Математический институт им. В. А. Стеклова
———————————————————
Российская Академия Наук

На правах рукописи
УДК 514.76+517.9

Пенской Алексей Викторович

Геометрия и топология спектральных задач

Специальность:
01.01.04 – геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук

Москва – 2013

Работа выполнена на кафедре высшей геометрии и топологии Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

Научный консультант:
доктор физико-математических наук,
профессор Александр Петрович Веселов.

Официальные оппоненты:
Адлер Всеволод Эдуардович — доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник ФГБУН Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН
Надирашвили Николай Семенович – доктор физико-математических наук, directeur de recherche de 1ere classe (DR1) Centre national de la recherche scientifique (CNRS), Франция
Попов Дмитрий Александрович — доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник отдела математических методов в биологии Научно-исследовательского института физико-химической биологии им. А. Н. Белозерского МГУ им. М. В. Ломоносова

Ведущая организация:
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук

Защита диссертации состоится 27 декабря 2013 г. в 14 часов на заседании диссертационного совета Д 002.022.03 при Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук по адресу: 119991, Москва, ГСП, ул. Губкина, дом 8 (9 этаж).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

Автореферат разослан «___» ________ 2013 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 002.022.03 при МИАН
доктор физико-математических наук,
профессор Н. П. Долбилин

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Спектральная задача

$$L\psi = \lambda\psi, \tag{1}$$

связывающая оператор L, его собственные числа λ и собственные векторы (или функции) ψ, естественным образом возникает в самых разнообразных задачах современной математики. Геометрии и топологии нескольких актуальных типов спектральных задач, связанных с дифференциальными уравнениями, и посвящена данная работа.

Первой из рассматриваемых задач является задача об изучении на поверхностях метрик, экстремальных для собственных значений оператора Лапласа-Бельтрами Δ. В данной задаче рассматриваются зависящие от метрики g собственные числа $\lambda_i(g)$ в спектральной задаче (1) для оператора $L = \Delta$ и изучаются метрики, экстремальные для функционала $g \mapsto \lambda_i(g)$. Данная задача восходит к основополагающим работам Херша и Яу семидесятых-восьмидесятых годов прошлого века и является обобщением на случай римановой геометрии задачи о геометрической оптимизации собственных чисел в задаче Дирихле для областей в евклидовых пространствах, впервые изучавшейся еще Рэлеем. Данная задача находится на стыке дифференциальной геометрии, геометрического анализа и дифференциальных уравнений и является крайне трудной. Тем не менее, в последнее десятилетие в работах Илиаса, Надирашвили, Полтеровича, Эль Суфи, Якобсона и других произошел значительный прогресс в решении данной задачи. Особенно важным для исследований автора явились базирующиеся на более ранних идеях Надирашвили результаты Эль Суфи и Илиаса о связи экстремальных метрик с минимальными погружениями в сферы. Приведенные в диссертации результаты автора развивают теорию экстремальных метрик на поверхностях и предлагают метод нахождения экстремальных метрик на торах и бутылках Клейна.

Изложим теперь первую задачу более подробно. Рассмотрим спектральную задачу (1), в которой оператор L — это оператор Лапласа-Бельтрами Δ на компактной поверхности M без края с римановой метрикой g. Тогда спектр оператора Лапласа-Бельтрами дискретен

$$0 = \lambda_0(M,g) < \lambda_1(M,g) \leqslant \lambda_2(M,g) \leqslant \ldots,$$

и собственные числа λ_i зависят от выбора метрики g. Таким образом, зафиксировав гладкую структуру на M, можно рассматривать собственные числа оператора Лапласа-Бельтрами как функционалы на пространстве римановых метрик на M. Тогда возникает естественная мысль изучить для фиксированной гладкой структуры на M супремум функционала $\lambda_i(M,g)$ на пространстве всех (гладких) римановых метрик g на M. Эта задача тривиальна, так как спектр оператора Лапласа-Бельтрами Δ обладает свойством масштабирования $\lambda_i(M,tg)=\frac{1}{t}\lambda_i(M,g)$ при $t>0$. Поэтому вместо $\lambda_i(M,g)$ лучше рассматривать функционалы

$$\Lambda_i(M,g)=\lambda_i(M,g)\,\mathrm{Area}(M,g),$$

где $\mathrm{Area}(M,g)$ обозначает площадь, которые инвариантны при преобразованиях $g\mapsto tg$.

Оказывается, что вопрос о нахождении супремума $\sup\Lambda_i(M,g)$ функционала $\Lambda_i(M,g)$ на пространстве всех римановых метрик g на фиксированной поверхности M является очень трудным, и к настоящему времени получено сравнительно мало результатов.

Благодаря работам Янга и Яу[1] и Кореваара[2] известно, что для поверхностей для любого индекса i величина $\sup\Lambda_i(M,g)$ конечна. Заметим, что, как доказали Кольбуа и Додзюк[3], для многообразий размерности больше 2 это неверно.

Будем называть метрику максимальной, если на ней достигается супремум функционала $\Lambda_i(g)$, и экстремальной, если при аналитических вариациях произведение производных по параметру справа и слева неположительно. Такое определение экстремальной метрики принадлежит Надирашвили[4] и Эль Суфи и Илиасу[5,6], и мотивировано тем, что функционал $\Lambda_i(M,g)$ непрерывно зависит от метрики g, но не является дифференцируемым, в то же время для аналитических деформаций g_t правая и левая производные функционала $\Lambda_i(M,g_t)$ по отношению к t существуют, см. ра-

[1] Yang P. C., Yau S.-T., *Eigenvalues of the laplacian of compact Riemann surfaces and minimal submanifolds*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. v. 7 (1980), №1, p. 55–63.

[2] Korevaar N., *Upper bounds for eigenvalues of conformal metrics*, J. Differential Geom., v. 37 (1993), №1, p. 73–93.

[3] Colbois B., Dodziuk J., *Riemannian metrics with large* λ_1, Proc. Amer. Math. Soc., v. 122 (1994), №3, p. 905—906.

[4] Nadirashvili N., *Berger's isometric problem and minimal immersions of surfaces*, Geom. Funct. Anal., v. 6 (1996), №5, p. 877—897.

[5] El Soufi A., Ilias S., *Riemannian manifolds admitting isometric immersions by their first eigenfunctions.* Pacific J. Math., v. 195 (2000), №1, p. 91—99.

[6] El Soufi A., Ilias S., *Laplacian eigenvalues functionals and metric deformations on compact manifolds*, J. Geom. Phys., v. 58 (2008), №1, p. 89-104.

боты Берже[7], Бандо и Уракавы[8], Эль Суфи и Илиаса[9].

Как показывает опыт, естественные экстремальные задачи, возникающие в дифференциальной геометрии, являются трудными и часто приводят к содержательным и трудным задачам дифференциальных уравнений. Несмотря на то, что изучением максимальных и экстремальных метрик занимались такие математики, как Яу, Надирашвили и другие, известных результатов весьма мало. Максимальные метрики известны лишь для поверхностей рода 0 и 1, про экстремальные метрики также известно крайне мало.

Если быть точным, то про максимальные метрики в настоящее время известны следующие результаты:

- максимальной метрикой для $\Lambda_1(\mathbb{S}^2, g)$ является стандартная метрика на сфере (Херш[10]),
- максимальной метрикой для $\Lambda_1(\mathbb{RP}^2, g)$ является стандартная метрика на проективной плоскости (Ли и Яу[11]),
- максимальной метрикой для $\Lambda_1(\mathbb{T}^2, g)$ является метрика на равностороннем торе (Надирашвили[12]),
- максимальной метрикой для первого собственного числа $\Lambda_1(\mathbb{KL}, g)$ на бутылке Клейна является метрика на биполярной поверхности Лоусона $\tilde{\tau}_{3,1}$ (Эль Суфи, Джакомини и Жазар[13]).
- Надирашвили доказал[14], что
$$\sup \Lambda_2(\mathbb{S}^2, g) = 16\pi,$$
и это значение достигается как предел значений $\Lambda_2(\mathbb{S}^2, g)$ на последовательности гладких метрик, сходящейся к сингулярной метрике,

[7] Berger M., *Sur les premières valeurs propres des variétés Riemanniennes*, Compositio Math. v. 26 (1973), p. 129—149.

[8] Bando S., Urakawa H., *Generic properties of the eigenvalue of Laplacian for compact Riemannian manifolds*, Tôhoku Math. J., v. 35 (1983), №2, p. 155–172.

[9] El Soufi A., Ilias S., *Laplacian eigenvalues functionals and metric deformations on compact manifolds*, J. Geom. Phys., v. 58 (2008), №1, p. 89-104.

[10] Hersch J., *Quatre propriétés isopérimétriques de membranes sphériques homogènes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér A-B, v. 270 (1970), p. A1645—A1648.

[11] Li P., Yau S.-T., *A new conformal invariant and its applications to the Willmore conjecture and the first eigenvalue of compact surfaces*, Invent. Math. v. 69 (1982), №2, p. 269—291.

[12] Nadirashvili N., *Berger's isometric problem and minimal immersions of surfaces*, Geom. Funct. Anal., v. 6 (1996), №5, p. 877—897.

[13] El Soufi A., Giacomini H., Jazar M., *A unique extremal metric for the least eigenvalue of the Laplacian on the Klein bottle*, Duke Math. J., v. 135 (2006), №1, p. 181—202.

[14] Nadirashvili N., *Isoperimetric inequality for the second eigenvalue of a sphere*, J. Differential Geom., v. 61 (2002), №2, p. 335—340.

получающейся на объединении двух сфер равного радиуса со стандартной метрикой, касающихся друг друга в одной точке.

К моменту, когда автор начал исследование экстремальных метрик, были известны следующие экстремальные метрики:

- единственной экстремальной метрикой для $\Lambda_1(\mathbb{T}^2, g)$, отличной от уже упомянутой выше максимальной метрики на равностороннем торе, является метрика на клиффордовом торе (Эль Суфи и Илиас[15]),
- описаны функционалы $\Lambda_i(M, g)$, для которых экстремальными являются метрики на биполярных поверхностях Лоусона $\tilde{\tau}_{m,k} \looparrowright \mathbb{S}^4$ (Ляпунант[16]).

Дальнейшее развитие в данной области основано на теореме Эль Суфи и Илиаса[17], связывающей экстремальные метрики с минимальными погружениями в сферы и с подсчитывающей собственные числа функцией Вейля

$$N(\lambda) = \#\{\lambda_i | \lambda_i < \lambda\}.$$

Данная теорема явилась отправной точкой для исследования автором экстремальных метрик в работах [4, 5], в которых развивается теория экстремальных метрик на компактных поверхностях и предлагается практический метод нахождения примеров экстремальных метрик на торах и бутылках Клейна, проиллюстрированный на примере тау-поверхностей Лоусона в работе [4] и на примере торов Оцуки в работе [5]. Данный метод основан на теореме Эль Суфи-Илиаса, разделении переменных, теореме Штурма об осцилляции решений периодической задачи Штурма-Лиувилля и анализе собственных чисел возникающей вспомогательной периодической задачи Штурма-Лиувилля. Например, в случае тау-поверхностей Лоусона ключевыми элементами этого анализа оказываются теория уравнения Ламе и теория уравнения Магнуса-Уинклера-Айнса.

Согласно теореме Эль Суфи-Илиаса, экстремальные метрики являются метриками на поверхностях, минимальных в сферах, что вызывает естественный интерес к минимальным торам в сферах. Хотя задача описания минимальных торов в сферах решена методами конечнозонного интегрирования, даваемые таким методом ответы весьма неявные, и не могут быть

[15] El Soufi A., Ilias S., *Riemannian manifolds admitting isometric immersions by their first eigenfunctions.* Pacific J. Math., v. 195 (2000), №1, p. 91—99.

[16] Lapointe H., *Spectral properties of bipolar minimal surfaces in* $\mathbb{S}^4$, Differential Geom. Appl., v. 26 (2008), №1, p. 9—22.

[17] El Soufi A., Ilias S., *Laplacian eigenvalues functionals and metric deformations on compact manifolds*, J. Geom. Phys., v. 58 (2008), №1, p. 89-104.

использованы для наших нужд, по крайней мере, в настоящее время. Поэтому автором не только изучаются экстремальные спектральные свойства тау-поверхностей Лоусона (которые описываются явными уравнениями) и торов Оцуки (которые описываются неявной конструкцией Сяна-Лоусона), но и предлагается новый метод расширения семейств минимальных торов в сферах. В качестве примера двухпараметрическое семейство тау-поверхностей Лоусона расширяется до трехпараметрического семейства $T_{a,b,c}$ минимальных поверхностей в сферах, являющихся в зависимости от четности a, b и c торами или бутылками Клейна. Затем мы изучаем экстремальные спектральные свойства нового семейста $T_{a,b,c}$.

Заметим, что метрики на построенных автором поверхностях $T_{a,b,c}$ включают обе метрики, экстремальные для первого собственного числа на торе, то есть метрику на клиффордовом торе $\tau_{1,1} \cong T_{1,1,\sqrt{2}}$, метрику на равностороннем торе $M_{1,1} \cong T_{1,1,2}$, а также метрику на бутылке Клейна $\tilde{\tau}_{3,1} \cong T_{1,0,2}$, максимальную для первого собственного числа на бутылке Клейна. Таким образом, семейство $T_{a,b,c}$ включает в себя все поверхности, несущие экстремальные метрики для первого собственного числа на торе и бутылке Клейна и является в этом смысле универсальным.

Заметим также, что семейство $T_{a,b,c}$ включает в себя не только двухпараметрическое семейство тау-поверхностей Лоусона $\tau_{m,k} \cong T_{m,k,\sqrt{m^2+k^2}}$, но и еще одно интересное двухпараметрическое семейство торов $M_{m,k} \cong T_{m,k,m+k}$ минимальных в сферах. Семейство $M_{m,k}$ было впервые описано в конформных координатах Джойсом[18] и Хаскинсом[19], но в параметризации как у $T_{m,k,m+k}$ это семейство впервые появилось у Миронова[20]. Детальное исследование семейства $M_{m,k}$, в том числе и экстремальных спектральных свойств, может быть найдено в работе Карпухина[21]. В работах Миронова это семейство возникло при конструировании гамильтоново-минимальных и минимальных лагранжевых подмногообразий в $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{CP}^n$ с помощью метода, основанного на пересечении вещественных квадрик специального вида[22].

Если до работ автора единственными известными примерами экстремальных метрик, кроме максимальных, были клиффордов тор и биполяр-

[18]Joyce D., *Special Lagrangian m-folds in $\mathbb{C}^m$ with symmetries*, Duke Math. J., v. 115 2002), p. 1-51.

[19]Haskins M., *Special Lagrangian cones*, American J. of Math., v. 126 (2004), №4, p. 845–871.

[20]Mironov A. E., *Finite-gap minimal Lagrangian surfaces in* $\mathbb{CP}^2$, OCAMI Studies Series, v. 3 (2010), p. 185–196.

[21]Karpukhin M. A., *Spectral properties of a family of minimal tori of revolution in five-dimensional sphere*, submitted to Canadian Math. Bull. Preprint `arXiv:1301.2483`.

[22]Миронов А. Е., *О новых примерах гамильтоново-минимальных и минимальных лагранжевых подмногообразий в* $\mathbb{C}^n$ *и* $\mathbb{CP}^n$, Матем. Сб., т. 195 (2004), №1, с. 89–102.

ные поверхности Лоусона, то применение предлагаемого метода позволило изучить значительное количество новых экстремальных метрик, так как после работ автора [4, 5] данный метод был упрощен и успешно применен в новых случаях учеником автора Карпухиным[23,24] для биполярных торов Оцуки и описанного выше двухпараметрического семейства торов $M_{m,k}$ минимальных в $\mathbb{S}^5$. Карпухин также доказал[25], что все полученные экстремальные метрики за исключением двух не являются максимальными.

Второй из рассматриваемых задач является задача о топологии подмногообразий уровня интегралов интегрируемых систем. В диссертации излагаются результаты автора из работ [2, 8, 9], посвященных изучению топологии изоспектрального многообразия якобиевых матриц с нулевой диагональю, являющегося многообразием уровня интегралов для системы Вольтерра

$$\frac{du_n}{dt} = u_n(u_{n+1} - u_{n-1}) \tag{2}$$

с нулевыми граничными условиями $u_0 = u_{N+1} = 0$. Отметим, что мы не предполагаем положительность внедиагональных элементов в определении якобиевых матриц.

Интерес к данной задаче был обусловлен тем, что распространено мнение, что раз теорема Лиувилля-Арнольда говорит, что компактные многообразия уровня интегралов интегрируемых по Лиувиллю систем являются торами, то никакой интересной топологии у таких многообразий быть не может. Но на самом деле в содержательных задачах часто скобки Пуассона вырождены или гамильтониан сингулярен на некотором подмножестве, а в дополнении к этому подмножеству многообразия уровня интегралов не являются компактными. В результатае эти дополнения являются цилиндрами, которые глобально склеиваются в многообразия весьма нетривиальной топологии.

Впервые это было замечено, по-видимому, Томеи[26], который изучал нетривиальную топологию изоспектрального многообразия якобиевых матриц, являющегося подмногообразием уровня интегралов конечной непериодической цепочки Тоды. Томеи удалось описать топологию с помощью

[23] Karpukhin M. A., *Spectral properties of bipolar surfaces to Otsuki tori*, to appear in J. Spectral Theory. Preprint `arXiv:1205.6316`.

[24] Karpukhin M. A., *Spectral properties of a family of minimal tori of revolution in five-dimensional sphere*, submitted to Canadian Math. Bull. Preprint `arXiv:1301.2483`.

[25] Карпухин М. А., *Немаксимальность экстремальных метрик на торе и бутылке Клейна*, подано в Матем. Сб. Preprint `arxiv:1210.8122`.

[26] Tomei C., *The topology of isospectral manifolds of tridiagonal matrices*, Duke Math. J., v. 51 (1984), №4, p. 981–996.

пермутаэдров и найти эйлерову характеристику. Его исследования были продолжены Фридом[27], который нашел гомологии изоспектрального многообразия якобиевых матриц. Отметим также недавнюю замечательную работу Гайфуллина[28], нашедшего применение этого многообразия в классической проблеме Стинрода о реализации циклов.

В случае системы Вольтерра (2) известно, что она эквивалентна уравнению Лакса $\dot{L} = [L, A]$ с оператором L вида

$$L = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & 0 & c_2 & & \vdots \\ 0 & c_2 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & c_N \\ 0 & \dots & \dots & c_N & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $c_i = \sqrt{u_i}$. Поэтому нам удобно сделать замену $u_i = c_i^2$ и работать с уравнением

$$\dot{c}_i = \frac{1}{2} c_i (c_{i+1}^2 - c_{i-1}^2), \quad c_0 = c_k = 0,$$

не накладывая никаких условий на знак c_i. В результате возникает спектральная задача (1) для оператора L вида (3), а интегралы системы Вольтерра — это собственные числа оператора L. Таким образом, фазовое пространство системы Вольтерра естественным образом отождествляется с пространством якобиевых матриц с нулевой диагональю, то есть матрицами вида (3), а многообразия уровня интегралов системы Вольтерра — это изоспектральные многообразия якобиевых матриц с нулевой диагональю, то есть многообразия якобиевых матриц с нулевой диагональю с некоторым фиксированным спектром. Отметим, что мы не предполагаем положительность внедиагональных элементов в определении якобиевых матриц.

Для исследования топологии этого изоспектрального многообразия необходимы результаты работы автора [2], в которой доказывается, что система Вольтерра с нулевыми граничными условиями является градиентным потоком для некоторой простой функции и некоторой естественной метрики.

Интерес к градиентным интерпретациям восходит к работе Мозера[29], в которой предложена неявная градиентная интерпретация конечной непе-

[27] Fried D., *The cohomology of an isospectral flow*, Proc. Amer. Math. Soc., v. 98 (1986), № 2, p. 363–368.

[28] Гайфуллин А. А., *Многообразие изоспектральных симметрических трехдиагональных матриц и реализация циклов асферичными многообразиями*, Тр. МИАН, т. 263 (2008), с. 44–63.

[29] Moser J., *Finitely many mass points on the line under the influence of an exponential potential — an integrable system*, Lecture Notes in Phys., v. 38 (1975), p. 467–497.

риодической цепочки Тоды. Двадцать лет спустя Блох, Брокетт и Рэтью[30] предложили отличное от мозеровского градиентное описание конечной непериодической цепочки Тоды.

Предлагаемое автором представление системы Вольтерра в градиентном виде основано на модифицированной идее двойного скобочного представления, предложенной в упомянутой выше работе Блоха, Брокетта и Рэтью. Отметим, что, так же как и в случае цепочки Тоды, получающаяся градиентная интерпретация не является единственно возможной: известный изоморфизм между этими двумя задачами (см., например, результаты Верещагина[31]) и результаты из упомянутой выше работы Блоха, Брокетта и Рэтью позволяют дать еще одно градиентное представление для системы Вольтерра с нулевыми граничными условиями. Предлагаемая автором интерпретация представляется более естественной, так как и функция, и метрика имеют относительно простую форму.

Заметим, что этот результат на первый взгляд также кажется противоречащим теореме Лиувилля-Арнольда, которая утверждает, что динамика на компактных подмногообразиях уровня интегралов является периодической или квазипериодической, что несовместимо с градиентностью потока. Объяснение этого мнимого противоречия, как и раньше, оказывается в вырождении скобок Пуассона или сингулярностях гамильтониана в некоторых точках.

Далее, в работах автора [8, 9], в частности, доказывается, что производящая функция эйлеровых характеристик изоспектральных многообразий якобиевых матриц с нулевой диагональю выражается явно через гиперболический тангенс, поэтому сами эйлеровы характеристики явно выражаются через числа Бернулли. В результате с ростом размера матрицы эти эйлеровы характеристики стремительно растут, что говорит о большой топологической сложности. Эйлерова характеристика M_k вычисляется, используя градиентность поток Вольтерра. Подход близок к подходу Томеи[32], но комбинаторика точек равновесия потока Вольтерра и их индексов гораздо сложнее.

В настоящее время не ясно, как вычислять группы гомологий. Стабильная и нестабильная стратификации не являются клеточными комплексами

[30] Bloch A. M., Brockett R. W., Ratiu T. S., *Completely Integrable Gradient Flows*, Comm. Math. Phys., v. 147 (1992), № 1, p. 57–74.

[31] Верещагин В. Л., *Спектральная теория однофазных решений цепочки Вольтерра*, Мат. Заметки, т. 48 (1990), № 2, с. 145–148.

[32] Tomei C., *The topology of isospectral manifolds of tridiagonal matrices*, Duke Math. J., v. 51 (1984), № 4, p. 981–996.

в этом случае, а потому невозможно применить прямой подход, подобный подходу Фрида[33]. Как уже было сказано выше, поток Вольтерра является градиентным потоком, что приводит нас к естественной идее найти группы гомологий, используя комплекс Морса. К сожалению, мы не можем использовать комплекс Морса для нахождения групп гомологий, так как стабильная и нестабильная стратификации не трансверсальны друг другу. Вопрос вычисления групп гомологий остается открытым, насколько это известно автору.

Третья задача заключается в построении алгебро-геометрической спектральной теории для двумерного гиперболического полудискретного оператора Шредингера и ее применении к геометрическому описанию преобразований Лапласа таких операторов и их связи с двумерной цепочкой Тоды. Таким образом, в этот раз спектральная задача (1) рассматривается для полудискретного гиперболического двумерного оператора Шредингера

$$(L\psi)_n = a_n(y)\psi_n(y) + b_n(y)\psi'_n(y) + c_n(y)\psi_{n+1}(y) + d_n(y)\psi'_{n+1}(y), \quad (4)$$

рассматриваемого на пространстве функций ψ, являющимися функциями Флоке по обеим переменным — и по непрерывной переменной y, и по дискретной переменной n.

Интерес к преобразованиям

$$L = \frac{1}{2}(\partial_x + A)(\partial_y + B) + W \mapsto \tilde{L} = \frac{1}{2}W(\partial_y + B)W^{-1}(\partial_x + A) + W,$$
$$L = \frac{1}{2}(\partial_y + B)(\partial_x + A) + V \mapsto \hat{L} = \frac{1}{2}V(\partial_x + A)V^{-1}(\partial_y + B) + V$$

двумерного гиперболического оператора Шредингера

$$L = \frac{1}{2}\partial_x\partial_y + F\partial_x + G\partial_y + H$$

восходит к Лапласу.

Преобразования Лапласа полезны в теории конгруэнций поверхностей в $\mathbb{R}^3$ и изучались в работах Дарбу, Цицейки и других, ссылки и развернутое изложение данного вопроса могут быть найдены в работе Новикова и Дынникова[34]. Уже тогда было замечено, что цепочка преобразований Лапласа $\ldots, L_{-1}, L_0, L_1, \ldots$ где $L_{i+1} = \tilde{L}_i$, эквивалетна нелинейному уравнению

$$\frac{1}{2}\partial_x\partial_y g_n = e^{g_{n+1}-g_n} - e^{g_n - g_{n-1}},$$

[33] Fried D., *The cohomology of an isospectral flow*, Proc. Amer. Math. Soc., v. 98 (1986), № 2, p. 363–368.

[34] Новиков С. П., Дынников И. А., *Дискретные спектральные симметрии маломерных дифференциальных операторов и разностных операторов на правильных решетках и двумерных многообразиях*, УМН, т. 52 (1997), № 5, с. 175—234.

называемого теперь двумерной цепочкой Тоды. Ее интегрируемость с разных точек зрения была исследована Михайловым[35], Форди и Гиббонсом[36], Лезновым и Савельевым[37], Булгадаевым[38].

Также изучались и различные обобщения преобразований Лапласа, детальный обзор может быть найден в упомянутой выше работе Новикова и Дынникова. Среди этих обобщений были преобразования Лапласа для двумерного эллиптического оператора Шредингера,

$$L = \frac{1}{2}(\bar{\partial} + B)(\partial + A) + V, \quad \partial = \partial_x - i\partial_y,$$

и преобразования Лапласа дискретного двумерного гиперболического оператора Шредингера,

$$(L\psi)_{n,m} = a_{n,m}\psi_{n,m} + b_{n,m}\psi_{n+1,m} + c_{n,m}\psi_{n,m+1} + d_{n,m}\psi_{n+1,m+1}. \qquad (5)$$

В обоих случаях цепочки преобразований Лапласа связаны с соответствующими версиями двумерной цепочки Тоды. В случае эллиптического оператора Шредингера один из главных результатов касается описания циклической цепочки преобразований Лапласа, то есть такой, что $L_N = L_0$ для некоторого N. Как было доказано Новиковым и Веселовым[39,40], если рассматривать циклические цепочки преобразований Лапласа *периодических* эллиптических операторов Шредингера, то тогда операторы в таких цепочках являются топологически тривиальными алгебро-геометрическими операторами.

Эти результаты были мотивацией для исследований автором преобразований Лапласа двумерных полудискретных гиперболических операторов Шредингера (4). В диссертации приводятся результаты автора, касающиеся полудискретного гиперболического двумерного оператора Шредингера, из совместной работы с Обломковым [1]. Результаты Обломкова из данной работы, касающиеся полностью дискретного оператора, опущены.

---

[35] Михайлов А. В., *Об интегрируемости двумерного обобщения цепочки Тода*, Письма в ЖЭТФ, т. 30 (1979), № 7, с. 443–448.

[36] Fordy A. P., Gibbons J., *Integrable nonlinear Klein-Gordon equations and Toda lattice*, Comm. Math. Phys., v. 77 (1980), № 1, p. 21–30.

[37] Лезнов А. Н., Савельев М. В., *Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем,* М.: Наука, 1985.

[38] Bulgadaev S. A., *Two-dimensional integrable field theories connected with simple Lie algebras*, Phys. Lett. B, v. 96 (1980), № 1-2, p. 151–153.

[39] Novikov S. P., Veselov A. P., *Exactly solvable two-dimensional Schrödinger operators and Laplace transformations*, in "Solitons, geometry, and topology: on the crossroad", Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 179, Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1997, p. 109–132.

[40] Веселов А. П., Новиков С. П., *Точно решаемые периодические двумерные операторы Шредингера*, УМН, т. 50 (1995), № 6, с. 171–172.

Напомним, что алгебро-геометрическая спектральная теория двумерных операторов Шредингера была впервые описана в 1976 году Дубровиным, Кричевером и Новиковым[41]. В этой теории рассматривались периодические двумерные операторы Шредингера. Оказалось, что решения Флоке уравнения $L\psi = 0$ являются функциями Бейкера-Ахиезера на спектральной кривой в пространстве множителей Флоке, и что возможно восстановить исходный оператор по его геометрическим спектральным данным, включающим спектральную кривую, дивизор полюсов функции ψ и т.д. Позднее Новиков и Веселов в упомянутой выше работе изучали случай потенциальных операторов. Обратная спектральная задача для дискретного оператора (5) изучалась Кричевером[42].

Насколько известно автору, алгебро-геометрическая спектральная теория полудискретных операторов (4) до работы [1] не изучалась. В диссертации развивается алгебро-геометрическая спектральная теория двумерных полудискретных гиперболических операторов Шредингера. Прямая спектральная задача решается с использованием теории Флоке для периодических линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Оказывается, что алгебро-геометрическими спектральными данными являются компоненты набора $(\Gamma, P_i^{\pm}, Q, [\lambda]_1, \mathcal{D} = R_1 + \cdots + R_g)$, состоящего из кривой Γ рода g, набора из $2N$ точек $P_i^{\pm}$ и дополнительной точки Q вместе с 1-струей $[\lambda]_1$ локальной координаты λ в точке Q, а также дивизор общего положения $\mathcal{D} = R_1 + \cdots + R_g$. Обратная спектральная задача также решена.

Используя построенную алгебро-геометрическю спектральную теорию, мы изучаем спектральные свойства преобразований Лапласа полудискретных операторов Шредингера (4). Преобразования Лапласа описаны как сдвиги на якобиане спектральной кривой, так как оказывается, что преобразование Лапласа действует на спектральных данных следующим образом: Γ, P_i^+, Q, and $[\lambda]_1$ остаются неизменными, а точки P_i^- и дивизор $\mathcal{D}$ изменяются по правилу

$$\tilde{\mathcal{D}} = \mathcal{D} + P_1^- - Q, \quad \tilde{P}_i^- = P_{i+1}^-.$$

Это делает возможным находить решения соответствующей полудискретной двумерной цепочки Тоды в терминах тета-функций. Напомним, что решения обычной гиперболической двумерной цепочки Тоды в терминах

[41] Дубровин Б. А., Кричевер И. М., Новиков С. П., *Уравнение Шредингера в периодическом поле и римановы поверхности*, ДАН СССР, т. 229 (1976),№1, с. 15–18.

[42] Кричевер И. М., *Двумерные периодические разностные операторы и алгебраическая геометрия*, ДАН СССР, т. 285 (1985), №1, с. 31–36.

тета-функций были найдены Кричевером[43].

Четвертой рассматриваемой задачей является не теряющая своей актуальности задача об изучении связи геометрии скобок Пуассона и алгеброгеометрических спектральных данных. В 1976 году Флашка и Маклафлин показали[44] на примерах уравнения Кортевега-де Фриза и цепочки Тоды с периодическими граничными условиями, что переменные, возникающие естественным образом из спектральной теории и алгебраической геометрии, имеют «хорошие» симплектические свойства. Это было довольно неожиданно, так как априори совершенно непонятно, почему должна существовать связь между парами Лакса и гамильтоновым формализмом соответствующих уравнений. Позже этот феномен был обнаружен и в других примерах. Это привело Новикова и Веселова к теории алгеброгеометрических скобок Пуассона на универсальном расслоении гиперэллиптических кривых[45,46,47].

Позднее Кричевер и Фонг предложили[48,49] общий подход к конструированию симплектических форм, возникающих в солитонных уравнениях.

В диссертации этот феномен связи лаксова и гамильтонова формализма исследуется для системы Вольтерра и уравнения Камассы-Холма с периодическими граничными условиями. Приведены результаты из работы автора [7] и совместной работы с Веселовым [6], касающихся вопросов геометрии скобок Пуассона для системы Вольтерра (2) с периодическими граничными условиями $u_N = u_0$, а также результаты из работы автора [3], касающиеся геометрии скобок Пуассона для уравнения Камассы-Холма

$$v_t - v_{xxt} + 3vv_x - 2v_xv_{xx} - vv_{xxx} = 0 \tag{6}$$

с периодическими граничными условиями.

В работе автора [7] подход Флашки и Маклафлина обобщается на случай системы Вольтерра, который отличается от цепочки Тоды наличием допол-

[43]Кричевер И. М., *Периодическая неабелева цепочка Тоды и ее двумерное обобщение*, УМН, т. 36 (1981), №2, с. 72–77.

[44]Flaschka H., McLaughlin D. W., *Canonically conjugate variables for the Korteweg-de Vries equation and the Toda lattice with periodic boundary conditions*, Prog. Theor. Phys., т. 55 (1976), №2, с. 438–456.

[45]Novikov S. P., *Action-angle variables and algebraic geometry*, Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., v. 126, suppl. 2 (1992), p. 139—150.

[46]Веселов А. П., Новиков С. П., *О скобках Пуассона, совместимых с алгебраической геометрией и динамикой КдФ на множестве конечнозонных потенциалов*, ДАН СССР, т. 266 (1982), №3, с. 533-537.

[47]Веселов А. П., Новиков С. П., *Скобки Пуассона и комплексные торы*, Тр. МИАН СССР, т. 165 (1984), с. 49—61.

[48]Krichever I. M., Phong D. H., *On the integrable geometry of soliton equations and $N = 2$ supersymmetric gauge theories*, J. Differential Geom., v. 45 (1997), №2, p. 349–389.

[49]Krichever I. M., Phong D. H., *Symplectic forms in the theory of solitons*, In “Surveys in differential geometry: integral systems [integrable systems],”, p. 239–313, Surv. Differ. Geom., IV, Int. Press, Boston, MA, 1998.

нительной симметрии спектральных данных, впервые отмеченной Новиковым[50], а в работе автора [3] подход Флашки и Маклафлина обобщается на случай уравнения Камассы-Холма (6), в котором возникает нестандартная спектральная задача

$$\psi'' = \frac{1}{4}\psi - \lambda m \psi,$$

где $m = v - v_{xx}$. И для периодической системы Вольтерра, и для уравнения Камассы-Холма, канонически сопряженные переменные в терминах алгебро-геометрических спектральных данных построены для пары скобок Пуассона.

Также в диссертации излагается совместная работа с Веселовым [6], в которой строится теория алгебро-геометрических скобок Пуассона для системы Вольтерра, обобщающая геометрию квадратичной и кубической скобки Пуассона. Этот результат обобщает на случай системы Вольтерра развитое Новиковым и Веселовым в упомянутых выше работах понятие алгебро-геометрической скобки Пуассона на универсальном пространстве расслоения гиперэллиптических кривых (или пространстве конечнозонных потенциалов Шредингера). Данное обобщение нетривиально ввиду уже отмеченного выше наличия у системы Вольтерра дополнительной симметрии спектральных данных, впервые отмеченной С. П. Новиковым.

Цель работы

Целью настоящей работы является развитие теории экстремальных метрик на поверхностях и построение практического подхода к их нахождению на торах и бутылках Клейна; изучение топологии изоспектральных многообразий; построение алгебро-геометрической спектральной теории для двумерных полудискретных гиперболических операторов Шредингера и описание преобразований Лапласа таких операторов в терминах преобразования спектральных данных; построение теории алгебро-геометрических скобок Пуассона для системы Вольтерра; нахождение канонически сопряженных переменных для скобок Пуассона, относительно которых система Вольтерра и уравнение Камассы-Холма гамильтоновы.

Научная новизна

Основными результатами диссертации являются следующие.

[50] Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П., *Нелинейные уравнения типа Кортевега-де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия*, УМН, т. 31 (1976), №1, с. 55–136.

1. Развита теория метрик на поверхностях, экстремальных для собственных значений оператора Лапласа-Бельтрами, и предложен практический подход к нахождению на торах и бутылках Клейна экстремальных метрик.

2. Данный подход изложен на примере теоремы об экстремальных спектральных свойствах метрик на тау-поверхностях Лоусона.

3. В качестве примера приложимости предлагаемого подхода к неявно заданным поверхностям доказана теорема об экстремальных спектральных свойствах метрик на торах Оцуки.

4. Доказана градиентность потока Вольтерра с нулевыми граничными условиями.

5. С помощью градиентности потока Вольтерра вычислены эйлеровы характеристики изоспектральных многообразий якобиевых матриц с нулевой диагональю, являющихся подмногообразиями уровня интегралов системы Вольтерра. Отметим, что мы не предполагаем положительность внедиагональных элементов в определении якобиевых матриц.

6. Определены преобразования Лапласа двумерных полудискретных гиперболических операторов Шредингера, изучены их основные свойства и описана их связь с полудискретной двумерной цепочкой Тоды.

7. Построена алгебро-геометрическая спектральная теория двумерных полудискретных гиперболических операторов Шредингера, решена и прямая, и обратная спектральная задача.

8. Преобразования Лапласа алгебро-геометрических двумерных полудискретных операторов Шредингера описаны в терминах преобразования алгебро-геометрических спектральных данных.

9. С помощью алгебро-геометрических спектральных данных построены канонически сопряженные переменные для квадратичной и кубической скобки Пуассона, относительно которых система Вольтерра с периодическими граничными условиями гамильтонова.

10. Построена теория алгебро-геометрических скобок Пуассона для системы Вольтерра.

11. С помощью алгебро-геометрических спектральных данных построены канонически сопряженные переменные для двух скобок Пуассона, относительно которых периодическое уравнение Камассы-Холма гамильтоново.

Основные методы исследования

В работе используются методы дифференциальной геометрии, теории обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с частными производными, математической физики, теории групп и алгебр Ли, алгебраической топологии, алгебраической геометрии и теории римановых поверхностей, симплектической геометрии. Большое значение имеет использование базирующихся на предыдущих результатах Надирашвили результатов Эль Суфи и Илиаса[51], связывающих экстремальные метрики с минимальными погружениями поверхностей в сферы.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация носит теоретический характер. Полученные в диссертации результаты представляют интерес для спектральной геометрии, дифференциальной геометрии, алгебраической топологии, математической физики, симплектической геометрии. Результаты диссертации могут быть полезны для специалистов из Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Института теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Новосибирского государственного университета, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Независимого московского университета, Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики».

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на научно-исследовательских семинарах «Геометрия, топология и математическая физика» (руководители С. П. Новиков и В. М. Бухштабер, отдел геометрии и топологии МИАН и кафедра высшей геометрии и топологии Механико-математического факультета МГУ), «Глобус» (бюро семинара: А. А. Белавин, В. А. Васильев, Ю. С. Ильяшенко, А. Б. Сосинский, М. А. Цфасман, О. В. Шварцман, НМУ), а также на семинаре по анализу Университета Макгилл (Канада), семинаре по спектральной геометрии, семинаре по нелинейному анализу и динамическим системам и семинаре по математической физике Университета Монреаля (Канада), семинаре по геометрии и топологии Института Вейцмана (Израиль), семинаре по геометрии Института математики Бургундии (Франция), а также на следующих международных научных конференциях:

1. «Joint Mathematics Meeting (including the 110th National Annual Meeting of the American Mathematical Society)», г. Финикс, США, январь

[51] El Soufi A., Ilias S., *Laplacian eigenvalues functionals and metric deformations on compact manifolds*, J. Geom. Phys., v. 58 (2008), № 1, p. 89-104.

2003 года.

2. «GIMP’06 (Geometry and Integrability in Mathematical Physics)», НМУ, г. Москва, май 2006 года.

3. «International Workshop on Classical and Quantum Integrable Systems (CQIS-2007)», ОИЯИ, г. Дубна, январь 2007 года.

4. «Differential Equations and Related Topics» имени И. Г. Петровского, МГУ, г. Москва, май 2007 года.

5. «Equadiff-2007», г. Вена, Австрия, август 2007 года.

6. «Differential Equations and Related Topics» имени И. Г. Петровского, МГУ, г. Москва, июнь 2011 года.

7. «La 88ème rencontre entre physiciens théoriciens et mathématiciens: Discrétisation en mathématiques et en physique», Университет Страсбурга, г. Страсбург, Франция, сентябрь 2011 года.

8. «Integrability — modern variations», Институт Хаусдорфа Университета Бонна, г. Бонн, Германия, январь 2012 года.

9. «Workshop on Geometry of Eigenvalues and Eigenfunctions», Центр математических исследований Университета Монреаля, г. Монреаль, Канада, июнь 2012 года.

10. «Geometric Structures in Integrable Systems», МГУ, г. Москва, октябрь-ноябрь 2012 года.

11. «Adventures in mathematical physics», Центр Жака Картье, г. Лион, Франция, ноябрь 2012 года.

12. «Applications of Analysis: Game Theory, Spectral Theory and Beyond» в честь 70-летия Якара Каннаи, Институт Вейцмана, г. Реховот, Израиль, декабрь 2012 года.

Публикации

Основное содержание диссертации опубликовано в 9 работах, список которых приведен в конце автореферата [1–9]. Обзор по материалам первой главы диссертации в ближайшее время будет опубликован в «Успехах математических наук».

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа изложена на 246 страницах и состоит из введения и четырех глав. Библиография включает 96 наименований.

Краткое содержание работы

Во введении к диссертации излагается история рассматриваемых проблем, формулируются основные результаты и приводится краткое содержание работы.

Содержание главы 1

Первая глава диссертации посвящена развитию теории экстремальных метрик на замкнутых поверхностях, то есть метрик, экстремальных для собственных значений оператора Лапласа-Бельтрами.

Раздел 1.1 является вводным, содержит краткое описание известных результатов и вводит обозначения. Пусть M замкнутая поверхность и g риманова метрика на M. Рассмотрим ассоциированный оператор Лапласа-Бельтрами $\Delta : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$, который можно определить, например, явной формулой в локальных координатах

$$\Delta f = -\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{|g|}g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\right).$$

Хорошо известно, что собственные числа (обратим внимание на нумерацию собственных чисел с нулевого!)

$$0 = \lambda_0(M,g) < \lambda_1(M,g) \leqslant \lambda_2(M,g) \leqslant \lambda_3(M,g) \leqslant \dots$$

оператора Лапласа-Бельтрами Δ обладают следующим свойством масштабирования,

$$\forall t > 0 \quad \lambda_i(M,tg) = \frac{\lambda_i(M,g)}{t}.$$

Поэтому идея искать супремум функционала $\lambda_i(M,g)$ на пространстве всех (гладких) римановых метрик g на фиксированной поверхности M не является разумной. Вместо $\lambda_i(M,g)$ лучше рассматривать функционалы

$$\Lambda_i(M,g) = \lambda_i(M,g)\,\mathrm{Area}(M,g),$$

где $\mathrm{Area}(M,g)$ обозначает площадь, которые инвариантны при преобразованиях $g \mapsto tg$.

Определение 1. *Метрика g_0 на фиксированной поверхности M называется максимальной для функционала $\Lambda_i(M,g)$, если*

$$\sup \Lambda_i(M,g) = \Lambda_i(M,g_0),$$

где супремум берется по пространству всех римановых метрик g на фиксированной поверхности M.

Вопрос о нахождении супремума $\sup \Lambda_i(M,g)$ функционала $\Lambda_i(M,g)$ на пространстве всех римановых метрик g на фиксированной поверхности M является очень трудным, и к настоящему времени получено сравнительно мало результатов. Поэтому оказывается полезным изучать экстремальные метрики.

Определение 2. *Риманова метрика g_0 на замкнутой поверхности M называется экстремальной метрикой для функционала $\Lambda_i(M,g)$, если для любой аналитической деформации g_t выполняется неравенство*

$$\frac{d}{dt}\Lambda_i(M,g_t)\Big|_{t=0+} \cdot \frac{d}{dt}\Lambda_i(M,g_t)\Big|_{t=0-} \leqslant 0.$$

В разделе 1.2 излагаются сведения о связи между минимальными подмногообразиями в сферах и экстремальными метриками. Эта связь имеет решающую роль для дальнейших исследований и сформулирована в теореме Эль Суфи и Илиаса[52], связывающей экстремальные метрики с минимальными погружениями в сферы и с подсчитывающей собственные числа функцией Вейля

$$N(\lambda) = \#\{\lambda_i | \lambda_i < \lambda\}.$$

Заметим, что результаты Эль Суфи и Илиаса базируются на более ранних работах Надирашвили. Далее формулируется предлагаемый практических подход к нахождению экстремальных метрик на торах и бутылках Клейна, который в следующих разделах проиллюстрирован на примерах тау-поверхностей Лоусона и торов Оцуки. Формулируются также другие важные для дальнейшего исследования результаты из дифференциальной геометрии, в том числе теорема Такахаси.

В разделе 1.3 сначала дается определение тау-поверхностей Лоусона.

Определение 3. *Образ дважды периодического погружения*

$$\Psi_{m,k} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4,$$

заданного следующей явной формулой,

$$\Psi_{m,k}(x,y) = (\cos mx\ \cos y, \sin mx\ \cos y, \cos kx\ \sin y, \sin kx\ \sin y),$$

называется поверхностью Лоусона $\tau_{m,k}$.

[52]El Soufi A., Ilias S., *Laplacian eigenvalues functionals and metric deformations on compact manifolds*, J. Geom. Phys., v. 58 (2008), №1, p. 89-104.

Лоусон доказал[53], что для каждой неупорядоченной пары натуральных чисел (m,k) с $(m,k)=1$ поверхность $\tau_{m,k}$ является отличной от других поверхностей семейства компактной минимальной поверхностью в $\mathbb{S}^3$. Наложим условие $(m,k)=1$. Если оба числа m и k нечетные, то тогда $\tau_{m,k}$ является тором. Мы называем его лоусоновым тором. Если одно из чисел m или k четное, то тогда $\tau_{m,k}$ является бутылкой Клейна. Мы называем ее лоусоновой бутылкой Клейна. Отметим, что m и k не могут оба быть четными в силу условия $(m,k)=1$. Легко проверить, что тор $\tau_{1,1}$ является клиффордовым тором.

Затем формулируется следующая теорема об экстремальных спектральных свойствах тау-поверхностей Лоусона.

Теорема 4. *Пусть $\tau_{m,k}$ лоусонов тор. Можно предполагать, что $m,k\equiv 1 \mod 2$, $(m,k)=1$. Тогда индуцированная метрика на его двулистном накрытии $\hat{\tau}_{m,k}$ является экстремальной метрикой для функционала $\Lambda_j(\mathbb{T}^2,g)$, где $j=2\left(\left[\sqrt{m^2+k^2}\right]+m+k\right)-1$. Соответствующее значение функционала равно $\Lambda_j(\hat{\tau}_{m,k})=16\pi m E\left(\frac{\sqrt{m^2-k^2}}{m}\right)$.*

Индуцированная метрика на $\tau_{m,k}$ является экстремальной для функционала $\Lambda_j(\mathbb{T}^2,g)$, где $j=2\left[\frac{\sqrt{m^2+k^2}}{2}\right]+m+k-1$. Соответствующее значение функционала равно $\Lambda_j(\tau_{m,k})=8\pi m E\left(\frac{\sqrt{m^2-k^2}}{m}\right)$.

Пусть $\tau_{m,k}$ лоусонова бутылка Клейна. Можно предполагать, что $mk\equiv 0 \mod 2$, $(m,k)=1$. Тогда индуцированная метрика на $\tau_{m,k}$ является экстремальной метрикой для функционала $\Lambda_j(\mathbb{KL},g)$, где $j=2\left[\frac{\sqrt{m^2+k^2}}{2}\right]+m+k-1$. Соответствующее значение функционала равно $\Lambda_j(\tau_{m,k})=8\pi m E\left(\frac{\sqrt{m^2-k^2}}{m}\right)$.

Несколько следующих разделов посвящены доказательству теоремы 4.

В разделе 1.4 изучается связь между собственными числами оператора Лапласа-Бельтрами на тау-поверхностях Лоусона и вспомогательной периодической задачей Штурма-Лиувилля, возникающей после разделения переменных. С помощью этой связи мы редуцируем проблему к одномерной.

В разделе 1.5 излагаются элементы теории уравнения Магнуса-Уинклера-Айнса и на ее основе изучаются собственные числа кратности 2 вспомогательной периодической задачи Штурма-Лиувилля.

[53]Lawson H. B., *Complete minimal surfaces in S^3*, Ann. of Math., v. 92 (1970), p. 335—374.

В разделе 1.6 излагаются элементы теории уравнения Ламе, необходимые нам для завершения доказательства теоремы 4 об экстремальных спектральных свойствах метрик на тау-поверхностях Лоусона в разделе 1.7.

В разделе 1.8 кратко обсуждаются торы Оцуки и формулируется теорему об их экстремальных свойствах. Определение торов Оцуки довольно сложно, так как дается не через явную параметризацию, а через довольно сложную конструкцию, поэтому просто сообщим, что для каждого рационального числа $\frac{p}{q}$, такого, что $p, q > 0$, $(p, q) = 1$ и $\frac{1}{2} < \frac{p}{q} < \frac{\sqrt{2}}{2}$, существует двумерный тор, минимально погруженный в $\mathbb{S}^3$, называемый тором Оцуки, который мы будем обозначать через $O_{\frac{p}{q}}$.

Как мы уже упомянули, торы Оцуки определяются неявным образом через некоторую конструкцию, и в случае торов Оцуки мы не можем даже записать явно оператор Лапласа-Бельтрами. Тем не менее, с помощью развитого автором подхода оказалось возможным доказать следующую теорему, сформулированную в разделе 1.8.

Теорема 5. *Метрика на торе Оцуки* $O_{\frac{p}{q}} \looparrowright \mathbb{S}^3$ *является экстремальной для функционала* $\Lambda_{2p-1}(\mathbb{T}^2, g)$.

Затем в разделе 1.9 излагается теория Сяна-Лоусона о редукции минимальных подмногообразий по действию группы, с помощью которой в разделе 1.10 строго определены торы Оцуки. После этого в разделе 1.11 доказывается теорема 5 об экстремальных спектральных свойствах торов Оцуки.

Затем в разделе 1.12 описаны различные конструкции торов, минимальных в сферах, а в разделе 1.13 предлагается метод расширения семейств минимальных торов в сферах с помощью теоремы Такахаси. В разделе 1.14 этот метод проиллюстрирован теоремой о построении трехпараметрического семейства $T_{a,b,c}$ минимальных торов или бутылок Клейна, обобщающего тау-поверхности Лоусона, и его экстремальных спектральных свойствах.

Завершается первая глава обсуждением в разделе 1.15 интересной бутылки Клейна $T_{1,0,2}$ из построенного в предыдущем разделе семейства: метрика на ней максимальна для $\Lambda_1(\mathbb{KL}, g)$.

Содержание главы 2

Глава 2 посвящена изучению топологии изоспектральных многообразий. Раздел 2.1 является вводным, содержит определения и краткое описание известных результатов. Главным действующим лицом является система

Вольтерра. Обычно система Вольтерра с нулевыми граничными условиями задается следующим образом: фазовое пространство состоит из переменных $u_n > 0$, $1 \leqslant n \leqslant N$, а уравнения движения следующие:

$$\frac{du_n}{dt} = u_n(u_{n+1} - u_{n-1}),$$

где $u_0 = u_{N+1} = 0$. Известно, что система Вольтерра эквивалентна уравнению Лакса

$$\frac{dL}{dt} = [L, A],$$

где матрица L равна

$$\begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & 0 & c_2 & & \vdots \\ 0 & c_2 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & c_N \\ 0 & \dots & \dots & c_N & 0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

а

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}c_1c_2 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}c_2c_3 & & & \vdots \\ -\frac{1}{2}c_1c_2 & 0 & 0 & & \ddots & & \\ 0 & -\frac{1}{2}c_2c_3 & & & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & \frac{1}{2}c_{N-1}c_N \\ & & & & & 0 & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & -\frac{1}{2}c_{N-1}c_N & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому на самом деле нам удобно работать в терминах переменных c_i, причем считать, что они принимают не только положительные, но и вообще все вещественные значения. В этих переменных система Вольтерра с нулевыми граничными условиями принимает вид

$$\dot{c}_i = \frac{1}{2}c_i(c_{i+1}^2 - c_{i-1}^2), \quad c_0 = c_{N+1} = 0.$$

В разделе 2.2 доказывается градиентность потока системы Вольтерра с нулевыми граничными условиями. Пусть V евклидово пространство $(N+1) \times (N+1)$-матриц со скалярным произведением $\langle X, Y \rangle = \mathrm{tr} XY^T$. Многообразие M является подмногообразием V.

Пусть L_0 произвольная точка M. Рассмотрим действие GL_{N+1} на V сопряжениями, тогда орбита $GL_{N+1}L_0$ является подмногообразием V, и M является подмногоообразием $GL_{N+1}L_0$.

Рассмотрим линейное подпространство $V_{L_0} = \{T \in V | [L_0, T] = 0\}$. Пусть $V_{L_0}^{\perp}$ его ортогональное дополнение относительно $\langle \cdot , \cdot \rangle$, тогда $V_{L_0}^{\perp} \cong T_{L_0} GL_{N+1} L_0$. Обозначим через $T^{\perp}$ ортогональную проекцию $T \in V$ на $V_{L_0}^{\perp}$.

Определим теперь еще одно скалярное произведение $(\cdot , \cdot)$ двух векторов $[L_0, A]$, $[L_0, B] \in T_{L_0} GL_{N+1} L_0$ как

$$([L_0, A], [L_0, B]) = \langle A^{\perp}, B^{\perp} \rangle.$$

Таким образом мы получим скалярное произведение на касательном пространстве в точке L_0 к орбите $GL_{N+1}L_0$. Проделав эту конструкцию со всеми точками орбиты, мы получаем риманову метрику $(\cdot , \cdot)$ на орбите $GL_{N+1}L_0$. Ее ограничение на M дает некоторую метрику на M, которую мы обозначим через $(\cdot , \cdot)_M$.

Пусть $K = \frac{1}{4}\mathrm{diag}(1, 2, 3, 4, \dots) \in V$ и $f(L) = \langle K, L^2 \rangle = \mathrm{tr} KL^2$. Тогда докавается следующая теорема.

Теорема 6. *Градиентный поток на M, задаваемый функцией $f|_M$ с помощью метрики $(\cdot , \cdot)_M$, совпадает с потоком системы Вольтерра с нулевыми граничными условиями, ограниченным на поверхность уровня интегралов.*

С использованием градиентности потока Вольтерра в разделе 2.3 вычисляются эйлеровы характеристики изоспектральных многообразий якобиевых матриц с нулевой диагональю. Отметим, что мы не предполагаем положительность внедиагональных элементов в определении якобиевых матриц.

Обозначим через M_k множество всех $k \times k$-матриц с фиксированным спектром вида

$$L = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & 0 & c_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & c_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & c_{k-1} \\ 0 & \dots & 0 & c_{k-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда доказывается следующая теорема.

Теорема 7. *а) Эйлерова характеристика M_{2l+1} равна*

$$\chi(M_{2l+1}) = 2^{2l+2}(2^{l+2} - 1)\frac{B_{l+2}}{l+2},$$

где B_{l+2} соответствующее число Бернулли.

b) Если мы определим $\chi(M_1)$ как 0, то экспоненциальная производящая функция чисел $\chi(M_{2l+1})$ равна $-\operatorname{th}^2(2z)$, то есть

$$-\operatorname{th}^2(2z) = \sum_{l\geqslant 0} \chi(M_{2l+1})\frac{z^l}{l!}.$$

Содержание главы 3

Глава 3 посвящена алгебро-геометрической спектральной теории двумерных полудискретных гиперболических операторов Шредингера, описанию их преобразований Лапласа в терминах алгебро-геометрических спектральных данных и их связи с двумерной цепочкой Тоды.

Во вводном разделе 3.1 излагается краткое описание известных результатов и даются определения, в том числе и двумерных полудискретных гиперболических операторов Шредингера (4).

Раздел 3.2 содержит определение преобразований Лапласа двумерных полудискретных гиперболических операторов Шредингера, изучение их основных свойств и описание их связи с полудискретной двумерной цепочкой Тоды. Определим оператор сдвига формулой $T\psi_n(y) = \psi_{n+1}(y)$. Тогда доказывается следующая лемма.

Лемма 8. *Оператор (4) такой, что $b_n(y) \neq 0$ и $d_n(y) \neq 0$, может быть единственным образом представлен в виде*

$$L = f_n(y)((\partial_y + A_n(y))(1 + v_n(y)T) + w_n(y))$$

или в виде

$$L = \hat{f}_n(y)((1 + \hat{v}_n(y)T)(\partial_y + \hat{A}_n(y)) + \hat{w}_n(y)).$$

Рассмотрим уравнение

$$L\psi = 0. \tag{8}$$

С помощью леммы 8 определяются преобразования Лапласа.

Определение 9. *Определим преобразование Лапласа первого рода как преобразование*

$$L \mapsto \tilde{L} = \tilde{f}_n(w_n(1 + v_nT)\frac{1}{w_n}(\partial + A_n) + w_n), \quad \psi \mapsto \tilde{\psi} = (1 + v_nT)\psi,$$

и преобразование Лапласа второго рода как преобразование

$$L \mapsto \hat{L} = \hat{f}_n(\hat{w}_n(\partial + \hat{A}_n)\frac{1}{\hat{w}_n}(1 + \hat{v}_nT) + \hat{w}_n), \quad \psi \mapsto \hat{\psi} = (\partial + \hat{A}_n)\psi.$$

Здесь $\tilde{f}_n(y)$ и $\hat{f}_n(y)$ произвольные функции.

Имеются калибровочные преобразования $L \mapsto \bar{L}$, $\psi \mapsto \bar{\psi}$, дающие эквивалентные уравнения (8). Они задаются формулами

$$\bar{\psi} = g_n^{-1}\psi, \quad \bar{a}_n = h_n a_n g_n + h_n b_n g_n', \quad \bar{b}_n = h_n b_n g_n,$$
$$\bar{c}_n = h_n c_n g_{n+1} + h_n d_n g_{n+1}', \quad \bar{d}_n = h_n d_n g_{n+1},$$

где $h_n(y) \neq 0$ и $g_n(y) \neq 0$ произвольные функции.

Заметим, что калибровочное преобразование $(L, \psi) \mapsto (L', \psi')$ такое, что $L = L'$, является в точности умножением ψ на константу, поэтому мы обычно будем накладывать условие нормировки $\psi_0(0) = 1$.

По этой причине мы рассматриваем преобразования Лапласа и калибровочные преобразования скорее как преобразования оператора L, чем как преобразования пары (L, ψ), состоящей из оператора L и его ψ-функции.

Далее доказывается цепочка различных утверждений, в том числе следующих.

Лемма 10. *Преобразования Лапласа калибровочно эквивалентных операторов являются калибровочно эквивалентными.*

Лемма 11. *Для каждого оператора существует единственный калибровочно эквивалентный ему оператор, такой, что*

$$b_n(y) \equiv 1, \quad d_n(y) \equiv 1. \tag{9}$$

Лемма 12. *Преобразования Лапласа первого и второго рода обратны друг другу (как преобразования классов калибровочной эквивалентности).*

Для каждого класса калибровочной эквивалентности возьмем A_n и w_n единственного оператора в данном классе, удовлетворяющего условиям (9), как калибровочные инварианты. Это полный набор калибровочных инвариантов, так как если оператор удовлетворяет условию (9), то $f_n = 1$ и $v_n = 1$.

Лемма 13. *В терминах калибровочных инвариантов преобразование Лапласа первого рода действует следующим образом:*

$$\begin{aligned}\tilde{A}_n(y) &= A_{n+1}(y) + \frac{w_{n+1}'(y)}{w_{n+1}(y)},\\ \tilde{w}_n(y) &= w_n(y) + A_n(y) + \frac{w_n'(y)}{w_n(y)} - A_{n+1}(y) - \frac{w_{n+1}'(y)}{w_{n+1}(y)}.\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь цепочку $\ldots, L_{-1}, L_0, L_1, \ldots$ преобразований Лапласа первого рода, $L_{k+1} = \tilde{L}_k$. Эта цепочка эквивалентна системе уравнений

$$\begin{aligned}(\ln w^k_{n+1}(y))' &= A^{k+1}_n(y) - A^k_{n+1}(y),\\ w^{k+1}_n(y) - w^k_n(y) &= A^{k+1}_{n-1}(y) - A^{k+1}_n(y).\end{aligned}$$

Тогда верная следующая теорема о связи этой системы с двумерной цепочкой Тоды.

Теорема 14. *1) По решению следующей полудискретной двумерной цепочки Тоды*

$$(g^k_n - g^k_{n+1})' = e^{g^{k+1}_n - g^k_{n+1}} - e^{g^k_n - g^{k-1}_{n+1}} \tag{10}$$

можно получить семейство цепочек преобразований Лапласа первого рода, параметризованное произвольной функцией $A^0_0(y)$.

2) По цепочке преобразований Лапласа первого рода мы можем получить семейство решений уравнения (10), параметризованное произвольной функцией $g^0_0(y)$ и набором произвольных констант r^k, $k \in \mathbb{Z}$.

Далее в разделе 3.2 описывается, какие изменения необходимо внести в периодическом случае.

Алгебро-геометрическая спектральная теория двумерных полудискретных гиперболических операторов Шредингера строится в двух разделах: прямая спектральная задача решается в разделе 3.3, а обратная спектральная задача решается в разделе 3.4.

Результаты раздела 3.3 суммируются в следующей теореме.

Теорема 15. *Пусть L алгебро-геометрический оператор* (4) *в общем положении. Тогда его спектральная кривая Γ является компактной римановой поверхностью. Пусть g означает род Γ. Решение Флоке $\psi_n(y)$ является функцией Бейкера-Ахиезера на Γ. Имеются точки $P^{\pm}_i$, $i = 1, \ldots, N$, такие, что $\psi_n(y)$ имеет ноль порядка $\left[\frac{n-i}{N}\right] + 1$ в P^+_i и полюс того же порядка в P^-_i. Имеется точка Q, такая, что функция $\psi_n(y)$ мероморфна на $\Gamma \setminus \{Q\}$. Функция $\psi_n(y)$ может быть представлена в окрестности точки Q в виде $e^{\frac{Ky}{t}} h_n(y,t)$, где K константа, t локальный параметр в точке Q и $h_n(y,t)$ такая голоморфная по t функция, что $h(y,0) \neq 0$. Дивизор $\mathcal{D}$ полюсов $\psi_n(y)$ в $\Gamma \setminus \{Q, P^{\pm}_i\}$ является эффективным дивизором степени g и не зависит от n или y.*

Из этой теоремы ясно, какие спектральные данные необходимы для решения обратной задачи в разделе 3.4. Рассмотрим неособую кривую Γ рода

g, отмеченные точки $P_i^{\pm}$, $i = 1, \dots, N$, и Q на кривой Γ, а также дивизор $\mathcal{D} = R_1 + \dots + R_g$. Фиксируем 1-струю $[\lambda]_1$ локального параметра в точке Q, то есть локальный параметр в точке Q с точностью до преобразования $\tilde{\lambda} = \lambda + O(\lambda^2)$.

Определение 16. *Совокупность* $(\Gamma, P_i^{\pm}, Q, [\lambda]_1, \mathcal{D} = R_1 + \dots + R_g)$ *называется спектральными данными.*

Как видно из теоремы 15, мы можем построить спектральные данные по периодическому алгебро-геометрическому оператору L вида (4) в общем положении (надо только положить $\lambda = \frac{t}{K}$). В следующей теореме решается обратная спектральная задача.

Теорема 17. *Пусть* $(\Gamma, P_i^{\pm}, Q, [\lambda]_1, \mathcal{D} = R_1 + \dots + R_g)$ *спектральные данные с дивизором* $\mathcal{D}$ *в общем положении. Тогда существует функция Бейкера-Ахиезера* $\psi_n(y)$, *определенная на* Γ *и зависящая от двух параметров* $n \in \mathbb{N}$ *и* $y \in \mathbb{R}$, *такая, что верны следующие утверждения.*

1) $\psi_0(0) = 1$.

2) *Функция* $\psi_n(y)$ *имеет ноль порядка* $\left[\frac{n-i}{N}\right] + 1$ *в* P_i^+ *и полюс того же порядка в* P_i^-.

3) *Функция* $\psi_n(y)$ *мероморфна в* $\Gamma \setminus \{Q\}$.

4) *Полюса функции* $\psi_n(y)$ *в* $\Gamma \setminus \{P_i^{\pm}, Q\}$ *могут быть только полюсами первого порядка в точках* R_i.

5) *Произведение* $\psi_n(y)e^{-\frac{y}{\lambda}}$ *является голоморфной функцией в окрестности точки* Q *и не равно нулю в* Q.

6) *Существует оператор* L *формы (4), такой, что* $L\psi = 0$.

7) *Функция* $\psi_n(y)$ *и оператор* L *определены спектральными данными однозначно с точностью до калибровочного преобразования.*

Заключительный раздел 3.5 посвящен описанию спектральных свойств преобразований Лапласа алгебро-геометрических двумерных полудискретных операторов Шредингера (4) в терминах спектральных данных. Доказана следующая теорема.

Теорема 18. *Преобразования Лапласа действуют на спектральных данных следующим образом:* Γ, P_i^+, Q, *и* $[\lambda]_1$ *не меняются, а точки* P_i^- *и дивизор* $\mathcal{D}$ *меняются по формуле*

$$\tilde{\mathcal{D}} = \mathcal{D} + P_1^- - Q, \quad \tilde{P}_i^- = P_{i+1}^-$$

для преобразования Лапласа первого рода и по формуле

$$\tilde{\mathcal{D}} = \mathcal{D} - P_N^- + Q, \quad \tilde{P}_i^- = P_{i-1}^-$$

для преобразования Лапласа второго рода.

Данная теорема позволяет конструировать цепочки преобразований Лапласа и, следовательно, и решений соответствующей двумерной цепочки Тоды в терминах тета-функций.

Содержание главы 4

Глава 4 посвящена изучению геометрии скобок Пуассона для системы Вольтерра и уравнения Камассы-Холма, их связи со спектральной теорией и построению теории алгебро-геометрических скобок Пуассона для системы Вольтерра.

Вводный раздел 4.1 посвящен описанию основных результатов и определений. В разделе 4.2 с помощью алгебро-геометрических спектральных данных строятся канонически сопряженные переменные для квадратичной и кубической скобки Пуассона, относительно которых система Вольтерра с периодическими граничными условиями гамильтонова.

Система Вольтерра, известная также как «разностное КдФ», задается уравнениями

$$\dot{c}_i = c_i(c_{i+1} - c_{i-1}),$$

где $i \in \mathbb{Z}$, $c_i(t) > 0$, и мы рассматриваем ее с периодическими граничными условиями

$$c_{T+i} = c_i, \quad T \in \mathbb{N}.$$

Известно[54,55] что данная система является гамильтоновой для двух согласованных скобок Пуассона: квадратичной скобки, для которой $\{c_i, c_{i+1}\}_1 = c_i c_{i+1}$, а остальные $\{c_i, c_j\}_1$ равны нулю, и гамильтониана $H = \sum\limits_{i=1}^{T} c_i$; а также кубической скобки, для которой $\{c_i, c_{i+1}\}_2 = c_i c_{i+1}(c_i + c_{i+1})$, $\{c_i, c_{i+2}\}_2 = c_i c_{i+1} c_{i+2}$, а остальные $\{c_i, c_j\}_2$ равны нулю, и гамильтониана $H = \frac{1}{2} \ln \prod\limits_{i=1}^{T} c_i$.

Рассмотрим оператор Якоби l на пространстве последовательностей $\{y(n), n \in Z\}$,

$$(ly)(n) = a_{n+1} y(n+1) + a_n y(n-1),$$

[54]Damianou P. A., *The Volterra model and its relation to the Toda lattice*, Physics letters A, v. 155 (1991), p. 126–132.

[55]Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д., *Гамильтонов подход в теории солитонов.* М.: Наука. 1986.

и соответствующую спектральную задачу

$$(ly)(n) = \lambda y(n).$$

Пусть λ_i обозначают полюса ψ-функции на спектральной кривой для оператора l, ρ_i — соответсвующие множители Флоке, а $F_i = \ln|\rho_i|$. Основными результатами раздела 4.2 являются следующие теоремы.

Теорема 19. *Координаты* $\lambda_i, \frac{2F_j}{\lambda_j}, i, j = 1, \ldots, N$, *являются канонически сопряженными для квадратичной скобки, т.е.*

$$\{\lambda_i, \lambda_j\}_1 = 0, \quad \left\{\lambda_i, \frac{2F_j}{\lambda_j}\right\}_1 = \delta_{i,j}, \quad \left\{\frac{2F_i}{\lambda_i}, \frac{2F_j}{\lambda_j}\right\}_1 = 0.$$

Теорема 20. *Координаты* $\lambda_i, \frac{2F_j}{\lambda_j^3}, i, j = 1, \ldots, N$, *являются канонически сопряженными для кубической скобки, т.е.*

$$\{\lambda_i, \lambda_j\}_2 = 0, \quad \left\{\lambda_i, \frac{2F_j}{\lambda_j^3}\right\}_2 = \delta_{i,j}, \quad \left\{\frac{2F_i}{\lambda_i^3}, \frac{2F_j}{\lambda_j^3}\right\}_2 = 0.$$

В разделе 4.3 на основе результатов раздела 4.2 строится теория алгебро-геометрических скобок Пуассона для системы Вольтерра.

Рассмотрим снова периодические с периодом $T = 2N+1$ разностные операторы второго порядка вида

$$(L\psi)_k = a_{k+1}\psi_{k+1} + a_k\psi_{k-1}, \tag{11}$$

Пусть $\hat{T} = \{0, \ldots, T-1\}$. Назовем подмножество $I \subset \hat{T}$ вполне несвязным, если $\forall i_1, i_2 \in I \quad i_1 - i_2 \neq 1 \,(\mathrm{mod}\, T)$. Тогда определим величины $I_0 = (\prod\limits_{i=0}^{T-1} a_i)^{-1}$ и

$$I_i = (\prod_{i=0}^{T-1} a_i)^{-1} \times \sum_{\substack{|I|=i, \\ I \text{ вполне несвязно}, \\ I=(j_1,\ldots,j_i)}} a_{j_1}^2 \ldots a_{j_i}^2 \quad \text{при } i = 1, \ldots, N.$$

В частности, $I_N = I_0 \sum\limits_{k=0}^{2N} a_k^2 a_{k+2}^2 a_{k+4}^2 \ldots a_{k+2N-2}^2$, где все индексы рассматриваются по модулю 2N+1.

Введем класс алгебро-геометрических скобок Пуассона на пространстве всех периодических операторов L вида (11) периода $T = 2N + 1$ с ненулевыми коэффициентами a_i.

Они задаются функцией $A(I_0, \ldots, I_N)$, являющейся аннулятором соответствующей скобки Пуассона, и 1-формой $Q(\Gamma, \lambda)d\lambda$ на спектральных кривых Γ, так, что соответствующая каноническая 1-форма pdq на симплектических листах $A(I_0, \ldots, I_N) = const$ имеет вид $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{N} Q(\Gamma, \lambda_i)d\lambda_i$. При этом предполагается, что функция Q является мероморфной с точностью до функции от аннулятора и λ в окрестности одной из «бесконечностей», например, P_-. Кроме того, будем предполагать, что Q обладает следующим свойством: разность $Qd\lambda - \sigma^*(Qd\lambda)$ зависит только от λ и аннулятора, где σ — инволюция $\lambda \mapsto -\lambda$ на спектральной кривой. Это означает, что соответствующая 2-форма $\omega = d\alpha$ на симплектическом листе $A = const$ является σ-инвариантой.

Нетрудно видеть, что обе упомянутые выше квадратичная и кубические скобки Пуссона для системы Вольтерра обладают описанными свойствами и, тем самым, являются алгебро-геометрическими. Для первой скобки $A = I_0$, $Q = \frac{2\ln\rho(\lambda)}{\lambda}$, для второй $A = I_N$, $Q = \frac{2\ln\rho(\lambda)}{\lambda^3}$.

Будем называть потоки, порожденные гамильтонианами I_i с помощью упомянутых выше скобок Пуссона высшими потоками Вольтерра.

Определение 21. *Назовем алгебро-геометрическую скобку Пуассона согласованной с высшими потоками Вольтерра, если все они гамильтоновы для этой скобки.*

Основной результат раздела 4.3 составляет следующая теорема.

Теорема 22. *a) Если алгебро-геометрическая скобка Пуассона согласована с высшими потоками Вольтерра, то с точностью до членов с коэффициентами из аннулятора имеет место следующее разложение в* P_-,

$$Q(\Gamma, \lambda) = \sum_{k=1}^{N} 2h_k \lambda^{-2k-1} \quad (mod\, \lambda^{-2N-2}),$$

где h_k *гамильтониан* k*-того потока Вольтерра.*

b) Скобка согласована с потоками Вольтерра тогда и только тогда, когда производные $Q(\Gamma, \lambda)d\lambda$ *вдоль базисных векторных полей, касательных к поверхности уровня аннулятора, образуют базис в пространстве* σ*-инвариантных голоморфных дифференциалов на* Γ.

В разделе 4.4 с помощью алгебро-геометрических спектральных данных строятся канонически сопряженные переменные для двух скобок Пуассона, относительно которых уравнение Камассы-Холма

$$v_t - v_{xxt} + 3vv_x - 2v_xv_{xx} - vv_{xxx} = 0$$

с периодическим граничным условием $v(x+1) = v(x)$ гамильтоново.

Известно, что уравнение Камассы-Холма является бигамильтоновым[56]. Чтобы описать две совместимые скобки Пуассона, удобно рассматривать вместо v функцию $m = (1 - D^2)v$. Здесь и далее D и $'$ обозначают производную по переменной x. Пусть $J = mD + Dm$ и $K = \frac{1}{2}D(1 - D^2)$. Тогда две совместимые скобки Пуассона задаются формулами

$$\{A, B\}_1 = \int_0^1 \frac{\partial A}{\partial m} J \frac{\partial B}{\partial m}\, dx, \quad \{A, B\}_2 = \int_0^1 \frac{\partial A}{\partial m} K \frac{\partial B}{\partial m}\, dx.$$

Как показали еще сами Камасса и Холм в упомянутой выше работе, уравнение Камассы-Холма может быть выражено как условие совместности двух уравнений. Следуя работе Константина и Маккина[57], мы запишем эти уравнения в следующем виде:

$$\begin{gathered} \psi'' = \frac{1}{4}\psi - \lambda m\psi, \\ \psi_t = -\left(v + \frac{1}{2\lambda}\right)\psi' + \frac{1}{2}v'\psi. \end{gathered} \tag{12}$$

Уравнение (12) играет в теории уравнения Камассы-Холма роль спектральной задачи, хотя и имеет нестандартный вид. Пусть μ_i обозначают полюса ψ-функции этой спектральной задачи, а ρ_i обозначают соответствующие множители Флоке. Определим также переменные

$$f_j = -\frac{\ln|\rho_j|}{\mu_j^2} \quad \text{и} \quad g_j = -\frac{\ln|\rho_j|}{\mu_j^3}.$$

Основными результатами раздела 4.4 являются следующие теоремы.

Теорема 23. *Переменные μ_i и f_j являются канонически сопряженными для первой скобки Пуассона, то есть имеют место равенства*

$$\{\mu_i, \mu_j\}_1 = 0, \quad \{\mu_i, f_j\}_1 = \delta_{ij}, \quad \{f_i, f_j\}_1 = 0.$$

[56] Camassa R., Holm D., *An integrable shallow water equation with peaked solutions*, Phys. Rev. Lett., v. 71 (1993), № 11, p. 1661–1664.

[57] Constantin A., McKean H. P., *A shallow water equation on the circle*, Comm. Pure Appl. Math., v. 52 (1999), № 8, p. 949–982.

Теорема 24. *Переменные μ_i и g_j являются канонически сопряженными переменными по отношению ко второй скобке Пуассона:*

$$\{\mu_i, \mu_j\}_2 = 0, \quad \{\mu_i, g_j\}_2 = \delta_{ij}, \quad \{g_i, g_j\}_2 = 0.$$

Благодарности

Автор глубоко признателен своему научному консультанту А. П. Веселову за плодотворные обсуждения и полезные советы. Автор благодарен В. М. Бухштаберу, П. Ванхаеке, П. Винтерницу, А. А Гайфуллину, П. Г. Гриневичу, М. А. Карпухину, И. М. Кричеверу, В. Б. Матвееву, Н. С. Надирашвили, С. П. Новикову, А. А. Обломкову, И. В. Полтеровичу, Д. А. Попову, Дж. Харнаду, Д. Якобсону за полезные обсуждения. Автор также благодарен всему коллективу кафедры высшей геометрии и топологии Механико-математического факультета МГУ за поддержку и внимание.

Список публикаций по теме диссертации

[1] Oblomkov A. A., Penskoi A. V., *Laplace transformations and spectral theory of two-dimensional semi-discrete and discrete hyperbolic Schrodinger operators*, Int. Math. Res. Not. (2005), № 18, p. 1089–1126.

[2] Penskoi A. V., *The Volterra lattice as a gradient flow*, Regul. Chaotic Dyn., v. 3 (1998), № 1, p. 76—77.

[3] Penskoi A. V., *Canonically conjugate variables for the periodic Camassa-Holm equation*, Nonlinearity, V. 18 (2005), № 1, p. 415-–421.

[4] Penskoi A. V., *Extremal spectral properties of Lawson tau-surfaces and the Lamé equation*, Moscow Math. J., v. 12 (2012), № 1, p. 173–192.

[5] Penskoi A. V., *Extremal spectral properties of Otsuki tori*, Math. Nachr. v. 286 (2013), № 4, p. 379–391.

[6] Веселов А. П., Пенской А. В., *Алгебро-геометрические скобки Пуассона для дифференциальных операторов и система Вольтерра*, Доклады Акад. Наук, т. 366 (1999), № 3, с. 299–303.

[7] Пенской А. В., *Канонически сопряженные переменные для системы Вольтерра с периодическими граничными условиями*, Матем. заметки, т. 64 (1998), № 1, с. 115–128.

[8] Пенской А. В., *Система Вольтерра и топология изоспектрального многообразия якобиевых матриц с нулевой диагональю*, УМН, т. 62 (2007), № 3, с. 213—214.

[9] Пенской А. В., *Интегрируемые системы и топология изоспектральных многообразий*, ТМФ, т. 155 (2008), № 1, с. 140—146.

Подписано в печать 19.09.2013
тираж 100 экз.

Отпечатано в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН
Москва, 119991, ул. Губкина, 8