > -1$, и $\varepsilon > 0$. Тогда*

$$\mathcal{N}(E) = \frac{b^{(\gamma+1)/2} \exp\Big(bE - \sum_{j=1}^{\infty} \ln(1 - e^{-b\lambda_j})\Big)}{\big(2\pi c_0(\gamma+1)\Gamma(\gamma+3)\zeta(\gamma+2)\big)^{1/2}} \big(1 + o(1)\big) \quad as\ E \to \infty, \tag{8}$$

где $b = b(E) > 0$ — (единственное) решение уравнения

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j}{e^{b\lambda_j} - 1} = E, \tag{9}$$

$\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера, а $\zeta(x)$ — дзета-функция Римана.

Следствие 2. *Если выполнены условия теоремы 8, то*

$$\ln \mathcal{N}(E) = \frac{\gamma+2}{\gamma+1} \big(c_0(\gamma+1)\Gamma(\gamma+2)\zeta(\gamma+2)\big)^{1/(\gamma+2)} E^{(\gamma+1)/(\gamma+2)} \big(1 + o(1)\big) \tag{10}$$

при $E \to \infty$.

$$\beta(E) = \frac{\partial S(E)}{\partial E} = \big(c_0(\gamma+1)\Gamma(\gamma+2)\zeta(\gamma+2)\big)^{1/(\gamma+2)} E^{-1/(\gamma+2)}.$$

Результаты четвертой главы опубликованы в работах [5, 16].

Заключение содержит итоги диссертационной работы.

Список работ, опубликованных автором по теме диссертации

1. Доброхотов С. Ю., Макракис Г., Назайкинский В. Е., Тудоровский Т. Я. Новые формулы для канонического оператора Маслова в окрестности фокальных точек и каустик в двумерных квазиклассических асимптотиках // Теор. и матем. физика. — 2013. — Т. 177. — Вып. 3. — С. 355–386.

2. Доброхотов С. Ю., Назайкинский В. Е., Тироцци Б. Асимптотические решения двумерного модельного волнового уравнения с вырождающейся скоростью и локализованными начальными данными // Алгебра и анализ. — 2010. — Т. 22. — Вып. 6. — С. 67–90.

3. Назайкинский В. Е. Асимптотические решения вырождающегося волнового уравнения с локализованными начальными данными, отвечающие различным самосопряженным расширениям // Матем. заметки. — 2011. — Т. 89. — Вып. 5. — С. 797–800.

4. Назайкинский В. Е. Геометрия фазового пространства для волнового уравнения, вырождающегося на границе области // Матем. заметки. — 2012. — Т. 92. — Вып. 1. — С. 153–156.

5. Назайкинский В. Е. Об энтропии газа Бозе—Маслова // Докл. РАН. — 2013. — Vol. 448. — No. 3. — P. 266—-268.

6. Назайкинский В. Е. Канонический оператор Маслова на лагранжевых многообразиях в фазовом пространстве, соответствующем вырождающе-

муся на границе волновому уравнению // Матем. заметки. — 2014. — Т. 96. — Вып. 2. — С. 261–276.

7. Назайкинский В. Е. О представлениях локализованных функций в $\mathbf{R}^2$ каноническим оператором Маслова // Матем. заметки. — 2014. — Т. 96. — Вып. 1. — С. 87–99.

8. Назайкинский В. Е., Стернин Б. Ю. О принципе локальности индекса в эллиптической теории // Функц. анализ и его прил. — 2001. — Т. 35. — Вып. 2. — С. 37–52.

9. Назайкинский В. Е., Стернин Б. Ю., Шульце Б.-В. Индекс квантованных контактных преобразований на многообразиях с коническими особенностями // Докл. РАН. — 1999. — Т. 368. — Вып. 5. — С. 598–600.

10. Назайкинский В. Е., Стернин Б. Ю., Шульце Б.-В. Индекс интегральных операторов Фурье на многообразиях с изолированными особенностями // Изв. РАН. Сер. матем. — 2001. — Т. 65. — Вып. 2. — С. 127–154.

11. Dobrokhotov S. Yu., Nazaikinskii V. E., Lozhnikov D. A. Wave trains associated with a cascade of bifurcations of space-time caustics over elongated underwater banks // Mathematical Modelling of Natural Phenomena. — 2013. — Vol. 8. — No. 05. — P. 1–12.

12. Dobrokhotov S. Yu., Nazaikinskii V. E., Tirozzi B. Asymptotic solution of the one-dimensional wave equation with localized initial data and with degenerating velocity: I // Russ. J. Math. Phys. — 2010. — Vol. 17. — No. 4. — P. 434–447.

13. Dobrokhotov S. Yu., Nazaikinskii V. E., Tirozzi B. Asymptotic solutions of 2D wave equations with variable velocity and localized right-hand side // Russ. J. Math. Phys. — 2010. — Vol. 17. — No. 1. — P. 66–76.

14. Dobrokhotov S. Yu., Nazaikinskii V. E., Tirozzi B. Two-dimensional wave equation with degeneration on the curvilinear boundary of the domain and

asymptotic solutions with localized initial data // Russ. J. Math. Phys. — 2013. — Vol. 20. — No. 4. — P. 389–401.

15. Nazaikinskii V. E. Semiclassical Lefschetz formulas on smooth and singular manifolds // Russ. J. Math. Phys. — 1999. — Vol. 6. — No. 2. — P. 202–213.

16. Nazaikinskii V. E. On the asymptotics of the number of states for the Bose-Maslov gas // Mathematical Notes. — 2012. — Vol. 91. — No. 5—6. — P. 816—-823.

17. Nazaikinskii V. E. Maslov's canonical operator for degenerate hyperbolic equations // Russ. J. Math. Phys. — 2014. — Vol. 21. — No. 2. — P. 289–290.

Цитированная литература

18. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1989.

19. Белов В. В., Доброхотов С. Ю. Квазиклассические асимптотики Маслова с комплексными фазами. I. Общий подход // Теор. и матем. физика. — 1992. — Т. 92. — Вып. 2. — С. 215–254.

20. Доброхотов С. Ю., Тироцци Б., Шафаревич А. И. Представления быстроубывающих функций каноническим оператором Маслова // Матем. заметки. — 2007. — Т. 82. — Вып. 5. — С. 792–796.

21. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. — ГИТТЛ, 1951.

22. Маслов В. П. Теория возмущений и асимптотические методы. — М.: МГУ, 1965.

23. Маслов В. П. Операторные методы. — М.: Наука, 1973.

24. Маслов В. П. Асимптотические методы и теория возмущений. — М.: Наука, 1988.

25. Маслов В. П. Аналитическое продолжение асимптотических формул и аксиоматика термодинамики и квазитермодинамики // Функц. анализ и его прил. — 1994. — Т. 28. — Вып. 4. — С. 28–41.

26. Маслов В. П. Геометрическое квантование термодинамики, фазовые переходы и асимптотика в критических точках // Матем. заметки. — 1994. — Т. 56. — Вып. 3. — С. 155–156.

27. Маслов В. П. Фазовые переходы в реальных газах и идеальные бозе-газы // Теор. и матем. физика. — 2011. — Т. 167. — Вып. 2. — С. 295–310.

28. Маслов В. П., Назайкинский В. Е. Алгебры с общими перестановочными соотношениями и их приложения. I. Псевдодифференциальные уравнения с растущими коэффициентами // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. мат. — М.: ВИНИТИ, 1979. — Т. 13. — С. 5–144.

29. Маслов В. П., Федорюк М. В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. — М.: Наука, 1976.

30. Мищенко А. С., Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е. Лагранжевы многообразия и метод канонического оператора. — М.: Наука, 1978.

31. Назайкинский В. Е., Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е., Шульце Б.-В. Квантование канонических преобразований на многообразиях с коническими особенностями // Докл. РАН. — 1999. — Т. 367. — Вып. 4. — С. 447–450.

32. Пелиновский Е. Н. Гидродинамика волн цунами. — Нижний Новгород: ИПФ РАН, 1996.

33. Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е. Теорема Атья–Ботта–Лефшеца о неподвижной точке в симплектической геометрии // Докл. РАН. — 1996. — Т. 348. — Вып. 2. — С. 165–168.

34. Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е. Теорема Лефшеца о неподвижной точке для квантованных канонических преобразований // Функц. анализ и его прил. — 1998. — Т. 32. — Вып. 4. — С. 35–48.

35. Фейнман Р. Статистическая механика. — М.: Мир, 1975.

36. Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. — М.: Мир, 1968.

37. Функциональный анализ / Под ред. С. Г. Крейн. Справочная математическая библиотека. — 2 изд. — М.: Наука, 1972.

38. Atiyah M. F., Bott R. A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes. II. Applications // Ann. Math. — 1968. — Vol. 87. — P. 451–491.

39. Dobrokhotov S. Yu., Shafarevich A. I., Tirozzi B. Localized wave and vortical solutions to linear hyperbolic systems and their application to linear shallow water equations // Russ. J. Math. Phys. — 2008. — Vol. 15. — No. 2. — P. 192–221.

40. Dobrokhotov S. Yu., Tirozzi B., Vargas C. A. Behavior near the focal points of asymptotic solutions to the Cauchy Problem for the linearized shallow water equations with initial localized perturbations // Russ. J. Math. Phys. — 2009. — Vol. 16. — No. 2. — P. 228–245.

41. Epstein C., Melrose R. Contact degree and the index of Fourier integral operators // Math. Res. Lett. — 1998. — Vol. 5. — No. 3. — P. 363–381.

42. Kubo R. Thermodynamics. — Amsterdam: North-Holland, 1968.

43. Leichtnam E., Nest R., Tsygan B. Local formula for the index of a Fourier integral operator // J. Differential Geom. — 2001. — Vol. 59. — No. 2. — P. 269–300.

44. Melrose R. Transformation of boundary problems // Acta Math. — 1981. — Vol. 147. — P. 149–236.

45. Schulze B.-W. Pseudodifferential Operators on Manifolds with Singularities. — Amsterdam: North–Holland, 1991.

46. Schulze B.-W., Sternin B., Shatalov V. Differential Equations on Singular Manifolds. Semiclassical Theory and Operator Algebras. — Berlin–New York: Wiley–VCH Verlag, 1998. — Vol. 15 of Mathematics Topics.

47. Stoker J. J. Water Waves: The Mathematical Theory with Applications. — New York: Wiley, 1958 (reprinted in 1992).

48. Vukašinac T., Zhevandrov P. Geometric asymptotics for a degenerate hyperbolic equation // Russ. J. Math. Phys. — 2002. — Vol. 9. — No. 3. — P. 371–381.

49. Weinstein A. Some questions about the index of quantized contact transformations // RIMS Kôkûryuku. — 1977. — Vol. 104. — P. 1–14.

Подписано в печать 17.04.2014
Тираж 100 экз.

Отпечатано в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН
Москва, 119991, ул. Губкина, 8