Российская Академия наук

Математический институт им. В. А. Стеклова

На правах рукописи
УДК 512.75+512.58

Осипов Денис Васильевич

Категорные методы в теории высших аделей и их применение

01.01.06 – математическая логика,
алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва — 2013

Работа выполнена в отделе алгебры и теории чисел Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук Голод Евгений Соломонович, профессор кафедры высшей алгебры механико-математического факультета ФГБОУ ВПО "Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова"

доктор физико-математических наук Зархин Юрий Геннадьевич, старший научный сотрудник лаборатории прикладной математики ФГБУН Институт математических проблем биологии РАН

доктор физико-математических наук Смирнов Александр Леонидович, ведущий научный сотрудник лаборатории алгебры и теории чисел ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН (ПОМИ)

Ведущая организация:

ФГБОУ ВПО "Самарский государственный университет"

Защита диссертации состоится “____” ____________________ 201_ г.
в   часов   минут на заседании диссертационного совета Д 002.022.03 при Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук по адресу: 119991, г. Москва, ул. Губкина, д. 8, 9-ый этаж, конференц-зал.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Математического института им. В. А. Стеклова РАН

Автореферат разослан “____” ____________ 201_ г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 002.022.03 при МИАН,
д. ф.-м. н. профессор Н. П. Долбилин

Актуальность темы

В середине тридцатых годов XX-го века, после работ К. Шевалле и А. Вейля, в алгебраической теории чисел появилось понятие кольца аделей и группы иделей (как группы обратимых элементов кольца аделей). Сначала определяется локальное поле как пополнение глобального поля (то есть поля алгебраических чисел или поля рациональных функций кривой над конечным полем) относительно абсолютного значения (архимедова или неархимедова), заданного на этом поле. Кольцо аделей глобального поля есть ограниченное топологическое произведение всех локальных полей, возникающих из данного поля, см. например, работы [1] и [2]. Идели и адели глобальных полей были успешно применены для построения глобальной теории полей классов, то есть для описания группы Галуа максимального абелевого расширения глобального поля в терминах группы иделей (при помощи отображения взаимности).

В 70-х годах XX-го века А. Н. Паршин определил в работе [3] адели для алгебраических поверхностей. Позднее А. А. Бейлинсон в заметке [4] определил адели для произвольных нетеровых схем, см. также работу [5], где были даны доказательства теорем из заметки А. А. Бейлинсона.

Определение аделей, данное А. А. Бейлинсоном — индуктивное и использует последовательные процессы локализаций и пополнений пучка (пространства аделей определяются для произвольного квазикогерентного пучка на схеме, кольцо аделей получается применением конструкции к структурному пучку схемы). Структуру получившегося кольца аделей можно описать следующим способом. Пусть X — n-мерная неприводимая схема конечного типа над $\mathbb{Z}$, и $X_0 \subset X_1 \subset \dots X_n = X$ — флаг неприводимых подсхем на X, так что $\dim X_i = i$. Тогда можно

---

[1] *Алгебраическая теория чисел*, Сб. статей, Мир, М., 1969; пер. с англ.: Algebraic number theory, Proceedings of an instructional conference organized by the London Mathematical Society with the support of the International Mathematical Union, eds. J. W. S. Cassels, A. Fröhlich, Academic Press, London, 1967.

[2] А. Вейль, *Основы теории чисел*, Мир, М., 1972; пер. с англ.: A. Weil, *Basic number theory*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 144, Springer-Verlag, New York, 1967.

[3] А. Н. Паршин, “ К арифметике двумерных схем. I. Распределения и вычеты ”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **40**:4 (1976), 736–773.

[4] А. А. Бейлинсон, “ Вычеты и адели ”, *Функц. анализ и его прил.*, **14**:1 (1980), 44–45.

[5] A. Huber, “ On the Parshin–Beilinson adèles for schemes ”, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 61 (1991), 249–273.

определить кольцо $K_{X_0,\dots,X_{n-1}}$, связанное с этим флагом. Если X_0 — регулярная точка на всех подсхемах X_i, то $K_{X_o,\dots,X_{n-1}}$ — n-мерное локальное поле. (По определению, n-мерное локальное поле — это полное поле относительно дискретного нормирования, так что поле вычетов является $n-1$-мерным локальным полем. Поле — 0-мерное локальное, если оно конечное.) В общем случае, если X — целая схема, то кольцо $K_{X_o,\dots,X_{n-1}}$ является конечным произведением n-мерных локальных полей, см. например [3]. Теперь кольцо аделей $\mathbb{A}_X$ есть некоторое ограниченное (по более сложным правилам, чем в класическом случае) произведение колец $K_{X_0,\dots,X_{n-1}}$ по всем флагам неприводимых подсхем, определенных выше, то есть

$$\mathbb{A}_X = \prod_{X_0\subset\dots\subset X_{n-1}}{}' K_{X_0,\dots,X_{n-1}} \subset \prod_{X_0\subset\dots\subset X_{n-1}} K_{X_0,\dots,X_{n-1}}.$$

Позднее А. Н. Паршин (и независимо К. Като и другие авторы) построили локальную и глобальную двумерную теорию полей классов, то есть дали явное описание группы Галуа максимального абелевого расширения поля рациональных функций двумерной арифметической схемы X, см. обзор [6]. Глобальная двумерная теория полей классов (как и в класическом одномерном случае) строится при помощи произведения (по всем флагам) локальных отображений взаимности, то есть на основе двумерной локальной теории полей классов. Двумерное локальное отображение взаимности устроено следующим образом:

$$K_2(K_{X_0,X_1}) \longrightarrow \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}_{X_0,X_1}/K_{X_0,X_1}). \tag{1}$$

На двумерном локальном поле K_{X_0,X_1} имеется естественная топология индуктивных и проективных пределов, возникающая в силу конструкции двумерного локального поля. Эта топология "плохая" во многих смыслах. Например, мультипликативная группа двумерного локального поля с индуцированной топологией не является топологической группой. По этой причине, А. Н. Паршин использовал в работе [7] секвенциальное насыщение этой топологии для конструкций двумерной ло-

---

[6] W. Raskind, “Abelian class field theory of arithmetic schemes”, *K-theory and algebraic geometry: connections with quadratic forms and division algebras* (Santa Barbara, CA, 1992), Proc. Sympos. Pure Math., 58, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, 85–187.

[7] А. Н. Паршин, ”Локальная теория полей классов”, *Алгебраическая геометрия и ее приложения*, Тр. МИАН СССР, **165**, Наука, М., 1984, 143–170.

кальной теории полей классов. Отметим, что К. Като в работе [8] по многомерной теории полей классов вообще не использовал эту топологию, взамен определяя по n-мерному локальному полю объект некоторой категории, тесно связанной с итерированными $Ind\,Pro$-категориями.

В работе [2] мы определяем и изучаем категории C_n над полем k, как некоторые категории фильтрованных k-векторных пространств с дополнительными свойствами и со специально определенными морфизмами. Отметим, что категория линейно локально компактных пространств является полной покатегорией в категории C_1. Пространство аделей $\mathbb{A}_X$ n-мерной схемы X конечного типа над k является объектом этой категории, также как и просто n-мерное локальное поле. В случае n-мерной схемы конечного типа над $\mathbb{Z}$ с сюрьективным морфизмом на $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ для работы с кольцами аделей нужны категории C_n^{fin} фильтрованных абелевых групп. В случае арифметических аделей (то есть с учетом добавок, приходящих из слоев над бесконечными точками) нужна категория C_2^{ar} фильтрованных групп, которая содержит в себе как полные подкатегории категории C_2^{fin} и C_2 (над конечным полем). Категории C_n^{fin} и C_2^{ar} были определены и изучены в работе [6]. Категории C_n, C_n^{fin} и C_2^{ar} систематически используются в теории многомерных аделей во многих фундаментальных задачах (которые будут описаны далее) вместо того, чтобы использовать естественную "плохую" топологию на пространствах многомерных аделей.

Одно из центральных мест в арифметической алгебраической геометрии занимают вопросы, связанные с L-функциями арифметических схем. Обычные (одномерные) локальные поля, адели и идели обладают мерой Хаара (это связано с тем, что естественная топология на них локально компактна). Записывая L-функцию $L_X(s,\chi,f)$ одномерной арифметической схемы X(то есть кривой над конечным полем или кольца целых числового поля) как интеграл по иделям, Дж. Тейт и (независимо) К. Ивасава доказали аналитическое продолжение функции $L_X(s,\chi,f)$ на всю комплексную плоскость (относительно s) и вывели функциональное уравнение

$$L(s,\chi,f) = L(1-s,\chi^{-1},\hat{f}).$$

---

[8] K. Kato, "Existence theorem for higher local class field theory", *Invitation to Higher Local Fields* (Münster, 1999), Geom. Topol. Monogr., **3**, Geom. Topol. Publ., Coventry, 2000, 165–195.

(Здесь χ - характер на группе Галуа сепарабельного замыкания поля рациональных функций схемы X, и $f \mapsto \hat{f}$ - преобразование Фурье для стандартной функции f на пространстве $\mathbb{A}_X$.) Отметим также, что из вычисления преобразования Фурье на некоторых функциях на пространстве $\mathbb{A}_X$ сразу получается доказательство формулы Римана-Роха на кривой над конечным полем, а также ее арифметический аналог, см. работу [9].

L-функция схемы X (которая в случае $\chi = 1$ называется дзета-функцией) определяется для любой схемы конечного типа над $\mathbb{Z}$. Если схема X определена над конечным полем, то существует мощнейший метод этальных когомологий, при помощи которого можно получить аналитическое продолжение и функциональное уравнение для дзета-функции схемы X. В случае алгебраического многообразия, определенного над числовым полем, его дзета-функция определяется при помощи дзета-функции модели (то есть схемы) над $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ (так что общий слой этой модели является исходным алгебраическим многообразием). В этом случае методы теории этальных когомологий для изучения дзета- и L-функций не работают. Существуют однако гипотезы Хассе-Вейля об аналитическом продолжении и функциональном уравнении для дзета-функций неособых проективных многообразий, определенных над числовыми полями, см., например, работу [10].

А. Н. Паршин предложил развивать гармонический анализ на пространствах аделей арифметических поверхностей для последующего его использования при изучении дзета- и L-функций арифметических схем в духе метода Тейта-Ивасавы, описанного выше для одномерных схем, см. работу [11]. В настоящее время, помимо использования многомерных аделей, не имеется других явных подходов к гипотезе Хассе-Вейля для произвольных арифметических поверхностей (или кривых над числовыми полями, если переходить к общему слою арифметической поверхности). Отметим, что в случае эллиптических кривых над полем $\mathbb{Q}$ эта

---

[9] С. Ленг, *Алгебраические числа*, Мир, М., 1966; пер. с англ.: S. Lang, *Algebraic numbers*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Mass. Palo Alto. London, 1964.

[10] Ж.-П. Серр, “Локальные множители дзета-функций алгебраических многообразий (определения и гипотезы)”, *Математика: периодический сборник переводов иностранных статей*, **15**:1 (1971), 3-13.

[11] A. N. Parshin, “Higher dimensional local fields and L-functions”, *Invitation to Higher Local Fields* (Münster, 1999), Geom. Topol. Monogr., **3**, Geom. Topol. Publ., Coventry, 2000, 199–213.

гипотеза известна и была доказана абсолютно другими методами (работающими только в этой ситуации) в процессе доказательства великой теоремы Ферма, так как она следует из гипотезы Таниямa-Вейля, доказанной в этом случае Э. Вайлсом.

Основная трудность в построении гармонического анализа на двумерных локальных полях и пространствах аделей двумерных арифметических схем состоит в том, что в естественной топологии итерированных индуктивных и проективных пределов эти пространства не локально-компактны. Следовательно, в силу известной теоремы А. Вейля на них не может существовать меры Хаара. С другой стороны, Ф. Брюа в работе [12] заметил, что преобразование Фурье на произвольных коммутативных локально-компактных группах может быть определено при помощи диаграмм из "кирпичиков", которыми являются коммутативные группы Ли. (При этом мы должны уметь определять преобразование Фурье на коммутативных группах Ли.) А. Н. Паршин в работе [11], а также М. М. Капранов в работе [13] показали, как эту идею можно обобщить на двумерные локальные поля для построения преобразования Фурье из известного преобразования Фурье на конечномерном пространстве над одномерным локальном полем. Следует при этом отметить, что пространства функций $\mathcal{D}(K)$ и распределений $\mathcal{D}'(K)$ на двумерном локальном поле K не являются пространствами функций и рапределений в классическом смысле, а являются "смесью" классических пространств функций и распределений относительно разных направлений координат в двумерном локальном поле. Правильным языком для обобщения гармонического анализа на пространства аделей двумерных арифметических схем явился язык C_2-пространств (для алгебраических поверхностей над конечным полем) или, в более общей ситуации, надо работать в рамках категории C_2^{ar} (для арифметических поверхностей). В работах [4] и [6] гармонический анализ (определение пространств функций и распределений, преобразование Фурье и его свойства, прямые и обратные образы и их связь с преобразованием Фурье, двумерные формулы Пуассона) был построен на объектах категории C_2 и C_2^{ar}.

---

[12] F. Bruhat, “ Distributions sur un groupe localement compact et applications à l’étude des représentations des groupes p-adiques”, *Bull. Soc. Math. France*, 89 (1961), 43–75.

[13] M. M. Kapranov, *Semiinfinite symmetric powers*, электронный препринт (2001), arXiv:math/0107089, доступна на сайте: http://arxiv.org/abs/math/0107089

В работе [7] полученные двумерные формулы Пуассона были применены к пространству аделей $\mathbb{A}_X$ алгебраической гладкой проективной поверхности X над конечным полем для вывода формулы Римана-Роха. Этот метод открыл богатые перспективы для получения формул Римана-Роха нового типа на арифметических поверхностях.

А. Н. Паршин в работе [14] сформулировал гипотезу о прямом образе. В этой гипотезе рассматривается гладко расслоенная алгебраическая поверхность X над кривой S (над конечным полем) и ставится вопрос о внутреннем построении прямого образа автоморфного характера на X как автоморфной функции на S с явными свойствами. Отметим, что эта гипотеза следует из фундаментальной теоремы Л. Лафforга о соответствии Ленглендса на алгебраической кривой над конечным полем. Кроме того, из гипотезы о прямом образе следует гиптеза Хассе-Вейля для L-функции на поверхности X (которая известна в этом случае, так как поверхность определена над конечным полем). Внутреннее построение прямого образа автоморфного характера (без отсылок к теореме Л. Лафforга) дало бы новое доказательство гипотезы Хассе-Вейля в этом случае с возможностью перенесения этого метода на арифметические поверхности.

Фактически, гипотеза о прямом образе связывает соответствие Ленглендса на поверхности X (в его самом простейшем, абелевом случае) с программой Ленглендса на базовой кривой S. Но как могло бы выглядеть даже гипотетически соответствие Ленглендса на алгебраической поверхности X? Первым этот вопрос исследовал М. М. Капранов в работе [15]. Переписывая отображение взаимности (1) (то есть исследуя абелев случай) он предположил, что соответствие Ленглендса для двумерного локального поля K должно сопоставлять n-мерному комплексному представлению группы $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{sep}}/K)$ категорное представление группы $GL(2n, K)$ (категорное представление группы означает действие группы на некоторой $\mathbb{C}$-линейной категории, например, на некотором 2-векторном пространстве). Отметим, что в работе [15] не было явных конструкций.

---

[14] А. Н. Паршин, “Вопросы и замечания к программе Ленглендса”, *УМН*, **67**:3(405) (2012), 115–146.

[15] M. M. Kapranov, “Analogies between the Langlands correspondence and topological quantum field theory”, *Functional analysis on the eve of the 21st century*, v. 1 (New Brunswick, NJ, 1993), Progr. Math., 131, Birkhäuser, Boston, MA, 1995, 119–151.

В работе [8] мы исследуем случай неразветвленного соответствия Ленглендса для двумерного локального поля, следуя предположению М. М. Капранова. Для описания категорных характеров (то есть действий на одномерных 2-векторных пространствах) мы строим центральное расширение группы, действующей на двумерном локальном поле K при помощи группы $\mathbb{R}_+^*$. Коммутатор подъема элементов из подгруппы K^* в это центральное расширение совпадает с символом от двух переменных, описывающем при помощи отображения взаимности (1) неразветвленную двумерную теорию полей классов. Если поле K возникает из алгебраической поверхности X (можно также заменить поле K на кольцо аделей $\mathbb{A}_X$), то такие центральные расширения подробно исследовались в работе [1]. В работе [8] мы доказываем для подобных центральных расширений некоммутативные законы взаимности, то есть расщепление глобально построенных центральных расширений на двумерных арифметических схемах над подгруппами, связанными с точками или одномерными неприводимыми подсхемами. При помощи описанных центральных расширений мы строим также (категорные) аналоги представлений основной серии для групп $GL(2n, K)$ и исследуем основные свойства построенных категорных действий. По аналогии с классическим соответствием Ленглендса мы формулируем также некоторую гипотезу про категорные представления основной серии.

Следующий по сложности случай (после неразветвленного) в двумерной теории полей классов описывается при помощи двумерного ручного символа в отображении взаимности (1). Двумерный ручной символ $\{\cdot, \cdot, \cdot\}_K$ есть композиция двух граничных отображений в K-теории Милнора: $K_3^M(K) \to K_2^M(k((u))) \to k^*$, где $K = k((u))((t))$. В работе [5] мы строим категорное центральное расширение группы G, действующей на C_2-пространстве (в частности, на двумерном локальном поле K или кольце аделей $\mathbb{A}_X$ алгебраической поверхности), при помощи группоида Пикара $\mathcal{P}ic^{\mathbb{Z}}$ градуированных одномерных векторных пространств над полем k. Мы определяем и изучаем основные свойства обобщенного комутатора подъема трех коммутирующих элементов из группы G в категорное центральное расширение, используя при этом результаты Л. Брина из работы [16] про групоподобные моноидальные 2-группоиды.

---

[16] L. Breen, “Monoidal Categories and Multiextensions”, *Compositio Mathematica*, **117**:3 (1999), 295-335.

Мы доказываем, что этот коммутатор совпадает с двумерным ручным символом, когда K^* есть подгруппа в группе G. Используя этот результат, а также кольца аделей на поверхности X мы получаем в работе [5] новое (категорное) доказательство законов взаимности для двумерных ручных символов на X. Отметим, что в случае кривых и одномерных локальных полей ручной символ (без знака) как коммутатор в обычном расширении группы, действующей на одномерном локальном поле, был получен Э. Арбарелло К. Де Кончини и В. Г. Кацем в работе [17]. Они применили эту конструкцию для получения нового доказательства закона взаимности А. Вейля на кривой. Работа [17] основана на более ранней работе Дж. Тейта [18] про законы взаимности, вычеты и центральные расширения алгебр Ли, действующих на одномерном локальном поле.

Цель работы

Определение категорий C_n, C_n^{fin} и C_2^{ar} и изучение их свойств. Построение гармонического анализа на двумерных локальных полях и аделях арифметических поверхностей с использованием категорий C_2^{ar} и того факта, что двумерное локальное поле и пространство аделей арифметической поверхности или алгебраической поверхности над конечным полем являются объектами категории C_2^{ar}. Вывод формулы Римана-Роха из построенного гармонического анализа. Получение некоммутативных законов взаимности и применение их к гипотетическому двумерному соответствию Ленглендса. Описание категорных представлений основной серии в гипотетическом двумерном соответствии Ленглендса. Построение категорных центральных расширений и получение двумерных ручных символов как обобщенных коммутаторов в этих расширениях, применение этой конструкции к законам взаимности на алгебраических поверхностях.

---

[17] E. Arbarello, C. De Concini, V. G. Kac, “The infinite wedge representation and the reciprocity law for algebraic curves”, *Theta functions – Bowdoin* 1987, Part 1 (Brunswick, ME, 1987), Proc. Sympos. Pure Math., 49, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989, 171–190.

[18] J. Tate, “Residues of differentials on curves”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) **1** (1968), 149–159.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми. Основные из них состоят в следующем.

1. Определены категории C_n, C_n^{fin}, C_2^{ar}. Исследованы свойства этих категорий. Доказано, что пространство аделей n-мерной схемы конечного типа над $\mathbb{Z}$ является объектом категории C_n^{fin}, а если схема определена над полем, то объектом категории C_n над этим же полем. Определены арифметические адели арифметической поверхности (с учетом слоев над бесконеными точками). Доказано, что пространство арифметических аделей является объектом категории C_2^{ar}.

2. Построен гармонический анализ на объектах категории C_2 и (в большей общности) на объектах категории C_2^{ar}. При помощи коммутативных диаграмм определено (двумерное) преобразование Фурье, изучены прямые и обратные образы и их связь с преобразованием Фурье. Получены двумерные аналоги формул Пуассона. Используя предыдущие результаты о том, что пространство аделей арифметической поверхности над конечным полем является объектом категории C_2, из двумерных аналогов формул Пуассона выведена формула Римана-Роха для алгебраической поверхности над конечным полем.

3. Доказано, что коммутатор подъема коммутирующих элементов в центральном расширении группы, действующей на двумерном локальном поле, есть целочисленный символ. Получены некоммутативные законы взаимности для таких символов и описано их применение к гипотетическому двумерному соответствию Ленглендса. Определены и описаны основные свойства категорных аналогов представлений основной серии в рамках гипотетического двумерного соответствия Ленглендса.

4. Построены категорные центральные расширения групп, действующих на двумерных локальных полях (или, в большей общности, на объектах категории C_2) при помощи группоида Пикара градуированных одномерных векторных пространств. Определен обощенный коммутатор от трех коммутирующих элементов группы в ка-

тегорном центральном расширении и изучены его свойства. Доказано, что в случае элементов из мультипликативной группы двумерного локального поля, этот коммутатор совпадает с двумерным ручным символом. Получены применения этой конструкции к доказательству законов взаимности для двумерных ручных символов на алгебраической поверхности.

Методы исследования

В работе используются методы арифметической алгебраической геометрии, алгебраической K-теории, теории 2-категорий, а также общие методы теории многомерных локальных полей и многомерных аделей.

Теоретическая и практическая ценность

Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в алгебраической геометрии, теории чисел и теории категорий.

Апробация работы

Результаты работы докладывались автором на семинаре отдела алгебры и теории чисел (семинар И. Р. Шафаревича) и семинаре по арифметической алгебраической геометрии в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН (МИАН), на семинаре "Алгебраическая топология и ее приложения" (семинар имени М. М. Постникова) на Механико-математическом факультете Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, на семинаре "Арифметика, геометрия и теория кодирования" в Независимом Московском университете, на городском алгебраическом семинаре им. Д. К. Фаддеева в Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова РАН (ПОМИ), на семинарах в Берлинском университете им. Гумбольда (Германия), в Саламанском университете (Испания), в Институте науки и технологии Манчестерского университета (Великобритания), в Даремском университете (Великобритания), в Институте им. Галилея университета Париж-13 (Франция), в Университете Индианы (Блумингтон, США), в Математическом институте им. Макса Планка (Бонн, Германия), в Кюшском университете (Фукуока, Япония), в Математическом исследовательском институте им. Хаусдорфа (Бонн, Германия), а также на международных конференциях, в том числе:

— Международная конференция по алгебре и теории чисел, посвященная 80-летию В. Е. Воскресенского, 21–25 Мая 2007, Самара, Самарский государственный университет,

— Международная конференция "Global Fields", 2–7 июля 2007, Москва, Независимый Московский Университет,

— Международная конференция "Geometry and Quantization", посвященная памяти Андрея Тюрина, 9–23 September 2007, Москва, МИАН,

— Международная алгебраическая конференция, посвященная 70-летию Анатолия Яковлева, 19–24 июня 2010, Санкт-Петербург, ПОМИ РАН,

— Международная конференция "Геометрия, топология, алгебра и теория чисел, приложения", посвященная 120-летнему юбилею Бориса Делоне, 16–20 августа 2010, Москва, МИАН, МГУ им. Ломоносова,

— Симпозиум "Arithmetic days in Moscow (ETH-MIAN)", 13–17 июня 2011, Москва, МИАН,

— Четвертая международная конференция по геометрии и квантованию "Geoquant", 11–17 сентября 2011, Китай, Tianjin, Chern Institute of Mathematics,

— Международная конференция "Global Fields", 25–28 октября 2011, Москва, Независимый Московский Университет,

— Международная конференция "Arithmetic Days", 5–6 апреля 2012, Москва, Независимый Московский Университет,

— Международная конференция "Algebra and Geometry", посвященная 65-летию А. Г. Хованского, 4–9 июня 2012, Москва, Высшая школа экономики, Независимый Московский Университет,

— Китайско-Российская конференция по теории чисел, 8–12 октября 2012, Москва, МИАН,

— Симпозиум по арифметической геометрии, 19–21 октября 2012, Япония, Fukuoka, Kyushu University,

— Четвертая международная конференция "Zeta functions", 19–23 ноября 2012, Москва, Независимый Московский Университет,

— Международная конференция "The Langlands program and arithmetic", 10–14 июня 2013, Санкт-Петербург, Международный математический институт им. Л. Эйлера.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 8 работах автора, список которых приведен к конце автореферата.

В совместных работах [4], [6] и [7] диссертантом был тщательно разработан и последовательно применен адекватный язык категорий C_2 и C_2^{ar} для описания обобщения гармонического анализа с классического одномерного на новый двумерный случай.

Совместная работа [5] основана на более раннем препринте [19] диссертанта. В этом препринте двумерный ручной символ (без знака) был получен как обобщенный коммутатор в категорном центральном расширении, но вместо группоида Пикара градуированных одномерных векторных просранств использовался группоид Пикара неградуированных одномерных векторных пространств. В этом же препринте из этой конструкции были выведены законы взаимности для двумерных ручных символов с точностью до знака.

Отметим также, что работа [5] получила свое развитие в следующих недавних препринтах диссертанта (эти препринты не вошли в текст диссертации). В препринте [20] описанные выше категорные центральные расширения были применены к определению и получению законов взаимности для двумерного символа Конту-Каррере. В препринте [21] категорные центральные расширения были применены к получению некоммутативных законов взаимности в случае ручного ветвления для гипотетического двумерного соответствия Ленглендса, описанного выше.

---

[19] Denis Osipov, *To the multidimensional tame symbol*, Preprints aus dem Institut für Mathematik, 13 (Mathematik-Preprints), ISSN: 0863-0976, Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät II der Humboldt-Universität zu Berlin, 2003, 27 стр., доступна на сайте: http://edoc.hu-berlin.de/docviews/abstract.php?lang=ger&id=26204

[20] Denis Osipov, Xinwen Zhu, *Two-dimensional Contou-Carrère symbol and reciprocity laws*, электронный препринт (2013), arXiv:1305.6032, 52 стр., доступна на сайте: http://arxiv.org/abs/1305.6032

[21] D. V. Osipov, *Noncommutative reciprocity laws on algebraic surfaces: a case of tame ramification*, электронный препринт (2013), arXiv:1307.1995, 14 стр., доступна на сайте http://arxiv.org/abs/1307.1995, принята к печати в *Матем. сб.* (2014).

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, 4-х глав, разбитых на параграфы, и списка литературы.

Содержание работы

Во введении приводится краткий обзор ранее известных результатов и результатов диссертации.

В первой главе определяются и исследуются категории C_n, C_n^{fin}, а также категории C_0^{ar} и C_1^{ar}.

В § 1.1 мы вводим категории C_n. В § 1.3 мы определяем категории C_n^{fin}. Подобные категории были введены также в работе [22] и в работе [8]. (См. также совсем недавнюю статью [23] про сравнение этих двух подходов.) Наша конструкция категорий C_n и C_n^{fin} тесно связана с итерированным функтором $\underset{\longleftrightarrow}{\lim}$, введённым А. А. Бейлинсоном в приложении к [22]. Главное отличие состоит в том, что мы рассматриваем непополненную версию $\underset{\longleftrightarrow}{\lim}$, то есть фильтрованные пространства, но с морфизмами, индуцированными из $\underset{\longleftrightarrow}{\lim}$.

Приведем определение категории C_n^{fin}.

Определение 9. *Скажем что (I, F, V) — фильтрованная абелева группа, если выполнено: 1) V — абелева группа; 2) I — такое частично упорядоченное множество, что для всех $i, j \in I$ существуют такие $k, l \in I$, что $k \le i \le l$ и $k \le j \le l$; 3) F — такая функция на I со значениями из множества подгрупп в V, что если $i \le j$ любые элементы из I, то $F(i) \subset F(j)$; 4) $\bigcap\limits_{i \in I} F(i) = 0$ и $\bigcup\limits_{i \in I} F(i) = V$.*

Определение 10. *Скажем, что фильтрованная абелева группа (I_1, F_1, V) доминирует другую фильтрованную абелеву группу (I_2, F_2, V), если имеется такая сохраняющая порядок функция $\phi : I_2 \to I_1$ с условиями: 1) для любого $i \in I_2$ имеем $F_1(\phi(i)) = F_2(i)$; 2) для любого $j \in I_1$ tсуществуют такие $i_1, i_2 \in I_2$, что $\phi(i_1) \le j \le \phi(i_2)$.*

---

[22] A. A. Beilinson, “How to glue perverse sheaves”, *K-theory, arithmetic and geometry* (Moscow University, 1984–86), Lecture Notes in Math., vol. 1289, Springer-Verlag, Berlin 1987, pp. 42-51.

[23] Luigi Previdi, “Locally compact objects in exact categories”, *Int. J. Math.*, **22** :12 (2011), pp. 1787-1821.

Определение 11. *Категория* C_0^{fin} *есть категория конечных абелевых групп с гомоморфизмами групп в качестве морфизмов. Тройка из* C_0^{fin}

$$0 \longrightarrow V_0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_2 \longrightarrow 0$$

допустима, если она является точной тройкой абелевых групп.

Обпределим теперь по индукции объекты категории C_n^{fin}. Предположим, что уже определены объекты категории C_{n-1}^{fin} и понятие допустимой тройки в ней.

Определение 12. *Объекты категории* C_n^{fin}*, то есть* $\mathrm{Ob}(C_n^{\mathrm{fin}})$ *— это фильтрованные абелевы группы* (I, F, V) *со следующими дополнительными структурами: 1) для каждых* $i \leq j \in I$ *на абелевой группе* $F(j)/F(i)$ *задана структура* $E_{i,j} \in \mathrm{Ob}(C_{n-1}^{\mathrm{fin}})$*; 2) для всех* $i \leq j \leq k \in I$

$$0 \longrightarrow E_{i,j} \longrightarrow E_{i,k} \longrightarrow E_{j,k} \longrightarrow 0$$

является допустимой тройкой из C_{n-1}^{fin}.

Пусть $E_1 = (I_1, F_1, V_1)$, $E_2 = (I_2, F_2, V_2)$ *и* $E_3 = (I_3, F_3, V_3)$ *принадлежат* $\mathrm{Ob}(C_n^{\mathrm{fin}})$*. Тогда скажем, что*

$$0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_2 \longrightarrow E_3 \longrightarrow 0$$

допустимая тройка из C_n^{fin}*, если выполнены следующие условия:*

1) $$0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow V_2 \longrightarrow V_3 \longrightarrow 0$$

является точной тройкой абелевых групп; 2) фильтрация (I_1, F_1, V_1) *доминирует фильтрацию* (I_2, F_1', V_1)*, где* $F_1'(i) = F_2(i) \cap V_1$ *для всех* $i \in I_2$*; 3) фильтрация* (I_3, F_3, V_3) *доминирует фильтрацию* (I_2, F_3', V_3)*, где* $F_3'(i) = F_2(i)/F_2(i) \cap V_1$*; 4) для всех* $i \leq j \in I_2$ *тройка*

$$0 \longrightarrow \frac{F_1'(j)}{F_1'(i)} \longrightarrow \frac{F_2(j)}{F_2(i)} \longrightarrow \frac{F_3'(j)}{F_3'(i)} \longrightarrow 0$$

является допустимой тройкой из C_{n-1}^{fin}.

Определим теперь по индукции морфизмы в категории C_n^{fin}. Предположим, что уже определены морфизмы в категории C_{n-1}^{fin}.

Определение 13. *Пусть* $E_1 = (I_1, F_1, V_1)$ *и* $E_2 = (I_2, F_2, V_2)$ *принадлежат* $\mathrm{Ob}(C_n^{\mathrm{fin}})$*. Тогда группа* $\mathrm{Mor}_{C_n^{\mathrm{fin}}}(E_1, E_2)$ *состоит из таких элементов* $A \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$*, что выполняются следующие условия: 1) для* *каждого $i \in I_1$ существует такой $j \in I_2$, что $A(F_1(i)) \subset F_2(j)$; 2) для каждого $j \in I_2$ существует такой $i \in I_1$, что $A(F_1(i)) \subset F_2(j)$; 3) для всех таких $i_1 \le i_2 \in I_1$ и $j_1 \le j_2 \in I_2$, что $A(F_1(i_1)) \subset F_2(j_1)$ и $A(F_1(i_2)) \subset F_2(j_2)$ индуцированное отображение абелевых групп $\bar{A} : \frac{F_1(i_2)}{F_1(i_1)} \to \frac{F_2(j_2)}{F_2(j_1)}$ принадлежит группе $\mathrm{Mor}_{C^{\mathrm{fin}}_{n-1}}(\frac{F_1(i_2)}{F_1(i_1)}, \frac{F_2(j_2)}{F_2(j_1)})$.*

Отметим, что категория C_n является полной подкатегорией в категории C^{fin}_n. Более точно, объект (I, F, V) категории C^{fin}_n является объектом категории C_n над фиксированным полем k, если группа V является векторным пространством над полем k, все фильтрации, возникающие в определениях, являются фильтрациями векторными подпространтсвами над полем k, и вместо конечных групп в категории C^{fin}_0 надо рассматривать конечномерные векторные пространства над полем k.

Теорема 1. *Пусть V будет нётерова n-мерная схема конечного типа над полем k, множество $K \subset S(V)^{red}_n$, и $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на схеме V. Тогда пространство аделей $\mathbb{A}(K, \mathcal{F})$ обладает структурой C_n-пространства.*

В примере 1 мы объясняем, что если заменить V на схему конечного типа над $\mathbb{Z}$, то, аналогично, группу $\mathbb{A}(K, \mathcal{F})$ можно наделить сруктурой объекта категории C^{fin}_n. В частности, если множество K состоит из одного элемента, то получившееся n-мерное локальное поле $\mathbb{A}(K, \mathcal{F})$ наделено структурой объекта категории C^{fin}_n. Если множество K совпадает с множеством $S(V)^{red}_n$, то получившееся все адельное пространство $\mathbb{A}_V$ будет тоже наделено сруктурой объекта категории C^{fin}_n.

В § 1.3.2 мы определяем и изучаем категории C^{ar}_0 и C^{ar}_1. В определении 14 мы определяем категорию C^{ar}_0 как полную подкатегорию категории коммутативных конечномерных гладких вещественных групп Ли, так что объекты выделяются условием конечнопорожденности группы связных компонент.

В определениях 16 и 17 мы определяем категорию C^{ar}_1. Определение этой категории подобно определениям 9–13, данным выше, но на начальном шаге индукции (при $n = 0$) мы вместо объектов категории C^{fin}_0 берем объекты категории C^{ar}_0, а также требуем, что факторы фильтрации при очень больших и при очень маленьких индексах были бы конечными абелевыми группами. Категория C^{fin}_1 является полной покатегорией категории C^{ar}_1.

В предложениях 7 и 8 мы изучаем функтор Φ между категорией C_1^{ar} и категорией Loc локально-компактных абелевых групп. В частности, в предложении 7 мы доказываем, что функтор Φ задает эквивалентность между полной подкатегорией $C_{1,compl}^{\mathrm{ar}}$ категории C_1^{ar}, состоящей из "полных" объектов категории C_1^{ar}, и полной подкатегории Loc^{ar} категории Loc, состоящей из "арифметических" объектов.

Во второй главе мы строим гармонический анализ внутри категории C_2^{ar}. В § 2.1 для любого объекта E из категории C_1^{ar} мы строим пространство функций $\mathcal{S}(E)$ (как двойной индуктивный предел) и пространство распределений $\mathcal{S}'(E)$ (как двойной проективный предел). Если E — это полный объект, то эти конструкции совпадают с конструкциями, данными Ф. Брюа в работе [12], для определения пространств функций и распределений на локально-компактных абелевых группах. Мы переписываем на языке категорий C_1^{ar} (то есть на языке некоторых фильтрованных пространств) элементы (классического) гармонического анализа для локально-компактных абелевых групп: существование прямых и обратных образов, преобразование Фурье, формулу Пуассона.

В § 2.2 (определения 22, 23 и 24) мы определяем категории C_2^{ar}. Эти категории определяются подобно определениям 9, 10, 11, 12, 13 (см. выше), но со следующим отличием: это фильтрованные абелевы группы, но факторы фильтрации должны иметь струтуру объекта из категории C_1^{ar}, и последовательные фаторы должны образовывать допустимые тройки из категории C_1^{ar}. Важным также является определение, в результате, допустимой тройки из категории C_2^{ar}.

В примере 11 мы вводим понятие пространства аделей $\mathbb{A}_X^{\mathrm{ar}}$ арифметической поверхности X. Кольцо $\mathbb{A}_X^{\mathrm{ar}}$ учитывает "слои" схемы X над архимедовыми точками базы. Мы доказываем, что пространство $\mathbb{A}_X^{\mathrm{ar}}$ наделено естественной структурой объекта из категории C_2^{ar}.

Пусть $E = (I, F, V) \in \mathrm{Ob}(C_2^{\mathrm{ar}})$. Для любых $i, j \in I$ в § 2.3 мы определим одномерное $\mathbb{C}$-векторное пространство виртуальных мер

$$\mu(F(i) \mid F(j)) \overset{\mathrm{def}}{=} \varinjlim_{\substack{l \in I \\ l \le i, l \le j}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mu(F(i)/F(l)) \, , \, \mu(F(j)/F(l))),$$

где $\mu(G)$ — одномерное пространтсво $\mathbb{C}$-значных мер Хаара для любого $G \in \mathrm{Ob}(C_1^{\mathrm{ar}})$. В предложении 18 мы строим канонический изоморфизм (удовлетворяющий дальнейшим условиям ассоциативности) между одномерными $\mathbb{C}$-векторными пространствами $\mu(F(i) \mid F(l))$ и $\mu(F(i) \mid F(j)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(j) \mid F(l))$ для любых $i, j, l \in I$. Зафиксируем теперь некоторый элемент $o \in I$. В § 2.4 мы определяем основные пространства (аналоги пространств функций и распределений):

$$\mathcal{S}_{F(o)}(E) = \lim_{\substack{\longleftarrow \\ p \in I}} \lim_{\substack{\longleftarrow \\ q \le p}} \mathcal{S}(F(p)/F(q)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(q) \mid F(o)) \quad \text{и}$$

$$\mathcal{S}'_{F(o)}(E) = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ p \in I}} \lim_{\substack{\longrightarrow \\ q \le p}} \mathcal{S}'(F(p)/F(q)) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(o) \mid F(q)).$$

Отметим, что имеется следующее невырожденное естественное билинейное спаривание: $\mathcal{S}_{F(o)}(E) \times \mathcal{S}'_{F(o)}(E) \to \mathbb{C}$. Кроме того, для любого элемента $o_1 \in I$ имеется канонический изоморфизм между $\mathbb{C}$-векторными пространствами $\mathcal{S}_{F(o_1)}(E)$ и $\mathcal{S}_{F(o)}(E) \otimes_{\mathbb{C}} \mu(F(o) \mid F(o_1))$ (и двойственно для $\mathcal{S}'_{F(o_1)}(E)$).

В § 2.5 для произвольного $E = (I, F, V) \in \mathrm{Ob}(C_2^{\mathrm{ar}})$, используя ранее определенное преобразование Фурье на пространствах $\mathcal{S}(G)$ и $\mathcal{S}'(G)$ (где $G \in \mathrm{Ob}(C_1^{\mathrm{ar}})$), мы определяем (двумерное) преобразование Фурье (при помощи двойных проективных или индуктивных пределов) $\mathbf{F} : \mathcal{S}_{F(o)}(E) \to \mathcal{S}_{F^0(o)}(\check{E})$, где $\check{E} = (I^0, F^0, \check{V})$ – двойственный к E объект из C_2^{ar} (и аналогично, определяем сопряженное к нему преобразование Фурье из $\mathcal{S}'_{F(o)}(E)$ в $\mathcal{S}'_{F^0(o)}(\check{E})$).

Далее, в § 2.5 и § 2.6 мы изучаем свойства построенного двумерного преобразования Фурье. В частности, в § 2.6 мы строим центральное расширение некоторой подгруппы группы $\mathrm{Aut}_{C_2^{\mathrm{ar}}}(E)$ группой $\mathbb{C}^*$. Построенное центральное расширение играет важную роль во всей теории, так как (в отличие от классического случая, или случая $G \in \mathrm{Ob}(C_1^{\mathrm{ar}})$, где группа $\mathrm{Aut}_{C_1^{\mathrm{ar}}}(G)$ естественно действует на пространствах $\mathcal{S}(G)$ и $\mathcal{S}'(G)$) на пространствах $\mathcal{S}_{F(o)}(E)$ и $\mathcal{S}'_{F(o)}(E)$ естественно действует лишь центральное расширение, а не сама группа $\mathrm{Aut}_{C_2^{\mathrm{ar}}}(E)$ (или ее общая подгруппа).

В § 2.7 и § 2.8 мы строим и исследуем морфизмы прямых образов, действующие на пространствах $\mathcal{S}_{F(o)}(E)$ и $\mathcal{S}'_{F(o)}(E)$ (при допустимых мономорфизмах или допустимых эпиморфизмах $E \to E'$ из категории C_2^{ar}). Возникает набо условий на ядра и коядра морфизмов $E \to E'$, когда морфизмы прямого образа определены. Эти условия выражаются в ограничениях на тип объекта из категории C_2^{ar}: c-объект (когда фильтрация ограничена сверху), d-объект (когда фильтрация ограничена снизу), cf-объект (когда фильтрация с компактными факторами), df-объект (когда фильтрация с дискретными факторами), см. предложения 21, 22, 23, 24. В § 2.8 мы рассматриваем правила замены базы и правила композиции отображений, связанные с морфизмами прямого и обратного образа.

В § 2.9 мы получаем коммутативные диаграммы, связывающие прямые и обратные образы с (двумерным) преобразованием Фурье, см. предложение 33.

В § 2.10 мы выводим из предшествующего материала (двумерные) формулы Пуассона. Отметим, что в отличие от классического случая (или случая C_1^{ar}-категорий) мы получаем формулы Пуассона двух различных типов. Пусть

$$0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_2 \longrightarrow E_3 \longrightarrow 0$$

допустимая тройка из категории C_2^{ar}, так что E_i $(1 \le i \le 3)$ — полный объект из категории C_2^{ar}.

Если мы предположим, что E_1 — c-объект, а E_3 — d-объект, то существует характеристический элемент $\delta_{E_1,\mu\otimes\nu} \in \mathcal{S}'_{F_2(o)}(E_2)$ (см. § 2.10.1).

Теорема 2 *(Формула Пуассона I). Пусть E_1 — c-объект. Пусть E_3 — d-объект. Пусть элемент $o \in I_2$. Тогда для любых элементов $\mu \in \mu(F_1(\varepsilon(o)) \mid V_1)$, $\nu \in \mu(F_3(\gamma(o)) \mid \{0\})$ выполнено $\mathbf{F}(\delta_{E_1,\mu\otimes\nu}) = \delta_{\check{E}_3,\nu\otimes\mu}$.*

Если мы предположим, что E_1 — cf-объект, и E_3 — df-объект, то существует характеристический элемент $\delta_{E_1} \in \mathcal{S}_{F_2(o)}(E_2)$ (см. § 2.10.2).

Теорема 3 *(Формула Пуассона II). Пусть E_1 — cf-объект. Пусть E_3 — df-объект. Пусть элемент $o \in I_2$. Тогда выполнено $\mathbf{F}(\delta_{E_1}) = \delta_{\check{E}_3}$.*

В § 2.11 мы вычисляем некоторые фактор-группы группы аделей $\mathbb{A}_X$ двумерной схемы X. В частности, мы доказываем компактность группы $\mathbb{A}_X/(\mathbb{A}_{X,01} + \mathbb{A}_{X,02})$, если X — гладкая проективная поверхность над конечным полем, см. теоремы 4 и 5. Это утверждение обобщает хорошо известное утверждение про компактность факторгруппы $\mathbb{A}_C/k(C)$ в случае проективной кривой C над конечным полем k. Мы вычисляем также в § 2.11.3 некоторый пример для арифметической поверхности. Подобные вычисления важны для правильного определения адельного комплекса (или адельных подгрупп) в случае арифметической поверхности, см. недавний препринт [24] , основанный на работах [2] и [6].

В третьей главе мы рассматриваем центральное расширение группы, действующей на пространстве аделей поверхности (или на двумерном локальном поле) и, применяя результаты про это центральное расширение, а также результаты о двумерном гармоническом анализе из второй главы, выводим теорему Римана-Роха на поверхности над конечным полем (без формулы Нетера).

В § 3.1 мы явно строим и изучаем центральное расширение

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \widehat{GL}_W \longrightarrow GL(L/k) \longrightarrow 1,$$

где $L = k'((t))((u))$ — двумерное локальное поле, и $k' \supset k$ — конечное расширение. Группа $GL(L/k)$ действует на двумерном локальном поле и содержит как подгруппу группу L^*. Группа $GL(L/k)$ явно описывается в § 3.1.2, она совпадает с группой k-линейных автоморфизмов пространства L как C_2-пространства над полем k (см. также главу 1). Подпространство $W \subset L$ можно выбрать совпадающим с $k'((t))[[u]]$. Центральное расширение $\widehat{GL}_W$ строится в § 3.1.3 при помощи целочисленных функций: теорий размерности, введенных М. М. Капрановым в работе [13]. Отметим, что если $k = \mathbb{F}_q$ — конечное поле, то при отображении $\mathbb{Z} \ni a \mapsto q^a \in \mathbb{C}^*$ центральное расширение $\widehat{GL}_W$ переходит в центральное расширение, построенном ранее в § 2.6 при помощи $\mathbb{C}^*$-торсоров ненулевых виртуальных мер Хаара.

Определим отображение $\nu_L(\cdot,\cdot) : L^* \times L^* \to K_2(L) \xrightarrow{\partial} k'((t))^* \xrightarrow{\nu} \mathbb{Z}$ (то есть как композицию граничных отображений в K-теории Милнора). Пусть $< \cdot, \cdot > \in \mathbb{Z}$ — коммутатор подъема двух коммутирующих элементов из группы $GL(L/k)$ в группу $\widehat{GL}_W$ (это отображение бимультипликативно и не зависит от выбора подъемов).

Теорема 6 *Для любых элементов $f, g \in L^*$ верно*

$$< f, g >_L = -[k' : k] \cdot \nu_L(f, g).$$

В § 3.2 мы получаем новое доказательство теоремы Римана-Роха на гладкой алгебраической поверхности X, определенной над конечным

---

[24] K. Sugahara, L. Weng, *Arithmetic cohomology groups*, препринт (2013), доступна на сайте: http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/ weng/writings.html

полем k. В § 3.2.2 мы рассматриваем самодвойственность кольца аделей $\mathbb{A}_X$ как C_2-пространства. Эта самодвойственность задается суммой двумерных вычетов. В § 3.2.3 и § 3.2.4 мы вычисляем спаривания некоторых характеристических элементов, построенных по подпространствам кольца аделей $\mathbb{A}_X$. Эти подпространства зависят от выбора дивизора на поверхности X. Применяя формулу Пуассона I и формулу Пуассона II, полученные в главе 2, к спариваниям характеристических элементов, а также используя сопряженность двумерных преобразований Фурье друг другу, мы получаем явные соотношения на Эйлерову характеристику и размерности когомологий обратимого пучка, построенного по дивизору на X. В § 3.2.5 мы связываем спаривание характеристических элементов с коммутатором подъема коммутирующих элементов в центральном расширении, рассмотренном ранее в § 2.6 и в § 3.1. Применяя теорему 6, мы сводим вычисление этого коммутатора к сумме выражений $\nu_L(\cdot, \cdot)$ (с кратностями) по конечному набору двумерных локальных полей L. (Более точно, мы получаем, что коммутатор равен q в степени описанная выше сумма, где q — количество элементов в основном поле k.) С другой стороны, А. Н. Паршиным в работе [25] было получено выражение для индекса пересечения дивизоров на алгебраической поверхности при помощи сумм выражений $\nu_L(\cdot, \cdot)$. Все вышесказанное ведет к новому доказательству теоремы Римана-Роха на поверхности X в следующей форме. (Мы используем обозначения: $\mathrm{Div}(X)$ — группа дивизоров на X, и $h^i(E) = \dim_k H^i(X, \mathcal{O}_X(E))$ для любого $E \in \mathrm{Div}(X)$.)

Теорема 9 *Для любых* $C \in \mathrm{Div}(X)$ *и* $\omega \in \Omega^2_{k(X)}$, $\omega \neq 0$ *выполнено*

$$h^0(C) - h^1(C) + h^0((\omega) - C) = h^0(0) - h^1(0) + h^0((\omega)) - \tfrac{1}{2}\,(C, (\omega) - C).$$

Отметим, что перенос данного метода с поверхностей над конечными полями на арифметические поверхности позволил бы получить теорему Римана-Роха нового типа, отличную от теоремы Фалтинга в геометрии Аракелова.

В четвертой главе рассматриваются гипотетическое двумерное соответствие Ленглендса и смежные вопросы, относящиеся к этому соответствию.

В § 4.1 мы рассматриваем некоторые вопросы, связанные с неразветв-

---

[25] A. N. Parshin, “Chern classes, adeles and L-functions”, *J. reine angew Math.*, **341** (1983), 174-192.

ленным случаем двумерного соответствия Ленглендса. В § 4.1.2 напоминается абелев случай двумерного локального соответствия Ленглендса. Мы устанавливаем здесь связь между одномерными 2-представлениями (то есть категорными представлениями) группы и центральными расширениями этой же группы. Мы также вычисляем вторые когомологии группы $GL_n(K)$ для бесконечного поля K в следующем предложении.

Предложение 49 Пусть A — абелева группа, K — бесконечное поле. Тогда выполнено $H^2(GL_2(K), A) = H^2(K^*, A) \oplus \mathrm{Hom}(K_2(K), A)$.

В § 4.1.3 рассматриваются центральные расширения, построенные по C_2-пространствам. (Аналогичные центральные расширения рассматривались выше в § 2.6 и § 3.1.) Мы строим центральные расширения $\widetilde{GL_n(\mathbb{A}_\Delta)}_{\mathbb{R}^*_+}$ и $\widehat{GL_n(\mathbb{A}_\Delta)}_{\mathbb{R}^*_+}$ группы $GL_n(\mathbb{A}_\Delta)$ при помощи группы $\mathbb{R}^*_+$, где $\mathbb{A}_\Delta$ — подкольцо в кольце аделей арифметической поверхности или поверхности над конечным полем. Далее построенные центральные расширения изучаются для случая, когда $\mathbb{A}_\Delta$ есть конечное произведение двумерных локальных полей. В предложении 51 мы устанавливаем связь этих центральных расширений с абелевым двумерным неразветвленным локальным соответствием Ленглендса. Мы также строим и изучаем некоторые центральные расширения групп $GL_n(\mathbb{R}((t)))$ и $GL_n(\mathbb{C}((t)))$. Эти центральные расширения используются для построения центральных расширений $\widehat{GL_n(\mathbb{A}^{\mathrm{ar}}_X)}_{\mathbb{R}^*_+}$ и $\widetilde{GL_n(\mathbb{A}^{\mathrm{ar}}_X)}_{\mathbb{R}^*_+}$ группы $GL_n(\mathbb{A}^{\mathrm{ar}}_X)$, где $\mathbb{A}^{\mathrm{ar}}_X$ — арифметическое кольцо аделей арифметической поверхности X (то есть, кольцо аделей, учитывающее архимедовы слои). Мы доказываем следующие некоммутаивные законы взаимности. Пусть для любой точки $x \in X$ кольцо K_x есть локализация кольца $\widehat{\mathcal{O}}_x$ по мультипликативной системе $\mathcal{O}_x \setminus 0$. Пусть для любой целой одномерной подсхемы C на X поле K_C есть пополнение поля рациональных функций K_X на норамльной двумерной схеме X по дискретному нормированию, задаваемому подсхемой C.

Теорема 10 *Пусть X — целая нормальная двумерная схема конечного типа над $\mathbb{Z}$, которая или проективная поверхность над $\mathbb{F}_q$ или арифметическая поверхность. Пусть $\mathbb{A}$ будет кольцом $\mathbb{A}_X$ (в случае поверхности над полем $\mathbb{F}_q$) или кольцом $\mathbb{A}^{\mathrm{ar}}_X$ (в случае арифметической поверхности). Тогда выполнены следующие некоммутативные законы взаимности. Для любого $n \geq 1$ центральное расширение $\widehat{GL_n(\mathbb{A})}_{\mathbb{R}^*_+}$*

группы $GL_n(A)$ *группой* $\mathbb{R}^*_+$ *канонически расщепляется над следующими подгруппами:* $GL_n(K_X)$, $GL_n(K_x)$, $GL_n(K_C)$, *где* x *- любая замкнутая точка на* X, *и* C *— любая целая одномерная подсхема на схеме* X.

В § 4.1.4 рассматривается неразветвленное соответствие Ленглендса для двумерных локальных полей. Сначала мы напоминаем классическую конструкция этого соответствия для одномерного локального поля. Далее мы напоминаем известные факты, нужные нам далее, про действие группы на k-линейной категории, где k — поле. Мы строим категорный аналог неразветвленных представлений основной серии для группы $GL_{2n}(K)$, где K — двумерное локальное поле. Здесь же определяется (см. определение 44) понятие гладкого действия группы $GL_l(K)$ на k-линейной абелевой категории (которую мы называем обобщенным 2-векторным пространством), так что построенный категорный аналог представлений основной серии будет гладким (в этом случае $k = \mathbb{C}$). Это и другие свойства этих представлений доказываются в теореме 11. Отметим, что для построения категорных представлений основной серии для группы $GL_{2n}(K)$ используется аналог индуцированного представления (для категорий), а также центральное расширение группы $GL_2(K)$, построенное в § 4.1.3 и связанное с неразветвленной теорией полей классов для поля K. Далее мы обсуждаем некоторую гипотезу о связи гладкого сферического действия группы $GL_{2n}(K)$ на произвольной $\mathbb{C}$-линейной абелевой категории и категорного представления основной серии группы $GL_{2n}(K)$, построенного выше.

В § 4.2 мы исследуем категорные центральные расширения и применяем категорные центральные расширения к законам взаимности для двумерного ручного символа на алгебраической поверхности. В § 4.2.2 мы изучаем категорные центральные расширения:

$$1 \longrightarrow \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow G \longrightarrow 1,$$

где $\mathcal{P}$ — группоид Пикара, $\mathcal{L}$ — групоподобная моноидальная категория, и G — группа, рассматриваемая как дискретный моноидальный группоид. "Отображения" в этой тройке должны быть моноидальными функторами. На тройках попарно коммутирующих элементов из группы G мы определяем аналог коммутатора подъема элеметов в $\mathcal{L}$: отображение $C_3^{\mathcal{L}}(\cdot, \cdot, \cdot)$ со значением в абелевой группе $\pi_1(\mathcal{P}) = \mathrm{Aut}_{\mathcal{P}}(e)$ (где e —

единичный объект в группоиде $\mathcal{P}$). Мы получаем различные свойства построенного отображения $C_3^{\mathcal{L}}(\cdot,\cdot,\cdot)$, главное из которых состоит в том, что $C_3^{\mathcal{L}}(\cdot,\cdot,\cdot)$ — тримультипликативное антисимметрическое отображение. В § 4.2.3 и в § 4.2.4 мы применяем полученный абстрактный формализм к группам, действующим на C_2-просранствах (или к их полной версии, так называемым пространствам Тейта). При помощи детерминантных теорий Капранова из работы ^{13} мы строим категорное центральное расширение $\mathcal{D}et$ группы автоморфизмов данного C_2-пространства над полем k. Группоид Пикара $\mathcal{P}$ равен при этом группоиду Пикара $\mathcal{P}ic^{\mathbb{Z}}$ градуированных одномерных векторных пространств. Следовательно, $\pi_1(\mathcal{P}) = k^*$. Рассмотрим теперь двумерное локальное поле $\mathbb{K} = k'((t))((s))$ как C_2-пространство над полем k, где $k' \supset k$ — конечное расширение полей. Группа $\mathbb{K}^*$ действует на поле $\mathbb{K}$ умножениями. Это действие происходит при помощи автоморфизмов C_2-пространства. Напомним, что $\{\cdot,\cdot,\cdot\}_{\mathbb{K}}$ — двумерный ручной символ со значениями в k'^*. Получаем следующую основную теорему из § 4.2.

Теорема 12 *Для любых* $f, g, h \in \mathbb{K}^*$ *имеем*

$$C_3^{\mathcal{D}et}(f,g,h) = \mathrm{Nm}_{k'/k}\{f,g,h\}_{\mathbb{K}}.$$

В § 4.2.5 мы выводим из теоремы 12 и адельных комплексов длины 2 (связанных с точками или кривыми на алгебраических поверхностях) законы взаимности Паршина для двумерных ручных символов (см. теорему 13).

Работы автора по теме диссертации

1. Д. В. Осипов, “Центральные расширения и законы взаимности на алгебраических поверхностях”, *Матем. сб.*, **196**:10 (2005), 111–136.
2. Denis Osipov, “Adeles on n-dimensional schemes and categories C_n”, *Internat. J. Math.*, **18**:3 (2007), 269–279.
3. Denis V. Osipov, “n-dimensional local fields and adeles on n-dimensional schemes”, *Surveys in contemporary mathematics*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **347**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008, 131–164.

4. Д. В. Осипов, А. Н. Паршин, “Гармонический анализ на локальных полях и пространствах аделей. I”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **72**:5 (2008), 77–140.

5. Denis Osipov, Xinwen Zhu, “A categorical proof of the Parshin reciprocity laws on algebraic surfaces”, *Algebra & Number Theory*, **5**:3 (2011), 289–337.

6. Д. В. Осипов, А. Н. Паршин, “Гармонический анализ на локальных полях и пространствах аделей. II”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **75**:4 (2011), 91–164.

7. Д. В. Осипов, А. Н. Паршин, “Гармонический анализ и теорема Римана-Роха”, *Доклады Академии наук*, **441**:4 (2011), 444–448.

8. Д. В. Осипов, “Неразветвленное двумерное соответствие Легленд-са”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **77**:4 (2013), 73–102.