Математический институт им. В. А. Стеклова

Российской академии наук

На правах рукописи

УДК 512.66, 512.723, 512.743.7

Фонарёв Антон Вячеславович

# Строение производных категорий грассманианов

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н., в. н. с.

Кузнецов Александр Геннадьевич

Москва – 2014

# Содержание

# Введение

**Актуальность темы исследования.** Данная работа посвящена исследованию строения производных категорий грассманианов. Многообразия Грассмана — один из важнейших объектов классических объектов геометрии. В частности, они позволяют перенести вопросы линейной алгебры в геометрический мир: грассманиан $\mathsf{Gr}(k, V)$ параметризует $k$-мерные подпространства в фиксированном векторном пространстве $V$. На $\mathsf{Gr}(k, V)$ можно ввести различные геометрические структуры: топологического пространства, гладкого компактного дифференцируемого многообразия, гладкого проективного алгебраического многообразия. Мы будем придерживаться алгебро-геометрического взгляда.

В начале второй половины XX века, с появлением гомологической алгебры, появилась необходимость дать удобное описание мира, в котором живут производные функторы, в частности, когомологии векторных расслоений. Так, благодаря А. Гротендику и его школе, появилось понятие *производной категории,* окончательно сформировавшееся в диссертации Ж.-Л. Вердье, которая была опубликована лишь 30 лет спустя [31]. Изначально производные категории были нужны Гротендику для того, чтобы сформулировать далеко идущее обобщение двойственности Серра, но за следующие несколько десятилетий они проникли во многие другие области математики. Стоит упомянуть школу М. Сато, которая именно в терминах производных категорий построила теорию $D$-модулей и микролокального анализа (хороший обзор имеется в книге [19]).

Долгое время производные категории когерентных пучков на алгебраических многообразиях были объектами исключительно гомологической природы. Одним из основополагающих результатов в области строения производых категорий стал результат А. Бейлинсона, которому удалось дать явное описание ограниченной производной категории когереных пучков на проективном пространстве (см. [1]). Через несколько лет М. Капранов в работе [4] обобщил описание Бейлинсона на случай грассманианов. Поиск естественных структур в производных категориях привел к появлению таких понятий, как *исключительный набор* и *полуортогональное разложение,* которые позволяют описать строение прозводной (более общо, триангулированной) категории в терминах меньших компонент (см., например, [2, 18]). В этих новых терминах результаты Бейлинсона и Капранова состоят в построении полных исключительных наборов на проективных пространствах и грассманианах соответственно.

Очередным толчком к изучению производных категорий алгебраических многообразий послужило замечательное открытие, принадлежащее А. Бондалу и Д. Орлову: оказалось, что производная категория «помнит геометрию». Было доказано, что алгебраическое многообразие с обильным или антиобильным каноническим классом полностью определяется своей производной категорией (см. [12, 13]). Примерно тогда же производные категории когерентных пучков стали центральным объектом в гипотезе о гомологической зеркальной двойственности, математическом обобщении физического феномена, предложенном М. Концевичем на международном математическом конгрессе, проходившем в 1994 году в Цюрихе (см. [21]). Так вопрос изучения строения производных категорий стал одним из центральных в современной алгебраической геометрии.

Другой сюжет алгебраической геометрии, прочно связанный с производными категориями, — это теория гомологической зеркальной двойственности, предложенная А. Кузнецовым в качестве категорного аналога классической проективной двойственности (см. [22]). Данная теория позволяет делать утверждения о строении производных категорий линейных сечений алгебраических многообразий. Необходимым ингридиентом гомологической проективной двойственности являются полуортогональные разложения особого вида, называемые *лефшецевыми,* которые также тесно связаны с вопросами построения категорных разрешений особенностей алгебраических многообразий (см. [24]).

Данная работа посвящена изучению строения производных категорий грассманианов: построению исключительных расслоений, полных исключительных наборов и лефшецевых разложений. Несмотря на то, что некоторые полные исключительные наборы в производных категориях грассманианов уже были построены Капрановым, вопрос построения других наборов остается актуальным. Исключительные наборы являются, в первую очередь, вычислительным инструментом, и различные наборы обладают своими достоинствами и недостатками в зависимости от решаемой задачи. Кроме того, ожидается, что построение новых наборов прольет свет на строение производных категорий других однородных пространств. Теория гомологической проективной двойственности остается очень молодой, и нахождение примеров лефшецевых разложений является первостепенным для ее развития.

Полные исключительный наборы в производных категориях алгебраических многообразий были построены, например, для некоторых рациональных однородных пространств (см. [8, 23, 26, 29] и др.), на гладких торических многообразиях ([20]), поверхностях дель Пеццо ([7]), некоторых трехмерных многообразиях Фано ([5, 6]). Вопросы построения (минимальных) лефшецевых разложений остаются малоизученными (см. [22, 23]).

**Цели и задачи диссертационной работы:** Изучение структуры ограниченных производных категорий когерентных пучков на многообразиях Грассмана. В частности, построение эквивариантных исключительных векторных расслоений, полных исключительных наборов и лефшецевых разложений.

**Научная новизна.** Полученные результаты являются новыми и получены автором самостоятельно.

**Теоретическая и практическая значимость.** Работа носит теоретический характер. Результаты, изложенные в диссертации, могут быть использованы специалистами в области алгебраической геометрии, теории представлений и комбинаторики, а также могут найти приложение в современной теоретической физике, в частности, вопросах, касающихся гипотезы о гомологической зеркальной симметрии.

**Положения, выносимые на защиту:** На защиту выносятся следующие результаты:

- построен новый класс исключительных эквивариантных векторных расслоений на грассманианах;
- построен новый класс точных последовательностей эквивариантных ветторных расслоений на грассманианах;
- доказана гипотеза Кузнецова–Полищука о существовании некоторых полуортогональных разложений ограниченной производной категории когерентных пучков на грассманиане;
- построены два лефшецевых разложения в ограниченной производной категории когерентных пучков на грассманиане $\mathsf{Gr}(k, n)$, доказана полнота одного из них в общем случае, доказана полнота и минимальность другого в случае взаимно простых $k$ и $n$.

**Степень достоверности и апробация результатов.** Основные результаты диссертации докладывались на следующих международных семинарах и конференциях:

- международная конференция «Связь теории струн с калибровочными теориями и проблемы модулей бран», Москва, 10–14 сентября 2012 г.
- семинар «Valley Geometry Seminar», University of Massachusetts, Амхерст, США, 25 января 2013 г.
- семинар «Weekly talk», Simons Center for Geometry and Physics, Стони Брук, США, 29 января 2013 г.
- семинар «Representation theory and related topics», Northeastern University, Бостон, США, 1 февраля 2013 г.

**Публикации.** Материалы диссертации опубликованы в двух печатных работах [9, 10], которые являются статьями в рецензируемых научных журналах.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, пяти глав и библиографии. Общий объем диссертации составляет 83 страницы. Библиография включает 32 наименования.

## Краткое содержание работы

Во **введении** дан краткий очерк истории изучения производных категорий в алгебраической геометрии, обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, представлены выносимые на защиту научные положения.

**Первая глава** носит вводный характер. В разделе 1.1 приводятся необходимые определения, касающиеся вопросов строения триангулированных категорий. В частности, даются определения исключительного объекта, исключительного набора, двойственного исключительного набора, полуортогонального разложения. Обсуждается вопрос построения и полноты исключительных наборов в производной категории алгебраического многообразия. Раздел 1.2 посвящен комбинаторике диаграмм Юнга с различными свойствами и операциям на них. Определяются необходимые в дальнейшем множества диаграмм специального вида, некоторые групповые действия на этих множествах (важными являются операции подкрутки $\lambda(t)$ и сдвига $\lambda\{t\}$), а также операция *ленточного обрезания*. В разделе 1.3 приводятся необходимые сведения о (косых) функторах Шура. Далее, в разделе 1.4 описывается конструкция грассманианов как рациональных однородных пространств общих линейных групп, а также приводятся необходимые варианты теоремы Бореля–Ботта–Вейля, которая послужит основным вычислительным инструментом для вычисления когомологий и прямых образов эквивариантных пучков на грассманианах и многообразиях частичных флагов. В разделе 1.5 дается описание полных исключительных наборов на грассманианах, построенных Капрановым.

**Вторая глава** посвящена построению исключительных эквивариантных векторных расслоений на грассманиане $X = \mathsf{Gr}(k, V)$. Пусть $n = \dim V$, $\mathrm{Y}_{w,h}$ —

множество диаграмм Юнга, вписанных в прямоугольник размера $w \times h$. Для пары целых чисел $0 < w < n-k$ и $0 < h < k$ мы определяем *блок* $\mathrm{B}_{w,h}$ как множество пар диаграмм $(\lambda, \mu)$, вписанных в прямоугольники размера $w \times h$ и $(k-h) \times (n-k-w)$ соответственно

$$\mathrm{B}_{w,h} = \mathrm{Y}_{w,h} \times \mathrm{Y}_{k-h,n-k-w}.$$

По каждой паре $(\lambda, \mu) \in \mathrm{B}_{w,h}$ мы строим расслоение $\mathcal{E}^{\lambda,\mu}$ на $X$ как прямой образ с $Z = \mathsf{Fl}(k-h, k; V)$ расслоения $(\mathcal{U}/\mathcal{W})^{\lambda} \otimes (V/\mathcal{W})^{-\mu}$ (в Лемме 2.0.3 проверятся, что высшие прямые образы зануляются)

$$\mathcal{E}^{\lambda,\mu} = p_* \left( (\mathcal{U}/\mathcal{W})^{\lambda} \otimes (V/\mathcal{W})^{-\mu} \right).$$

Здесь $p : Z \to X$ — ествественная проекция, а расслоения $\mathcal{W} \subset \mathcal{U} \subset V \otimes \mathcal{O}_Z$ образуют универсальный флаг на $Z$.

Основаная цель данной главы состоит в том, чтобы показать что расслоения $\mathcal{E}^{\lambda,\mu}$ исключительные и не зависят от выбора блока, которому принадлежит пара $(\lambda, \mu)$.

В Предложениях 2.0.5 и 2.0.7 содержатся необходимые когомологические вычисления. В качестве первого следствия удается дать независимое от выбора блока описание расслоений $\mathcal{E}^{\lambda,\mu}$ как двойственного набора в эквивариантной производной категории.

**Следствие 2.0.9.** *Пусть $(\lambda, \mu) \in \mathrm{B}_{w,h}$. Тогда в эквивариантной категории $D^b_{\mathsf{G}}(X)$ расслоения*

$$\left( \mathcal{E}^{\alpha,\beta} \right)_{\alpha \subseteq \lambda, \beta \subseteq \mu}$$

*образуют левый двойственный набор к исключительному набору*

$$\left( \mathcal{U}^{\alpha} \otimes (V/\mathcal{U})^{-\beta} \right)_{\alpha \subseteq \lambda, \beta \subseteq \mu}.$$

Те же вычисления совместно с построением $\mathcal{E}^{\lambda,\mu}$ в качестве прямых образов с частичных флагов $\mathsf{Fl}(k, n-w; V)$ позволяют не только проверить исключительность расслоений, но и то, что они образуют исключительный набор.

**Следствие 2.0.12.** *В производной категории $D^b(X)$ имеется исключительный набор вида*

$$\left(\mathcal{E}^{\lambda,\mu}\right)_{(\lambda,\mu)\in \mathrm{B}_{w,h}}$$

*с любым полным порядком, согласованным с частичным порядком*

$$(\alpha,\beta)\preceq(\lambda,\mu) \quad\Leftrightarrow\quad \beta\supseteq\mu \text{ и } \alpha\supseteq\lambda.$$

Результаты второй главы содержатся в работе [10].

**В третьей главе** появляется основной технический инструмент данной работы, а именно, определяются *ступенчатые комплексы.* Мотивировкой служит следующий вопрос: как вызаризить через данный исключительный набор

$$(E_1, E_2, \ldots, E_t)$$

его подкрутку

$$(E_1\otimes\mathcal{O}(1), E_2\otimes\mathcal{O}(1), \ldots, E_t\otimes\mathcal{O}(1)),$$

где $\mathcal{O}(1)$ — очень обильный генератор $\mathsf{Pic}(X)$, $X = \mathsf{Gr}(k, V)$.

В разделе 3.1 мы замечаем, что в случае проективного пространства $\mathbb{P}(V)$ ответ хорошо известен. Единственное нетривиальное выражение для подкрученного бейлинсоновского набора дается точной последовательностью

$$0\to\Lambda^n V^*\otimes\mathcal{O}(-n+1)\to\Lambda^{n-1}V^*\otimes\mathcal{O}(-n+2)\to\ldots\to V^*\otimes\mathcal{O}\to\mathcal{O}(1)\to 0.$$

В разделе 3.2 дается выражение для подкрученного капрановского набора. Основным результатом является следующая теорема ($\lambda^{(i)}$ обозначают ленточные обрезания, определенные в разделе 1.2.2).

**Теорема 3.2.1.** *Пусть $\lambda\in\mathrm{Y}_{n-k,k}$ — диаграмма Юнга максимальной ширины, то есть $\lambda_1 = n-k$. Тогда на $X$ имеется точная последовательность векторных расслоений вида*

$$0\to\mathcal{U}^{\lambda}\to\mathcal{U}^{\lambda^{(1)}}\otimes\Lambda^{b_\lambda^{(1)}}V\to\mathcal{U}^{\lambda^{(2)}}\otimes\Lambda^{b_\lambda^{(2)}}V\to\ldots$$
$$\ldots\to\mathcal{U}^{\lambda^{(n-k)}}\otimes\Lambda^{b_\lambda^{(n-k)}}V\to\mathcal{U}^{\lambda\{1\}}(1)\to 0.$$

Приводятся два доказательства Теоремы 3.2.1: первое показывает природу точных последовательностей как выражений подкрученного капрановского набора через исходный, второе же дает построение геометрическим методом и не зависит от полноты капрановского набора, что полезно для возможных обобщений.

Наконец, в разделе 3.3 строятся ступенчатые комплексы для определенных во второй главе расслоений $\mathcal{E}^{\lambda,\mu}$. Конструкция получается поднятием ступенчатых комплексов из раздела 3.2 с меньшего грассманиана на частичные флаги, тензорным умножением на подходящее расслоение и спуском на исходный грассманиан. Основными результатам являются следующие две теоремы.

**Теорема 3.3.1.** *Для всякой пары* $(\lambda, \mu) \in \mathrm{B}_{w,h}$*, такой что* $\lambda_1 = w$*, на* $X$ *имеется точная последовательность вида*

$$0 \to \mathcal{E}^{\lambda,\mu} \to \mathcal{E}^{\lambda^{(1)},\mu} \otimes \Lambda^{b_\lambda^{(1)}} V \to \mathcal{E}^{\lambda^{(2)},\mu} \otimes \Lambda^{b_\lambda^{(2)}} V \to \dots$$
$$\dots \to \mathcal{E}^{\lambda^{(w)},\mu} \otimes \Lambda^{b_\lambda^{(w)}} V \to \mathcal{E}^{\lambda\{1\},\mu(1)}(1) \to 0.$$

**Теорема 3.3.2.** *Для всякой пары* $(\lambda, \mu) \in \mathrm{B}_{w,h}$*, такой что* $\mu_1 = k - h$*, на* $X$ *имеется точная последовательность вида*

$$0 \to \mathcal{E}^{\lambda,\mu} \to \mathcal{E}^{\lambda,\mu^{(1)}} \otimes \Lambda^{b_\mu^{(1)}} V^* \to \mathcal{E}^{\lambda,\mu^{(2)}} \otimes \Lambda^{b_\mu^{(2)}} V^* \to \dots$$
$$\dots \to \mathcal{E}^{\lambda,\mu^{(k-h)},\mu} \otimes \Lambda^{b_\mu^{(k-h)}} V \to \mathcal{E}^{\lambda(1),\mu\{1\}}(1) \to 0.$$

Результаты третьей главы содержатся в работах [9, 10].

**Четвертая глава** посвящена доказательству гипотезы Кузнецова–Полищука. Пусть $X = \mathsf{Gr}(k, V)$, а $\Gamma$ — непрерывный строго возрастающий путь на плоскости $\mathbb{R}^2$, ведущий из точки $(0, 0)$ в точку $(n-k, k)$. Занумеруем в порядке возрастания первой координаты точки $p_0, p_1, \dots, p_{l(\Gamma)}$ на $\Gamma$, одна из координат которых целочисленная. С каждой из точек $p_i = (x_i, y_i)$ свяжем подкатегорию

$$\mathcal{B}_{p_i} = \left\langle \mathcal{U}^{-\lambda} \otimes (V/\mathcal{U})^{\mu} \right\rangle_{(\lambda,\mu)\in \mathrm{B}_{p_i}} \subset D^b(X),$$

где для $p = (x, y)$ блок $\mathrm{B}_p = \mathrm{Y}_{n-k-\lceil x\rceil,\lfloor y\rfloor} \times \mathrm{Y}_{k-\lceil y\rceil,\lfloor x\rfloor}$.

**Гипотеза 4.1.2** ([25], Гипотеза 9.8)**.** *Имеется полуотогональное разложение*

$$D^b(X) = \left\langle \mathcal{B}_{p_0}, \mathcal{B}_{p_1}(1), \ldots, \mathcal{B}_{p_{l(\Gamma)}}(l(\Gamma)) \right\rangle,$$

*каждая из компонент которого* $\mathcal{B}_{p_i}(i)$ *порождается полным исключительным набором.*

В разделе 4.1 формулируется гипотеза, обсуждается комбинаторная природа гипотетических разложений, а также проверяется, что компоненты разложения порождаются полным исключительным набором из расслоений, двойственных к расслоениям вида $\mathcal{E}^{\lambda,\mu}$.

Раздел 4.2 сожержит доказательство гипотезы. Для каждой точки $p$ в прямоугольнике с нецелыми координатами и пути $\Gamma$, проходящего через $p$, занумеруем в порядке возрастания первой координаты точки $p_0, p_1, \ldots, p_{l(\Gamma)}$ на $\Gamma$, лежащие правее $p$ и одна из координат которых целочисленная. Убывающей индукцией по сумме координат $p$ доказывается следующее утверждение.

**Теорема 4.2.1.** *В производной категории* $D^b(X)$ *имеется полуортогональное разложение*

$$\left\langle \mathcal{B}_{p_0}, \mathcal{B}_{p_1}(1), \ldots, \mathcal{B}_{p_{l(\Gamma)}}(l(\Gamma)) \right\rangle = \mathcal{B}^{\Gamma}_{\geq p} \subset D^b(X),$$

*причем соответствующая подкатегория, порожденная блоками, не зависит от выбора пути* $\Gamma$*. Далее мы будем обозначать ее* $\mathcal{B}_{\geq p}$*.*

Для доказательства сначала строятся разложения для путей специального вида, после чего изучается поведение первых блоков разложения при деформациях пути. Здесь первый раз применяются ступенчатые комплексы. Наконец, из Теоремы 4.2.1 выводится доказательство гипотезы Кузнецова–Полищука. В качестве приложения на грассманианах серединной размерности строится полный исключительный набор, элементы которого переставляются под действием внешнего автоморфизма.

Результаты четвертой главы содержатся в работе [10].

В **пятой главе** строятся лефшецевы разложения производной категории грассманиана $X = \mathsf{Gr}(k, V)$. Раздел 5.1 носит предварительный характер: приводятся необходимые определения и сведения, касающиеся лефшецевых разложений. В разделе 5.2 подробно изучается циклическое действие на диаграммах Юнга, вписанных в прямоугольник. Определяются множества верхнетреугольных диаграмм $\mathrm{UY}_{w,h}$, минимальных верхнетреугольных диаграмм $\mathrm{mUY}_{w,h}$, а также их различные характеристики.

В разделе 5.3 определяются два лефшецевых разложения $D^b(X)$. Пусть $n = \dim V$,

$$\mathcal{B}_i = \left\langle \mathcal{U}^{-\lambda} \mid \lambda \in \mathrm{UY}_{n-k,k},\ i < r(\lambda) \right\rangle, \text{ при } i = 0, \dots, n-1.$$

Первым основным результатом главы является следующая теорема (определение чисел $r(\lambda)$ и $o(\lambda)$ дано в разделе 5.2).

**Теорема 5.3.1.** *Подкатегории $\mathcal{B}_i$ образуют лефшецево разложение $\mathcal{D}^b(X)$. Исключительный набор $\left(\mathcal{U}^{-\lambda} \mid \lambda \in \mathrm{UY}_{n-k,k}\right)$ является лефшецевым базисом данного разложения с носителем $r(\lambda)$.*

Оказывается, что в случае взаимно простых $k$ и $n$ разложение $\mathcal{B}_\bullet$ минимально (см. Предложение 5.3.8). В случае $(k, n) \neq 1$ можно построить несколько меньшее разложение. Положим

$$\mathcal{A}_i = \left\langle \mathcal{U}^{-\lambda} \mid \lambda \in \mathrm{mUY}_{n-k,k},\ i < o(\lambda) \right\rangle, \text{ при } i = 0, \dots, n-1.$$

При $k = 2$ или $(k, n) = 1$ подкатегории $\mathcal{B}_i$ и $\mathcal{A}_i$ совпадают.

**Теорема 5.3.3.** *Подкатегории $\mathcal{A}_i(i)$ полуортогональны. Иначе говоря, имеется лефшецево разложение*

$$\langle \mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1(1), \dots, \mathcal{A}_{n-1}(n-1) \rangle = \mathcal{A} \subset \mathcal{D}^b(X)$$

*некоторой полной триангулированной подкатегории $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}^b(X)$ с лефшецевым базисом, заданным исключительным набором $\left(\mathcal{U}^{-\lambda} \mid \lambda \in \mathrm{mUY}_{n-k,k}\right)$ и носителем $o(\lambda)$.*

**Гипотеза 5.3.6.** *Подкатегории $\mathcal{A}_i$ образуют минимальное лефшецево разложение $\mathcal{D}^b(X)$.*

Раздел 5.4 посвящен доказательствам утверждений, сформулированных в разделе 5.3. Результаты пятой главы содержатся в работе [9].

# Глава 1

# Предварительные сведения

## 1.1. Исключительные наборы и полуортогональные разложения

Зафиксируем алгебраически замкнутое поле $\mathsf{k}$ характеристики нуль. Пусть $\mathcal{T}$ — линейная триангулированная категория над полем $\mathsf{k}$.

**Определение 1.1.1.** Упорядоченный набор полных триангулированных подкатегорий $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_t \subseteq \mathcal{T}$ называется *полуортогональными разложением,* если выполнены следующие два условия:

(1) для любых индексов $1 \leq i < j \leq t$ и любых объектов $A_i \in \mathcal{A}_i$, $A_j \in \mathcal{A}_j$ имеем $\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(A_j, A_i) = 0$;

(2) минимальная полная триангулированная подкатегория в $\mathcal{T}$, содержащая все подкатегории $\mathcal{A}_i$, совпадает с $\mathcal{T}$.

Полуортогональное разложение с *компонентами* $\mathcal{A}_i$ будем обозначать

$$\mathcal{T} = \langle \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_t \rangle .$$

Нас будут интересовать полуортогональные разложения $D^b(X)$, ограниченной производной категории когерентных пучков на алгебраическом многообразии $X$.

**Определение 1.1.2.** Полная триангулированная подкатегория $\mathcal{A}$ называется *допустимой,* если функтор вложения $i : \mathcal{A} \to \mathcal{T}$ имеет левый и правый сопряженные.

Допустимые подкатегории позволяют строить примеры полуортогональных разложений. А именно, если $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ — допустимая, имеются полуортогональные разложения

$$\mathcal{T} = \left\langle \mathcal{A}^{\perp}, \mathcal{A} \right\rangle \quad \text{и} \quad \mathcal{T} = \left\langle \mathcal{A}, {}^{\perp}\mathcal{A} \right\rangle,$$

где подкатегории

$$\begin{aligned} {}^{\perp}\mathcal{A} &= \{T \in \mathcal{T} \mid \mathsf{Hom}(T, A[s]) = 0 \text{ при всех } A \in \mathcal{A}, s \in \mathbb{Z}\}, \\ \mathcal{A}^{\perp} &= \{T \in \mathcal{T} \mid \mathsf{Hom}(A[s], T) = 0 \text{ при всех } A \in \mathcal{A}, s \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

называются *левым* и *правым ортогоналом* к $\mathcal{A}$ соответственно.

Допустимые подкатегории легко строить с помощью исключительных наборов.

**Определение 1.1.3.** Объект $E \in \mathcal{T}$ называется исключительным, если

$$\mathsf{Hom}(E, E[t]) = \begin{cases} \mathsf{k}, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

Например, когерентный пучок $\mathcal{F}$ на алгебраическом многообразии является исключительным, если $\mathsf{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{F}) = \mathsf{k}$ и $\mathsf{Ext}^i(\mathcal{F}, \mathcal{F}) = 0$ при всех $i > 0$. По исключительному объекту $E \in \mathcal{T}$ можно построить минимальную полную триангулированную подкатегорию $\langle E \rangle \subset \mathcal{T}$, его содержащую. Оказывается, что $\langle E \rangle$ эквивалентна производной категории конечномерных векторных пространств $D^b(\mathsf{k})$ и является допустимой в $\mathcal{T}$. Данная конструкция имеет следующее обобщение.

**Определение 1.1.4.** Последовательность $E_1, E_2, \ldots, E_t$ исключительных объектов называется *исключительным набором,* если при всех $1 \leq i < j \leq t$ и всех $s \in \mathbb{Z}$ выполнено $\mathsf{Hom}(E_j, E_i[s]) = 0$. Исключительный набор называется *полным,* если $\mathcal{T} = \langle E_1, E_2, \ldots, E_t \rangle$.

Всякая полная триангулированная подкатегория $\langle E_1, E_2, \ldots, E_t \rangle \subset \mathcal{T}$, порожденная исключительным набором, также является допустимой (см. [2]).

Одним из первых и важнейших примеров многообразия, допускающего полный исключительный набор, является проективное пространство. Следующая красивая теорема была доказана Бейлинсоном.

**Теорема 1.1.5** ([1]). *В производной категории проективного пространства имеется полный исключительный набор*

$$D^b(\mathbb{P}^n) = \langle \mathcal{O}(-n),\ \mathcal{O}(-n+1),\ \ldots,\ \mathcal{O}(-1), \mathcal{O} \rangle\,.$$

Полные исключительный наборы в производных категориях алгебраических многообразий были построены, например, для некоторых рациональных однородных пространств (см. [8], [23], [29], [26] и др.), на гладких торических многообразиях ([20]), поверхностях дель Пеццо ([7]), некоторых трехмерных многообразиях Фано ([6], [5]).

Нас будет интересовать строение производных категорий классических грассманианов $k$-мерных подпространств в векторном пространстве $V$. Полные исключительные наборы на них были построены Капрановым в работе [4]. За подробностями мы отсылаем читателя к разделу 1.5.

Задача построения полного исключительного набора в производной категории алгебраического многообразия $X$ сводится к следующим трем этапам.

1. Найти достаточное количество исключительных объектов.

2. Проверить условия полуортогональности.

3. Доказать полноту.

Когда мы говорим «достаточное количество», имеется в виду следующее. Пусть $(E_1, E_2, \ldots, E_t)$ — полный исключительный набор в $\mathcal{T}$. Тогда классы $[E_i]$ образуют базис в кольце Гротендика $K_0(X)$ (в подобном случае $K_0(X) \simeq \mathbb{Z}^t$). Проверка полуортогональности — вопрос проверки равенства нулю некоторых пространств морфизмов. Наиболее сложной частью является доказательство полноты. Долгое время стояла гипотеза, состоящая в том, что исключительный набор, содержащий достаточное количество исключительных объектов, является полным. То ли к сожалению, то ли к счастью, данная гипотеза была недавно опровергнута (см., например, [17]). Оригинальный подход Бейлинсона к доказательству полноты, использованный также Капрановым, состоит в построении резольвенты структурного пучка диагонали. К сожалению, его тяжело обобщить даже на прочие рациональные однородные многообразия. Другой подход к доказательству полноты дает следующий результат Орлова (мы приводим упрощенную формулировку).

**Теорема 1.1.6** ([27, Теорема 4])**.** *Пусть $X$ — гладкое проективное многообразие размерности $d$ над произвольным полем $\mathsf{k}$, а $\mathcal{L}$ — очень обильное линейное расслоение на нем. Тогда объект $\mathcal{E} = \oplus_{i=k-d}^{k}\mathcal{L}^i$ является классическим генератором $D^b(X)$, то есть минимальная полная триангулированная подкатегория в $D^b(X)$, содержащая $\mathcal{E}$ и замкнутая относительно взятия прямых слагаемых, совпадает с самой $D^b(X)$.*

В качестве приложения к вопросу доказательства полноты исключительных наборов немедленно получаем следующий критерий.

**Следствие 1.1.7.** *Пусть $X$ — гладкое проективное многообразие, а $\mathcal{T}$ — полная триангулированная подкатегория в $D^b(X)$, содержащая $\mathcal{O}_X$ и замкнутая относительно подкрутки на очень обильное линейное расслоение $\mathcal{L}$. Тогда $\mathcal{T} = D^b(X)$. В частности, если в $D^b(X)$ задан исключительный набор $(E_1, \ldots, E_t)$, содержащий $\mathcal{O}_X$, такой что*

$$E_j \otimes \mathcal{L} \in \langle E_1, E_2, \ldots, E_t \rangle$$

*при всех $j = 1, \ldots, t$, то данный набор полный.*

На множестве исключительных наборов действует группа кос (с помощью так называемых перестроек). Особенно полезными при этом оказываются двойственные наборы. Мы дадим когомологическое описание, которое полностью их характеризует. Напомним, что в триангулированной категории $\mathcal{T}$ по определению имеем $\mathsf{Ext}^k(X,Y) = \mathsf{Hom}(X, Y[k])$.

**Предложение 1.1.8** (Городенцев, [18])**.** *Пусть* $(E_1, E_2, \ldots, E_t)$ *— полный исключительный набор в* $\mathcal{T}$*,* $(F_t, F_{t-1}, \ldots, F_1)$ *— набор объектов в* $\mathcal{T}$*, удовлетворяющий условиям*

$$\mathsf{Ext}^\bullet(F_i, E_j) = \begin{cases} \mathsf{k}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

*Тогда объекты* $(F_t, F_{t-1}, \ldots, F_1)$ *также образуют полный исключительный набор, называемый* правым двойственным*. Меняя местами* $F_i$ *и* $E_j$ *в когомологическом условии, получаем* левый двойственный *набор.*

*Замечание* 1.1.9. К сожалению, до сих пор нет единой договоренности, в какой градуировке должны сидеть нетривиальные пространства расширений в определении двойственных наборов. Отметим, что соответствующее разложение при этом инвариантно, так как получающиеся исключительные объекты отличаются друг от друга исключительно сдвигом.

## 1.2. Комбинаторика диаграмм Юнга

Обычно диаграммы Юнга отождествляют с невозрастающими положительными целочисленными последовательностями конечной длины. Подобные диаграммы Юнга мы будем называть *обычными.* Тем не менее, нам будет удобно отождествлять диаграммы Юнга с доминантными весам общих линейных групп. Последним соответствуют невозрастающие целочисленные последовательности конечной длины, члены которых вполне могут быть отрицательными. Когда мы говорим о диаграммах Юнга, мы подразумеваем, что, как и доминантные веса, они могут иметь строки нулевой и даже отрицательной длины. Такие строки нужно представлять себе, как клетки, нарисованные слева от некоторой выбранной вертикальной оси, обозначающей ноль.

### 1.2.1. Групповые действия на диаграммах

Начнем с простой инволюции на множестве всех диаграмм Юнга. Отрицанием диаграммы с $k$ строками $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ называется диаграмма.

$$-\lambda = (-\lambda_k, -\lambda_{k-1}, \ldots, -\lambda_1).$$

Если рассматривать $\lambda$ как доминантный вес $\mathsf{GL}(k)$, то $-\lambda$ есть не что иное, как старший вес двойственного представления.

На множестве обычных диаграмм Юнга определена другая инволюция. Транспонированная диаграмма ${}^t\lambda$ для $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ определяется тем условием, что длина $i$-ой строки ${}^t\lambda_i$ равна высоте $i$-го столбца $\lambda$:

$${}^t\lambda_i = \max\{j \mid \lambda_j \geq i\}.$$

Пусть $\mathrm{Y}_{w,h}$ — множество диаграмм Юнга, вписанных в прямоугольник ширины $w$ и высоты $h$. Данное множество отождествляется с множеством невозрастающих целочисленных последовательностей $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h)$, таких что $w \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_h \geq 0$. Можно также мыслить о подобных диаграммах как о целочисленных путях, ведущих из левого нижнего угла прямоугольника в правый верхний и двигающихся только вправо или вверх. Такие пути состоят из $w$ горизонтальных и $h$ вертикальных единичных отрезков. Последнее описание дает нам биекцию между $\mathrm{Y}_{w,h}$ и множеством двоичных последовательностей длины $w + h$, содержащих ровно $h$ единиц.

На множестве двоичных последовательностей длины $n = w + h$ циклическим сдвигом действует группа $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, сохраняя при этом количество единиц:

$$g : a_1 a_2 \ldots a_n \;\mapsto\; a_n a_1 a_2 \ldots a_{n-1},$$

где $a_i \in \{0, 1\}$, а $g \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ — образующая группы.

Индуцированное на $\mathrm{Y}_{w,h}$ действие мы будем называть *циклическим,* а образ $\lambda \in \mathrm{Y}_{w,h}$ в результате действия образующей $g$ обозначать $\lambda\{1\}$ и называть *(циклическим) сдвигом* $\lambda$. В терминах диаграмм Юнга $\lambda\{1\}$ имеет следующее описание:

$$\lambda\{1\} = \begin{cases} (\lambda_1+1, \lambda_2+1, \ldots, \lambda_h+1), & \text{если } \lambda_1 < w, \\ (\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_h, 0), & \text{если } \lambda_1 = w. \end{cases}$$

Результат действия $g^d$ на $\lambda$ будем обозначать $\lambda\{d\}$.

Также имеется очевидное действие группы $\mathbb{Z}$ на множестве всех диаграмм Юнга с $h$ строками (не только обычных), заданное правилом

$$\lambda(t) = (\lambda_1+t, \lambda_2+t, \ldots, \lambda_h+t).$$

Диаграмму $\lambda(t)$ будем называть *подкруткой* $\lambda$ на $t$.

Наконец, на $\mathrm{Y}_{w,h}$ определена инволюция. Для данной диаграммы $\lambda \in \mathrm{Y}_{w,h}$ ее *дополнением* называется диаграмма

$$\lambda^c = (w-\lambda_h, w-\lambda_{h-1}, \ldots, w-\lambda_1).$$

В терминах определенных ранее операций имеем $\lambda^c = (-\lambda)(w)$.

### 1.2.2. Ленточные обрезания

Пусть $\lambda \in \mathrm{Y}_{w,h}$ — диаграмма максимальной ширины, т. е. $\lambda_1 = w$. Для всех $i = 1, \ldots, w$ определим диаграммы $\lambda^{(i)}$ по правилам

$$\begin{aligned} {}^t\lambda^{(1)} &= ({}^t\lambda_1, {}^t\lambda_2, \ldots, {}^t\lambda_{w_\lambda-1}, 0), \\ {}^t\lambda^{(i)} &= ({}^t\lambda_1, \ldots, {}^t\lambda_{w_\lambda-i}, {}^t\lambda_{w_\lambda-i+2}-1, \ldots, {}^t\lambda_{w_\lambda}-1, 0), \\ {}^t\lambda^{(w_\lambda)} &= ({}^t\lambda_2-1, {}^t\lambda_3-1, \ldots, {}^t\lambda_{w_\lambda}-1, 0). \end{aligned}$$

Таким образом получается последовательность строго вложенных диаграмм $\lambda \supset \lambda^{(1)} \supset \lambda^{(2)} \supset \ldots \supset \lambda^{(w)}$. Определим числа $b_\lambda^{(i)} = |\lambda/\lambda^{(i)}|$, где $|\alpha/\beta| = |\alpha| - |\beta|$ обозначает число клеток в косой диаграмме. Диаграммы $\lambda^{(i)}$ будем называть *ленточными обрезаниями* $\lambda$.

Летночные обрезания легко описать в терминах двоичных последовательностей. Пусть $\lambda$ соответствует двоичная последовательность $a_1a_2\ldots a_{w+h}$. Напомним, что в ней имеется ровно $w$ нулей. Предположим, они стоят на местах с индексами $z_1 > z_2 > \ldots > z_w$ (обратим внимание на убывающий порядок). Условию $\lambda_1 = w$ эквивалентно $a_{w+h} = 1$. Тогда диаграмме $\lambda^{(i)}$ соответствует последовательность

$$a_1a_2\ldots a_{z_i-1}1a_{z_i+1}\ldots a_{w+h-1}0.$$

Неформально говоря, чтобы построить $\lambda^{(i)}$, необходимо взять внутреннюю полоску ширины один вдоль границы $\lambda$ (данная полоска совпадает с косой диаграммой $\lambda/\lambda^{(w)}$) и вырезать $i$ правых столбцов полоски из диаграммы $\lambda$. Число вырезанных клеток при этом в точности совпадает с $b_\lambda^{(i)}$.

*Пример* 1.2.1. Пусть $\lambda = (4,4,2) \in \mathrm{Y}_{4,3}$. Тогда диаграмма $\lambda^{(i)}$ получается вырезанием клеток с числами, не превосходящими $i$, на следующей картинке.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 1 |
| | 3 | 2 | 1 |
| 4 | 3 | | |

## 1.3. Функторы Шура

Про функторы Шура написано множество замечательных текстов, и мы ни в коем случае не берем на себя ответственность сотворить еще один. Приведем лишь необходимые нам результаты, за подробностями и доказательствами отошлем заинтересованного читателя к текстам [16], [11] и [32].

Один из вариантов определения функтора Шура — следующий. Пусть $\lambda$ — диаграмма Юнга с $k$ строками, а $\mathcal{U}$ — векторное расслоение ранга $k$ на многообразии $X$. С расслоением $\mathcal{U}$ можно связать соответствующее главное $\mathsf{GL}(k)$-расслоение $P$. Рассматрим неприводимое представление $V^\lambda$ группы $\mathsf{GL}(k)$ со старшим весом $\lambda$. Тогда $\Sigma^\lambda\mathcal{U} = V^\lambda \times_{\mathsf{GL}(k)} P$. Для краткости будем обозначать $\Sigma^\lambda\mathcal{U}$ как $\mathcal{U}^\lambda$. По определению имеем $\mathcal{U}^{-\lambda} = (\mathcal{U}^*)^\lambda$. Аналогично, $\mathcal{U}^{\lambda/\mu}$ будет обозначать результат применения косого функтора Шура $\Sigma^{\lambda/\mu}$ к $\mathcal{U}$. За определением косого функтора Шура отсылаем читателя к [11].

Правило Литтвуда–Ричардсона позволяет разложить тензорное произведение $\mathcal{U}^\alpha$ и $\mathcal{U}^\beta$ в прямую сумму со слагаемыми вида $\mathcal{U}^\gamma$, иначе говоря, вычислить кратности $m^\gamma_{\alpha,\beta}$ в разложении

$$\mathcal{U}^\alpha \otimes \mathcal{U}^\beta = \bigoplus_\gamma m^\gamma_{\alpha,\beta} \mathcal{U}^\gamma,$$

где $m^\gamma_{\alpha,\beta}\mathcal{U}^\gamma$ обозначает прямую сумму $m^\gamma_{\alpha,\beta}$ копий $\mathcal{U}^\gamma$.

Коэффициенты Литтвуда–Ричардсона также встречаются в выражении косого функтора Шура через обычные.

**Предложение 1.3.1** ([32, Предложение 2.3.6]). *Пусть $\alpha \subset \beta$ — пара обычных диаграмм Юнга, $\mathcal{U}$ — векторное расслоение. Тогда*

$$\mathcal{U}^{\beta/\alpha} = \bigoplus_\gamma m^\beta_{\alpha,\gamma} \mathcal{U}^\gamma.$$

Другим полезным инструментом для работы с функторами Шура является следующее утверждение.

**Предложение 1.3.2** ([32, Предложение 2.3.1]). *Пусть $\lambda$ — диаграмма Юнга, и пусть дана короткая точная последовательность векторных расслоений*

$$0 \to \mathcal{U} \to \mathcal{V} \to \mathcal{F} \to 0.$$

*Тогда на $\mathcal{V}^\lambda$ имеется фильтрация, присоединенные факторы которой имеют вид*

$$\mathcal{U}^\alpha \otimes \mathcal{F}^{\lambda/\alpha},$$

*где $\alpha$ пробегает множество всех поддиаграмм $\alpha \subseteq \lambda$.*

Мы будем многократно использовать следующую лемму, которая немедленно выводится из правила Литтлвуда–Ричардсона.

**Лемма 1.3.3.** *Пусть $\lambda$ и $\mu$ — пара диаграмм Юнга с $k$ строками, $\mathcal{U}$ — векторное расслоение ранга $k$.*

1. *Для всякого неприводимого слагаемого*

$$\mathcal{U}^{\alpha} \subset \mathcal{U}^{\lambda} \otimes \mathcal{U}^{\mu}$$

*имеем*

$$\lambda_i + \mu_k \leq \alpha_i \leq \lambda_1 + \mu_i$$

*при всех $1 \leq i \leq k$.*

2. *Пусть $\lambda, \mu \geq 0$. Тогда для всякого неприводимого слагаемого*

$$\mathcal{U}^{\alpha} \subset \mathcal{U}^{\lambda} \otimes \mathcal{U}^{-\mu},$$

*такого что все $\alpha_i \geq 0$, имеем $\alpha \subseteq \lambda$.*

*Доказательство.* Для доказательства первого утверждения можно подкрутить все диаграммы так, чтобы они стали положительными, а потом заметить, что в правиле Литтлвуда–Ричардсона клеточки только добавляются. Чтобы доказать второе утверждение, заметим, что $\mathcal{U}^{\alpha} \subset \mathcal{U}^{\lambda} \otimes \mathcal{U}^{-\mu}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{U}^{\lambda} \subset \mathcal{U}^{\alpha} \otimes \mathcal{U}^{\mu}$. □

## 1.4. Грассманианы и теорема Бореля–Ботта–Вейля

### 1.4.1. Грассманианы

Цель данного раздела — напомнить некоторые факты про грассманиан $\mathsf{Gr}(k, V)$. Более подробное изложение вместе с доказательствами читатель найдет в работах [28] и [32].

Пусть $V$ — векторное пространство размерности $n$. Тогда $X = \mathsf{Gr}(k, V)$ — однородное простанство для группы $\mathsf{G} = \mathsf{GL}(V)$. В частности, $X = \mathsf{G}/\mathsf{P}$, где $\mathsf{P}$ — стабилизатор точки. Погруппа $\mathsf{P}$ является параболической. Зафиксируем в пространстве $V$ базис. Теперь группа $\mathsf{G}$ отождествляется с группой обратимых матриц размера $n \times n$, а $\mathsf{P}$ — с подгруппой обратимых матриц, у которых все элементы в левом нижнем прямоугольнике ширины $k$ и высоты $n-k$ нулевые.

Так как $X$ — однородное многообразие, имеется эквивалентность категории $Coh^{\mathsf{G}}(X)$ когерентных $\mathsf{G}$-эквивариантных пучков на $X$ и категории конечномерных представлений $Rep-\mathsf{P}$. Данная эквивалентность согласована со структурами тензорных абелевых категорий, в частности, сохраняет тензорные произведения и переводит двойственные объекты в двойственные. Таким образом, изучение эквивариантных пучков на $X$ сводится к изучению конечномерных представлений $\mathsf{P}$.

Группа $\mathsf{P}$ не является редуктивной. Обозначим за $\mathsf{U} \subset \mathsf{P}$ унипотентный радикал $\mathsf{P}$, за $\mathsf{L} = \mathsf{P}/\mathsf{U}$ — фактор Леви. Напомним, что проекция $\mathsf{P} \to \mathsf{L}$ допускает расщипление. В частности, $\mathsf{L}$ можно рассматривать в качестве подгруппы $\mathsf{L} \subset \mathsf{P}$. В нашем случае $\mathsf{L}$ отождествляется с подгруппой блочно-диагональных обратимых матриц с блоками размера $k \times k$ и $(n-k) \times (n-k)$.

Нас интересуют эквивариантные векторные расслоения на $X$. Имеется следующее замечательное утверждение.

**Предложение 1.4.1** ([28, Предложение 10.9])**.** *Всякое неприводимое эквивариантное векторное расслоение на $X$ имеет вид $\mathcal{U}^{\lambda} \otimes (V/\mathcal{U})^{\mu}$. В терминах представлений $\mathsf{P}$ оно получается ограничением соответствующего неприводимого представления с $\mathsf{L}$ на $\mathsf{P}$.*

С другой стороны, всякое конечномерное представление $\mathsf{P}$ можно ограничить на $\mathsf{L}$. Группа $\mathsf{L}$ является редуктивной, поэтому ограниченное представление распадется в прямую сумму неприводимых. В частности, на любом эквивариантном векторном расслоении имеется фильтрация, присоединенные факторы которой являются неприводимыми.

Помимо обычной производной категории $D^b(X)$ нам понадобится эквивариантная прозводная категория $D^b_{\mathsf{G}}(X)$. Для пары эквивариантных векторных расслоений $\mathcal{E}, \mathcal{F} \in Coh^{\mathsf{G}}(X)$ пространство $\mathsf{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ естественным образом является представлением группы $\mathsf{G}$. Эквивариантные морфизмы при этом — это в точности инварианты

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{G}}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = \mathsf{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F})^{\mathsf{G}}. \tag{1.1}$$

Группа $\mathsf{G}$ является редуктивной, поэтому функтор взятия $\mathsf{G}$-инвариантов точный. Получаем равенство

$$\mathsf{Ext}^i_{\mathsf{G}}(\mathcal{E}, \mathcal{G}) = \mathsf{Ext}^i(\mathcal{E}, \mathcal{G})^{\mathsf{G}}. \tag{1.2}$$

Немедленно заключаем, что формулы (1.1) и (1.2) выполняются для произвольных объектов $E, F \in D^b_{\mathsf{G}}(X)$.

### 1.4.2. Теорема Бореля–Ботта–Вейля

Теорема Бореля–Ботта–Вейля позволяет вычислять когомологии линейных расслоений на пространстве флагов полупростой алгебраической группы. Она также может быть использована для вычисления когомологий эквивариантных векторных расслоений на грассманианах. Далее мы ограничиваемся случаем группы $\mathsf{GL}(V)$.

Пусть $V$ — векторное пространство размерности $n$. Отождествим решетку весов группы $\mathsf{GL}(V)$ с $\mathbb{Z}^n$ так, чтобы $k$-ый фундаментальный вес $\pi_k$, являющийся старшим весом представления $\Lambda^k V$, соответствовал

$$\pi_k = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{k}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-k}).$$

При подобном описании конусу доминантных весов группы $\mathsf{GL}(V)$ соответствует множество целочисленных последовательностей $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, таких что $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$. Для доминантного $\alpha$ обозначим за $V^\alpha$ представление $\mathsf{GL}(V)$ со старшим весом $\alpha$.

Аналогично, для данного векторного расслоения $E$ ранга $n$ на схеме $S$ можно рассмотреть соответствующее главное $\mathsf{GL}(n)$-расслоение и построить векторное расслоение $E^\alpha$, ассоциированное с представлением $\mathsf{GL}(n)$ со старшим весом $\alpha$.

Группа перестановок $\mathbf{S}_n$, которая является группой Вейля для $\mathsf{GL}(n)$, естественным образом действует на решетке весов $\mathbb{Z}^n$. Пусть $\ell : \mathbf{S}_n \to \mathbb{Z}$ обозначает стандартную функцию длины. Для всякого $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ найдется элемент $\sigma \in \mathbf{S}_n$, такой что последовательность $\sigma(\alpha)$ невозрастает, причем единственный, если и только если все члены $\alpha$ различны.

Пусть $X$ — многообразие флагов группы $\mathsf{GL}(V)$, а $L_\alpha$ — линейное расслоение на $X$, соответствующее весу $\alpha$ (в частности, $L_{\pi_k}$ — обратный образ $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\Lambda^k V)}(1)$ при естественной проекции $X \to \mathbb{P}(\Lambda^k V)$). Обозначим за

$$\rho = (n, n-1, \dots, 1)$$

сумму фундаментальных весов $\mathsf{GL}(V)$. Линейное расслоение $L_\rho$ является квадратным корнем из антиканонического линейного расслоения.

Теорема Бореля–Ботта–Вейля вычисляет когомологии линейных расслоений $L_\alpha$ на $X$.

**Теорема 1.4.2** ([15])**.** *Предположим, что все члены $\alpha + \rho$ различны. Пусть $\sigma$ — единственная перестановка, такая что $\sigma(\alpha+\rho)$ строго убывает. Тогда*

$$H^k(X, L_\alpha) = \begin{cases} \Sigma^{\sigma(\alpha+\rho)-\rho} V^*, & \text{\textit{если} } k = l(\sigma); \\ 0, & \text{\textit{иначе.}} \end{cases}$$

*Если хотя бы два члена $\alpha + \rho$ совпадают, то $H^\bullet(X, L_\alpha) = 0$.*

Рассмотрим теперь грассманиан $\mathsf{Gr}(k, V)$. Пусть $\mathcal{U} \subset V \otimes \mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(k,V)}$ — тавтологическое подрасслоение ранга $k$. Имеется пара двойственных коротких точных последовательностей:

$$0 \to \mathcal{U} \to V \otimes \mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(k,V)} \to V/\mathcal{U} \to 0,$$
$$0 \to \mathcal{U}^\perp \to V^* \otimes \mathcal{O}_{\mathsf{Gr}(k,V)} \to \mathcal{U}^* \to 0,$$

где $\mathcal{U}^\perp = (V/\mathcal{U})^*$. Отметим, что $\Sigma^{1,1,\ldots,1}\mathcal{U}^* \simeq \Sigma^{-1,-1,\ldots,-1}\mathcal{U}^\perp$ — положительная образующая $\mathsf{Pic}\,\mathsf{Gr}(k,V)$. Обозначим за $\pi : X \to \mathsf{Gr}(k,V)$ каноническую проекцию многообразия флагов на грассманиан.

**Предложение 1.4.3** ([4])**.** *Пусть $\beta \in \mathbb{Z}^k$ и $\gamma \in \mathbb{Z}^{n-k}$ — две невозрастающие целочисленные последовательности, а $\alpha = (\beta,\gamma) \in \mathbb{Z}^n$ — их конкатенация. Тогда $R\pi_* L_\alpha \simeq \Sigma^\beta\mathcal{U}^* \otimes \Sigma^\gamma\mathcal{U}^\perp$.*

**Следствие 1.4.4.** *Пусть $\beta \in \mathbb{Z}^k$ и $\gamma \in \mathbb{Z}^{n-k}$ — невозрастающие последовательности, $\alpha = (\beta,\gamma) \in \mathbb{Z}^n$. Тогда*

$$H^\bullet(\mathsf{Gr}(k,V), \Sigma^\beta\mathcal{U}^* \otimes \Sigma^\gamma\mathcal{U}^\perp) \simeq H^\bullet(X, L_\alpha).$$

Так как всякое неприводимое $\mathsf{GL}(V)$-эквивариантное векторное расслоение на $\mathsf{Gr}(k,V)$ изоморфно $\Sigma^\beta\mathcal{U}^* \otimes \Sigma^\gamma\mathcal{U}^\perp$ для некоторых невозрастающих $\beta \in \mathbb{Z}^k$ и $\gamma \in \mathbb{Z}^{n-k}$, Следствие 1.4.4 вместе с Теоремой 1.4.2 позволяют вычислить когомологии любого эквивариантного векторного расслоения на $\mathsf{Gr}(k,V)$.

Также понадобится относительная версия теоремы Бореля–Ботта–Вейля. Пусть $X$ — гладкое проективное многообразие. С каждым векторным расслоением $\mathcal{E}$ ранга $n$ на $X$ можно связать относительные пространства (частичных) флагов $\mathsf{Fl}_X(a_1,\ldots,a_l;\mathcal{E})$.

Пусть $\pi : \mathsf{Fl}_X(\mathcal{E}) \to X$ — пространство относительных полных флагов с естественной проекцией. Опять же, по каждому весу $\alpha$ группы $\mathsf{GL}(n)$ можно построить линейное расслоение $\mathcal{L}_\alpha$ на $\mathsf{Fl}_X(\mathcal{E})$.

**Теорема 1.4.5** ([32], Теорема 4.1.4)**.** *Предположим, что все члены $\alpha+\rho$ различны. Пусть $\sigma$ — единственная перестановка, такая что $\sigma(\alpha+\rho)$ строго убывает. Тогда*

$$R^k\pi_*\mathcal{L}_\alpha = \begin{cases} \Sigma^{\sigma(\alpha+\rho)-\rho}\mathcal{E}^*, & \text{если } k = l(\sigma); \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

*Если хотя бы два члена $\alpha+\rho$ совпадают, то $R^\bullet\pi_*\mathcal{L}_\alpha = 0$.*

Предложение 1.4.3 и Следствие 1.4.4 обобщаются немедленно.

## 1.5. Капрановский набор

Пусть $X = \mathsf{Gr}(k, V)$ — грассманиан $k$-мерных подпространств в векторном пространстве $V$ размерности $n$. Напомним, что на $X$ имеется короткая точная последовательность векторных расслоений

$$0 \to \mathcal{U} \to V \to V/\mathcal{U} \to 0,$$

где $\mathcal{U}$ — тавтологическое подрасслоение ранга $k$, а $\mathrm{Y}_{w,h}$ обозначает множество диаграмм Юнга, вписанных в прямоугольник ширины $w$ и высоты $h$.

Вопрос существования полного исключительного набора в производной категории $D^b(X)$ был решен Капрановым в работе [4].

**Теорема 1.5.1** ([4]). *На $X$ имеется полный исключительный набор*

$$D^b(X) = \left\langle \mathcal{U}^\lambda \right\rangle_{\lambda \in \mathrm{Y}_{n-k,k}}, \tag{1.3}$$

*где порядок на объектах — любой полный порядок, согласованный с обратным порядком вложения на диаграммах.*

На самом деле, Капранову удалось большее. А именно, он предъявил двойственный к (1.3) набор

$$D^b(X) = \left\langle (V/\mathcal{U})^\mu \right\rangle_{\mu \in \mathrm{Y}_{k,n-k}}.$$

По двойственному набору можно построить спектральную последовательность, выражающую любой объект $D^b(X)$ в терминах исходного набора. Напомним, что $\mathcal{U}^\perp = (V/\mathcal{U})^*$.

**Теорема 1.5.2** ([4]). *Для всякого $\mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{D}^b(X)$ имеется спектральная последовательность*

$$E_1^{pq} = \bigoplus_{|\alpha|=-p} \mathbf{H}^q(\mathcal{F}^\bullet \otimes \Sigma^{{}^t\alpha}\mathcal{U}^\perp) \otimes \mathcal{U}^\alpha \Rightarrow H^{p+q}(\mathcal{F}^\bullet), \tag{1.4}$$

*где $\alpha$ пробегает $\mathrm{Y}_{n-k,k}$.*

# Глава 2

## Конструкция расслоений $\mathcal{E}^{\lambda,\mu}$

Пусть $X = \mathsf{Gr}(k, V)$ — грассманиан $k$-мерных подпространств в векторном пространстве $V$ размерности $n$. Далее мы будем предполагать, что $k \neq 1, n-1$, иначе говоря, что $X$ не является проективным пространством.

Из реультатов Капранова (см. раздел 1.5) мы знаем, что расслоения вида $\mathcal{U}^\lambda$ и $(V/\mathcal{U})^{{}^t\lambda}$ при всех $\lambda \in \mathrm{Y}_{n-k,k}$ — исключительные объекты в $D^b(X)$. Свойство объекта быть исключительными сохраняется при (анти)автоэквивалентностях, поэтому исключительными являются двойственные к ним, а также расслоения, получаемые подкруткой на $\mathcal{O}(t)$ при любом целом $t \in \mathbb{Z}$. Заметим, что все такие расслоения неприводимые, то есть получаются ограничением неприводимого представления фактора Леви на параболическую подгруппу. В данном разделе приводится геометрическая конструкция некоторых эквивариантных расслоений на грассманиане $X$, которые неприводимыми не являются. Позже, в разделе 4.2, мы докажем их исключительность.

Для пары целых чисел $0 < w < n-k$ и $0 < h < k$ определим множество

$$\mathrm{B}_{w,h} = \mathrm{Y}_{w,h} \times \mathrm{Y}_{k-h,n-k-w},$$

которое будем называть *блоком.* Пусть $Z = \mathsf{Fl}(k-h, k; V)$ — пространство частичных флагов. Проекции на первую и вторую компоненты флагов обозначим $q$ и $p$ соответственно:

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\
\mathsf{Gr}(k, V) = X & & X' = \mathsf{Gr}(k-h, V)
\end{tikzcd}$$

Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{W}$ — тавтоголические подрасслоения рангов $k$ и $k-h$ на $X$ и $X'$ соответственно. Так же будем обозначать их обратные образы на $Z$.

**Предложение 2.0.3.** *Пусть* $(\lambda,\mu)\in \mathrm{B}_{w,h}$. *Тогда*

$$R^i p_*\left((\mathcal{U}/\mathcal{W})^{\lambda}\otimes (V/\mathcal{W})^{-\mu}\right)=0 \quad \text{при} \quad i>0.$$

*Доказательство.* На пространстве флагов $Z$ имеется короткая точная последовательность

$$0\to \mathcal{U}/\mathcal{W}\to V/\mathcal{W}\to V/\mathcal{U}\to 0.$$

Согласно Предложению 1.3.2, на $(V/\mathcal{W})^{-\mu}$ имеется фильтрация с присоединенными факторами вида $(V/\mathcal{U})^{-\nu}\otimes(\mathcal{U}/\mathcal{W})^{-\mu/\nu}$, где $\nu$ пробегает все поддиаграммы $\nu\subseteq\mu$. Значит, на $(\mathcal{U}/\mathcal{W})^{\lambda}\otimes (V/\mathcal{W})^{-\mu}$ имеется фильтрация с присоединенными факторами вида

$$(\mathcal{U}/\mathcal{W})^{\lambda}\otimes (V/\mathcal{U})^{-\nu}\otimes (\mathcal{U}/\mathcal{W})^{-\mu/\nu},$$

где $\nu\subseteq\mu$. Рассмотрим один такой фактор. Заметим, что расслоение $(V/\mathcal{U})^{-\nu}$ поднято с $X$, поэтому по формуле проекции

$$R^i p_*\left((\mathcal{U}/\mathcal{W})^{\lambda}\otimes (V/\mathcal{U})^{-\nu}\otimes (\mathcal{U}/\mathcal{W})^{-\mu/\nu}\right)= \\ R^i p_*\left((\mathcal{U}/\mathcal{W})^{\lambda}\otimes (\mathcal{U}/\mathcal{W})^{-\mu/\nu}\right)\otimes (V/\mathcal{U})^{-\nu}. \quad (2.1)$$

Согласно Предложению 1.3.1, $(\mathcal{U}/\mathcal{W})^{-\mu/\nu}$ раскладывается в прямую сумму

$$(\mathcal{U}/\mathcal{W})^{-\mu/\nu}=\bigoplus_{\alpha\subseteq\mu} m^{\mu}_{\alpha,\nu}(\mathcal{U}/\mathcal{W})^{-\alpha},$$

где $m^{\mu}_{\alpha,\nu}(\mathcal{U}/\mathcal{W})^{-\alpha}$ обозначает прямую сумму $m^{\mu}_{\alpha,\nu}$ копий $(\mathcal{U}/\mathcal{W})^{-\alpha}$, а $m^{\mu}_{\alpha,\nu}$ — коэффициент Литтлвуда–Ричардсона (см. раздел 1.3).

Итак, нам достаточно доказать зануление высших прямых образов вида

$$R^i p_*\left((\mathcal{U}/\mathcal{W})^{\lambda}\otimes (\mathcal{U}/\mathcal{W})^{-\alpha}\right),$$

где $\alpha\subseteq\mu$. Пусть $(\mathcal{U}/\mathcal{W})^{\beta}\subset(\mathcal{U}/\mathcal{W})^{\lambda}\otimes (\mathcal{U}/\mathcal{W})^{-\alpha}$ — неприводимое слагаемое. По теореме Бореля–Ботта–Вейля нетривиальный прямой образ будет тогда и только тогда, когда в последовательности

$$(k+\beta_1,\ldots,k-h+1+\beta_h,k-h,\ldots,1) \quad (2.2)$$

все элементы различны, а сама последовательность не является убывающей. Заметим, что первые $h$ членов (2.2) различны и убывают. То же можно сказать про последние $k-h$ членов (2.2). Если нетривиальный прямой образ существует, то $k-h+1+\beta_h < 1$. С другой стороны, по Лемме 1.3.3 $\beta_h \geq -\alpha_1 \geq -\mu_1 \geq h-k$, откуда $k-h+1+\beta_h \geq 1$. Таким образом, высших прямых образов нет у присоединенных факторов фильтрации, а значит, и у исходного расслоения. $\square$

Для пары дигарамм $(\lambda, \mu) \in \mathrm{B}_{w,h}$ положим

$$\mathcal{E}^{\lambda,\mu} = p_* \left( (\mathcal{U}/\mathcal{W})^{\lambda} \otimes (V/\mathcal{W})^{-\mu} \right). \tag{2.3}$$

Для обычной диаграммы Юнга $\alpha$ определим ширину $w_\alpha = \alpha_1$ и высоту $h_\alpha = {}^t\alpha_1$. Заметим, что пара диаграмм $(\lambda, \mu)$ может принадлежать какому-то блоку $\mathrm{B}_{w,h}$, если и только если $w_\lambda + h_\mu \leq n-k$ и $h_\lambda + w_\mu \leq k$. Вообще говоря, по паре $(\lambda, \mu)$ блок определяется неоднозначно. Например, пару пустых диаграмм можно рассматривать в качестве элемента любого из блоков. Тем не менее, мы сейчас покажем, что векторное расслоение $\mathcal{E}^{\lambda,\mu}$ зависит только от $\lambda$ и $\mu$. Для этого нам понадобится следующая лемма.

**Лемма 2.0.4.** *На векторном расслоении $\mathcal{E}^{\lambda,\mu}$ имеется естественная эквивариантная структура, и оно лежит в подкатегории*

$$\mathcal{E}^{\lambda,\mu} \in \left\langle \mathcal{U}^{\beta} \otimes (V/\mathcal{U})^{-\nu} \right\rangle_{\beta \subseteq \lambda, \nu \subseteq \mu} \subset D^b_{\mathsf{G}}(X).$$

*Доказательство.* Эквивариантность немедленно следует из того, что $\mathcal{E}^{\lambda,\mu}$ — прямой образ эквивариантного расслоения относительно эквивариантного морфизма $p$. Из доказательства Предложения 2.0.3 следует, что на $\mathcal{E}^{\lambda,\mu}$ есть фильтрация, присоединенный факторы которой имеют вид

$$p_* \left( (\mathcal{U}/\mathcal{W})^{\lambda} \otimes (\mathcal{U}/\mathcal{W})^{-\alpha} \right) \otimes (V/\mathcal{U})^{-\nu},$$

где $\nu \subseteq \mu$. Там же мы видели, что нетривиальный прямой образ будет только у тех слагаемых в разложении

$$(\mathcal{U}/\mathcal{W})^{\lambda} \otimes (\mathcal{U}/\mathcal{W})^{-\alpha} = \bigoplus (\mathcal{U}/\mathcal{W})^{\beta},$$

для которых $\beta_h \geq 0$. В то же время, по Лемме 1.3.3 $\beta_i \leq \lambda_i$ при всех $i = 1, \ldots, h$, откуда $\beta \subseteq \lambda$. $\square$

**Предложение 2.0.5.** *Множество эквивариантных векторных расслоений*

$$\left(\mathcal{U}^\gamma \otimes (V/\mathcal{U})^{-\delta}\right)_{(\gamma,\delta)\in \mathrm{B}_{w,h}}$$

*образует исключительный набор в эквивариантной производной категории $D^b_{\mathsf{G}}(X)$. В частности, для $(\gamma, \delta), (\alpha, \beta) \in \mathrm{B}_{w,h}$*

$$\mathsf{Ext}^\bullet_{\mathsf{G}}\left(\mathcal{U}^\gamma \otimes (V/\mathcal{U})^{-\delta}, \mathcal{U}^\alpha \otimes (V/\mathcal{U})^{-\beta}\right) \neq 0,$$

*если и только если $\gamma \subseteq \alpha$, $\delta \subseteq \beta$.*

*Доказательство.* По определению имеем

$$\begin{aligned}\mathsf{Ext}^\bullet_{\mathsf{G}}\left(\mathcal{U}^\gamma \otimes (V/\mathcal{U})^{-\delta}, \mathcal{U}^\alpha \otimes (V/\mathcal{U})^{-\beta}\right) &= \\ = \mathsf{Ext}^\bullet\left(\mathcal{U}^\gamma \otimes (V/\mathcal{U})^{-\delta}, \mathcal{U}^\alpha \otimes (V/\mathcal{U})^{-\beta}\right)^G &= \\ = H^\bullet(X, \mathcal{U}^\alpha \otimes \mathcal{U}^{-\gamma} \otimes (V/\mathcal{U})^{-\beta} \otimes (V/\mathcal{U})^\delta)^G&.\end{aligned}$$

Пусть $\mathcal{U}^\lambda$ — неприводимое слагаемое в разложении $\mathcal{U}^\alpha \otimes \mathcal{U}^{-\gamma}$, $(V/\mathcal{U})^\mu$ — неприводимое слагаемое в разложении $(V/\mathcal{U})^{-\beta} \otimes (V/\mathcal{U})^\delta$.

Интересующее нас пространство $\mathsf{Ext}^\bullet_{\mathsf{G}}$ нетривиально тогда и только тогда, когда для некоторых слагаемых $\mathcal{U}^\lambda$ и $(V/\mathcal{U})^\mu$ последовательность

$$(n + \mu_1, \ldots, k + 1 + \mu_{n-k}, k + \lambda_1, \ldots, 1 + \lambda_k) \tag{2.4}$$

является перестановкой последовательных $n$ целых чисел.

Заметим, что так как $(\alpha, \beta) \in \mathrm{B}_{w,h}$, т. е. $\alpha \in \mathrm{Y}_{w,h}$, $\beta \in \mathrm{Y}_{k-h,n-k-w}$, имеем $\alpha_k = 0$ и $\beta_{n-k} = 0$. По Лемме 1.3.3 $\lambda_k \leq \alpha_k = 0$, $\mu_1 \geq -\beta_{n-k} = 0$. Значит, последовательность (2.4) должна быть нетривиальной перестановкой $(1, \ldots, n)$. Таким образом, необходимым условием является $\lambda \geq 0$ и $-\mu \geq 0$. Последнее возможно только в случае $\gamma \subseteq \alpha$, $\delta \subseteq \beta$, что есть условие полуортогональности.

Наконец, в случае $\gamma = \alpha$, $\delta = \beta$ единственные подходящие слагаемые — тривиальные, причем каждое из них имеет кратность 1. Получаем исключительность. $\square$

*Замечание* 2.0.6. Несложно проверить, что на множестве *всех* эквивариантных неприводимых расслоений на $X$ можно ввести порядок, такой что получится (вообще говоря, бесконечный) полный исключительный набор в эквивариантной производной категории $D^b_{\mathsf{G}}(X)$ (см. [25, Теорема 3.4]).

**Предложение 2.0.7.** *Пусть* $(\alpha,\beta),(\lambda,\mu)\in \mathrm{B}_{w,h}$ *— такие, что*

$$\mathsf{Ext}^\bullet\left(\mathcal{U}^\alpha\otimes(V/\mathcal{U})^{-\beta},\mathcal{E}^{\lambda,\mu}\right)\neq 0.$$

*Тогда* $\alpha\supseteq\lambda$*, причем если* $\alpha=\lambda$*, то* $\beta\supseteq\mu$*.*

*Доказательство.* По сопряженности перепишем

$$\begin{aligned}\mathsf{Ext}^i&\left(\mathcal{U}^\alpha\otimes(V/\mathcal{U})^{-\beta},\mathcal{E}^{\lambda,\mu}\right)=\\ &=\mathsf{Ext}^i_{D^b(X)}\left(\mathcal{U}^\alpha\otimes(V/\mathcal{U})^{-\beta},p_*\left((\mathcal{U}/\mathcal{W})^\lambda\otimes(V/\mathcal{W})^{-\mu}\right)\right)=\\ &=\mathsf{Ext}^i_{D^b(Z)}\left(\mathcal{U}^\alpha\otimes(V/\mathcal{U})^{-\beta},(\mathcal{U}/\mathcal{W})^\lambda\otimes(V/\mathcal{W})^{-\mu}\right)=\\ &=H^i\left(Z,\mathcal{U}^{-\alpha}\otimes(V/\mathcal{U})^{\beta}\otimes(\mathcal{U}/\mathcal{W})^\lambda\otimes(V/\mathcal{W})^{-\mu}\right).\end{aligned}$$

Напишем спектральную последовательность Лере

$$\begin{aligned}E_2^{ab}=H^a&\left(X',R^bq_*\left(\mathcal{U}^{-\alpha}\otimes(V/\mathcal{U})^{\beta}\otimes(\mathcal{U}/\mathcal{W})^\lambda\otimes(V/\mathcal{W})^{-\mu}\right)\right)\\ &\Rightarrow H^{a+b}\left(Z,\mathcal{U}^{-\alpha}\otimes(V/\mathcal{U})^{\beta}\otimes(\mathcal{U}/\mathcal{W})^\lambda\otimes(V/\mathcal{W})^{-\mu}\right).\end{aligned}\tag{2.5}$$

Рассмотрим член (2.5). Во-первых, по формуле проекции

$$\begin{aligned}R^bq_*&\left(\mathcal{U}^{-\alpha}\otimes(V/\mathcal{U})^{\beta}\otimes(\mathcal{U}/\mathcal{W})^\lambda\otimes(V/\mathcal{W})^{-\mu}\right)=\\ &=R^bq_*\left(\mathcal{U}^{-\alpha}\otimes(V/\mathcal{U})^{\beta}\otimes(\mathcal{U}/\mathcal{W})^\lambda\right)\otimes(V/\mathcal{W})^{-\mu}.\end{aligned}\tag{2.6}$$

Во-вторых, согласно Предложению 1.3.2, на $\mathcal{U}^{-\alpha}$ имеется фильтрация с присоединенными факторами вида $(\mathcal{U}/\mathcal{W})^{-\tau}\otimes\mathcal{W}^{-\nu}$, причем $\tau\subseteq\alpha$.

Изучим прямые образы

$$R^\bullet q_*\left((\mathcal{U}/\mathcal{W})^{-\tau}\otimes\mathcal{W}^{-\nu}\otimes(V/\mathcal{U})^{\beta}\otimes(\mathcal{U}/\mathcal{W})^{\lambda}\right)=\\ =R^\bullet q_*\left((\mathcal{U}/\mathcal{W})^{-\tau}\otimes(\mathcal{U}/\mathcal{W})^{\lambda}\otimes(V/\mathcal{U})^{\beta}\right)\otimes\mathcal{W}^{-\nu}. \quad (2.7)$$

Для этого вспомним, что $Z$ — относительный грассманиан $\mathsf{Gr}_{X'}(h,V/\mathcal{W})$. Пусть $(\mathcal{U}/\mathcal{W})^{\gamma}$ — неприводимое слагаемое в разложении $(\mathcal{U}/\mathcal{W})^{-\tau}\otimes(\mathcal{U}/\mathcal{W})^{\lambda}$. Теорема Бореля–Ботта–Вейля утверждает, что (2.7) нетривиален, если и только если все члены последовательности

$$(n-k+h+\beta_1,\ldots,h+1+\beta_{n-k},h+\gamma_1,\ldots,1+\gamma_1) \qquad (2.8)$$

различны. По условию $\beta\in\mathrm{Y}_{k-h,n-k-w}$, откуда $\beta_{n-k-w+1}=\ldots=\beta_{n-k}=0$. Значит, первые $n-k$ членов последовательности (2.8) имеют вид

$$(n-k+h+\beta_1,\ldots,h+w+1+\beta_{n-k-w},h+w,\ldots,h+1).$$

Следующий член равен $h+\gamma_1$, причем по Лемме 1.3.3 $w\geq\lambda_1\geq\gamma_1$. Таким образом, нетривиальный вклад в высшие прямые образы дают только те слагаемые $(\mathcal{U}/\mathcal{W})^{\gamma}$, для которых $\gamma_1\leq 0$, что эквивалентно $-\gamma\geq 0$. Незаменимая, как вы уже поняли, Лемма 1.3.3 утверждает, что такое возможно только при условии $\lambda\subseteq\tau$. В свою очередь, $\tau\subseteq\alpha$, откуда получаем необходимое условие $\lambda\subseteq\alpha$.

Итак, нам остается рассмотреть случай $\lambda=\tau=\alpha$. Единственный соответствующий присоединенный фактор $\mathcal{U}^{-\alpha}$ при этом равен $(\mathcal{U}/\mathcal{W})^{-\alpha}$, единственное допустимое слагаемое $\gamma=0$, а единственный нетривиальный прямой образ

$$R^0 q_*\left((\mathcal{U}/\mathcal{W})^{-\tau}\otimes(\mathcal{U}/\mathcal{W})^{\lambda}\otimes(V/\mathcal{U})^{\beta}\right)\otimes\mathcal{W}^{-\nu}=(V/\mathcal{W})^{\beta}.$$

Все нетривиальные члены спектральной последовательности (2.5) сосредоточены в одной строке и равны

$$E_2^{a0}=H^a\left(X',(V/\mathcal{W})^{\beta}\otimes(V/\mathcal{W})^{-\mu}\right)=\mathsf{Ext}^a\left((V/\mathcal{W})^{\mu},(V/\mathcal{W})^{\beta}\right).$$

Наконец, $(V/\mathcal{W})^{\mu}$ и $(V/\mathcal{W})^{\lambda}$ лежат в двойственном капрановском наборе на $X'$, откуда получаем необходимое условие $\beta \supseteq \alpha$. Заметим, что при $\alpha = \lambda$ и $\beta = \mu$ единственное нетривиальное пространство

$$\mathsf{Ext}^{\bullet}\left(\mathcal{U}^{\alpha} \otimes (V/\mathcal{U})^{-\beta}, \mathcal{E}^{\lambda,\mu}\right) = \mathsf{Hom}\left(\mathcal{U}^{\alpha} \otimes (V/\mathcal{U})^{-\beta}, \mathcal{E}^{\lambda,\mu}\right) = \mathsf{k}$$

одномерно, причем все морфизмы эквивариантны. $\square$

Введем на элементах $\mathrm{B}_{w,h}$ частичный порядок

$$(\alpha, \beta) \prec_1 (\lambda, \mu) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \supset \lambda \text{ или } \alpha = \lambda, \beta \supset \mu.$$

**Следствие 2.0.8.** *В производной категории $D^b(X)$ имеется исключительный набор вида*

$$\left(\mathcal{E}^{\lambda,\mu}\right)_{(\lambda,\mu)\in \mathrm{B}_{w,h}}$$

*с любым полным порядком $<$, согласованным с $\prec_1$.*

*Доказательство.* Исключительность интересующих нас расслоений $\mathcal{E}^{\lambda,\mu}$ была проверена в Предложении 2.0.7, необходимо проверить полуортогональность. Пусть $(\alpha, \beta) > (\lambda, \mu)$ — пара элементов из $\mathrm{B}_{w,h}$. Тогда $(\alpha, \beta) \not\prec_1 (\lambda, \mu)$. Мы хотим показать, что $\mathsf{Ext}^{\bullet}(\mathcal{E}^{\alpha,\beta}, \mathcal{E}^{\lambda,\mu}) = 0$. На $\mathcal{E}^{\alpha,\beta}$ имеется фильтрация с присоединенными факторами вида $\mathcal{U}^{\tau} \otimes (V/\mathcal{U})^{-\nu}$, причем $\tau \subseteq \alpha$, $\nu \subseteq \beta$. В то же время, условие $(\alpha, \beta) \not\prec_1 (\lambda, \mu)$ замкнуто относительно перехода к поддиаграммам $\tau \subseteq \alpha$, $\nu \subseteq \beta$. Остается применить Предложение 2.0.7. $\square$

**Следствие 2.0.9.** *Пусть $(\lambda, \mu) \in \mathrm{B}_{w,h}$. Тогда в эквивариантной категории $D^b_{\mathsf{G}}(X)$ расслоения*

$$\left(\mathcal{E}^{\alpha,\beta}\right)_{\alpha\subseteq\lambda,\beta\subseteq\mu}$$

*образуют левый двойственный набор к исключительному набору*

$$\left(\mathcal{U}^{\alpha} \otimes (V/\mathcal{U})^{-\beta}\right)_{\alpha\subseteq\lambda,\beta\subseteq\mu}.$$

*Доказательство.* Нам необходимо проверить когомологическое условие левого двойственного набора:

$$\mathsf{Ext}^i_{\mathsf{G}}\left(\mathcal{U}^\alpha \otimes (V/\mathcal{U})^{-\beta}, \mathcal{E}^{\tau,\nu}\right) = \begin{cases} \mathsf{k}, & i=0, \alpha=\tau, \beta=\nu; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Во-первых, по определению

$$\mathsf{Ext}^i_{\mathsf{G}}\left(\mathcal{U}^\alpha \otimes (V/\mathcal{U})^{-\beta}, \mathcal{E}^{\tau,\nu}\right) = \mathsf{Ext}^i\left(\mathcal{U}^\alpha \otimes (V/\mathcal{U})^{-\beta}, \mathcal{E}^{\tau,\nu}\right)^{\mathsf{G}}.$$

Из Предложения 2.0.7 немедленно получаем

$$\mathsf{Ext}^\bullet_{\mathsf{G}}\left(\mathcal{U}^\alpha \otimes (V/\mathcal{U})^{-\beta}, \mathcal{E}^{\tau,\nu}\right) = 0,$$

если $\tau \nsubseteq \alpha$, либо $\nu \nsubseteq \alpha$.

Пусть $\tau \subseteq \alpha, \nu \subseteq \alpha$. На $\mathcal{E}^{\tau,\nu}$ имеется фильтрация эквивариантными расслоениями, все присоединенные факторы которой имеют вид $\mathcal{U}^\gamma \otimes (V/\mathcal{U})^{-\delta}$, причем $\gamma \subseteq \tau$, а $\delta \subseteq \nu$. Оставшиеся равенства немедленно получаются из Предложения 2.0.5. □

**Следствие 2.0.10.** *Пусть пара* $(\lambda, \mu)$ *удовлетворяет*

$$w_\lambda + h_\mu \leq n-k \quad \text{и} \quad h_\lambda + w_\mu \leq k.$$

*Тогда расслоения* $\mathcal{E}^{\lambda,\mu}$ *зависят только от пары* $(\lambda, \mu)$ *и не зависят от выбора блока* $\mathrm{B}_{w,h} \ni (\lambda, \mu)$.

*Доказательство.* Подкатегория

$$\mathcal{T} = \left\langle \mathcal{U}^\alpha \otimes (V/\mathcal{U})^{-\beta} \right\rangle_{\alpha\subseteq\lambda, \beta\subseteq\mu} \subseteq D^b_{\mathsf{G}}(X)$$

не завивит от выбора блока. В то же время, $\mathcal{E}^{\lambda,\mu} \in \mathcal{T}$ и однозначно задается условием двойственного набора. □

Сделаем очень важное наблюдение. Для заданной пары $(\lambda, \mu) \in \mathrm{B}_{w,h}$ все вышеизложенные рассуждения можно было провести для многообразия частичных флагов $\mathsf{Fl}(k, n-w; V)$

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{Fl}(k, n-w; V) \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, "f"] & \\ \mathsf{Gr}(n-w, V) = X'' & & X = \mathsf{Gr}(k, V) \end{tikzcd}$$

и расслоения $(\mathcal{K}/\mathcal{U})^{-\mu} \otimes \mathcal{K}^{\lambda}$, где $\mathcal{K}$ обозначает тавтологическое подрасслоение ранга $n-w$ на $\mathsf{Fl}(k, n-w; V)$, соответствующее второй компоненте флага.

**Предложение 2.0.11.** *В обозначениях, введенных выше, имеем*

$$\mathcal{E}^{\lambda,\mu} = f_* \left( (\mathcal{K}/\mathcal{U})^{-\mu} \otimes \mathcal{K}^{\lambda} \right). \tag{2.9}$$

*Доказательство.* Инвариантное описание получающихся прямых образов в качестве двойственного набора в эквивариантной категории остается прежним, откуда заключаем требуемое. □

Если переформулировать Следствие 2.0.8, рассматривая $\mathcal{E}^{\lambda,\mu}$ в качестве прямых образов с $\mathsf{Fl}(k, n-w; V)$, получим полуортогональность относительно частичного порядка

$$(\alpha, \beta) \prec_2 (\lambda, \mu) \quad \Leftrightarrow \quad \beta \supset \mu \text{ или } \beta = \mu, \alpha \supset \lambda.$$

Таким образом, выполнено следующее утверждение.

**Следствие 2.0.12.** *В производной категории $D^b(X)$ имеется исключительный набор вида*

$$\left(\mathcal{E}^{\lambda,\mu}\right)_{(\lambda,\mu)\in \mathrm{B}_{w,h}}$$

*с любым полным порядком, согласованным с частичным порядком*

$$(\alpha, \beta) \preceq (\lambda, \mu) \quad \Leftrightarrow \quad \beta \supseteq \mu \text{ и } \alpha \supseteq \lambda.$$

# Глава 3

# Ступенчатые комплексы

## 3.1. Мотивировка

Напомним, что наша цель — изучение производной категории $\mathsf{Gr}(k, V)$, грассманиана $k$-мерных подпространств в векторном пространстве $V$ размерности $n$. Простейший пример грассманиана — это проективное пространство $\mathbb{P}(V) = \mathsf{Gr}(1, V)$. Напомним, что по теореме Бейлинсона (см. [1]) производная категория $X = \mathbb{P}(V)$ имеет очень простое описание:

$$D^b(X) = \langle \mathcal{O}(-n+1),\ \mathcal{O}(-n+2),\ \dots,\ \mathcal{O}(-1),\ \mathcal{O} \rangle\,. \tag{3.1}$$

Всякая автоэквивалентность $F$ триангулированной категории переводит полный исключительный набор $\langle E_1, E_2, \dots, E_l \rangle$ в полный исключительный набор $\langle F(E_1), F(E_2), \dots, F(E_l) \rangle$. В частности, любой объект $F(E_i)$ можно выразить через первоначальный набор.

Рассмотрим автоэквивалентность $D^b(X)$, заданную тензорным умножением на линейное расслоение $F = - \otimes \mathcal{O}_X(1)$. Под действием $F$ набор (3.1) переходит в набор

$$\langle \mathcal{O}(-n+2),\ \mathcal{O}(-n+2),\ \dots,\ \mathcal{O},\ \mathcal{O}(1) \rangle\,.$$

Все объекты, кроме последнего, уже содержатся в наборе (3.1). Таким образом, нам остается разложить $\mathcal{O}(1)$. Следующая лемма хорошо известна, однако мы приведем доказательство для полноты изложения.

**Лемма 3.1.1.** *На $X = \mathbb{P}(V)$ имеется точная последовательность векторных расслоений*

$$\begin{aligned} 0 \to \mathcal{O}(-n+1) \to \mathcal{O}(-n+2) \otimes V \to \mathcal{O}(-n+3) \otimes \Lambda^2 V \to \dots \\ \dots \to \mathcal{O}(-1) \otimes \Lambda^{n-2} V \to \mathcal{O} \otimes \Lambda^{n-1} V \to \mathcal{O}(1) \to 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

*Доказательство.* Подкрутим тавтологическое вложение $0 \to \mathcal{O}(-1) \to V$ на расслоение $\mathcal{O}(1)$. Соответствующее каноническое сечение $\mathcal{O} \xrightarrow{s} V(1)$ нигде не зануляется, поэтому комплекс Кошуля точен и имеет вид

$$\begin{gathered} 0 \to \Lambda^n V^* \otimes \mathcal{O}(-n) \to \Lambda^{n-1} V^* \otimes \mathcal{O}(-n+1) \to \dots \\ \dots \to V^* \otimes \mathcal{O}(-1) \to \mathcal{O} \to 0. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Умножая комплекс (3.3) на $\mathcal{O}(1)$ и пользуясь $\Lambda^i V^* \simeq \Lambda^{n-i} V$, получаем комплекс искомого вида. $\square$

Таким образом, в производной категории $D^b(X)$ объект $\mathcal{O}(1)$ изоморфен объекту

$$0 \to \mathcal{O}(-n+1) \to \mathcal{O}(-n+2) \otimes V \to \dots \to \mathcal{O}(-1) \otimes \Lambda^{n-2} V \to \mathcal{O} \otimes \Lambda^{n-1} V \to 0,$$

который и дает искомое разложение по набору (3.1).

*Замечание* 3.1.2. Мы только что проверили, что набор (3.1) удовлетворяет условиям Следствия 1.1.7. В каком-то смысле, это простейшее доказательство полноты, впрочем, сильно уступающее исходному рассуждению Бейлинсона как по красоте, так и по глубине.

Цель данной главы — построить комплексы на грассманианах, аналогичные (3.2).

## 3.2. Ступенчатые комплексы для $\mathcal{U}^\lambda$

Пусть теперь $X = \mathsf{Gr}(k, V)$ — произвольный грассманиан $k$-мерных подпространств в векторном пространстве $V$ размерности $n$. Все диаграммы в данном разделе имеют высоту $k$, если не оговорено обратное. Напомним, что $\lambda(t)$ обозначает диаграмму, соответствующую весу $(\lambda_1 + t, \lambda_2 + t, \dots, \lambda_k + t)$.

Как уже обсуждалось, на $X$ имеется полный исключительный набор вида

$$D^b(X) = \left\langle \mathcal{U}^\lambda \right\rangle_{\lambda \in \mathrm{Y}_{n-k,k}}, \tag{3.4}$$

где $\lambda$ пробегает множество диаграмм $\mathrm{Y}_{n-k,k}$, вписанных в прямоугольник ширины $n-k$ и высоты $k$. Попробуем выразить набор

$$\left\langle \mathcal{U}^{\lambda}(1) \right\rangle_{\lambda\in \mathrm{Y}_{n-k,k}} \tag{3.5}$$

через набор (3.4).

Напомним, что $\mathcal{O}_X(1) \simeq \Lambda^k\mathcal{U}^* \simeq \mathcal{U}^{(1,1,\dots,1)}$. В частности, $\mathcal{U}^{\lambda}(1) \simeq \mathcal{U}^{\lambda(-1)}$. Заметим, что некоторые объекты из набора (3.5) просто содержатся в исходном капрановском. Действительно, если $\lambda \in \mathrm{Y}_{n-k,k}$ и $\lambda_k > 0$, то $\lambda(-1) \in \mathrm{Y}_{n-k,k}$. Оказывается, что для оставшихся объектов, как и в случае проективного пространства, можно предъявить явные комплексы, дающие искомое разложение.

Итак, нам остается выразить расслоения вида $\mathcal{U}^{\lambda(-1)}$ через набор (3.4) для всех $\lambda \in \mathrm{Y}_{n-k,k}$, таких что $\lambda_k = 0$. Заметим, что $\mu \mapsto \mu\{1\}$ задает биекцию между множествами диаграмм $\mu \in \mathrm{Y}_{n-k,k}$ с условием $\mu_1 = n-k$ и диграмм $\lambda \in \mathrm{Y}_{n-k,k}$ с условием $\lambda_k = 0$.

Воспользуемся обозначениями раздела 1.2.2.

**Теорема 3.2.1** ([9, Предложение 5.3])**.** *Пусть $\lambda \in \mathrm{Y}_{n-k,k}$ — диаграмма Юнга максимальной ширины, то есть $\lambda_1 = n-k$. Тогда на $X$ имеется точная последовательность векторных расслоений вида*

$$\begin{gathered} 0 \to \mathcal{U}^{\lambda} \to \mathcal{U}^{\lambda^{(1)}} \otimes \Lambda^{b_\lambda^{(1)}} V \to \mathcal{U}^{\lambda^{(2)}} \otimes \Lambda^{b_\lambda^{(2)}} V \to \dots \\ \dots \to \mathcal{U}^{\lambda^{(n-k)}} \otimes \Lambda^{b_\lambda^{(n-k)}} V \to \mathcal{U}^{\lambda\{1\}}(1) \to 0. \end{gathered} \tag{3.6}$$

Комплексы вида (3.6), а также двойственные к ним, будем называть *ступенчатыми.*

Прежде чем доказать Теорему 3.2.1, покажем, как из нее получается разложение подкрученного набора $\left\langle \mathcal{U}^{\lambda}(1) \right\rangle$ через набор (3.4). Вспомним, что множество диграмм $\lambda \in \mathrm{Y}_{n-k,k}$ с $\lambda_k = 0$ в точности совпадает с множеством диаграмм вида $\mu\{1\}$, где $\mu$ пробегает все диаграммы из $\mathrm{Y}_{n-k,k}$ с условием $\mu_1 = n-k$. Действительно, если $\mu = (n-k, \mu_2, \dots, \mu_k)$, то, согласно определению, $\mu\{1\} = (\mu_2, \dots, \mu_k, 0)$. Обратно, если $\lambda$ имеет вид $(\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, 0)$, получаем $\lambda = (n-k, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1})\{1\}$.

Итак, нас интересует разложение объекта вида $\mathcal{U}^\lambda(1)$ с $\lambda_k = 0$ через набор (3.4). По Теореме 3.2.1 в производной категории $D^b(X)$ объект $\mathcal{U}^\lambda(1)$ изоморфен объекту вида

$$0 \to \mathcal{U}^\mu \to \mathcal{U}^{\mu^{(1)}} \otimes \Lambda^{b_\mu^{(1)}} V \to \mathcal{U}^{\lambda^{(2)}} \otimes \Lambda^{b_\mu^{(2)}} V \to \ldots \to \mathcal{U}^{\mu^{(n-k)}} \otimes \Lambda^{b_\mu^{(n-k)}} V \to 0,$$

где $\mu = \lambda\{-1\}$, что и дает искомое разложение.

*Замечание* 3.2.2. Таким образом, набор (3.4) удовлетворяет условиям Следствия 1.1.7, а значит, он полный. Оригинальное доказательство полноты в работе [4] использует метод построения резольвенты диагонали (предложенный Бейлинсоном в основополагающей работе [1]) и не обобщается на другие рациональные однородные пространства.

Мы приведем два доказательства Теоремы 3.2.1. Первое из них использует вычисление, связанное с двойственным набором. Из него сразу видна гомологическая природа ступенчатых комплексов. Второе доказательство обладает тем свойством, что не требует наличия двойственного набора, и является исключительно геометрическим.

*Первое доказательство Теоремы 3.2.1 (см. [9]).* Для удобства введем временное обозначение $\mu = \lambda\{1\}$. Напишем спектральную последовательность (1.4) для комплекса, состоящего из единственного пучка $\Sigma^\mu\mathcal{U}(1)$. Ее члены имеют вид

$$E_1^{pq} = \bigoplus_{|\alpha|=-p} \mathbf{H}^q(\Sigma^\mu\mathcal{U}(1) \otimes \Sigma^{{}^t\alpha}\mathcal{U}^\perp) \otimes \Sigma^\alpha\mathcal{U}.$$

Для начала найдем все такие $\alpha \in \mathrm{Y}_{n-k,k}$, что $\mathbf{H}^\bullet(\Sigma^\mu\mathcal{U}(1) \otimes \Sigma^{{}^t\alpha}\mathcal{U}^\perp) \neq 0$. По теореме Бореля–Ботта–Вейля это происходит тогда и только тогда, когда все члены последовательности

$$\begin{aligned}(n - \mu_k + 1, (n-1) - \mu_{k-1} + 1, \ldots, (n-k+1) - \mu_1 + 1,\\ n - k + {}^t\alpha_1, \ldots, 2 + {}^t\alpha_{n-k-1}, 1 + {}^t\alpha_{n-k})\end{aligned}$$

различны. Вспомним, что $\mu = (\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{n-k}, 0)$. Предыдущую последовательность можно переписать, как

$$(n+1, n-\lambda_k, \ldots, n-k+2-\lambda_2, n-k+{}^t\alpha_1, \ldots, 2+{}^t\alpha_{n-k-1}, 1+{}^t\alpha_{n-k}). \quad (3.7)$$

Предположим, что все члены последовательности (3.7) различны. Тогда после подходящей перестановки они образуют строго убывающую последовательность. Так как все члены, кроме первого, лежат в промежутке $[1, n]$, переставленная последовательность будет иметь вид

$$(n+1, n, \ldots, n-j+1, n-j-1, \ldots, 1) \quad (3.8)$$

для некоторого $0 \leq j \leq n-1$. Более того,

$$n - j \neq n - k + t - \lambda_t \quad \Leftrightarrow \quad j \neq k + \lambda_t - t \quad \text{при всех} \quad 2 \leq t \leq k.$$

Значит, имеется $n-k+1$ способов выбрать значение $j$, каждый из которых дает свое ${}^t\alpha$, получаемое такой перестановкой последовательности (3.8), что первые $k$ мест заняты $n+1$ и $n-k+t-\lambda_t$, а последние $n-k$ членов убывают. Наконец, заметим, что ${}^t\alpha = {}^t\lambda$ соответствует $j = n-1$.

Теперь мы можем выписать все возможные $\alpha$:

(0): ${}^t\alpha = {}^t\lambda$,

(i): ${}^t\alpha = {}^t\lambda^{(i)} = ({}^t\lambda_1, \ldots, {}^t\lambda_{n-k-i}, {}^t\lambda_{n-k-i+2} - 1, \ldots, {}^t\lambda_{n-k} - 1, 0)$.

В каждом случае необходимо определить $p$ и $q$. Напомним, что $p$ совпадает с $-|\alpha|$, а $q$ равно числу инверсий в последовательности (3.7). Простое вычисление дает следующий ответ:

(0): $p_0 = -|\lambda|, \qquad q_0 = |\lambda| - (n-k)$,

(i): $p_i = -|\lambda| + {}^t\lambda_{n-k+1-i} + (i-1), \qquad q_i = |\lambda| - (n-k) - ({}^t\lambda_{n-k+1-i} - 1)$.

Сразу же видно, что все значения $p_i + q_i = -(n-k) + i$ различны при $i = 0, \dots, n-k$. Учитывая тот факт, что спектральная последовательность сходится к единственному расслоению, помещенному в степень 0, получаем длинную точную последовательность

$$0 \to \mathbf{H}^{q_0}(\mathcal{U}^{\mu}(1) \otimes \Sigma^{{}^t\lambda}\mathcal{U}^{\perp}) \otimes \mathcal{U}^{\lambda} \to \mathbf{H}^{q_1}(\mathcal{U}^{\mu}(1) \otimes \Sigma^{{}^t\lambda^{(1)}}\mathcal{U}^{\perp}) \otimes \mathcal{U}^{\lambda^{(1)}} \to \dots$$
$$\dots \to \mathbf{H}^{q_{n-k}}(\mathcal{U}^{\mu}(1) \otimes \Sigma^{{}^t\lambda^{(n-k)}}\mathcal{U}^{\perp}) \otimes \mathcal{U}^{\lambda^{(n-k)}} \to \mathcal{U}^{\mu}(1) \to 0.$$

Вычислим $\mathbf{H}^{q_i}(\Sigma^{\mu}\mathcal{U}(1) \otimes \Sigma^{\mu_i}\mathcal{U}^{\perp})$. Последовательность (3.7), переписанная в убывающем порядке, имеет вид

$$(n+1, n, \dots, \widehat{n+1-\nu_i}, \dots, 1).$$

По теореме Бореля–Ботта–Вейля $\mathbf{H}^{q_i}(\Sigma^{\mu}\mathcal{U}(1) \otimes \Sigma^{\mu_i}\mathcal{U}^{\perp}) \simeq \Lambda^{\nu_i}V$. Наконец, отметим, что $\mu_0 = {}^t\lambda$ и $\nu_0 = n$. □

*Второе доказательство Теоремы 3.2.1.* Пусть $Z = \mathsf{Fl}(1, k; V)$ — пространство частичных флагов. Имеем естественные проекции

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ X & & \mathbb{P}(V) \end{tikzcd}$$

Обозначим за $\mathcal{L}$ тавтологическое линейное подрасслоение на $Z$, соответствующее первой компоненте флага. Тогда $\mathcal{L} \simeq q^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1)$. Если смотреть на $Y$ как на проективизацию $\mathbb{P}(\mathcal{U})$, то $\mathcal{L}$ — не что иное, как относительное $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{U})/X}(-1)$. Аналогично, тавтологическое подрасслоение ранга $k$ на $Z$, соответствующее второй компоненте флага, изоморфно обратному образу $p^*\mathcal{U}$.

Согласно Лемме 3.1.1, на $\mathbb{P}(V)$ имеется точный комплекс векторных расслоений

$$\begin{aligned} 0 \to \mathcal{O}(-n+1) \to \mathcal{O}(-n+2) \otimes V \to \mathcal{O}(-n+3) \otimes \Lambda^2 V \to \dots \\ \dots \to \mathcal{O}(-1) \otimes \Lambda^{n-2}V \to \mathcal{O} \otimes \Lambda^{n-1}V \to \mathcal{O}(1) \to 0, \end{aligned} \tag{3.9}$$

который мы обозначим за $\mathcal{F}^{\bullet}$ (будем считать, что $\mathcal{O}(1)$ сидит в нулевой градуировке).

Пусть $\lambda \in \mathrm{Y}_{n-k,k}$ имеет первую строку максимальной длины $\lambda_1 = n - k$. Согласно определению, имеем $\lambda\{1\}_k = 0$. Обозначим за $\nu$ диаграмму из $k-1$ строк с компонентами $\nu = (\lambda\{1\}_1 - 1, \ldots, \lambda\{1\}_{k-1} - 1) = (\lambda_2 - 1, \ldots, \lambda_k - 1)$.

Рассмотрим объект $C^\bullet = p_*(q^*\mathcal{F}^\bullet \otimes \Sigma^\nu(p^*\mathcal{U}/\mathcal{L}))$. С одной стороны, $C^\bullet$ — нулевой объект в $D^b(X)$, так как объект $\mathcal{F}^\bullet$, будучи точным комплексом, — нулевой в $D^b(\mathbb{P}(V))$.

С другой стороны, напишем стандартную спектральную последовательность

$$E_1^{ab} = R^b p_*(q^*\mathcal{F}^a \otimes \Sigma^\nu(p^*\mathcal{U}/\mathcal{L})) \Rightarrow H^{a+b}(C^\bullet).$$

По определению $\mathcal{F}^\bullet$ при $p = -n, \ldots, 0$ имеем

$$\begin{aligned} E_1^{ab} &= R^q p_*(q^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(a+1) \otimes \Lambda^{n+a} V) \otimes \Sigma^\nu(p^*\mathcal{U}/\mathcal{L})) = \\ &= R^b p_*(\mathcal{L}^{-a-1} \otimes \Lambda^{n+a} V \otimes \Sigma^\nu(p^*\mathcal{U}/\mathcal{L})) \\ &= R^b p_*(\mathcal{L}^{-a-1} \otimes \Sigma^\nu(p^*\mathcal{U}/\mathcal{L})) \otimes \Lambda^{n+a} V. \end{aligned}$$

Таким образом, нам необходимо вычислить $R^b p_*(\mathcal{L}^{-a-1} \otimes \Sigma^\nu(p^*\mathcal{U}/\mathcal{L}))$ для всех $a = -n, \ldots, 0$ и $b \geq 0$.

По теореме Бореля-Ботта-Вейля $R^\bullet p_*(\mathcal{L}^{-a-1} \otimes \Sigma^\nu(p^*\mathcal{U}/\mathcal{L})) \neq 0$, если и только если найдется перестановка, делающая из последовательности

$$(\nu_1 + k, \nu_2 + (k-1), \ldots, \nu_{k-1} + 2, (-p-1) + 1) \tag{3.10}$$

неубывающую, причем в последнем случае не зануляется лишь один производный функтор.

Первые $k-1$ членов последовательности (3.10) строго убывают и фиксированы. Кроме того, имеем неравенства

$$n - k - 1 \geq \nu_i = \lambda\{1\}_i - 1 \geq -1,$$

откуда получаем, что первые $k-1$ членов заключены в промежутке $[1, \ldots, n-1]$. С другой стороны, последний член равен $-a$ и принимает значения от $0$ до $n$. Таким образом, $E_1^{ab}$ содержит $(n+1) - (k-1) = n - k + 2$ ненулевых члена.

Пусть теперь $a$ — такое, что все элементы (3.10) различны. В случае $a = 0$ последовательность (3.10) строго убывает. Теорема Бореля-Ботта-Вейля тогда гласит, что

$$E_1^{00} = R^0 p_*(\mathcal{L}^{-1} \otimes \Sigma^\nu(p^*\mathcal{U}/\mathcal{L})) \otimes \Lambda^n V \simeq \mathcal{U}^{\lambda\{1\}(-1)} \simeq \mathcal{U}^{\lambda\{1\}}(1).$$

В случае $a = -n$, переставляя последний член последовательности (3.10) на первое место, получаем

$$(n, \lambda_2 - 1 + k, \ldots, \lambda_k - 1 + 2).$$

Отсюда имеем

$$E_1^{-n,k-1} = R^{k-1} p_*(\mathcal{L}^{n-1} \otimes \Sigma^\nu(p^*\mathcal{U}/\mathcal{L})) \otimes \Lambda^0 V \simeq \mathcal{U}^\lambda.$$

Выпишем в порядке возрастания все значения $a$, для которых найдется нетривиальный член спектральной последовательности $E_1^{ab}$

$$-n = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-k} < a_{n-k+1} = 0.$$

Для каждого $a_i$ найдется такой индекс $a(i)$, что последовательность

$$\tau_i = (\nu_1 + k, \ldots, \nu_{a(i)} + (k + 1 - a(i)), -a_i, \nu_{a(i)+1} + (k - a(i)), \ldots, \nu_{k-1} + 2)$$

строго убывает. Единственный нетривиальный производный прямой образ сидит в градуировке $b_i = k - 1 - a(i)$ и равнен $\mathcal{U}^{\alpha_i}$, где

$$\alpha_i = \tau_i - (k, \ldots, 1) = (\lambda_2 - 1, \ldots, \lambda_{a(i)+1} - 1, -a_i - k + a(i), \lambda_{a(i)+2}, \ldots, \lambda_k).$$

Отсюда видно, что $\alpha_i = \lambda^{(i)}$ при $i = 1, \ldots, n - k$. Случаи $a_0 = -n$ и $a_{n-k+1} = 0$ были рассмотрены выше. Немедленно проверяется, что $b_\lambda^{(i)} = n + a_i$, поэтому нетривиальные $E_1^{a_i b_i}$ в точности соотвествуют членам (3.6).

Мы знаем, что спектральная последовательность выраждается. Посмотрим на соседние значения $a_i$ и $a_{i+1}$. Легко видеть, что выполняются равенства $a_{i+1} - a_i = a(i+1) - a(i) + 1 = b_i - b_{i+1} + 1$. Значит, суммарная градуировка

$a_j + b_j$ принимает последовательные значения $k-1-n, \dots, 0$, а спектральная последовательность, будучи вырожденной, превращается в искомую длинную точную последовательность. $\square$

Пользуясь изоморфизмом $\mathsf{Gr}(k, V) \simeq \mathsf{Gr}(n-k, V^*)$, при котором тавтологическое подрасслоение на последнем отождествляется с $(V/\mathcal{U})^*$ на первом, мы немедленно получаем следующий вариант ступенчатых комплексов на $X$.

**Теорема 3.2.3.** *Пусть $\mu \in \mathrm{Y}_{k,n-k}$ — диаграмма Юнга максимальной ширины, то есть $\mu_1 = k$. Тогда на $X$ имеется точный комплекс векторных расслоений вида*

$$\begin{aligned}0 \to (V/\mathcal{U})^{-\mu} \to \mathcal{U}^{-\mu^{(1)}} \otimes \Lambda^{b_\mu^{(1)}} V^* \to (V/\mathcal{U})^{-\mu^{(2)}} \otimes \Lambda^{b_\mu^{(2)}} V^* \to \dots \\ \dots \to \mathcal{U}^{-\mu^{(k)}} \otimes \Lambda^{b_\mu^{(k)}} V^* \to (V/\mathcal{U})^{-\mu\{1\}}(1) \to 0.\end{aligned} \tag{3.11}$$

*Пример* 3.2.4. На грассманиане $\mathsf{Gr}(k, V)$ имеется длинные точные последовательности вида

$$0 \to S^{n-k}\mathcal{U} \to S^{n-k-1}\mathcal{U} \otimes V \to \dots \to \mathcal{U} \otimes \Lambda^{n-k-1} V \to \Lambda^{n-k} V \to \mathcal{O}(1) \to 0,$$
$$0 \to S^k (V/\mathcal{U})^* \to S^{k-1}(V/\mathcal{U})^* \otimes V^* \to \dots \to \Lambda^k V^* \to \mathcal{O}(1) \to 0.$$

Первая из них соответствует диаграмме $\lambda = (n-k, 0, \dots, 0)$, для которой $i$-ое ступенчатое обрезание $\lambda^{(i)} = (n-k-i, 0, \dots, 0)$. Вторая получается аналогично.

## 3.3. Ступенчатые комплексы для $\mathcal{E}^{\lambda,\mu}$

Обобщим результаты предыдущего раздела на случай расслоений $\mathcal{E}^{\lambda,\mu}$. Напомним, что в разделе 2 по блоку $\mathrm{B}_{w,h}$ был построен исключительный набор, состоящий из векторных расслоений

$$\left\langle \mathcal{E}^{\lambda,\mu} \right\rangle_{(\lambda,\mu)\in \mathrm{B}_{w,h}} \subset D^b(X).$$

Расслоения эти однозначно характеризуются тем, что в эквивариантной категории $D^b_{\mathsf{G}}(X)$ образуют левый двойственный набор к набору

$$\left\langle \mathcal{U}^\lambda \otimes (V/\mathcal{U})^{-\mu} \right\rangle_{(\lambda,\mu)\in \mathrm{B}_{w,h}} \subset D^b_{\mathsf{G}}(X).$$

В терминах частичных флагов $Z_1 = \mathsf{Fl}(k-h,k;V)$ и $Z_2 = \mathsf{Fl}(k,n-w;V)$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& Z_2 \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, "f"] & & Z_1 \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\
\mathsf{Gr}(n-w,V) = X'' & & X & & X' = \mathsf{Gr}(k-h,V)
\end{tikzcd}$$

имеем явные формулы

$$\mathcal{E}^{\lambda,\mu} = p_*\left((\mathcal{U}/\mathcal{W})^{\lambda} \otimes (V/\mathcal{W})^{-\mu}\right), \qquad \mathcal{E}^{\lambda,\mu} = f_*\left((\mathcal{K}/\mathcal{U})^{-\mu} \otimes \mathcal{K}^{\lambda}\right),$$

где $\mathcal{W}$ и $\mathcal{K}$ — тавтологические подрасслоения рангов $k-h$ и $n-w$ на $Z_1$ и $Z_2$ соответственно.

Пусть $(\lambda,\mu) \in \mathrm{B}_{w,h}$ — такие, что $\lambda_1 = w$. Согласно Теореме 3.2.1, на $X''$ имеется точный комплекс вида

$$\begin{gathered}
0 \to \mathcal{K}^{\lambda} \to \mathcal{K}^{\lambda^{(1)}} \otimes \Lambda^{b_\lambda^{(1)}} V \to \mathcal{K}^{\lambda^{(2)}} \otimes \Lambda^{b_\lambda^{(2)}} V \to \dots \\
\dots \to \mathcal{K}^{\lambda^{(n-k)}} \otimes \Lambda^{b_\lambda^{(n-k)}} V \to \mathcal{K}^{\lambda\{1\}} \otimes \mathcal{O}_{X''}(1) \to 0.
\end{gathered} \tag{3.12}$$

Применим к последовательности (3.12) функтор $f_*\left((\mathcal{K}/\mathcal{U})^{-\mu} \otimes g^*(-)\right)$. Разберемся с последним членом:

$$\begin{aligned}
f_*\Big((\mathcal{K}/\mathcal{U})^{-\mu} \otimes g^*\Big(\mathcal{K}^{\lambda\{1\}} \otimes \mathcal{O}_{X''}(1)\Big)\Big) &= f_*\Big((\mathcal{K}/\mathcal{U})^{-\mu} \otimes \mathcal{K}^{\lambda\{1\}} \otimes \det \mathcal{K}^*\Big) = \\
&= f_*\Big((\mathcal{K}/\mathcal{U})^{-\mu} \otimes \mathcal{K}^{\lambda\{1\}} \otimes \det \mathcal{U}^* \otimes \det(\mathcal{K}/\mathcal{U})^*\Big) = \\
&= f_*\Big((\mathcal{K}/\mathcal{U})^{-\mu} \otimes \mathcal{K}^{\lambda\{1\}} \otimes \det(\mathcal{K}/\mathcal{U})^*\Big) \otimes \mathcal{O}_X(1) = \\
&= f_*\Big((\mathcal{K}/\mathcal{U})^{-\mu(1)} \otimes \mathcal{K}^{\lambda\{1\}}\Big) \otimes \mathcal{O}_X(1).
\end{aligned}$$

Первое равенство имеется по определению, второе — из короткой точной последовательности

$$0 \to (\mathcal{K}/\mathcal{U})^* \to \mathcal{K}^* \to \mathcal{U}^* \to 0,$$

а третье — по формуле проекции. Наконец, заметим, что пара $(\lambda\{1\}, \mu(1))$ лежит в блоке $\mathrm{B}_{w,h-1}$. Отсюда получаем равенство

$$f_*\Big((\mathcal{K}/\mathcal{U})^{-\mu(1)} \otimes \mathcal{K}^{\lambda\{1\}}\Big) = \mathcal{E}^{\lambda\{1\},\mu(1)}.$$

Итого, никаких высших прямых образов нет, откуда заключаем следующее.

**Теорема 3.3.1.** *Для всякой пары* $(\lambda, \mu) \in \mathrm{B}_{w,h}$*, такой что* $\lambda_1 = w$*, на* $X$ *имеется точная последовательность вида*

$$\begin{gathered} 0 \to \mathcal{E}^{\lambda,\mu} \to \mathcal{E}^{\lambda^{(1)},\mu} \otimes \Lambda^{b_\lambda^{(1)}} V \to \mathcal{E}^{\lambda^{(2)},\mu} \otimes \Lambda^{b_\lambda^{(2)}} V \to \dots \\ \dots \to \mathcal{E}^{\lambda^{(w)},\mu} \otimes \Lambda^{b_\lambda^{(w)}} V \to \mathcal{E}^{\lambda\{1\},\mu(1)}(1) \to 0. \end{gathered} \tag{3.13}$$

Аналогично, рассматривая $\mathcal{E}^{\lambda,\mu}$ как прямой образ $p_*\big((\mathcal{U}/\mathcal{W})^{\lambda} \otimes (V/\mathcal{W})^{-\mu}\big)$ и используя ступенчатые комплексы из Теоремы 3.2.3, немедленно получаем следующий вариант предыдущей теоремы.

**Теорема 3.3.2.** *Для всякой пары* $(\lambda, \mu) \in \mathrm{B}_{w,h}$*, такой что* $\mu_1 = k - h$*, на* $X$ *имеется точная последовательность вида*

$$\begin{gathered} 0 \to \mathcal{E}^{\lambda,\mu} \to \mathcal{E}^{\lambda,\mu^{(1)}} \otimes \Lambda^{b_\mu^{(1)}} V^* \to \mathcal{E}^{\lambda,\mu^{(2)}} \otimes \Lambda^{b_\mu^{(2)}} V^* \to \dots \\ \dots \to \mathcal{E}^{\lambda,\mu^{(k-h)},\mu} \otimes \Lambda^{b_\mu^{(k-h)}} V \to \mathcal{E}^{\lambda(1),\mu\{1\}}(1) \to 0. \end{gathered} \tag{3.14}$$

# Глава 4

# Исключительные наборы на грассманианах

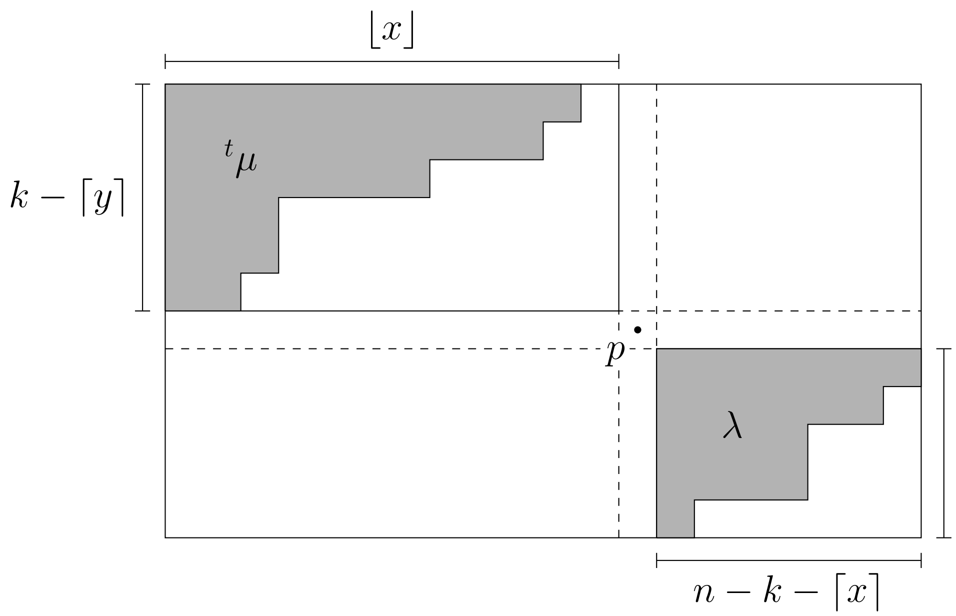
## 4.1. Гипотеза Кузнецова-Полищука

Как обычно, $X = \mathsf{Gr}(k, V)$ — грассманиан $k$-мерных подпространств в векторном пространстве $V$ размерности $n$. Рассмотрим строго возрастающую непрерывную функцию $\Gamma : [0, n-k] \to \mathbb{R}$ с граничными условиями $\Gamma(0) = 0$ и $\Gamma(n-k) = k$. Будем мыслить о таких функциях как о монотонных путях, ведущих из левого нижнего угла прямоугольника ширины $n-k$ и высоты $k$ в правый верхний угол. Обозначим за $p_i = (x_i, y_i)$, $i = 0 \ldots, l(\Gamma)$ точки на графике $\Gamma$, хотя бы одна из координат которых целочисленная, и упорядочим их по возрастанию любой из координат.

*Пример* 4.1.1. Пусть $n = 2k$. Рассмотрим диагональный путь $\Gamma(x) = x$. Тогда $l(\Gamma) = k$ и

$$p_i = (i, i) \quad \text{при} \quad i = 0, \ldots, k.$$

Обозначим за $\Pi$ прямоугольник $[0, n-k] \times [0, k] \subset \mathbb{R}^2$. Для всякой точки $p = (x, y)$, лежащей в прямоугольнике $\Pi$ определим *блок* $\mathrm{B}_p = \mathrm{Y}_{n-k-x,y} \times \mathrm{Y}_{k-y,x}$.



Сразу же видно, что в терминах раздела 2

$$\mathrm{B}_p = \mathrm{B}_{\lceil x \rceil, \lfloor y \rfloor} \cap \mathrm{B}_{\lfloor x \rfloor, \lceil y \rceil}. \tag{4.1}$$

С каждым блоком связана подкатегория

$$\mathcal{B}_p = \left\langle \mathcal{U}^{-\lambda} \otimes (V/\mathcal{U})^{\mu} \right\rangle_{(\lambda,\mu)\in \mathrm{B}_p}.$$

Цель данной главы — доказать следующую гипотезу, сформулированную в недавней работе Кузнецовым и Полищуком.

**Гипотеза 4.1.2** ([25, Гипотеза 9.8])**.** *Имеется полуотогональное разложение*

$$D^b(X) = \left\langle \mathcal{B}_{p_0}, \mathcal{B}_{p_1}(1), \ldots, \mathcal{B}_{p_{l(\Gamma)}}(l(\Gamma)) \right\rangle, \tag{4.2}$$

*каждая из компонент которого $\mathcal{B}_{p_i}(i)$ порождается полным исключительным набором.*

Прежде чем перейти к доказательству Гипотезы 4.1.2, сделаем ряд предварительных замечений. Разложения, которые предсказывает гипотеза, связаны с путями некоторого вида в прямоугольнике. Несмотря на непрерывную природу пространства параметров, гипотетическое множество разложений дискретно. Действительно, компоненты разложения зависят от точек пересечения пути $\Gamma$ с сеткой $N = \mathbb{R} \times \mathbb{Z} \cup \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$. Пусть $p$ — одна из точек пересечения. Имеется три типа точке пересечения: только абсцисса $p$ целочисленная, только ордината $p$ целочисленная, либо обе координаты $p$ целочисленные. В каждом из этих случаев соответсвующая компонента разложения зависит только от номера $p$ в упорядоченной последовательности всех точек пересечений $\Gamma$ с $N$ и блока $\mathrm{B}_p$. Но последний зависит только от целых частей координат $p$. В частности, без ограничения общности можно считать, что интересующие нас пути кусочно-линейны и соединяют точки с полуцелыми координатами.

Кроме того, мы уже знаем часть утверждения гипотезы, касающуюся строения блоков разложения.

**Предложение 4.1.3.** *Пусть $p \in \Pi$, тогда подкатегория $\mathcal{B}_p \subset D^b(X)$ порождается исключительным набором.*

*Доказательство.* При антиэквивалентности исключительные наборы переходят в исключительные наборы с обращением порядка. Таким образом, достаточно доказать, что подкатегория

$$\mathcal{B}_p^* = \left\langle \mathcal{U}^{\lambda} \otimes (V/\mathcal{U})^{-\mu} \right\rangle_{(\lambda,\mu)\in \mathrm{B}_p}$$

пораждается исключительным набором. В разделе 2 мы построили исключительный набор

$$\left\langle \mathcal{E}^{\lambda,\mu} \right\rangle_{(\lambda,\mu)\in \mathrm{B}_p}$$

для всякой точки $p$ с целыми коорднатами. Теперь достаточно воспользоваться формулой (4.1). $\square$

Нам остается проверить полуортогональность и полноту разложений.

## 4.2. Доказательство гипотезы

Пусть $p = (x, y)$ — точка в прямоугольнике $\Pi$, ни одна из координат которой не является целочисленной. Пусть $\Gamma$ — строго монотонный путь, проходящий через $p$ и ведущий в $(n-k, k)$. Обозначим за $p_0, \ldots, p_{l(\gamma)}$ точки $\Gamma$, лежащие правее $p$, одна из координат которых целочисленная. Как и раньше, упорядочим $p_i$ в порядке возрастания любой из координат. Мы собираемся доказать следующее утверждение.

**Теорема 4.2.1.** *В производной категории $D^b(X)$ имеется полуортогональное разложение*

$$\left\langle \mathcal{B}_{p_0}, \mathcal{B}_{p_1}(1), \ldots, \mathcal{B}_{p_{l(\Gamma)}}(l(\Gamma)) \right\rangle = \mathcal{B}^{\Gamma}_{\geq p} \subset D^b(X),$$

*причем соответствующая подкатегория, порожденная блоками, не зависит от выбора пути $\Gamma$. Далее мы будем обозначать ее $\mathcal{B}_{\geq p}$.*

Для доказательства Теоремы 4.2.1 нам понадобится следующая лемма.

**Лемма 4.2.2.** *Пусть* $p = (x, y)$ *и* $p' = (x+t, y+t)$ *— пара точек с целочисленными координатами, лежащие в прямоугольнике* $\Pi$, *причем* $t > 0$. *Тогда*

$$\mathcal{B}_p \subset \mathcal{B}_{p'}(t)^{\perp}.$$

*Доказательство.* Обозначим $w = n-k-x$ и $h = y$. Нам достаточно проверить, что для всяких

$$(\lambda, \mu) \in \mathrm{B}_{p'} = \mathrm{Y}_{w-t,h+t} \times \mathrm{Y}_{k-h-t,n-k-w+t} \quad \text{и} \quad (\alpha, \beta) \in \mathrm{B}_p = \mathrm{Y}_{w,h} \times \mathrm{Y}_{k-h,n-k-w}$$

выполнено

$$\mathsf{Ext}^\bullet\left(\mathcal{U}^{-\lambda} \otimes (V/\mathcal{U})^{\mu}(t), \mathcal{U}^{-\alpha} \otimes (V/\mathcal{U})^{\beta}\right) = \\ = H^\bullet\left(X, \mathcal{U}^{\lambda} \otimes \mathcal{U}^{-\alpha} \otimes (V/\mathcal{U})^{-\mu} \otimes (V/\mathcal{U})^{\beta}(-t)\right) = 0.$$

Пусть $\mathcal{U}^{\gamma}$ — неприводимое слагаемое в разложении $\mathcal{U}^{\lambda} \otimes \mathcal{U}^{-\alpha}$, $(V/\mathcal{U})^{\delta}$ — неприводимое слагаемое в разложении $(V/\mathcal{U})^{-\mu} \otimes (V/\mathcal{U})^{\beta}$. Достаточно проверить, что для всех таких пар слагаемых

$$H^\bullet\left(\mathcal{U}^{\gamma} \otimes (V/\mathcal{U})^{\delta}(-t)\right) = 0.$$

По теореме Бореля–Ботта–Вейля последнее выполнено тогда и только тогда, когда в последовательности

$$(n+\delta_1, n-1+\delta_2, \ldots, k+1+\delta_{n-k}, k+t+\gamma_1, k-1+t+\gamma_2, \ldots, 1+t+\gamma_k) \quad (4.3)$$

хотя бы два члена совпадают.

Первые $n-k$ и последние $k$ членов последовательности (4.3) образуют строго убывающие подпоследовательности. Рассмотрим члены с порядковыми номерами $n-k-w+1, \ldots, n-k$. По Лемме 1.3.3 и предыдущему замечанию имеем

$$k+w+\delta_{n-k-w+1} \leq k+w \quad \text{и} \quad k+1+\delta_{n-k} \geq k+1-(k-h-t) = h+1+t.$$

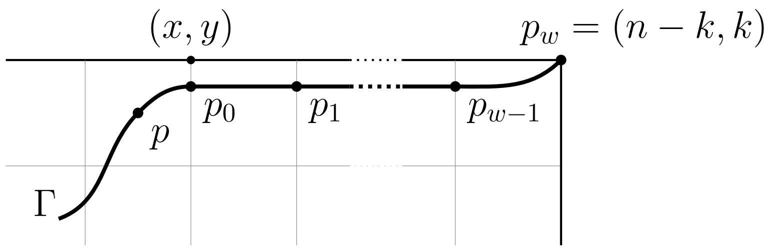
Таким обрзом, все члены с данными номерами лежат на целочисленном отрезке $[h{+}1{+}t,\ldots,k{+}w]$. Сдругой стороны, рассмотрим члены с порядкоми номерами $n-k+1,\ldots,n-h$. По тем же соображениям имеем

$$k+t+\gamma_1 \le k+t+w-t = k+w \quad \text{и} \quad h+1+t+\gamma_{k-h} \ge h+1+t.$$

Значит, данные члены также лежат в промежутке $[h+1+t,\ldots,k+w]$. Итого, $w+k-h$ членов последовательности (4.3) лежат на целочисленном отрезке размера $w+k-h-t$. По принципу Дирихле заключаем, что хотя бы два из них совпадают. □

*Доказательство Теоремы 4.2.1.* Согласно приведенному в конце раздела 4.1 рассуждению, без ограничения общности можно считать, что точка $p$ имеет координаты вида $(x-\frac{1}{2}, y-\frac{1}{2})$, где $1 \le x \le n-k$ и $1 \le y \le k$ — целые числа. Будем доказывать утверждение убывающей индукцией по сумме координат $p$. Для удобства введем обозначения $w = n-k-x$, $h = y$ и $\mathcal{B}_i = \mathcal{B}_{p_i}$.

*База индукции.* В качестве базы индукции рассмотрим множество точек, для которых $y = k$ или $x = n-k$. Пусть $y = k$, тогда единственная для пути возможность — пересекать вертикальные отрезки.




Ожидается полуортогональное разложение вида

$$\mathcal{B}_{\ge p} = \langle \mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1(1), \ldots, \mathcal{B}_w(w) \rangle\,,$$

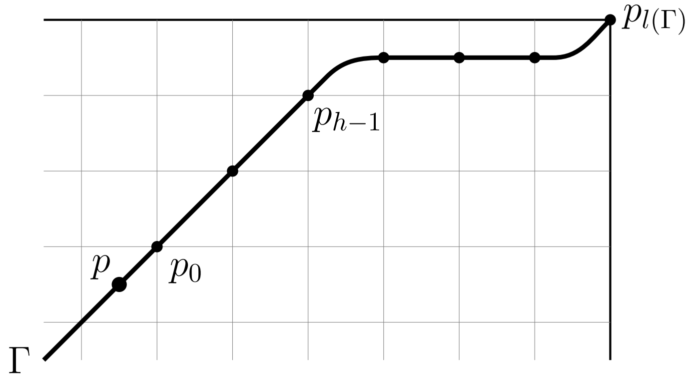
где $\mathcal{B}_i$ пораждается расслоениями вида $\mathcal{U}^{-\lambda}$, $\lambda \in \mathrm{Y}_{w-i,k-1}$. Учитывая подкрутку блоков, получаем

$$\mathcal{B}_{\ge p} = \left\langle \mathcal{U}^{-\lambda} \right\rangle_{\lambda \in \mathrm{Y}_{w,k}}.$$

Остается заметить, что встречающиеся расслоения образуют поднабор капрановского набора, причем разбиение на блоки соответствует значению $\lambda_k$. Заметим, что $\mathcal{B}_{\geq p} = \mathcal{B}_{(x,y)}$.

Случай $x = n - k$ рассматривается аналогично, за той единственной разницей, что получаюется поднабор в двойственном капрановском наборе.

*Индукционный переход.* Рассмотрим специальный путь $\Gamma$, идущий по диагонали через узлы сетки до граничных клеток прямоугольника, а потом в правый верхний угол.




По Лемме 4.2.2 немедленно получаем полуортогональное разложение

$$\mathcal{B}^{\Gamma}_{\geq p} = \left\langle \mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1(1), \ldots, \mathcal{B}_{l(\Gamma)}(l(\Gamma)) \right\rangle .$$

Пусть теперь $\Gamma'$ — другой путь. Имеются три возможности для точки $p_0$: либо она лежит совпадает с вершиной сетки, либо лежит на вертикальном отрезке, либо на горизонтальном. Рассмотрим по очереди каждый из случаев.

Пусть $p_0$ совпадает с вершиной сетки, то есть $p_0 = (x, y)$. Без ограничения общности будем считать, что $\Gamma'$ проходит через точку $p' = (x + \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2})$. Тогда

$$\mathcal{B}^{\Gamma}_{\geq p} = \left\langle \mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1(1), \ldots, \mathcal{B}_{l(\Gamma)}(l(\Gamma)) \right\rangle = \left\langle \mathcal{B}_0, \mathcal{B}^{\Gamma}_{\geq p'}(1) \right\rangle = \left\langle \mathcal{B}_0, \mathcal{B}^{\Gamma'}_{\geq p'}(1) \right\rangle ,$$

где первое равенство получается из определения, а последнее следует из предположения индукции. Заметим, что точки пересечения $\Gamma'$ с сеткой, лежащие правее $p'$ — в точности $p_1, \ldots, p_{l(\Gamma')}$. Раскрывая $\mathcal{B}^{\Gamma'}_{\geq p'}(1)$, получаем искомое разложение. Катеория при этом не меняется.

Рассмотрим случай, когда $p_0$ лежит на горизонтальном отрезке сетки (можно считать, что $p_0 = (x - \frac{1}{2}, y)$). Без ограничения общности предположим, что $\Gamma'$ проходит через точку $p'$ с координатами $(x - \frac{1}{2}, y + \frac{1}{2})$. По предположению индукции $\mathcal{B}_{p'}^{\Gamma'}$ не зависит от части пути $\Gamma'$, которая лежит правее $p'$. С другой стороны, $\mathrm{B}_{p_0} \subset \mathrm{B}_{(x-1,y)}$, откуда по Лемме 4.2.2 получаем полуортогональное разложение

$$\mathcal{B}_{\geq p}^{\Gamma'} = \left\langle \mathcal{B}_{p_0}, \mathcal{B}_{\geq p'}^{\Gamma'}(1) \right\rangle = \left\langle \mathcal{B}_{p_0}, \mathcal{B}_{p_1}(1), \ldots, \mathcal{B}_{p_{l(\Gamma')}}(l(\Gamma')) \right\rangle .$$

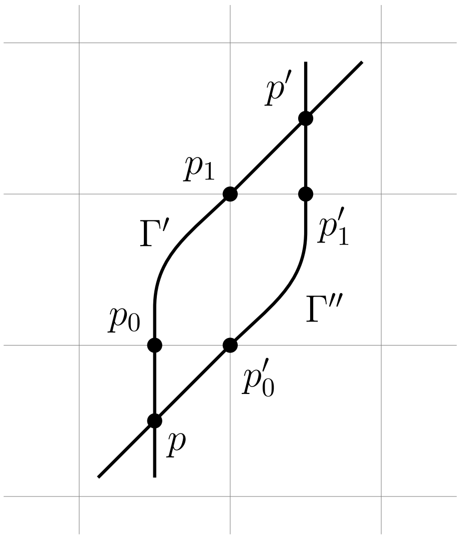
Остается доказать, что $\mathcal{B}_{\geq p}^{\Gamma'} = \mathcal{B}_{\geq p}^{\Gamma}$. По предположению индукции можно считать, что $\Gamma'$ проходит через вершину сетки $p_1 = (x, y+1)$. Имеем полуортогональное разложение

$$\mathcal{B}_{\geq p}^{\Gamma'} = \langle \mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1(1), \mathcal{A} \rangle ,$$

где $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_{p_0}$, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_{p_1}$, а подкатегория $\mathcal{A}$ порождена оставшимися блоками. Рассмотрим путь $\Gamma''$, проходящий через точки $p_0' = (x, y)$ и $p_1' = (x + \frac{1}{2}, y + 1)$. Из вышедоказанного имеем разложение

$$\mathcal{B}_{\geq p}^{\Gamma} = \mathcal{B}_{\geq p}^{\Gamma''} = \langle \mathcal{B}_0', \mathcal{B}_1'(1), \mathcal{A} \rangle ,$$

где $\mathcal{B}_0' = \mathcal{B}_{p_0'}$, $\mathcal{B}_1' = \mathcal{B}_{p_1'}$. Таким образом, достаточно показать, равенство категорий $\langle \mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1(1) \rangle = \langle \mathcal{B}_0', \mathcal{B}_1'(1) \rangle$.



Согласно Предложению 4.1.3, для любой точки $p$ блок $\mathcal{B}_p$ порождается исключительным набором

$$\mathcal{B}_p = \left\langle \mathcal{F}^{\lambda,\mu} \right\rangle_{(\lambda,\mu)\in \mathrm{B}_p},$$

где $\mathcal{F}^{\lambda,\mu} = \left(\mathcal{E}^{\lambda,\mu}\right)^*$. Имеем $\mathrm{B}_{p_0} \subseteq \mathrm{B}_{p'_0}$ и $\mathrm{B}_{p'_1} \subseteq \mathrm{B}_{p_1}$. Поэтому остается проверить, что

$$\mathcal{B}_1(1) \subset \langle \mathcal{B}'_0, \mathcal{B}'_1(1)\rangle \quad \text{и} \quad \mathcal{B}'_0 \subset \langle \mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1(1)\rangle\,.$$

Разница $\mathrm{B}_{p_1} \setminus \mathrm{B}_{p'_1}$ состоит в точности из пар $(\lambda, \mu)$, таких что длина первой строки $\lambda_1 = w$ максимальна. Достаточно доказать, что для любой такой пары

$$\mathcal{F}^{\lambda,\mu}(1) \in \langle \mathcal{B}'_0, \mathcal{B}'_1(1)\rangle\,.$$

Двойственный и подкрученный на $\mathcal{O}(1)$ комплекс (3.13) имеет вид

$$0 \to \mathcal{F}^{\lambda\{1\},\mu(1)} \to \mathcal{F}^{\lambda^{(w)},\mu}(1) \otimes \Lambda^{b_\lambda^{(w)}} V^* \to \ldots \to$$
$$\to \mathcal{F}^{\lambda^{(1)},\mu}(1) \otimes \Lambda^{b_\lambda^{(1)}} V^* \to \mathcal{F}^{\lambda,\mu}(1) \to 0.$$

Остается заметить, что крайний левый член принадлежит $\mathcal{B}'_0$, а все промежуточные члены принадлежат $\mathcal{B}'_1(1)$. Значит, $\mathcal{B}_1(1) \subset \langle \mathcal{B}'_0, \mathcal{B}'_1(1)\rangle$. Глядя на те же комплексы, как на резольвенты для крайнего левого члена, получаем $\mathcal{B}'_0 \subset \langle \mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1(1)\rangle$.

Совершенно аналогичное рассуждение с использованием комплексов вида (3.14) работает в случае, когда $p_0$ лежит на вертикальном отрезке. □

*Доказательство Гипотезы 4.1.2.* Без ограничения общности можно считать, что любой интересующий нас путь $\Gamma$, ведущий из точки $(0,0)$ в точку $(n-k,k)$ проходит через $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. По Теореме 4.2.1 и Лемме 4.2.2 имеем полуортогональное разложение

$$\left\langle \mathcal{B}_{p_0}, \mathcal{B}_{p_1}(1), \ldots, \mathcal{B}_{p_{l(\Gamma)}}(l(\Gamma))\right\rangle = \left\langle \mathcal{B}_{p_0}, \mathcal{B}^{\Gamma}_{\geq p}(1)\right\rangle,$$

причем порожденная компонентами разложения подкатегория не зависит от выбора пути. Обозначим ее за $\mathcal{C}$.

Согласно Предложению 4.1.3, все блоки порождаются исключительными наборами. А именно,

$$\mathcal{B}_{p_i} = \left\langle \mathcal{F}^{\lambda,\mu} \right\rangle_{(\lambda,\mu)\in \mathrm{B}_{p_i}},$$

где $\mathcal{F}^{\lambda,\mu} = \left(\mathcal{E}^{\lambda,\mu}\right)^*$.

Остается проверить, что $\mathcal{C}$ совпадает с $D^b(X)$. Выберем в качестве $\Gamma$ кусочно-линейный путь, состоящий из двух отрезков: первый соединяет точки $(0,0)$ и $q = (\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2})$, второй — $q$ и $(n-k,k)$. Имеем полуортогональное разложение

$$\mathcal{C} = \left\langle \mathcal{B}_{p_0}, \mathcal{B}_{p_1}(1), \ldots, \mathcal{B}_{p_{n-1}}(n-1) \right\rangle = \left\langle \mathcal{B}_{p_0}, \ldots, \mathcal{B}_{p_{k-1}}(k-1), \mathcal{B}^{\Gamma}_{\geq q}(k) \right\rangle.$$

Проверяя базу индукции в доказательстве Теоремы 4.2.1, мы установили, что $\mathcal{B}^{\Gamma}_{\geq q} = \mathcal{B}_{(1,k)}$. Поэтому

$$\mathcal{C} = \langle \mathcal{B}_0, \ldots, \mathcal{B}_{k-1}(k-1), \mathcal{B}_k(k) \rangle .$$

где $\mathcal{B}_i = \mathcal{B}_{p_i}$ при $i = 0, \ldots k-1$ и $\mathcal{B}_k = \mathcal{B}_{(1,k)}$. При этом блок $\mathcal{B}_i$ порождается расслоениями

$$\mathcal{B}_i = \left\langle \mathcal{U}^{-\lambda} \right\rangle_{\lambda \in \mathrm{Y}_{n-k-1,i}}.$$

Рассмотрим капрановский набор, подкрученный на $\mathcal{O}(k)$ (напомним, что подкрутка — автоэквивалентность категории).

$$D^b(X) = \left\langle \mathcal{U}^{-\lambda}(k) \right\rangle_{\lambda \in \mathrm{Y}_{n-k,k}}.$$

Достаточно провеить, что все его элементы лежат в $\mathcal{C}$.

Индукцией по $t$ докажем, что $\mathcal{U}^{-\lambda}(t) \in \mathcal{C}$ при $\lambda \in \mathrm{Y}_{n-k,t}$. Этого достаточно, так как случай $t = k$ соотвествует необходимому нам утверждению про подкрученный Капрановский набор.

База индукции $t = 0$ очевидна. Предположим, что для всех $s < t$ утверждение выполнено. Рассмотрим $\lambda \in \mathrm{Y}_{n-k,t}$. Если $\lambda_1 < n-k$, то $\lambda \in \mathrm{Y}_{n-k-1,t} = \mathrm{B}_{p_t}$, откуда $\mathcal{U}^{-\lambda}(t) \in \mathrm{B}_t(t) \subset \mathcal{C}$. Пусть теперь $\lambda_1 = n-k$. Рассмотрим дуализированный и подкрученный на $\mathcal{O}(t)$ комплекс (3.6). Он имеет вид

$$0 \to \mathcal{U}^{-\lambda\{1\}}(t-1) \to \mathcal{U}^{-\lambda^{(n-k)}}(t) \otimes \Lambda^{b_\lambda^{(n-k)}} V^* \to \dots$$
$$\dots \to \mathcal{U}^{-\lambda^{(1)}}(t) \otimes \Lambda^{b_\lambda^{(1)}} V^* \to \mathcal{U}^{-\lambda}(t) \to 0.$$

Мы только что проверили, что все промежуточные члены лежат в $\mathcal{C}$ (по определению ленточных обрезаний диаграммы $\lambda^{(i)}$ принадлежат $\mathrm{Y}_{n-k-1,t}$). Первый член комплекса лежит в $\mathcal{C}$ по предположению индукции, откуда следуют искомое утверждение. □

Рассмотрим грассманниан $\mathsf{Gr}(k, V)$. Напомним, что группа автоморфизмов $\mathsf{Aut}(X)$ содержит подгруппу $\mathbb{P}\mathsf{GL}(V) \subseteq \mathsf{Aut}(X)$, причем

$$|\mathsf{Aut}(X) : \mathbb{P}\mathsf{GL}(V)| = \begin{cases} 2, & 2k = \dim V, \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

(Несложное доказательство этого факта можно найти в [14].)

В случае серединной размерности $2k = n = \dim V$ группа автоморфизмов раскладывается в полупрямое произведение

$$\mathsf{Aut}(X) = \mathbb{P}\mathsf{GL}(V) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

где $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ порождается внешним автоморфизмом $\iota$. Для того, чтобы описать $\iota$, нужно зафиксировать изоморфизм $V \simeq V^*$. Тогда при $2k = n$ двойственное отображение

$$\iota : \mathsf{Gr}(k, V) \to \mathsf{Gr}(2k-k, V^*) \simeq \mathsf{Gr}(n-k, V)$$

дает искомый автоморфизм.

Напомним, что полные исключительные наборы в каком-то смысле отвечают за понятие нормированного базиса в триангулированной категории. Часто оказывается полезным иметь исключительный набор, удовлетворяющий каким-либо приятным свойствам. В качестве следствия только что доказанной гипотезы получаем следующее утверждение.

**Следствие 4.2.3.** *На грассманиане серединной размерности* $\mathsf{Gr}(k, 2k)$ *имеется полный исключительный набор, элементы которого переставляются под действием внешнего автоморфизма.*

*Доказательство.* Рассмотрим диагональный путь $\Gamma$ в квадрате $k \times k$, описанный в Примере 4.1.1. Согласно только что доказанной гипотезе, имеется полуортогональное разложение вида

$$D^b(\mathsf{Gr}(k, 2k)) = \langle \mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1(1), \ldots, \mathcal{B}_k(k) \rangle ,$$

причем компонента $\mathcal{B}_i(i)$ порождается исключительным набором

$$\mathcal{B}_i(i) = \left\langle \mathcal{F}^{\lambda,\mu}(i) \right\rangle_{(\lambda,\mu) \in \mathrm{B}_{(i,i)}} ,$$

где $\mathcal{F}^{\lambda,\mu} = \left(\mathcal{E}^{\lambda,\mu}\right)^*$, а соответствующий блок

$$\mathrm{B}_{(i,i)} = \mathrm{Y}_{k-i,i} \times \mathrm{Y}_{k-i,i}.$$

Остается заметить, что внешний автоморфизм $\iota$ отождествляет $\iota^*\mathcal{U} \simeq (V/\mathcal{U})^*$ и, как следствие, $\iota^*\mathcal{F}^{\lambda,\mu} \simeq \mathcal{F}^{\mu,\lambda}$, причем блоки сохраняются при перестановке $(\lambda, \mu) \mapsto (\mu, \lambda)$. $\square$

Подобные наборы особенно полезны для изучения эквивариантных производных категорий (см., например, [3]).

# Глава 5

# Лефшецевы разложения

## 5.1. Предварительные сведения

В случае производных категорий когерентных пучков на алгебраических многообразиях имеется очень интересный класс полуортогональных разложений . Пусть $X$ — алгебраическое многообразие, $\mathcal{O}_X(1)$ — линейное расслоение на $X$.

**Определение 5.1.1** ([22]). *Лефшецевым разложением* $\mathcal{D}^b(X)$ называется полуортогональное разложение вида

$$\mathcal{D}^b(X) = \langle \mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1(1), \ldots, \mathcal{B}_{m-1}(m-1) \rangle \,,$$

где $0 \subset \mathcal{B}_{m-1} \subset \ldots \subset \mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{D}^b(X)$ и $\mathcal{B}_i(i) = \langle \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(i) \mid \mathcal{F} \in \mathcal{B}_i \rangle$. Подкатегория $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{D}^b(X)$ называется $(i+1)$-ым **блоком** разложения.

Понятие лефшецева разложения было введено А. Кузнецовым в рамках теории гомологической проективной двойственности (см. [22]). В частности, лефшецевы разложения оказываются очень полезными для изучения строения производной категории гиперплоского сечения проективного многообразия. Пусть $X$ — гладкое проективное многообразие, производная категория которого обладает лефшецевым разложением

$$\mathcal{D}^b(X) = \langle \mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1(1), \ldots, \mathcal{B}_{m-1}(m-1) \rangle \,,$$

где $\mathcal{O}(1)$ — очень обильное расслоение, задающее вложение $X$ в некоторое проективное пространство $\mathbb{P}^N$. Пусть $X_H$ — сечение $X$ гиперплоскостью $H \subset \mathbb{P}^N$. В таком случае композиция функторов вложения и ограничения

$$\mathcal{B}_i(i) \to D^b(X) \to D^b(X_H)$$

строго полная при $i = 1, \ldots, m-1$, причем в $D^b(X_H)$ имеется полуортогональное разложение (вообще говоря, не полное)

$$\langle \mathcal{B}_1(1), \mathcal{B}_2(2), \ldots, \mathcal{B}_{m-1}(m-1) \rangle \subseteq D^b(X_H).$$

Оказывается, что всякое лефшецево разложение полностью определяется своим первым блоком $\mathcal{B}_0$.

**Предложение 5.1.2** ([24]). *Старшие блоки лефшецева разложения задаются формулами*

$$\mathcal{B}_k = {}^{\perp}\mathcal{B}_0(-k) \cap \mathcal{B}_{k-1}.$$

Таким образом, имеется естественный частичный порядок на множестве всех лефшецевых разложений, индуцированный порядком по включению, заданным на множестве их первых блоков. Лефшецево разложение называется *прямоугольным,* если $\mathcal{B}_{m-1} = \ldots = \mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_0$, и *минимальным,* если оно минимально по отношению к введенному частичному порядку. Минимальные лефшецевы разложения интересны по нескольким причинам, одной из которых является следующая гипотеза, также принадлежащая Кузнецову.

**Гипотеза 5.1.3** ([24]). *Пусть $X$ — гладкое проективное многообразие. Тогда минимальные лефшецевы разложения $\mathcal{D}^b(X)$ соответствуют минимальным категорным разрешениям особенностей аффинного конуса над $X$.*

Напомним, что особенно приятные полуортогональные разложения получаются из исключительных наборов, когда каждая компонента эквивалентна производной категории конечномерных векторных пространств. Введем следующее определение.

**Определение 5.1.4.** Предположим, что $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ — исключительный набор, а $o : \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{Z}_{>0}$ — положительная функция с целыми значениями, такая что подкатегории

$$\mathcal{B}_i = \langle E_j \mid i < o(j) \rangle \tag{5.1}$$

образуют лефшецево разложение. В таком случае назовем набор $(E_1, \ldots, E_n)$ *лефшецевым базисом* в $\mathcal{D}^b(X)$ с *носителем* $o$.

*Замечание* 5.1.5. У читателя может создаться впечатление, что носитель входит как часть данных в определение лефшецева базиса. Как мы видели, каждое лефшецево разложение полностью задается своим первым блоком. Таким образом, можно сказать, что лефшецев базис — это такой исключительный набор $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ в $\mathcal{D}^b(X)$, что $\mathcal{B}_0 = \langle E_1, E_2, \ldots, E_n \rangle$ является первым блоком лефшецева разложения, причем каждый сдедующий блок $\mathcal{B}_i$ порождается поднабором в $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$.

*Замечание* 5.1.6. Понятие лефшецева базиса тесно связано с понятием полного лефшецева исключительного набора (см. [23]). По всякому лефшецеву базису с невозрастающим носителем строится полный лефшецев исключительный набор, и наоборот.

Читатель, знакомый с понятием перестройки исключительного набора, может заметить, что перестройки также частично определены для лефшецевых базисов. Причем всегда можно перестроить лефшецев базис так, чтобы он соответствовал лефшецеву исключительному набору. Для этого достаточно в первом блоке перестроить объекты с меньшим значением носителя вправо.

Нам понадобится следующая лемма, которая дает простой способ проверки полуортогональности блоков, порожденных лефшецевым базисом.

**Лемма 5.1.7.** *Исключительный набор* $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ *является лефшецевым базисом с носителем* $o(i)$ *тогда и только тогда, когда выполнены условия*

1. *подкатегории* $\mathcal{B}_i(i)$*, заданные* (5.1)*, порождают* $\mathcal{D}^b(X)$*,*

2. $\mathsf{Ext}^\bullet(E_p(k), E_q) = 0$ *для всех* $1 \le p, q \le n$ *и* $0 < k < o(p)$*.*

*Доказательство.* Первое условие — не что иное, как полнота порожденного разложения. Что касается второго, то достаточно заметить, что блоки $\mathcal{B}_i$ порождаются поднаборами исключительного набора $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$. Значит, достаточно проверить полуортогональность для соответствующих объектов. Остается воспользоваться изоморфизмом

$$\mathsf{Ext}^\bullet(E_p(k), E_q(l)) = \mathsf{Ext}^\bullet(E_p(k-l), E_q).$$

□

## 5.2. Верхнетреугольные диаграммы

Дадим следующее естественное определение.

**Определение 5.2.1.** Диаграмма $\lambda \in \mathrm{Y}_{w,h}$ называется *верхнетреугольной*, если она лежит над диагональю прямоугольника, ведущей из правого верхнего в левый нижний угол. В терминах последовательностей это означает, что

$$\lambda_i \leq \frac{w(h-i)}{h} \tag{5.2}$$

при всех $i = 1, \ldots, h$. Аналогичным образом определяются *нижнетреугольные* диаграммы. Эти множества будут обозначаться $\mathrm{UY}_{w,h}$ и $\mathrm{LY}_{w,h}$ соответственно.

Пусть $n = w+h$. Имеется приятный геометрический способ описать орбиту циклического действия. Рассмотрим некоторую диаграмму $\lambda \in \mathrm{Y}_{w,h}$ в качестве пути и продолжим ее $n$-периодически в оба направления. Подобное описание эквивалентно $n$-периодическому продолжению двоичной последовательности, соответствующей $\lambda$. Чтобы получить какой-либо элемент орбиты, достаточно выбрать целую точку на расширенном пути и нарисовать прямоугольник размера $w \times h$, используя выбранную точку в качестве правого верхнего угла. Чтобы увидеть циклическое действие, достаточно переместить прямоугольник вдоль пути в юго-западном направлении. Целые точки на расширенном пути будут называться *вершинами*.

Приведенное описание орбит позволяет с легкостью доказать следующую лемму.

**Лемма 5.2.2.** *Всякая орбита циклического действия на* $\mathrm{Y}_{w,h}$ *содержит верхнетреугольный элемент.*

*Доказательство.* Нарисуем все прямые с наклоном $h/w$, проходящие через вершины расширенного пути. Так как путь $n$-периодичен, получится не более, чем $n$ различных прямых, причем путь будет лежать над самой нижней из них. Осталось нарисовать прямоугольник с правым верхним углом в любой из вершин, лежащих на нижней прямой. Так мы получим искомый верхнетреугольный элемент.

Формально, для данной диаграммы $\lambda \in \mathrm{Y}_{w,h}$ рассмотрим

$$d = \arg\max\left(\lambda_i - \frac{w(h-i)}{h}\right).$$

Легко проверить, что $\lambda\{d + w - \lambda_d\} \in \mathrm{UY}_{w,h}$. $\square$

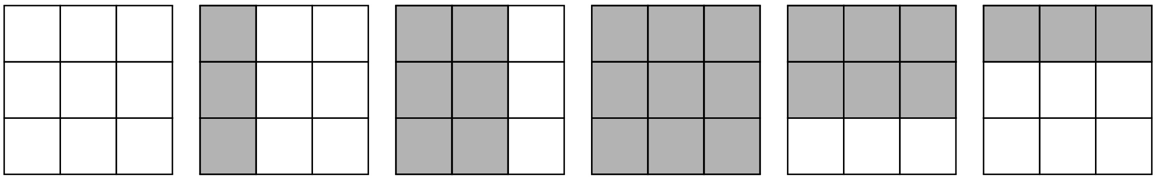
Вершина на продолженном периодически пути называется *u-допустимой* (*L-допустимой*), если она является правым верхним углом верхне (нижне) треугольной диаграммы.

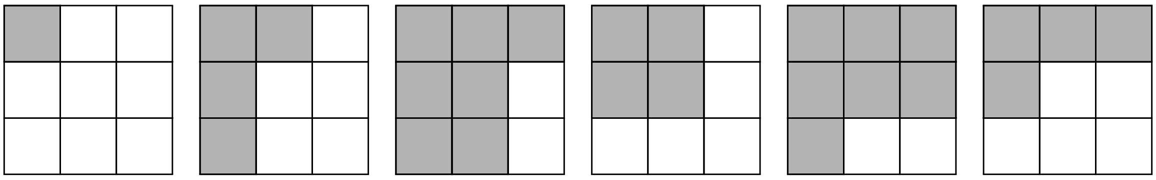
На множестве диаграмм $\mathrm{Y}_{w,h}$ задан лексикографический порядок $\leq$, которому подчинен частичный порядок по вложению. Скажем, что

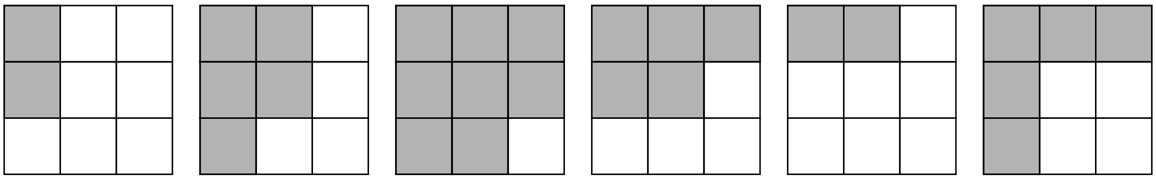
$$\lambda < \mu, \text{ если } \lambda_i = \mu_i \text{ при } i = 1, \ldots, t-1 \text{ и } \lambda_t < \mu_t \text{ для некоторого } 1 \leq t \leq h.$$

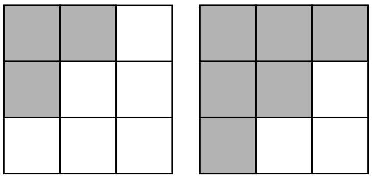
**Определение 5.2.3.** Верхнетреугольная диаграмма $\lambda \in \mathrm{Y}_{w,h}$ называется *минимальной,* если она является лексикографически наименьшим элементом среди верхнетреугольных диаграмм в своей орбите. Множество минимальных верхнетреугольных диаграмм обозначим за $\mathrm{mUY}_{w,h}$. Отметим, что $\mathrm{mUY}_{w,h}$ индексирует орбиты циклического действия. Для заданной диаграммы $\lambda \in \mathrm{Y}_{w,h}$ длина ее орбиты обозначается $o(\lambda)$.

*Пример* 5.2.4. Рассмотрим множество $\mathrm{Y}_{3,3}$. Имеются следующие орбиты действия группы $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$:

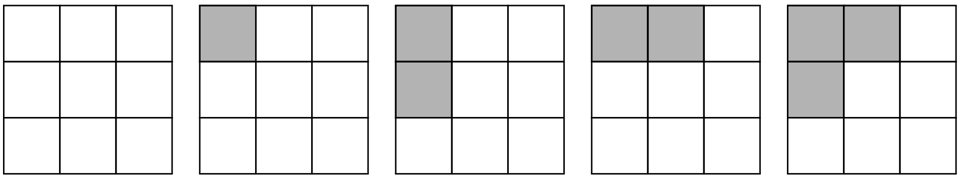
1. 

2. 

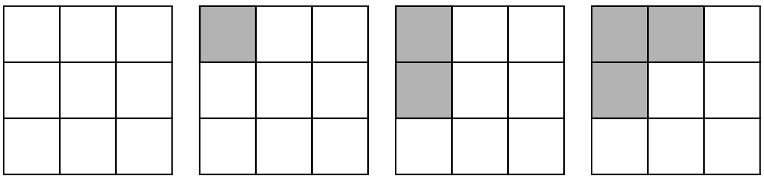
3. 

4. 

Множество верхнетреугольных диаграмм $\mathrm{UY}_{3,3}$ содержит диаграммы



Множество минимальных верхнетреугольных диаграмм $\mathrm{mUY}_{3,3}$ содержит диаграммы



Верхнетреугольные диаграммы  и  лежат в одной орбите, причем первая из них — минимальная.

Имеется естественная ассоциативная некоммутативная операция

$$\oplus : \mathrm{Y}_{n-k,k} \times \mathrm{Y}_{m-l,l} \to \mathrm{Y}_{n-k+m-l,k+l},$$

которая задана конкатенацией двоичных последовательностей, представляющих диаграммы. А именно, для данных диаграмм $\alpha \in \mathrm{Y}_{n-k,k}$ и $\beta \in \mathrm{Y}_{m-l,l}$ имеем

$$\alpha \oplus \beta = a_1 a_2 \ldots a_n b_1 b_2 \ldots b_m$$

в двоичном представлении $\alpha = a_1 a_2 \ldots a_n$, $\beta = b_1 b_2 \ldots b_m$ и

$$\alpha \oplus \beta = (\beta_1 + (n-k), \beta_2 + (n-k), \ldots, \beta_l + (n-k), \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$$

в обычном представлении $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l)$.

**Лемма 5.2.5.** *Для произвольных $\alpha, \alpha' \in \mathrm{Y}_{n-k,k}$ и $\beta, \beta' \in \mathrm{Y}_{m-l,l}$, выполняется следующее:*

- *$\alpha \oplus \beta < \alpha' \oplus \beta'$, если и только если $\beta < \beta'$, или $\beta = \beta'$ и $\alpha < \alpha'$;*
- *$\alpha \oplus \beta \subseteq \alpha' \oplus \beta'$, если и только если $\alpha \subseteq \alpha'$ и $\beta \subseteq \beta'$.*

*Доказательство.* Распишем по определению

$$\alpha \oplus \beta = (\beta_1 + (n-k), \beta_2 + (n-k), \ldots, \beta_l + (n-k), \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k),$$
$$\alpha' \oplus \beta' = (\beta'_1 + (n-k), \beta'_2 + (n-k), \ldots, \beta'_l + (n-k), \alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_k).$$

Теперь оба утверждения очевидны. □

Наконец, нам потребуется несколько характеристик различных типов диаграмм.

- Для данной диаграммы $\lambda \in \mathrm{Y}_{n,k}$ ее **наклоном** называется

  $$s(\lambda) = k/(n-k).$$

  Сразу же видно, что сумма двух верхне (соотв. нижне) треугольных диаграмм с одинаковым наклоном вновь верхне (соотв. нижне) треугольна.

- Для данной диаграммы $\lambda \in \mathrm{UY}_{n,k}$ обозначим за $r(\lambda)$ длину пути, ведущего из правого верхнего угла прямоугольника до самой правой вершины, лежащей на диагонали и отличной от исходной. Например, если $\lambda$ — строго верхнетреугольная, то $r(\lambda) = n$.

- Для данной диаграммы $\lambda \in \mathrm{LY}_{n,k}$ обозначим за $l(\lambda)$ длину пути, ведущего из левого нижнего угла прямоугольника до самой левой вершины, лежащей на диагонали и отличной от исходной. В частности, $\lambda^c \in \mathrm{UY}_{n,k}$ и $l(\lambda) = r(\lambda^c)$.

- Для данной диаграммы $\lambda \in \mathrm{Y}_{n,k}$ обозначим за $d(\lambda)$ наименьшее $d \geq 0$, такое что $\lambda\{d\}$ — нижнетреугольная. Это то же самое, что длина пути, ведущего из правого верхнего угла прямоугольника до самой правой L-допустимой вершины диаграммы. В частности, если $\lambda \in \mathrm{LY}_{n,k}$ то $d(\lambda) = 0$.

- Для данной диаграммы $\lambda \in \mathrm{Y}_{n,k}$ обозначим за $e(\lambda)$ длину пути, ведущего из левого нижнего угла до самой левой L-допустимой вершины, отличной от исходной. В частности, $e(\lambda) > 0$ и при $\lambda \in \mathrm{LY}_{n,k}$ имеем $e(\lambda) = l(\lambda)$.

## 5.3. Лефшецевы разложения производных категорий грассманианов

В данном разделе мы построим два лефшецевых разложения ограниченной производной категории когерентных пучков на грассманиане $X = \mathsf{Gr}(k, V)$ подпространств размерности $k$ в векторном пространстве $V$ размерности $n$. В случае взаимно простых $n$ и $k$ разложения совпадают и оказываются минимальными.

Рассмотрим два набора подкатегорий в $\mathcal{D}^b(X)$. Первый определяется как

$$\mathcal{A}_i = \left\langle \mathcal{U}^{-\lambda} \mid \lambda \in \mathrm{mUY}_{n-k,k},\ i < o(\lambda) \right\rangle, \text{ при } i = 0, \ldots, n-1.$$

Второй — следующий:

$$\mathcal{B}_i = \left\langle \mathcal{U}^{-\lambda} \mid \lambda \in \mathrm{UY}_{n-k,k},\ i < r(\lambda) \right\rangle, \text{ при } i = 0, \ldots, n-1.$$

Сразу же видно, что $\mathcal{A}_0 \supset \mathcal{A}_1 \supset \ldots \supset \mathcal{A}_{n-1}$ и $\mathcal{B}_0 \supset \mathcal{B}_1 \supset \ldots \supset \mathcal{B}_{n-1}$.

Ожидается, что оба этих набора задают лефшецево разложение $\mathcal{D}^b(X)$. Однако на данный момент мы можем доказать полноту только для $\mathcal{B}_i$.

Следующие две теоремы — основные результаты данной главы.

**Теорема 5.3.1** ([9, Теорема 4.1]). *Подкатегории $\mathcal{B}_i$ образуют лефшецево разложение $\mathcal{D}^b(X)$. Исключительный набор $\big(\mathcal{U}^{-\lambda} \mid \lambda \in \mathrm{UY}_{n-k,k}\big)$ является лефшецевым базисом данного разложения с носителем $r(\lambda)$.*

*Пример* 5.3.2. Рассмотрим случай $X = \mathsf{Gr}(3,6)$. Имеется лефшецев базис

$$(\mathcal{O}_X, \mathcal{U}^*, \Lambda^2\mathcal{U}^*, S^2\mathcal{U}^*, \Sigma^{(2,1,0)}\mathcal{U}^*)$$

со следующими значениями функции-носителя:

$$(6,6,4,2,2).$$

Другими словами, имеется полный лефшецев исключительный набор

$$\begin{pmatrix} \Sigma^{(2,1,0)}\mathcal{U}^* & \Sigma^{(2,1,0)}\mathcal{U}^*(1) & & & & \\ S^2\mathcal{U}^* & S^2\mathcal{U}^*(1) & & & & \\ \Lambda^2\mathcal{U}^* & \Lambda^2\mathcal{U}^*(1) & \Lambda^2\mathcal{U}^*(2) & \Lambda^2\mathcal{U}^*(3) & & \\ \mathcal{U}^* & \mathcal{U}^*(1) & \mathcal{U}^*(2) & \mathcal{U}^*(3) & \mathcal{U}^*(4) & \mathcal{U}^*(5) \\ \mathcal{O}_X & \mathcal{O}_X(1) & \mathcal{O}_X(2) & \mathcal{O}_X(3) & \mathcal{O}_X(4) & \mathcal{O}_X(5) \end{pmatrix}.$$

Здесь объекты, стоящие в одном столбце, порождают подкрученные блоки соответствующего разложения.

**Теорема 5.3.3** ([9, Теорема 4.3]). *Подкатегории $\mathcal{A}_i(i)$ при $i = 0, \ldots, n-1$ полуортогональны, т.е. имеется лефшецево разложение*

$$\langle \mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1(1), \ldots, \mathcal{A}_{n-1}(n-1)\rangle = \mathcal{A} \subset \mathcal{D}^b(X)$$

*некоторой полной триангулированной подкатегории $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}^b(X)$ с лефшецевым базисом, заданным исключительным набором $\big(\mathcal{U}^{-\lambda} \mid \lambda \in \mathrm{mUY}_{n-k,k}\big)$ и носителем $o(\lambda)$.*

Теореме 5.3.3 сопутствуют две важные гипотезы.

**Гипотеза 5.3.4.** *Подкатегории $\mathcal{A}_i(i)$ порождают $\mathcal{D}^b(X)$. Иначе говоря, подкатегории $\mathcal{A}_i$ образуют лефшецево разложение $\mathcal{D}^b(X)$.*

*Пример* 5.3.5. В случае $X = \mathsf{Gr}(3, 6)$ получаем лефшецев исключительный набор

$$\begin{pmatrix} \Sigma^{(2,1,0)}\mathcal{U}^* & \Sigma^{(2,1,0)}\mathcal{U}^*(1) & & & & \\ \Lambda^2\mathcal{U}^* & \Lambda^2\mathcal{U}^*(1) & \Lambda^2\mathcal{U}^*(2) & \Lambda^2\mathcal{U}^*(3) & \Lambda^2\mathcal{U}^*(4) & \Lambda^2\mathcal{U}^*(5) \\ \mathcal{U}^* & \mathcal{U}^*(1) & \mathcal{U}^*(2) & \mathcal{U}^*(3) & \mathcal{U}^*(4) & \mathcal{U}^*(5) \\ \mathcal{O}_X & \mathcal{O}_X(1) & \mathcal{O}_X(2) & \mathcal{O}_X(3) & \mathcal{O}_X(4) & \mathcal{O}_X(5) \end{pmatrix}.$$

Можно сравнить данный набор с набором из Примера 5.3.2 и заметить, что объекты $S^2\mathcal{U}^*$ и $S^2\mathcal{U}^*(1)$ были заменены на $\Lambda^2\mathcal{U}^*(4)$ и $\Lambda^2\mathcal{U}^*(5)$, что уменьшило первый блок набора.

Как уже было упомянуто, важным вопросом является построение не просто произвольных, а минимальных лефшецевых разложений. Мы ожидаем следующее.

**Гипотеза 5.3.6.** *Подкатегории $\mathcal{A}_i$ образуют минимальное лефшецево разложение $\mathcal{D}^b(X)$.*

*Замечание* 5.3.7. Мы рассматриваем два лефшецевых разложения $\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{B}_i$ категории $\mathcal{D}^b(X)$. Заметим, что $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{B}_0$, так как исключительный набор, порождающий $\mathcal{A}_0$, является поднабором набора, порождающего $\mathcal{B}_0$. Действительно, первый из них состоит из объектов, соответствующих минимальным верхнетреугольным диаграммам, в то время как второй — всем верхнетреугольным диаграммам. Значит, разложение $\mathcal{A}_i$ не превосходит разложения $\mathcal{B}_i$ по отношению к порядку включения, заданному на первых блоках.

Более того, имеется ровно два случая, в которых $\mathcal{A}_0 = \mathcal{B}_0$. Это выполняется тогда и только тогда, когда $k$ и $n$ взаимно просты или $k = 2$. В этих случаях орбиты циклического действия на $\mathrm{Y}_{n-k,k}$ имеют ровно по одному врехнетреугольному элементу, который автоматически минимален, и для всякого

$\lambda \in \mathrm{UY}_{n,k}$ выполнено $r(\lambda) = o(\lambda)$. Значит, $\mathcal{A}_i = \mathcal{B}_i$ при всех $i = 0, \ldots, n-1$, что, в частности, согласуется с утверждением о том, что всякое лефшецево разложение задается своим первым блоком.

Гипотеза 5.3.6 представляется достаточно сложной, ибо до сих пор не известно естественного способа проверять лефшецевы разложения на минимальность. Несмотря на это, имеются несколько случаев, когда она немедленно выполняется.

**Предложение 5.3.8.** *Выполнено следующее:*

1. *Гипотезы 5.3.4 и 5.3.6 выполняются, когда $n$ и $k$ взаимно просты.*

2. *Если $k = p$ — простое, то из Гипотезы 5.3.4 следует Гипотеза 5.3.6.*

*Доказательство.* Легко видеть, что число блоков лефшецева разложения ограничено сверху индексом многообразия. Действительно, т.к. $\omega_X \simeq \mathcal{O}_X(-n)$, по двойственности Серра

$$\mathsf{Hom}(E(n), E(n)) \simeq \mathsf{Ext}^d(E(n), E)^*$$

для всякого объекта $E \in \mathcal{D}^b(X)$, где $d$ — размерность многообразия $X$. Первая группа содержит выделенный ненулевой элемент

$$id_{E(n)} \in \mathsf{Hom}(E(n), E(n)),$$

откуда видно, что группа $\mathsf{Ext}^d(E(n), E)$ — ненулевая. Значит, объект $E(n)$ не может быть ортогонален слева к $E$ ни при каком $0 \neq E \in \mathcal{D}^b(X)$.

В случае грассманиана $\mathsf{Gr}(k, V)$ индекс равен $n = \dim V$. Значит, все наши разложения уже состоят из максимально возможного числа блоков.

В Замечании 5.3.7 мы видели, что подкатегории $\mathcal{A}_i$ совпадают с $\mathcal{B}_i$ при взаимно простых $k$ и $n$, а значит, образуют лефшецево разложение. Более того, в этом случае разложение — прямоугольное и имеет максимально возможное число блоков, а потому — минимальное. Первое утверждение доказано.

Чтобы доказать второе утверждение, заметим, что в при $k = p$, $p \mid n$ имеется всего одна короткая орбита, представленная минимальной верхнетреугольной диаграммой

$$\left(\frac{(n-k)}{k}(k-1), \ldots, \frac{(n-k)}{k}, 0\right).$$

Далее, число $N$ объектов всякого полного исключительного набора совпадает с рангом группы Гротендика $K_0(X)$, т.е. $N = \binom{n}{k}$. Если $k = p$ — простой делитель $n$, то число $N$ не делится на $n$. Отсюда следует, что в данном случае не существует полного прямоугольного лефшецева набора/разложения. В то же время, лефшецев базис, соответствующий $\mathcal{A}_i$, содержит ожидаемое минимальное число элементов $\lceil \frac{N}{n} \rceil$. □

## 5.4. Полуортогональность и полнота

Сначала докажем полуортогональность компонент лефшецевых разложений $\mathcal{A}_\bullet$ и $\mathcal{B}_\bullet$:

$$\mathcal{A}_j(j) \subset {}^\perp\mathcal{A}_i(i) \quad \text{и} \quad \mathcal{B}_j(j) \subset {}^\perp\mathcal{B}_i(i) \qquad \text{при } 0 \le i < j \le n-1.$$

**Предложение 5.4.1.** *Подкатегории $\mathcal{B}_i(i)$ полуортогональны:*

$$\mathcal{B}_j(j) \subset {}^\perp\mathcal{B}_i(i) \quad \textit{при} \quad 0 \le i < j \le n-1.$$

*Доказательство.* Применим вторую часть критерия, данного в Лемме 5.1.7. Достаточно проверить, что при всех $\lambda, \mu \in \mathrm{UY}_{n-k,k}$ и $0 < t < r(\lambda)$ выполняется

$$\mathsf{Ext}^\bullet(\mathcal{U}^{-\lambda}(t), \mathcal{U}^{-\mu}) = 0.$$

Во-первых, имеем

$$\mathsf{Ext}^\bullet(\mathcal{U}^{-\lambda}(t), \mathcal{U}^{-\mu}) = H^\bullet(X, \mathcal{U}^{\lambda} \otimes \mathcal{U}^{-\mu}(-t)).$$

Чтобы посчитать последние, применим правило Литтлвуда–Ричардсона. Пусть $\mathcal{U}^{-\alpha}$ — неприводимое слагаемое в разложении $\mathcal{U}^{\lambda} \otimes \mathcal{U}^{-\mu}(-t)$. По Лемме 1.3.3

$$-\lambda_{k+1-i} - t \le \alpha_i \le \mu_i - t. \tag{5.3}$$

Вспомним, что диаграммы $\lambda$ и $\mu$ — верхнетреугольные, что по определнию значит

$$0 \leq \lambda_i, \mu_i \leq \frac{(n-k)(k-i)}{k},$$

см. (5.2). Совместим последние два неравенства и получим

$$-\frac{(i-1)(n-k)}{k} - t \leq \alpha_i \leq \frac{(k-i)(n-k)}{k} - t. \tag{5.4}$$

Для вычисления $H^\bullet(X, \mathcal{U}^{-\alpha})$ применим теорему Бореля–Ботта–Вейля. Мы хотим проверить, что когомологии зануляются. Это происходит только в том случае, когда хотя бы два элемента последовательности

$$\alpha + \rho = (n + \alpha_1, n - 1 + \alpha_2, \ldots, n - k + 1 + \alpha_k, n - k, \ldots, 2, 1) \tag{5.5}$$

совпадают. Так как последовательность $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ — невозрастающая, первые $k$ членов последовательности (5.5) различны и убывают. Последние $(n-k)$ членов последовательности (5.5) также различны, убывают и принимают все значения от 1 до $n-k$ включительно. Таким образом, некоторые члены (5.5) совпадают, если и только если $n + 1 - i + \alpha_i$ лежит в промежутке $[1, n-k]$ при некотором $1 \leq i \leq k$.

Предположим, что все члены (5.5) различны, то есть

$$n + 1 - j + \alpha_j \geq n - k + 1, \qquad n - j + \alpha_{j+1} \leq 0 \tag{5.6}$$

при некотором $1 \leq j \leq k-1$. Здесь мы воспользовались тем, что

$$\alpha_1 \geq -t > -n \;\Rightarrow\; n + \alpha_1 > 0 \quad \text{и} \quad \alpha_k \leq -t < 0 \;\Rightarrow\; n - k + 1 + \alpha_k \leq n - k.$$

Теперь воспользуемся неравенствами (5.6) и (5.4):

$$\alpha_j \geq j - k \;\Rightarrow\; \frac{(k-j)(n-k)}{k} - t \geq j - k,$$
$$\alpha_{j+1} \leq j - n \;\Rightarrow\; -\frac{j(n-k)}{k} - t \leq j - n.$$

Получаем следующее:

$$\frac{n(k-j)}{k} \leq t \leq \frac{n(k-j)}{k} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{n(k-j)}{k}.$$

Отметим, что $t$ — целое число. Совместим неравенства $n - j + \alpha_{j+1} \leq 0$ и (5.3) для $\lambda_{k-j}$:

$$-\lambda_{k-j} - \frac{n(k-j)}{k} \leq j - n \quad \Rightarrow \quad \lambda_{k-j} \geq j\frac{(n-k)}{k}.$$

Вспомним, что $\lambda$ — верхнетреугольная, откуда $\lambda_{k-j} \leq (n-k)j/k$. Заключаем, что

$$\lambda_{k-j} = \frac{(n-k)j}{k},$$

то есть что $\lambda$ выходит на диагональ в точке $(k-j)$-ой строки. Заметим, что расстояние от правого верхнего угла прямоугольника до этой точки в точности равно

$$(k-j) + \left((n-k) - \frac{(n-k)j}{k}\right) = \frac{n(k-j)}{k} = t.$$

Таким образом $t \geq r(\lambda)$, что противоречит условию. $\square$

Перейдем к доказательству Теорему 5.3.3. Напомним, что она утверждает полуортогональность подкатегорий $\mathcal{A}_i(i)$:

$$\mathcal{A}_j(j) \subset {}^{\perp}\mathcal{A}_i(i) \quad \text{при} \quad 0 \leq i < j \leq n-1.$$

*Доказательство Теоремы 5.3.3.* Помня, что $\lambda, \mu \in \mathrm{mUY}_{n-k,k}$, проследим за доказательством Предложения 5.4.1. Оно остается верным до последнего момента, где используется неравенство $t < r(\lambda)$, которое теперь заменено более слабым предположением $t < o(\lambda)$.

Таким образом, мы можем полагать

$$t = \frac{n(k-j)}{k} \in \mathbb{Z} \quad \text{и} \quad \lambda_{k-j} = \frac{(n-k)j}{k}.$$

Аналогично проверяется, что $\mu_j = (k-j)(n-k)/k$.

Предыдущие равенства означают, что диаграммы $\lambda, \mu$ выходят на диагональ и могут быть записаны в виде $\mu = b \oplus a$ и $\lambda = b' \oplus a'$ для некоторых $a, b' \in \mathrm{Y}_{j(n-k)/k,j}$ и $a', b \in \mathrm{Y}_{(k-j)(n-k)/k,k-j}$. Вспомним, что, согласно правилу

Литтлвуда–Ричардсона, $i$-ая строка $\mu$ вносит вклад в строки слагаемого тензорного произведения с номерами не меньше $i$. Применяя Лемму 1.3.3, заключаем, что $a \supseteq b'$ и, аналогично, $a' \supseteq b$.

Заметим, что диаграмма $a \oplus b$ (соотв. $a' \oplus b'$) лежит в той же орбите, что и $\mu$ (соотв. $\lambda$).

Нам понадобится следующее наблюдение. Из минимальности $\lambda$ следует, что $\lambda = b' \oplus a' \leq a' \oplus b'$. Однако, из неравенства $t < o(\lambda)$ следует, что $b' \oplus a'$ и $a' \oplus b'$ не могут совпадать, а потому неравенство строгое:

$$b' \oplus a' < a' \oplus b'. \tag{5.7}$$

Рассмотрим случай $a \supset b'$ и $a' \supset b$. Тогда

$$\lambda = b' \oplus a' < a' \oplus b' < b \oplus a \leq a \oplus b < b' \oplus a' = \lambda,$$

где первое и третье неравенства следуют из минимальности $\lambda$ и $\mu$, второе следует из $a \supset b'$, а четвертое — из $a' \supset b$. Получаем противоречие $\lambda < \lambda$.

В дальнейшем для диаграммы $\alpha \in \mathrm{Y}_{p,q}$ под ее высотой подразумевается $h(\alpha) = q$. Мы также используем обозначение $m^p = \underbrace{m \oplus m \oplus \ldots \oplus m}_{p \text{ раз}}$.

*Случай 1:* $b' \subset a$, $a' = b$ и $h(b) \geq h(a)$. Все еще выполняются неравенства

$$\lambda = b' \oplus b < b \oplus b' < b \oplus a = \mu \leq a \oplus b. \tag{5.8}$$

В частности, $b' \oplus b < b \oplus a \leq a \oplus b$, откуда $b = c \oplus a$ и $\lambda = b' \oplus c \oplus a$. Так как $b' \subset a$, получаем $b \oplus b' < b' \oplus c \oplus a = \lambda$, что противоречит неравенству (5.8).

*Случай 2:* $b' \subset a$, $a' = b$ и $h(b) < h(a)$. Как и в первом случае, рассмотрим неравенства

$$b' \oplus b < b \oplus a \leq a \oplus b.$$

Из них следует, что $a = c \oplus b$ и $\mu = b \oplus c \oplus b$. Диаграммы $c \oplus b^2$ и $b^2 \oplus c$ верхнетреугольны и лежат в обрите $\mu$. Но $\mu$ минимальна, откуда $\mu \leq b^2 \oplus c$ и $\mu \leq c \oplus b^2$. Из предыдущих двух неравенств следует, что $c \oplus b = b \oplus c$. Значит, существует диаграмма $m$ с тем же наклоном, что у $b$, такая что $b = m^p$ и $\mu = m^{p+q}$.

Рассмотрим теперь неравенства

$$\lambda = b' \oplus m^p < m^p \oplus b' \leq m^q \oplus m^p = \mu.$$

Так как $h(b') = h(a) > h(b) = h(m^p)$, мы видим, что $b' = d \oplus m^p$. Повторяя данное рассуждение, можно выделять слагаемое, равное $m^p$, пока не останется

$$\lambda = e \oplus m^{sp} \oplus m^p < m^p \oplus e \oplus m^{sp} \leq m^r \oplus m^p \oplus m^{sp} = \mu,$$

где $0 < h(e) = h(m^r) \leq h(m^p)$, а $s$ — положительное целое число. Из последнего неравенства получается $e < m^r$. В то же время, мы знаем, что $r \leq p$, откуда $m^p \oplus m^{sp} \oplus e < e \oplus m^{sp} \oplus m^p = \lambda$, что вновь противоречит минимальности $\lambda$.

Случай $b \subset a'$, $a = b'$ рассматривается аналогично.

Наконец, заметим, что вариант $b = a'$ и $a = b'$ невозможен: мы показали, что

$$\lambda = b' \oplus a' < a' \oplus b' = b \oplus a = \mu.$$

Но в таком случае $\lambda$ и $\mu$ лежат в одной орбите и должны совпадать, так как обе диаграммы — минимальные верхнетреугольные. Доказательство окончено. $\square$

Наконец, закончим доказательство Теоремы 5.3.1. Полуортогональность уже была проверена в Предложении 5.4.1. Чтобы доказать полноту, удобно ввести в рассмотрение еще одно лефшецево разложение.

Рассмотрим подкатегории

$$\mathcal{B}'_i = \left\langle \mathcal{U}^{-\lambda} \mid \lambda \in \mathrm{LY}_{n-k,k},\ i < l(\lambda) \right\rangle.$$

*Пример* 5.4.2. В случае $X = \mathsf{Gr}(3,6)$ имеем

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}'_0 = \mathcal{B}'_1 &= \left\langle \mathcal{O}_X(3),\ \Lambda^2\mathcal{U}^*(2),\ \mathcal{U}^*(2),\ \Sigma^{(3,3,1)}\mathcal{U}^*,\ \Sigma^{(3,2,1)}\mathcal{U}^* \right\rangle \\
\mathcal{B}'_2 = \mathcal{B}'_3 &= \left\langle \mathcal{O}_X(3),\ \Lambda^2\mathcal{U}^*(2),\ \mathcal{U}^*(2) \right\rangle \\
\mathcal{B}'_4 = \mathcal{B}'_5 &= \left\langle \mathcal{O}_X(3),\ \Lambda^2\mathcal{U}^*(2) \right\rangle
\end{aligned}$$

Нам понадобится следующее наблюдение.

**Лемма 5.4.3.** *Имеется лефшецево разложение*

$$\langle \mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1(1), \ldots, \mathcal{B}_{n-1}(n-1) \rangle = \mathcal{D}^b(X),$$

*если и только если имеется левое (двойственное) лефшецево разложение*

$$\langle \mathcal{B}'_{n-1}(1-n), \ldots, \mathcal{B}'_1(-1), \mathcal{B}_0 \rangle = \mathcal{D}^b(X). \tag{5.9}$$

*Доказательство.* Функтор двойственности — анти-автоэквивалентность категорий, а функтор подкрутки на $\mathcal{O}_X(n-k)$ — автоэквивалентность. Композиция этих функторов дает анти-автоэквивалентность, которая сохраняет полноту и обращает соотношения ортогональности. Остается заметить, что по определению $\mathcal{B}'_i = \mathcal{B}^*_i(n-k)$. □

Согласно предыдущей лемме, будет достаточно проверить полноту разложения (5.9), чтобы доказать полноту разложения $\mathcal{B}_\bullet$.

**Предложение 5.4.4.** *Разложение $\mathcal{B}'_\bullet$ — полное. Иными словами,*

$$\langle \mathcal{B}'_{n-1}(1-n), \ldots, \mathcal{B}'_1(-1), \mathcal{B}'_0 \rangle = \mathcal{D}^b(X).$$

*Доказательство.* Напоминаем, что определения $r(\lambda)$, $l(\lambda)$, $d(\lambda)$ и $e(\lambda)$ даны в конце раздела 5.2.

Для диаграммы $\lambda$, такой что $\lambda(t) \in \mathrm{Y}_{n-k,k}$ при некотором $t$, обозначим за $\tilde{\lambda}$ диаграмму $\lambda(-\lambda_1 + n - k)$. Оказывается удобным дуализировать капрановский набор и работать с $\left(\Sigma^\lambda \mathcal{U}^* \mid \lambda \in \mathrm{Y}_{n-k,k}\right)$. Опять же, функтор двойственности является анти-автоэквивалентностью, потому это полный исключительный набор в $\mathcal{D}^b(X)$.

Будет достаточно показать, что всякий объект из $\left(\Sigma^\lambda \mathcal{U}^* \mid \lambda \in \mathrm{Y}_{n-k,k}\right)$ обладает резольвентой, все члены которой являются прямыми суммами векторных расслоений $\Sigma^\mu \mathcal{U}^*(-t)$, где $\mu \in \mathrm{LY}_{n-k,k}$ и $0 \le t < l(\mu)$.

Данное векторное расслоение $\Sigma^\lambda\mathcal{U}^*(-t)$ с $\lambda \in \mathrm{Y}_{n-k,k}$ можно подкрутить на $\mathcal{O}_X(t+n-k-\lambda_1)$ и получить векторное расслоение, удовлетворяющее условиям Предложения 3.2.1. Дуализируя и подкручивая назад длинную точную последовательность (3.6), получаем резольвенту исходного расслоения. Неформально говоря, для данного расслоения $\Sigma^\lambda\mathcal{U}^*$ с $\lambda \in \mathrm{Y}_{n-k,k}$ мы хотели бы взять эту резольвенту, заменить каждый член, который не иммет вид $\Sigma^\mu\mathcal{U}^*(-t)$ при $\mu \in \mathrm{LY}_{n-k,k}$ на его резольвенту и продолжить этот процесс до остановки. Теперь останется свернуть полученный «мультикомплекс» в одну большую резольвенту. Однако требуется доказать, что описанный процесс действительно останавливается, а расслоения $\Sigma^\mu\mathcal{U}^*$ с $\mu \in \mathrm{LY}_{n-k,k}$ появляются с допустимыми подкрутками. Формализуем предыдущее рассуждение.

Для всякого $\lambda \in \mathrm{Y}_{n-k,k}$, такого что $\lambda_1 = n-k$ и $\lambda \notin \mathrm{LY}_{n-k,k}$, рассмотрим множество

$$\mathrm{Exp}(\lambda) = \Big\{(\tilde\mu_1, t_1),\ \ldots,\ (\tilde\mu_{n-k}, t_{n-k}),\ (\tilde\lambda',\ t_{n-k+1})\Big\},$$

где $t_i = (n-k-\mu_{i,1})$ при $1 \le i \le n-k$ и $t_{n-k+1} = (n-k-\lambda'_1)+1$. Положим $\mathrm{Exp}(\lambda) = \{(\lambda, 0)\}$ для $\lambda \in \mathrm{LY}_{n-k,k}$ и обозначим $\mathrm{Exp}^{(1)}(\lambda) = \mathrm{Exp}(\lambda)$. Далее, определим

$$\mathrm{Exp}^{(\mathrm{k}+1)}(\lambda) = \bigcup_{(\mu,t)\in \mathrm{Exp}^{(\mathrm{k})}(\lambda)} \mathrm{Exp}(\mu)[t],$$

где $\{(\mu_i, t_i)\}_{i\in I}[t] = \{(\mu_i, t_i + t)\}_{i\in I}$.

Заметим, что

$$\Sigma^\lambda\mathcal{U}^* \in \langle \Sigma^\mu\mathcal{U}^*(-t)\rangle_{(\mu,t)\in\mathrm{Exp}(\lambda)}$$

по Предложению 3.2.1. По индукции также имеем

$$\Sigma^\lambda\mathcal{U}^* \in \langle \Sigma^\mu\mathcal{U}^*(-t)\rangle_{(\mu,t)\in\mathrm{Exp}^{(\mathrm{k})}(\lambda)}$$

для всех $k \ge 1$.

Утверждается, что

(1) при некотором $k \ge 1$ выполняется $\mathrm{Exp}^{(\mathrm{k})}(\lambda) \subset \mathrm{LY}_{n-k,k} \times \mathbb{Z}$,

(2) если $\mathrm{Exp}^{(\mathrm{k})}(\lambda) \subset \mathrm{LY}_{n-k,k} \times \mathbb{Z}$, то для всякого $(\mu, t) \in \mathrm{Exp}^{(\mathrm{k})}(\lambda)$ имеем $t < l(\mu)$.

Для доказательства (1) заметим, что

$$\max\{d(\mu)\}_{(\mu,t)\in\mathrm{Exp}^{(\mathrm{k})}} \leq \max\{d(\lambda) - 1, 0\}.$$

Отсюда для всех $(\mu, t) \in \mathrm{Exp}^{\mathrm{d}(\lambda)}(\lambda)$ имеем $d(\mu) \leq 0$, а значит, $\mu \in \mathrm{LY}_{n-k,k}$.

Для доказательства (2) заметим, что для всех $(\mu, t) \in \mathrm{Exp}(\lambda)$ выполнено $t \leq e(\mu) - e(\lambda)$. По индукции это также верно для всех $(\mu, t) \in \mathrm{Exp}^{(\mathrm{k})}(\lambda)$. Теперь, если $\mathrm{Exp}^{(\mathrm{k})}(\lambda) \subset \mathrm{LY}_{n-k,k} \times \mathbb{Z}$, то

$$t \leq e(\mu) - e(\lambda) = l(\mu) - e(\lambda) < l(\mu),$$

так как по определению $e(\lambda) > 0$.

Мы показали, что $\mathcal{U}^{-\lambda} \in \langle \mathcal{B}'_{n-1}(1-n), \ldots, \mathcal{B}'_1(-1), \mathcal{B}'_0 \rangle$ при всех $\lambda \in \mathrm{Y}_{n-k,k}$, таких что $\lambda_1 = n - k$. В случае произвольного $\lambda \in \mathrm{Y}_{n-k,k}$ заметим, что

$$\Sigma^\lambda \mathcal{U}^* \in \left\langle \Sigma^\mu \mathcal{U}^*(-t) \mid (\mu, t) \in \mathrm{Exp}^{(\mathrm{k})}(\tilde{\lambda})[n - k - \lambda_1] \right\rangle.$$

Требуется проверить, что для всех $(\mu, t) \in \mathrm{Exp}^{\mathrm{d}(\tilde{\lambda})}(\tilde{\lambda})$ выполнено неравенство $t + (n - k - \lambda_1) < l(\mu)$. Мы уже знаем, что $t \leq l(\mu) - e(\tilde{\lambda})$. Легко видеть, что

$$e(\tilde{\lambda}) = e(\lambda(n - k - \lambda_1)) = e(\lambda) + (n - k - \lambda_1) > (n - k - \lambda_1),$$

так как $e(\lambda) > 0$. Поэтому

$$t \leq l(\mu) - e(\tilde{\lambda}) = l(\mu) - e(\lambda) - (n - k - \lambda_1) < l(\mu) - (n - k - \lambda_1),$$

что завершает доказательство. □

*Доказательство Теоремы 5.3.1.* Полуортогональность была проверена в Предложении 5.4.1. Лемма 5.4.3 всесте с Предложением 5.4.4 дает полноту. □

Наконец, вернемся к нашему основному примеру.

**Предложение 5.4.5.** *Гипотеза 5.3.4 выполняется для* $X = \mathsf{Gr}(3,6)$.

*Доказательство.* Аналогичное приведенному в Предложении 5.4.3 рассуждение показывает, что достаточно проверить, что

$$\mathcal{D}^b(X) = \left\langle \Sigma^\lambda \mathcal{U}^*(-t) \mid \lambda \in \mathrm{mLY}_{n-k,k},\ t < o(\lambda) \right\rangle,$$

где $\mathrm{mLY}_{n-k,k} = \{\lambda \mid \lambda^c \in \mathrm{mUY}_{n-k,k}\}$.

В нашем случае

$$\mathrm{LY}_{3,3} \setminus \mathrm{mLY}_{3,3} = \{(3,3,1)\}.$$

Мы уже знаем из Предложения 5.4.4, что

$$\mathcal{D}^b(X) = \left\langle \Sigma^\lambda \mathcal{U}^*(-t) \mid \lambda \in \mathrm{LY}_{n-k,k},\ t < l(\lambda) \right\rangle.$$

Значит, будет достаточно проверить, что

$$\Sigma^{(3,3,1)}\mathcal{U}^*, \Sigma^{(3,3,1)}\mathcal{U}^*(-1) \in \left\langle \Sigma^\lambda \mathcal{U}^*(-t) \mid \lambda \in \mathrm{mLY}_{n-k,k},\ t < o(\lambda) \right\rangle. \tag{5.10}$$

Как и в доказательстве Предложения 5.4.4 рассмотрим множества $\mathrm{Exp}^{(\mathrm{k})}$, но в этот раз положим $\mathrm{Exp}(\lambda) = \{(\lambda, 0)\}$ только при $\lambda \in \mathrm{mLY}_{n-k,k}$. Легко проверить, что $E = \mathrm{Exp}^{(2)}((3,3,1)) \subset \mathrm{mLY}_{3,3} \times \mathbb{Z}$. Однако множества $E$ и $E(1)$ содержат элементы $((3,2,1),2)$ и $((3,2,1),3)$, для которых $o((3,2,1)) = 2$.

Чтобы показать (5.10), достаточно проверить, что

$$\Sigma^{(3,2,1)}\mathcal{U}^*(-2), \Sigma^{(3,2,1)}\mathcal{U}^*(-3) \in \left\langle \Sigma^\lambda \mathcal{U}^*(-t) \mid \lambda \in \mathrm{mLY}_{n-k,k},\ t < o(\lambda) \right\rangle. \tag{5.11}$$

Рассмотрим дуализированный ступенчатый комплекс для $\Sigma^{(3,2,1)}\mathcal{U}^*$

$$0 \to \Sigma^{(3,2,1)}\mathcal{U}^*(-2) \to \Lambda^5 V^* \otimes \Sigma^{(3,2,2)}\mathcal{U}^*(-2) \to$$
$$\to \Lambda^3 V^* \otimes \Sigma^{(3,3,3)}\mathcal{U}^*(-2) \to V^* \otimes \Sigma^{(3,3,2)}\mathcal{U}^*(-1) \to \Sigma^{(3,2,1)}\mathcal{U}^* \to 0$$

в качестве правой резольвенты для $\Sigma^{(3,2,1)}\mathcal{U}^*(-2)$. Сразу же видно, что (5.11) выполнено. □

*Замечание* 5.4.6. Пусть $S$ — гладкое многообразие, и $\mathcal{V}$ — векторное расслоение на нем. Рассмотрим относительный грассманиан $X = \mathsf{Gr}_S(k, \mathcal{V})$. Естественная проекция $p : X \to S$ является плоским собственным морфизмом, поэтому по общей теореме Самохина [30, Теорема 3.1] получаем два лефшецевых разложения в производной категории $D^b(X)$ относительно $\mathcal{O}_{X/S}(1)$. В частности, имеется полуортогональное разложение

$$D^b(X) = \langle \mathcal{B}_{S,0}, \mathcal{B}_{S,1}(1), \ldots, \mathcal{B}_{S,n-1}(n-1) \rangle \,,$$

причем подкатегория $\mathcal{B}_{S,i}$ порождена объектами вида

$$\mathcal{B}_{S,i} = \left\langle \mathcal{U}^{-\lambda} \otimes p^* F \mid F \in D^b(S),\ \lambda \in \mathrm{UY}_{n-k,k},\ i < r(\lambda) \right\rangle ,$$

где $\mathcal{U}$ — относительно тавтологическое подрасслоение $\mathcal{U} \subset p^*\mathcal{V}$ ранга $k$. Относительная версия разложения $\mathcal{A}_\bullet$ строится аналогично.

# Литература

1. Бейлинсон А. А. Когерентные пучки на $P^n$ и проблемы линейной алгебры // Функц. анализ и его прил. 1978. Т. 12. С. 68–69.

2. Бондал А. И., Капранов М. М. Представимые функторы, функторы Серра и перестройки // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 53. С. 519–541.

3. Елагин А. Полуортогональные разложения для производных категорий эквивариантных когерентных пучков // Изв. РАН. Сер. матем. 2009. Т. 73. С. 893–920.

4. Капранов М. М. О производной категории когерентных пучков на многообразиях Грассмана // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48. С. 192–202.

5. Кузнецов А. Г. Исключительный набор векторных расслоений на трехмерных многообразиях Фано $V_{22}$ // Вестн. МГУ. Сер. I. Матем., мех. 1996. Т. 51. С. 41–44.

6. Орлов Д. О. Исключительный набор векторных расслоений на многообразии $V_5$ // Вестн. МГУ. Сер. I. Матем., мех. 1991. Т. 46. С. 69–71.

7. Орлов Д. О. Проективные расслоения, моноидальные преобразования и производные категории когерентных пучков // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1992. Т. 56. С. 852–862.

8. Самохин А. В. Производная категория когерентных пучков на $LG_3^{\mathbf{C}}$ // УМН. 2001. Т. 56. С. 177–178.

9. Фонарёв А. В. Минимальные лефшецевы разложения производных категорий грассманианов // Изв. РАН. Сер. матем. 2013. Т. 77. С. 1044–1065.

10. Фонарёв А. В. Исключительные векторные расслоения на грассманианах // УМН. 2014. Т. 69. С. 189–190.

11. Akin K., Buchsbaum D., Weyman J. Schur functors and Schur complexes // Anv. in Math. 1982. Vol. 44. P. 207—-278.

12. Bondal A., Orlov D. Reconstruction of a variety from the derived category and groups of autoequivalences // Compositio Math. 2001. Vol. 125. P. 327—-344.

13. Bondal A., Orlov D. // Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002). Beijing: Higher Ed. Press, 2002. P. 47–56.

14. Cowen M. Automorphisms of Grassmannians // Proc. Amer. Math. Soc. 1989. Vol. 106. P. 99–106.

15. Demazure M. A very simple proof of Bott's theorem // Invent. Math. 1976. Vol. 33. P. 271–272.

16. Fulton W. Young Tableaux, with Applications to Representation Theory and Geometry. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. ISBN: 0521567246.

17. Gorchinskiy S., Orlov D. Geometric phantom categories // Publications Mathématiques de l'IHÉS. 2013. Vol. 117. P. 329–349.

18. Helices and Vector Bundles // Ed. by A. N. Rudakov. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge: Cambridge University Press, 1990. ISBN: 0521388112.

19. Kashiwara M., Shapira P. Sheaves on manifolds. Berlin: Springer-Verlag, 1990. ISBN: 3540518614.

20. Kawamata Y. Derived categories of toric varieties // Michigan Math. J. 2006. Vol. 54. P. 517–535.

21. Kontsevich M. Homological algebra of mirror symmetry. URL: `http://arxiv.org/pdf/alg-geom/9411018v1.pdf` (дата обращения: 01.09.2014).

22. Kuznetsov A. Homological projective duality // Publications Mathématiques de l'IHÉS. 2007. Vol. 105. P. 157–220.

23. Kuznetsov A. Exceptional collections for Grassmannians of isotropic lines // Proc. Lond. Math. Soc. 2008. Vol. 97. P. 155–182.

24. Kuznetsov A. Lefschetz decompositions and categorical resolutions of singularities // Selecta Mathematica. 2008. Vol. 13. P. 661–696.

25. Kuznetsov A., Polishchuk A. Exceptional collections on isotropic Grassmannians // to appear in JEMS.

26. Manivel L. On the derived category of the Cayley plane // J. Algebra. 2011. Vol. 330. P. 177–187.

27. Orlov D. Remarks on generators and dimensions of triangulated categories // Mosc. Math. J. 2009. Vol. 9. P. 143–149.

28. Ottaviani G. Rational homogeneous varieties. URL: `http://web.math.unifi.it/users/ottavian/rathomo/rathomo.pdf` (дата обращения: 01.09.2014).

29. Polishchuk A., Samokhin A. Full exceptional collections on the Lagrangian Grassmannians $LG(4,8)$ and $LG(5,10)$ // J. Geom. Phys. 2011. Vol. 61. P. 1996–2014.

30. Samokhin A. Some remarks on the derived categories of coherent sheaves on homogeneous spaces // J. Lond. Math. Soc. (2). 2007. Vol. 76. P. 122–134.

31. Verdier J.-L. Des catégories dérivées des catégories abéliennes // Astérisque. 1997. Vol. 239. P. 1–253.

32. Weyman J. Cohomology of Vector Bundles and Syzygies. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. ISBN: 0521621976.