ОТЗЫВ

официального оппонента Кордюкова Юрия Аркадьевича на
диссертационную работу Назайкинского Владимира Евгеньевича
“Обобщения канонического оператора Маслова и их приложения в математической физике”, представленную на соискание ученой степени
доктора физико–математических наук по специальности
01.01.03 – математическая физика

Метод канонического оператора Маслова является одним из важнейших асимптотических методов в теории дифференциальных уравнений и математической физике. Он был первоначально разработан для построения глобальных асимптотических решений задачи Коши для строго гиперболических уравнений с быстро осциллирующими начальными данными. В дальнейшем метод и его модификации нашли широкое применение для решения разнообразных асимптотических задач математической физики. Поэтому, представляется актуальным и важным как дальнейшее совершенствование самого метода с целью получения более эффективных и простых алгоритмов его применения, так и разработка его обобщений, позволяющих применять данный метод для решения новых типов асимптотических задач. Этим целям и задачам посвящена настоящая диссертация.

Результаты представлены в диссертации следующим образом. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

Первая глава посвящена построению нового, более простого интегрального представления для стандартного канонического оператора Маслова. Конструкция такого представления основана на использовании специальных систем координат, определенных в окрестностях фокальных точек, называемых системами эйконал-координат. Автор показывает, что доставляемый этим представлением класс быстро осциллирующих функций совпадает с классом функций, задаваемым стандартным каноническим оператором Маслова на том же лагранжевом многообразии. Эффективность построенного интегрального представления продемонстрирована на примере задачи локализации быстро осциллирующих решений типа волновых пучков.

Вторая глава посвящена построению асимптотических (как быстро осциллирующих, так и локализованных) решений линейного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(c^2(x)\frac{\partial\eta}{\partial x_j}\right)=0,\quad \eta=\eta(x,t),\quad x\in\Omega,\quad t\in[0,T],$$

в области $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$, для которого скорость распространения волн $c(x)$ обращается в нуль на границе области, причем $c(x)\sim\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)^{1/2}$ при

$\mathrm{dist}(x, \partial\Omega) \to 0$. Такие уравнения возникают, например, при моделировании в линейном приближении наката на берег длинных волн, в частности, волн цунами. Поскольку уравнение вырождается на границе, стандартный канонический оператор Маслова здесь не применим. В частности, характерной чертой данной задачи является тот факт, что траектории соответствующей гамильтоновой системы (или бихарактеристической системы) на фазовом пространстве $T_0^*\Omega$ уходят на бесконечность по импульсам за конечное время, одновременно подходя к границе области по переменным x. Поэтому, для решения задачи необходимо найти закон отражения бихарактеристик от границы и построить соответствующую модификацию канонического оператора Маслова, что и сделано в работе.

Автор строит новое фазовое пространство Φ, содержащее $T_0^*\Omega$ в качестве открытого плотного симплектического подмногообразия, такое, что гамильтониан продолжается по непрерывности до гладкой функции на Φ, и каждая траектория соответствующей гамильтоновой системы на Φ неограниченно продолжается вперед и назад по времени. Затем он строит канонический оператор Маслова, ассоциированный с подходящим лагранжевым подмногообразием в Φ, наделенным некоторой мерой. Построенный канонический оператор используется для построения решений $\eta(x,t)$ рассматриваемого волнового уравнения с быстро осциллирующими начальными данными и конечным интегралом энергии $J^2(t) = \|\eta_t\|^2_{L^2} + \|c(x)\nabla\eta\|^2_{L^2}$.

Затем автор переходит к построению асимптотических решений волнового уравнения с локализованными начальными данными вида

$$\eta\,|_{t=0} = \zeta(x)V\left(\frac{x-x_0}{\mu}\right), \quad \eta_t\,|_{t=0} = 0,$$

где x_0 — внутренняя точка области Ω, $V(y)$ — гладкая функция, достаточно быстро убывающая на бесконечности, а $\zeta(x)$ — срезающая функция с носителем в Ω, равная 1 в окрестности точки x_0, $\mu > 0$ — малый параметр. Стандартная конструкция канонического оператора Маслова в данном случае непосредственно не применима, поскольку она предназначена для построения решений задачи Коши с быстро осциллирующими начальными данными. Автор показывает, что задача Коши с локализованными начальными данными сводится к задаче Коши с быстро осциллирующими начальными данными при помощи формулы, представляющей произвольную достаточно быстро убывающую на бесконечность гладкую функцию вида $V(x/\mu)$ в виде интеграла по параметру некоторого семейства быстро осциллирующих функций, построенных по начальным данным при помощи некоторого канонического оператора Маслова. Такое представление впервые было получено в работе С.Ю. Доброхотова, Б. Тироцци и А.И. Шафаревича. В диссертации автор доказывает усовершенствованное представление такого типа, в котором канонический оператор Маслова отвечает лагранжевому подмногообразию, инвариантному относительно бихарактеристического потока. Это представление позволяет автору получить простые эффективные формулы для решения задачи Коши для волнового уравнения с локализованными начальными данными, пригодные для компьютерной реализации.

Третья глава посвящена задачам теории индекса для квантованных канонических преобразований (интегральных операторов Фурье–Маслова) на гладких и сингулярных многообразиях.

Прежде всего, автор исследует некоторые аспекты квазиклассической формулы Лефшеца. Он рассматривает эллиптический комплекс h-псевдодифференциальных операторов на гладком компактном многообразии и его невырожденный эндоморфизм, задаваемый интегральным оператором Фурье–Маслова с параметром h, ассоциированным с каноническим преобразованием $g : T^*M \to T^*M$. Формулы Лефшеца для комплексов такого вида были доказаны Б.Ю. Стерниным и В.Е. Шаталовым как в случае, когда неподвижные точки преобразования g изолированы и невырождены, так в случае, когда неподвижные точки образуют гладкие многообразия. Однако, формула Лефшеца, установленная в последнем случае, на самом деле представляет собой всего лишь теорему существования, дающую описание вида правой части формулы как интеграла по множеству неподвижных точек от некоторых известных выражений по некоторой комплекснозначной мере. В диссертации автор получает явное представление для этой меры для двух важных случаев: когда многообразия неподвижных точек симплектические или когда они лагранжевы, доказывая, тем самым, явные асимптотические формулы, выражающие вклад таких многообразий в число Лефшеца эндоморфизма.

Затем автор переходит к изучению индекса квантованных контактных преобразований (интегральных операторов Фурье) на компактном многообразии M с коническими особенностями. Автор вводит гладкое компактное многообразие $2M$, являющееся дублем исходного многообразия M с вырезанными окрестностями конических точек. Рассматриваются эллиптические интегральные операторы Фурье на M, удовлетворяющие некоторому условию симметрии, которое гарантирует их продолжимость до эллиптических интегральных операторов Фурье на $2M$. Основной результат состоит в формуле для индекса таких операторов. Эта формула дает выражение для индекса в виде полусуммы индекса продолженного эллиптического интегрального оператора Фурье на $2M$ и явно выписываемого инварианта конормального символа исходного оператора.

Четвертая глава посвящена некоторым аспектам теории туннельного канонического оператора Маслова — аналога канонического оператора Маслова в задачах термодинамики, введенного В. П. Масловым. А именно, в данной главе рассматривается модель идеального бозе-газа, состоящего из невзаимодействующих частиц, уровни энергии которых (с учетом кратности) представляют собой последовательность $\{\lambda_J\}_{j=1}^{\infty}$ положительных чисел, такую что ее считающая функция $\rho(\lambda) = \#\{j : \lambda_j \leq \lambda\}$ имеет при $\lambda \to \infty$ асимптотику $\rho(\lambda) = c_0\lambda^{1+\gamma}(1 + O(\lambda^{-\varepsilon}))$ для некоторых $c_0 > 0, \gamma > -1, \varepsilon > 0$. Автор называет такой газ газом Бозе-Маслова.

Для любого $E > 0$ обозначим через $\mathcal{N}(E)$ число различных последовательностей $\{N_j\}_{j=1}^{\infty}$ неотрицательных целых чисел, таких что $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j N_j \leq E$. Эту величину можно интерпретировать как число состояний газа Бозе-Маслова с полной энергией, не превосходящей E. Можно также ввести энтропию $\mathcal{S}(E) = \ln \mathcal{N}(E)$ газа Бозе-Маслова с заданной энергией E. Основным результатом этой главы являются асимптотические формулы для $\mathcal{S}(E)$ и $\mathcal{N}(E)$ при $E \to \infty$. Эти формулы позволяют автору построить термодинамическое лагранжево многообразие и соответствующий туннельный канонический оператор и, тем самым, найти асимптотику статистической суммы для газа

Бозе-Маслова при $N \to \infty$, где N — число частиц. Следует также отметить элегантное доказательство асимптотической формулы для энтропии газа Бозе-Маслова, основанное на идеях тропической математики.

Результаты диссертации являются новыми, строго доказаны и своевременно опубликованы надлежащим образом, автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Обоснованность и достоверность научных положений, выводов и заключений, полученных в диссертации, подтверждается корректным использованием современных методов математической физики, функционального анализа, теории дифференциальных уравнений в частных производных, дифференциальной геометрии. Достоверность научных результатов диссертации также подтверждается публикацией результатов работы в ведущих российских и международных математических журналах и их апробацией на международных и всероссийских конференциях, семинарах ведущих российских научных центров.

Научная значимость результатов, полученных в диссертации, заключается в развитии асимптотических методов решения задач математической физики. Полученные результаты могут быть использованы в теории дифференциальных уравнений в частных производных, теории индекса эллиптических операторов, математической физике.

Имеются следующие замечания:

- Стр. 46, 4-я строка: В правой части формулы для $\Lambda_\pm$ следует написать $p = \pm c^{-1}(x)$.
- Стр. 52, формула (2.19): следует написать $(1 + E + (p')^2)^{s/2}$.
- Стр. 53: в выделенной формуле, приведенной в формулировке предложения 2.6, следует написать $\|Du\|_s \leq C_s \|u\|_{s+2}$.
- Стр. 74: Приведено условие 2.1, на которое дальше автор постоянно ссылается как на условие А.

В тексте диссертации обнаружено некоторое число мелких опечаток, которые следовало бы исправить.

Высказанные замечания носят скорее редакционный характер и не оказывают влияния на общую положительную оценку работы.

Диссертационная работа В.Е. Назайкинского является завершенной научно-квалификационной работой, в которой на основании выполненных автором исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как научное достижение в теории асимптотических методов решения задач математической физики.

Все сказанное выше позволяет заключить, что представленная диссертационная работа В.Е. Назайкинского “Обобщения канонического оператора Маслова и их приложения в математической физике” удовлетворяет всем требованиям пп. 9, 10 «Положения о порядке присуждения ученых степеней» (утвержденного Постановлением Правительства РФ от 24.09.2013, № 842), предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени доктора наук, а ее автор Назайкинский Владимир Евгеньевич присвоения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.03 – математическая физика.

Официальный оппонент
доктор физ.–мат. наук, доцент,
ведущий научный сотрудник
Федерального государственного
бюджетного учреждения науки
Институт математики с ВЦ УНЦ РАН Ю.А. Кордюков

31.10.14

Почтовый адрес места работы: 450008, Уфа, ул. Чернышевского, д. 112, Институт математики с ВЦ УНЦ РАН

Подпись Кордюкова Ю.А. заверяю

Ученый секретарь института
канд. физ.–мат. наук Ю.З. Шайгарданов